

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ИМ. Р.Р. МАВЛЮТОВА –  
ОБОСОБЛЕННОЕ СТРУКТУРНОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО  
НАУЧНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ УФИМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

*На правах рукописи*



ФОКЕЕВА НИНА ОЛЕГОВНА

**ФИЛЬТРАЦИЯ В ТРЕЩИНЕ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА  
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ СКВАЖИНЫ**

Специальность 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: Башмаков Р.А.  
кандидат физико-математических наук

Уфа – 2023

## Оглавление

Список условных обозначений.....	4
Введение.....	6
Глава 1. Обзор работ, посвящённых гидравлическому разрыву пласта и описанию фильтрации флюида.....	14
1.1 Развитие направления.....	14
1.2 Моделирование фильтрации жидкости в продуктивном пласте .....	24
1.3 Особенности технологического процесса ГРП.....	30
1.4 ГРП как геомеханический процесс и параметры трещин.....	34
1.5 Об оценке качества проведённого ГРП .....	39
Выводы по первой главе.....	43
Глава 2. Фильтрация флюида в трещине ГРП и пористой среде вблизи трещины .....	44
2.1 Постановка задачи и основные уравнения.....	44
2.2 Решение при резком изменении давления на постоянную величину ....	54
2.3 Случай кусочно-постоянного изменения давления скважины .....	56
2.4 Случай непрерывного изменения давления в скважине.....	62
Выводы по второй главе.....	68
Глава 3. Определение давления скважины по изменению расхода.....	69
3.1 Эволюция давления в призабойной зоне и в трещине ГРП при постоянном расходе скважины.....	70
3.2 Случай кусочно-постоянного изменения расхода скважины.....	72
3.3 Эволюция давления при непрерывном изменении расхода скважины..	78
3.4 Сопоставление с промысловыми данными .....	78
3.5 Проводимость трещины ГРП.....	87

3.6 О понятии «обратная задача» .....	90
Выводы по третьей главе .....	93
Глава 4. Влияние параметров системы на решение задачи .....	94
4.1 Влияние упругоёмкости трещины.....	94
4.2 Анализ влияния изменения параметров системы на решения .....	100
Заключение .....	104
Список литературы .....	105

## Список условных обозначений

ВСС – влияние ствола скважины;

ГДИС – гидродинамические исследования скважин;

ГРП – гидравлический разрыв пласта;

ГФХ – геолого-физическая характеристика;

КВД – кривая восстановления давления;

КПД – кривая падения давления;

Кпрод – коэффициент продуктивности;

МГРП – многостадийный гидроразрыв пласта;

ПЗП – призабойная зона пласта;

ПО – программное обеспечение;

ПССС – метод последовательной смены стационарных состояний;

Скин-эффект – безразмерная величина, характеризующая состояние призабойной зоны пласта;

ТриЗ – трудноизвлекаемые запасы;

ФЕС – фильтрационно-ёмкостные свойства.

### Параметры

$P_w$  – забойное давление скважины, Па;

$P_f$  – давление в трещине, Па;

$P_0$  – начальное давление, Па;

$P_p$  – пластовое давление, Па;

$t$  – время, с;

$x$  – направление по оси  $Ox$  по трещине;

$y$  – направление по оси  $OY$  в пласт, перпендикулярно траектории трещины;  
 $d_f$  – ширина трещины, м;  
 $h_f$  – высота трещины, м;  
 $l_f$  – полудлина трещины, м;  
 $k_f$  – проницаемость трещины, м<sup>2</sup>;  
 $k_p$  – проницаемость пласта, м<sup>2</sup>;  
 $m_f$  – пористость трещины, д. ед.;  
 $m_p$  – пористость среды, д. ед.;  
 $C$  – скорость звука флюида, м/с;  
 $\rho_f$  – плотность флюида, кг/м<sup>3</sup>;  
 $v_i$  – скорость движения флюида ( $i = f, p$ ) в трещине ГРП/пласте, м<sup>3</sup>/с;  
 $v_i$  – скорость движения флюида ( $i = f, p$ ) в трещине ГРП/пласте, м<sup>3</sup>/с;  
 $\mu$  – динамическая вязкость флюида, Па · с;  
 $\alpha_i$  – коэффициент пьезопроводности ( $i = f, p$ ) трещины ГРП/пласта, м<sup>2</sup>/с;  
 $q$  – расход жидкости на единицу высоты трещины, м<sup>2</sup>/с;  
 $Q$  – скорость движения флюида, м<sup>3</sup>/с;  
 $\Gamma$  – Гамма-функция;  
 $H$  – функция Хевисайда;  
 $V$  – объем флюида, м<sup>3</sup>;  
 $Zil, Gil$  – специальные функции;  
 $C_f$  – проводимость трещины, мД · м;  
 $C_{fd}$  – безразмерная проводимость.

## Введение

**Актуальность исследования.** Гидроразрыв пласта (ГРП) – один из важнейших методов интенсификации добычи углеводородов за счёт образования высокопроводящих трещин в пласте. Этот метод воздействия на пласт, способствующий повышению продуктивности скважин, позволяет резко и существенно увеличить как дебит добывающих, так и приёмистость нагнетательных скважин [44].

В настоящее время в связи с вовлечением в разработку трудноизвлекаемых запасов (ТРИЗ) метод гидравлического разрыва пласта не теряет своей актуальности и активно применяется по всему миру. Количество проведённых операций гидроразрыва в год исчисляется тысячами. В России происходит импортозамещение технологий и сервиса в нефтегазовой отрасли, за три года ожидается создание полностью отечественного флота ГРП [38], что ещё раз подтверждает востребованность данной технологии.

Множество работ посвящено теме гидравлического разрыва пласта, накопленный опыт его реализации позволяет совершенствовать технологию. Развиваются теоретические представления о гидроразрыве, многие задачи решаются с привлечением математических методов. На практике важной задачей является моделирование нестационарного процесса фильтрации жидкости в системе «трещина-пласт», в частности, моделирование динамики дебита, а также давления как в трещине ГРП, так и в самой скважине при переменном режиме её работы.

Одна из проблем состоит в том, что геометрические и фильтрационные параметры трещины, образующейся при ГРП, сложно спрогнозировать, а это ключевые факторы для правильной оценки эффективности и экономической целесообразности данной процедуры. Поэтому важен вопрос исследования параметров трещины ГРП как отклика пласта на проведённый гидроразрыв.

**Целью диссертационной работы** является установление закономерностей и получение аналитических выражений, описывающих процесс нестационарной фильтрации в трещине ГРП при переменных

режимах работы скважины с учётом перетока жидкости между трещиной и пластом на основе теоретической модели, и решение обратной задачи по определению проводимости трещины ГРП.

**Для достижения цели поставлены и решены следующие задачи:**

- определены аналитические решения интегро-дифференциального уравнения, описывающего распределение давления в вертикальной трещине ГРП при ступенчатом и непрерывном изменении забойного давления скважины;
- построены аналитические решения интегро-дифференциального уравнения, описывающего динамику давления в вертикальной трещине ГРП при ступенчатом и непрерывном изменении расхода жидкости скважины;
- получены формулы, позволяющие определять давление на забое при заданном переменном расходе жидкости скважины, а также вычислять расход скважины по заданному закону изменения забойного давления;
- решена обратная задача по определению проводимости трещины ГРП при известном расходе жидкости и динамике забойного давления;
- сопоставлены полученные результаты с промысловыми данными реальных скважин.

**Научная новизна работы.** Результаты диссертационной работы являются новыми. На основе теоретической модели выведены аналитические решения, описывающие фильтрацию флюида в трещине ГРП при различных режимах работы скважины. Выявлена закономерность между динамикой расхода жидкости и изменением давления на забое скважины и в трещине ГРП, которая позволяет более точно оценивать продуктивность скважины после ГРП и делать выводы об эффективности проведённой операции. Проведена верификация решений посредством сопоставления с промысловыми данными. Представлена формула для определения проводимости трещины ГРП на основе данных эксплуатации скважины после

проведения гидроразрыва и геолого-физических характеристик (ГФХ) продуктивных пластов.

**Обоснованность и достоверность** результатов работы основана на корректной физической и математической постановке задач; применении при их решении фундаментальных законов и постулатов механики сплошных сред и теории фильтрации; обусловлена достаточно хорошим согласованием с фактическими промысловыми данными и результатами других исследователей в данной области.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты проведенного исследования позволяют уточнить и расширить теоретические представления о фильтрации флюида в трещине ГРП. Получены аналитические решения, которые устанавливают взаимосвязь между изменяющимся расходом жидкости, а также давлением в скважине и трещине ГРП с учётом утечки жидкости в продуктивный пласт. С практической точки зрения особую ценность имеет возможность определения проводимости трещины ГРП на основе полученных решений. Результаты могут быть использованы для уточнения интерпретации гидродинамических исследований скважин (ГДИС) и при построении дизайна гидроразрыва пласта.

**Методы исследования.** Для установления научных результатов в диссертационной работе применены методы, используемые при решении задач механики сплошных сред. Вывод аналитических решений осуществлялся на основе уравнений математической физики. Расчёты реализованы с помощью специального программного пакета, а также посредством математического моделирования в среде Microsoft Visual Studio. Для проверки построенной модели применялся сравнительный анализ результатов моделирования с реальными промысловыми данными.

**Диссертация соответствует паспорту научной специальности 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы, а именно следующим пунктам:** п. 2 «Реологические законы поведения текучих однородных и многофазных сред при механических и других воздействиях»; п. 5 «Течения сжимаемых сред и



ударные волны»; п. 8 «Течение жидкостей и газов в пористых средах»; п. 16 «Тепломассоперенос в газах и жидкостях»; п. 19 «Точные, асимптотические, приближенные аналитические, численные и комбинированные методы исследования уравнений континуальных и кинетических моделей однородных и многофазных сред»; п. 20 «Разработка математических методов и моделей гидромеханики».

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на посвящённых данной тематике семинарах в Институте механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН. Кроме того, основные положения и результаты исследования были представлены на следующих конференциях:

- Международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Южный Урал, Якты-Куль, 13-17 марта 2023 г.;
- полуфинал Всероссийского инженерного конкурса 2022/23 (ВИК), *лауреат полуфинала*;
- Ежегодная межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е.В. Арменского, г. Москва, 27 февраля-7 марта 2023 г.;
- VIII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2022), г. Орёл, 25-26 ноября 2022 г.;
- Международная научно-практическая конференция имени Д.И. Менделеева, г. Тюмень, 24-26 ноября 2022 г., *диплом 3 степени*;
- XVI Всероссийская молодежная научная конференция Мавлютовские чтения, г. Уфа, 25-27 октября 2022 г., *диплом 2 степени*;
- XXIII Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (УМ-2022), г. Новосибирск, 24-28 октября 2022 г., *диплом победителя*;

- Российский нефтегазовый технический конгресс (РНТК), г. Москва, 11-13 октября 2022 г.;
- Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2022» (МНЧ-2022), г. Новосибирск, 3-7 октября 2022 г.;
- Всероссийская научно-практическая конференция, посвящённая памяти профессора Усманова Салавата Мударисовича «Обратные задачи и математические модели», г. Бирск, 16 сентября 2022 г.;
- Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (YSM-2022), г. Сочи, 4-14 сентября 2022 г.;
- Конкурс научных докладов молодых учёных ИМех УФИЦ РАН, г. Уфа, 25 апреля 2022 г., *диплом 1 степени*;
- XXII Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (УМ-2021), г. Новосибирск, 25-29 октября 2021 г.;
- Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа», г. Уфа, 6-9 октября 2021 г.;
- V Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы науки и образования в современном вузе», г. Стерлитамак, 16-18 сентября 2021 г.;
- IX Международная научная конференция «Современные проблемы математики и физики», посвящённая 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова, г. Стерлитамак, 12-15 сентября 2021 г.;
- 23-конференция по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа «Геомодель 2021», г. Геленджик, 6-10 сентября 2021 г., *доклад отмечен как лучший в секции*;
- Конкурс научных докладов молодых учёных ИМех УФИЦ РАН, г. Уфа, 17 июня 2021 г., *диплом 3 степени*;
- VII Российская конференция с международным участием «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения»,

посвящённая 80-летию академика РАН Р.И. Нигматулина, г. Уфа, 5-10 октября 2020 г.;

- IX Международная молодёжная научно-практическая конференция «Математическое моделирование процессов и систем», г. Стерлитамак, 30 октября-1 ноября 2019 г.

Представленные в диссертации исследования выполнялись при частичной поддержке гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

**Публикации.** Результаты по теме исследования представлены в 17 публикациях. В перечень научных изданий, индексируемых в международных базах данных Scopus и Web of Science, вошла статья [121] (квартиль Q1). В научных журналах перечня Russian Science Citation Index (RSCI) опубликовано 2 статьи [19, 21]. В РИНЦ входят 12 работ в сборниках трудов Международных и Всероссийских конференций [4, 20, 57, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 91], а также 2 статьи [73, 88] в научных журналах. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [2].

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- Аналитические решения интегро-дифференциального уравнения, описывающего динамику давления в трещине ГРП при изменяющемся забойном давлении скважины.
- Аналитические решения, отражающие реакцию давления в скважине и трещине ГРП при изменении дебита скважины, а также позволяющие определять расход жидкости по динамике забойного давления. Результаты получены как для дискретно, так и для непрерывно изменяющегося расхода.
- Решение обратной задачи по определению параметров трещины гидроразрыва на основе показателей эксплуатации скважины, таких как давление и дебит при различных режимах её работы, и получение явной формулы для расчёта проводимости трещины ГРП.

**Личный вклад автора.** Шагаповым Владиславом Шайхулагзамовичем была дана постановка задачи и предложены методы её решения. Вывод аналитического решения, реализация в специальных пакетах, анализ полученных результатов осуществлены совместно с научным руководителем. Сопоставление решений с промысловыми данными, программирование на языке C++, доклады на конференциях, презентации работы на конкурсах, оформление и подготовка части публикаций выполнены автором самостоятельно. Результаты совместных работ представлены с согласия всех авторов.

**Благодарность.** Автор выражает глубокую признательность и благодарность доктору физико-математических наук, профессору, члену-корреспонденту Академии наук Республики Башкортостан Шагапову Владиславу Шайхулагзамовичу за постановку задачи, ценные советы и внимание к работе; научному руководителю кандидату физико-математических наук Башмакову Рустэму Абдрауфовичу за мотивацию, участие, помощь и поддержку на всех этапах исследования; сотрудникам компании ООО «РН-БашНИПИнефть» Малову Александру Геннадьевичу, Лысенкову Дмитрию Евгеньевичу за содействие и помощь в организации рабочих поездок.

Автор разделяет горечь и невосполнимую утрату в связи со скоропостижной кончиной академика АН Республики Башкортостан, доктора физико-математических наук Шагапова Владислава Шайхулагзамовича, который внёс значительный вклад в развитие данной диссертационной работы. Он до последних минут своей жизни участвовал в научной работе, возглавлял актуальные исследования, был выдающимся специалистом в своей области. Владислав Шайхулагзамович активно развивал направление механики многофазных сред, оставил яркий след в отечественной и мировой науке.

Такая потеря стала неожиданной и невосполнимой утратой для всего научного сообщества. Больно и ответственно быть в числе его последних

учеников. В нашей памяти Владислав Шайхулагзамович останется добрым наставником, мудрым руководителем и замечательным человеком.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 128 наименований. Общий объём работы составляет 119 страниц, включая 54 рисунка и 4 таблицы.

*Во введении* раскрыта актуальность темы исследования; перечислены цель, задачи и выносимые на защиту положения; отмечены ключевые моменты работы, научная новизна, достоверность и обоснованность.

Обзор ключевых работ, посвящённых гидроразрыву пласта и фильтрации флюида в трещине ГРП, представлен в *первой главе*.

Во *второй главе* приводится постановка задачи и теоретическое исследование фильтрации в системе «скважина-трещина-пласт»; получены аналитические решения поставленной задачи; определена динамика давления в трещине ГРП и расхода жидкости на единицу высоты трещины при изменении забойного давления скважины.

*Третья глава* содержит исследование эволюции давления в скважине и трещине ГРП при изменении расхода, сопоставление результатов расчётов с промысловыми данными и анализ проводимости трещины.

Аспект влияния таких параметров системы, как ширина трещины, коэффициент упругоёмкости, пористость и проницаемость пласта, на решения представлен в *четвёртой главе*.

Выводы и основные результаты работы приведены в *заключении*.

# Глава 1. Обзор работ, посвящённых гидравлическому разрыву пласта и описанию фильтрации флюида

## 1.1 Развитие направления

В Российской империи ещё при Петре I зафиксированы документы, подтверждающие обнаружение нефти [55]. Если углубляться в источники, то можно найти и гораздо более ранние «следы нефти» в мировой истории, но такой значительный интерес она вызывает лишь в течение последнего столетия. Сейчас углеводородное сырьё является ценным стратегическим ресурсом, придающим стране политическую и экономическую независимость, основой её промышленного развития.

Официально зафиксировано, что первая операция гидроразрыва пласта проведена в 1947 году в карбонатных отложениях в штате Канзас и не имела положительного эффекта [44, 99, 112]. Одной из причин стало быстрое смыкание образовавшейся трещины. Затем в качестве расклинивающего материала стали использовать песок, и такой подход давал отличные результаты. Два года спустя метод ГРП получил промышленное распространение.

В Советском Союзе впервые гидроразрыв пласта провели в 1952 году, и по сей день данную технологию активно применяют на территории Российской Федерации [44, 99].

Основателями теории гидравлического разрыва нефтеносного пласта стали советские учёные С.А. Христианович, Ю.П. Желтов и Г.И. Баренблатт, оказавшие значительное влияние на развитие этого метода в мире [17, 32, 105]. Ими была предложена первая теоретическая модель распространения двумерной трещины, получившая всеобщее признание [15, 33, 35].

Считается, что есть две основополагающие теоретические двумерные модели распространения трещин гидроразрыва (рис. 1.1). Разница между ними в физической постановке задач. Модель, предложенная советским учёным

С.А. Христиановичем, подробно рассмотренная в работах Гиртсма – де Клерка (KGD – модель Христиановича, Гиртсма и де Клерк), описывает вертикальное поперечное сечение трещины, имеющее форму прямоугольника. В то время как вторая модель (PKN – модель Перкинс – Керн – Нордгрэн), представленная L.R. Kern и Т.К. Perkins [117], предполагает вертикальное сечение трещины в виде эллипса. Обе модели базируются на линейной теории трещин в упругом теле. KGD описывает распространение вертикальной трещины в горизонтальной плоскости, PKN – рост в вертикальном направлении. Есть отличия в поведении давления в трещине и применимости данных моделей. Заметим, в модели KGD предполагается, что длина трещины значительно меньше её высоты, поэтому обычно она используется для коротких трещин.

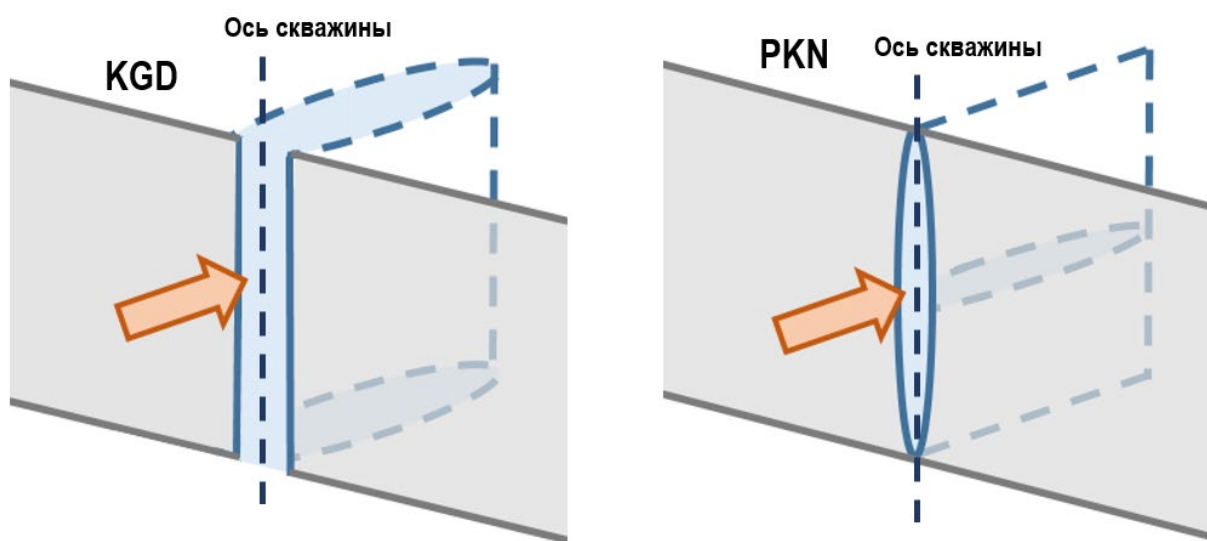


Рис. 1.1. Основные математические модели ГРП

Список базовых одномерных моделей можно дополнить радиальной (Radial) (рис. 1.2). Все три модели по-своему просты, они не могут точно спрогнозировать результаты реальных операций ГРП, но достаточны для описания течения жидкости, деформаций и переноса пропанта.



Рис. 1.2. Радиальный рост трещины из источника (синяя точка)

Став классической основой, модели KGD и PKN совершенствуются и уточняются по результатам их применения при решении практических задач. На сегодняшний день используется синтез KGD и PKN – это псевдотрёхмерная модель, способная описать рост трещины и течение жидкости в ней в двух взаимно перпендикулярных направлениях [44]. Во многих симуляторах ГРП реализуется именно такой подход, при котором трещина рассматривается как плоский объект. Следует отметить, что использование этих моделей даёт схожие результаты при описании распределения давления в окрестности трещины. Существуют и трёхмерные модели гидроразрыва пласта, но в связи с вычислительной трудоёмкостью они не настолько популярны на практике.

Задолго до проведения первого официального ГРП «отец русской авиации» Н.Е. Жуковский, основоположник гидро- и аэродинамики, разрабатывал теорию фильтрации и кинематику. Он вывел формулу, позволяющую определять поведение каждой частицы в движущемся потоке жидкости [51]. Интерес к теории фильтрации у Н.Е. Жуковского возник после ознакомления с трудами основателя гидравлической школы Н.Н. Павловского, учёного, исследовавшего гидромеханическую модель явления фильтрации. Его работы привели к выводу дифференциальных уравнений движения жидкости в пористой среде [63]. Именно академик



Н.Н. Павловский первым предложил использовать параметр Рейнольдса в качестве одного из критериев применимости закона фильтрации Дарси.

Одним из учеников Н.Е. Жуковского был советский учёный-механик Л.С. Лейбензон, создавший научную школу по нефтепромысловому механике и принимавший участие в проектировании нефтепроводов. Л.С. Лейбензон вывел уравнение неустановившейся фильтрации газа в недеформируемой пористой среде, которое названо в его честь. Для установившегося течения в подземной гидравлике ввёл функцию Лейбензона, изучал особенности работы газовых скважин, методы подсчёта запасов нефти и газа в пластах, а также проблемы вытеснения их водой. Он считается первым учёным, который поставил и разработал задачи теории фильтрации, представляющие интерес для нефтепромыслового дела, и признан создателем нефтяной подземной гидродинамики [50, 52, 53].

Примерно в тот же период теорию фильтрации изучал американский учёный М. Маскет [54]. Он рассматривал с физико-математической точки зрения движение однородной жидкости в пористой среде и приток жидкости к вертикальной трещине, используя методы теории функций комплексного переменного.

Билинейное течение впервые было описано в работах Н. Cinco-Ley [106, 107]. Он определял такое течение как два линейных потока, происходящих одновременно. Первый представляет собой линейный несжимаемый поток внутри трещины, а второй – линейный сжимаемый в пласте, перпендикулярный первому (рис. 1.3). Поведение давления для билинейного потока характеризуется как  $\Delta p \sim 1 / (h_f \sqrt{k_f d_f})$  и  $\Delta p \sim \sqrt[4]{t}$ , то есть изменение давления обратно пропорционально квадратному корню из проводимости трещины и прямо пропорционально корню четвертой степени от времени [107].

В работах Н. Cinco-Ley [108] и А.С. Gringarten [109] выделены различные периоды фильтрации по характеру изменения забойного давления, описаны дифференциальные уравнения, характеризующие фильтрацию

флюида в трещине ГРП и окружающем пласте. Как и многие другие учёные Н. Cinco-Leu подчёркивал, что предварительная достоверная информация о пласте необходима для правильной оценки параметров разрыва.

В призабойной зоне скважины с вертикальной трещиной ГРП выделяют четыре вида течения жидкости (рис. 1.3): линейный в трещине, билинейный, линейный в пласте и псевдорadiaльный [44, 107].

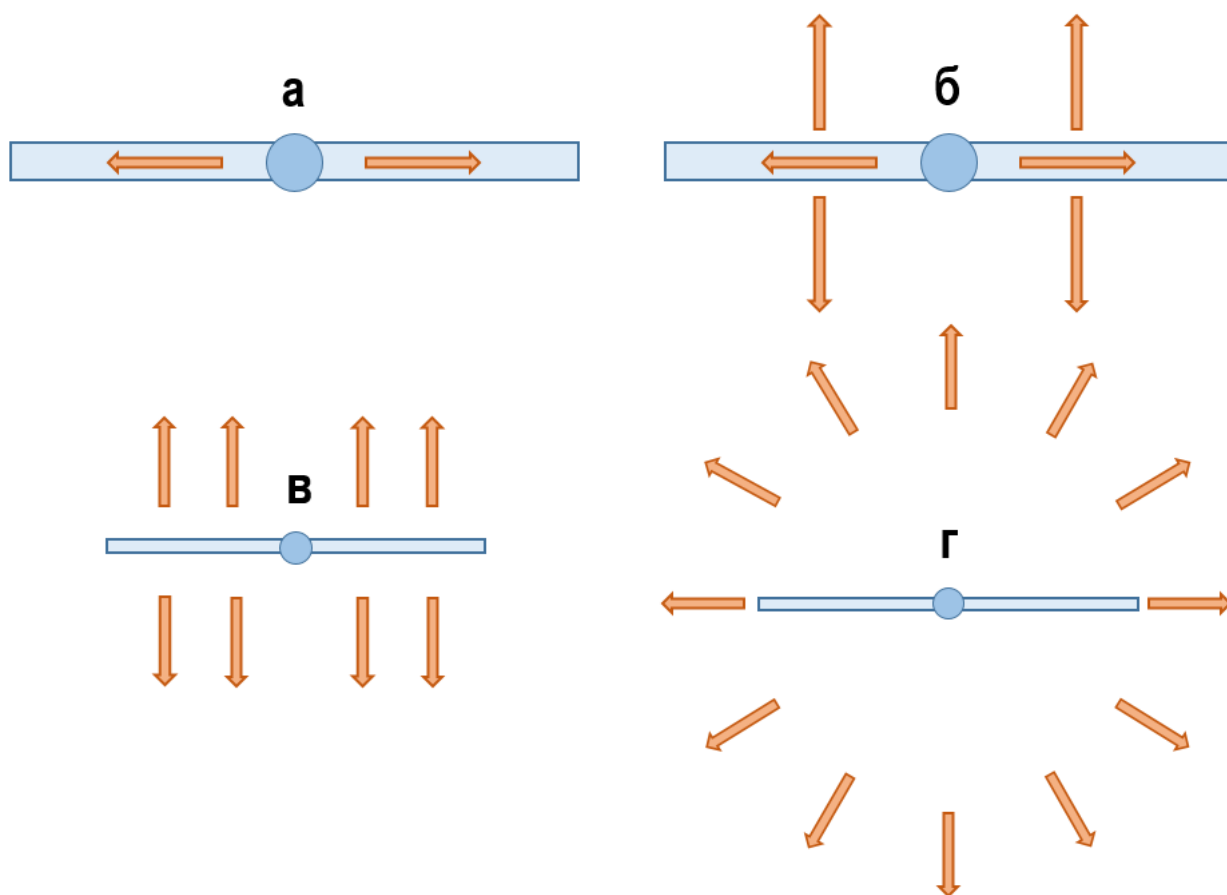


Рис. 1.3. Виды течения: а) линейный в трещине; б) билинейный; в) линейный в пласте; г) псевдорadiaльный

Эллиптическое течение долгое время рассматривалось как переходное между окончанием билинейного/пластового линейного и началом псевдорadiaльного [100]. Продолжительность периода эллиптического течения может длиться месяцами в случае, если у резервуара хорошие коллекторские свойства и низкая производительность скважин.

В [113] Yizhu Liao и W.J. Lee представили метод определения «возмущенной зоны» (depth of investigation) эллиптического течения, при этом

применялся метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС). Ими были описаны основные характеристики поведения потока с помощью выведенных формул и «радиус исследования» (radius of investigation) при радиальном потоке. Отмечается линейный поток на ранних этапах и радиальный на поздних.

Автором метода ПССС является И.А. Чарный, один из учеников Л.С. Лейбензона. И.А. Чарный условно разделял пласт на две зоны: возмущенную и невозмущенную. Предполагается, что в возмущенной области давление распределяется как при установившемся режиме, начиная от стенки скважины, а в невозмущенной – давление неизменно и везде равно начальному. Считая, что трещина эллиптического вида, он решал задачу по описанию установившегося притока жидкости в вертикальную трещину.

Также В.И. Астафьев представлял трещину в виде тонкого эллипса (рис. 1.4), пересекающего скважину [8]. Он предложил формулу расчёта величины скин-фактора трещины от безразмерного коэффициента проводимости.

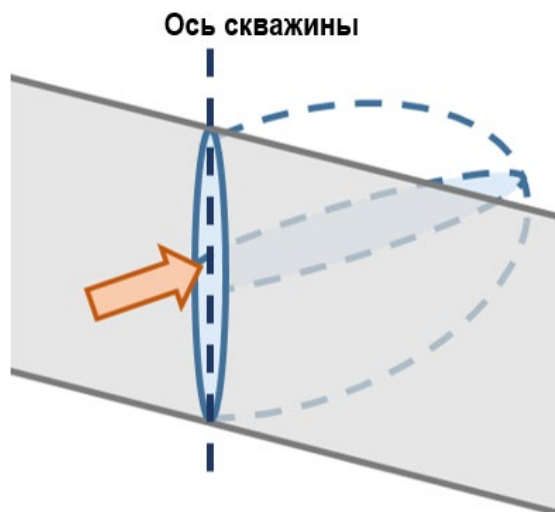


Рис. 1.4. Модель эллиптической трещины

В отечественной истории наблюдается как минимум два периода особой популярности операции ГРП. Первый пришелся на конец 50-х – начало 60-х годов, когда глубина залегания разрабатываемых продуктивных пластов была

относительно невелика (отдельные месторождения Башкортостана, Татарстана, Волго-Уральского региона). В таком случае предполагается, что трещины, образующиеся в результате ГРП, горизонтальные. Начиная с конца 80-х годов прослеживается вторая волна востребованности гидроразрыва в нефтегазовом промысле, что приводит к появлению новых теоретических исследований и разработке соответствующих моделей. ГРП применяется на крупных месторождениях Западной Сибири, которые имеют сложную структуру пустотного пространства и свои особенности. Речь идёт о продуктивных карбонатных отложениях с низкой проницаемостью порового пространства на глубинах более 3000 метров. Объектами исследования становятся вертикальные трещины, образующиеся в результате ГРП на таких глубинах.

Большой вклад в моделирование процессов фильтрации в нефтегазовой отрасли внесён Р.Д. Каневской [41, 42, 44, 45]. В её работах рассматривается применение гидравлического разрыва пласта для разработки месторождений углеводородов. Предложен принцип выбора скважин для проведения ГРП, решены различные задачи для однородных и неоднородных пластов, приведены теоретические исследования фильтрации в пласте с трещинами ГРП. В частности, в работе [44] исследовалась стационарная фильтрация флюида к одиночной трещине конечной проводимости от контура, расположенного на большом расстоянии.

М. Экономидес, Р. Олини и П. Валько [97, 98] в серии своих работ отразили методологию гидравлического разрыва пласта, технологию создания трещин и процесс проектирования. Стремясь обратить внимание на интеграцию различных технологических аспектов ГРП, использовали термин «унифицирование» (unified), описывали связь между теорией и практикой, опираясь на результаты многолетнего опыта применения данного метода.

В работе Н. Cinco-Ley, V.F. Samaniego, A.N. Dominguez [108] описан случай нестационарной фильтрации нефти в бесконечном пласте к скважине с вертикальной трещиной ГРП конечной проводимости. Предполагалось, что

гравитационные эффекты незначительны и ими можно пренебречь, а характеристики пласта и трещины определяются на этапе переходного режима. Задача решается разделением трещины на некоторое число сегментов. Однако современные методы моделирования распространения трещин генерируют ограниченные пути роста и не отражают всей сложности их геометрии [125].

Стоит отметить, что успешная разработка нефтегазовых месторождений требует комплексного исследования с применением математического инструментария. В работах Н. Равшанова и Н.М. Курбонова рассмотрена задача трёхфазной фильтрации в пористой среде, предложены математическая модель и численный алгоритм для проведения вычислительных экспериментов с целью прогнозирования и принятия решений при разработке и проектировании месторождений углеводородов [65].

А.А. Афанасьев [9, 84] использовал термин «переходный режим» и изучал процесс закачки воды в трещиновато-пористую среду с учётом перетока между трещинами и блоками, решал задачу численно и аналитически для двухфазной фильтрации.

В последние годы многие из представителей отечественных научных школ рассматривают нестационарную фильтрацию флюида в трещине ГРП при различных условиях.

З.М. Нагаева, В.Ш. Шагапов [90] исследовали фильтрационные волны давления в трещинах, расположенных в пористой проницаемой среде. Ими предложены точные решения, описывающие эволюцию полей давления в трещине с мгновенным изменением давления в скважине на постоянное значение. Были получены решения задачи об эволюции давления в окрестности трещины ГРП при поддержании постоянного расхода жидкости [62, 90]. Система уравнений, описывающая фильтрацию флюида в трещине ГРП и пласте, сводится к одному интегро - дифференциальному уравнению. Последнее решается через преобразование Лапласа. Для случая постоянного давления жидкости в скважине вводится специальная функция

$Gil(z)$ , а для случая постоянного расхода –  $Zil(z)$ . С помощью данных функций записаны автомодельные решения. С использованием метода ПССС построены приближённые решения, которые хорошо согласуются с точными решениями задач.

И.Л. Хабибуллин и А.А. Хисамов предложили решения для определения динамики давления в вертикальной трещине ГРП конечной длины и окружающем её пласте при общих условиях [83]. В серии своих работ они привели аналитические решения задачи о нестационарном распределении давления в пласте, пересечённом вертикальной трещиной гидроразрыва, при краевых условиях различного рода. Используя метод преобразований Лапласа, вывели уравнения распределения давления в трещине и пласте при постоянном давлении скважины [80]. Кроме того, с помощью полученных решений определили характерные особенности процесса фильтрации в системе «пласт-трещина» [81].

В статьях З.М. Нагаевой, Е.П. Аносовой, В.Ш. Шагапова и А.А. Шамматовой [3, 92, 121] рассмотрены задачи об отборе флюида из пласта и закачке жидкости в пласт при разных режимах работы скважины (например, режим постоянного расхода флюида; режим постоянного перепада давления между устьем и пластом) и наличии трещины ГРП, перпендикулярной стволу скважины. Были получены аналитические решения, описывающие эволюцию давления в трещине. С использованием метода ПССС построены приближённые решения, в результате анализа выявлено, что они хорошо согласуются с точными решениями задач.

В.А. Байковым, Г.Т. Булгаковой [13] была рассмотрена задача о собственных колебаниях трещины после завершения процедуры ГРП, получено аналитическое решение и на его основе по промысловым данным проведена оценка таких параметров трещины ГРП, как её полудлина, ширина и высота.

Работа [59] П.Е. Морозова посвящена особенностям распространения фильтрационных волн давления в пластах с искусственной и естественной

трещиноватостью. Он исследовал распространение фильтрационных волн давления в пласте с трещиной ГРП конечной и бесконечной длины, а также в окрестности вертикальной скважины в трещиновато-пористом пласте с учётом перетока жидкости между трещинами и пористой средой.

В [89] В.Ш. Шагапов и З.А. Булатова исследовали количественные характеристики и особенности динамики волн в зависимости от характера неоднородности пористой среды. Показано, что фильтрационно-ёмкостные характеристики горных пород в ряде случаев оказывают существенное влияние на эволюцию акустических сигналов в скважине.

В то время как многие авторы решают задачу фильтрации несжимаемой жидкости в пористом пласте с трещиной ГРП симметричной относительно ствола скважины, В.И. Астафьев, И.А. Васильев, И.И. Киреев и С.А. Булгаков в своей работе [7] приводят несимметричную модель фильтрации в нефтяном пласте от нагнетательной к добывающей скважине при наличии некоторой несплошности (высоко- или низкопроницаемой трещины). При этом рассматривают разные варианты взаимного расположения несплошности, нагнетательной и добывающей скважин.

В своих работах З.М. Нагаева, В.Ш. Шагапов [62, 90], И.Л. Хабибуллин, А.А. Хисамов [80, 82, 83] и Н. Cinco-Ley [106] рассматривали математическую модель нестационарной фильтрации жидкости в трещине, демонстрирующую связь между постоянным давлением, поддерживаемым после начала работы скважины, и дебитом скважины или изменением давления при поддержании постоянного расхода. Следует отметить, что особенность данной диссертационной работы состоит в том, что рассматривается нестационарная фильтрация флюида в пласте и трещине ГРП при переходных режимах работы скважины с кусочно-постоянными изменениями давления или расхода жидкости; приведены точные аналитические решения, описывающие распространение давления в трещине; показано сопоставление результатов расчёта с практическими данными.

Анализ сопоставления динамики давления по промышленным данным с одной стороны, аналитического решения, основанного на формулах В.Ш. Шагапова и З.М. Нагаевой [62], и результатов метода ПССС с другой стороны приведён в публикациях [88, 121]. Дополнительно в работе [73] в данное сопоставление был включен ещё один элемент, полученный по результатам исследований И.Л. Хабибуллина и А.А. Хисамова [83] с учётом упругоёмкости трещины.

В целом вопрос влияния упругих свойств горных пород на процесс формирования и роста трещин ГРП в продуктивных пластах подробно рассматривается учёными из Китайской Народной Республики [120].

В настоящее время существует множество публикаций, посвящённых теме гидравлического разрыва пласта, написанных на основе проведённых исследований в различных областях: технической, математической, химической, экономической и т.д., с каждым годом их количество увеличивается. Так, например, на момент подготовки данной диссертационной работы в российской научной электронной библиотеке eLibrary.Ru поиск по ключевому слову «гидроразрыв пласта» выдаёт около 16 тысяч публикаций.

## **1.2 Моделирование фильтрации жидкости в продуктивном пласте**

Горные породы, способные вмещать и отдавать при разработке воду, нефть и газ, называются коллекторами [46]. Исследование горных пород-коллекторов является одной из основных трудностей при разработке нефтегазовых месторождений [29].

Промышленные скопления углеводородов располагаются преимущественно в осадочных породах (известняках, песчаниках), обладающих проницаемостью. Проницаемость – способность горной породы фильтровать жидкость и газ сквозь себя (через систему многочисленных каналов, связывающих пустоты в породе) при наличии перепада давления.



В последние годы доля карбонатных коллекторов среди разрабатываемых неуклонно растёт. Карбонаты подвержены растрескиванию и выщелачиванию, характеризуются наличием трещиноватости и кавернозности, то есть имеют сложную структуру пустотного пространства, что приводит к высокой неоднородности фильтрационно-ёмкостных свойств продуктивных пластов [87]. Гидродинамическое моделирование карбонатных коллекторов в силу их строения требует специальных подходов [43]. Необходимы модели, в которых бы воспроизводились ключевые особенности фильтрации флюида в таком коллекторе [116].

Фундаментальные законы сохранения массы, импульса, энергии позволяют описать фильтрацию жидкостей и газов в пористых средах. Изотермическая фильтрация записывается с помощью уравнения сохранения массы, а также закона Дарси в совокупности с уравнениями фазового состояния. Для описания неизотермических процессов используют закон сохранения энергии [43].

Моделирование кавернозно-пористых сред традиционно осуществляется с помощью совместного решения уравнений Стокса и Дарси [58]. Уравнение Анри Дарси описывает течение в пористых зонах, в то время как Джордж Габриэль Стокс определяет уравнение для зон свободного течения. На границе между двумя зонами могут задаваться различные типы условий согласования. Сложность использования подхода Дарси-Стокса заключается в том, что требуется точно знать геометрию зон свободного течения и определить параметры для условий согласования на границе раздела [58].

Г.И. Баренблатт рассматривал две сплошные среды: систему трещин и блоки матриц (вложенные одна в другую) [1, 17]. Независимо для каждой среды записываются уравнения движения и сохранения массы, а функция источника-стока показывает переток флюидов из одной среды в другую.

Первое решение задачи двухфазной фильтрации было получено Баклеем и Левереттом [103] для двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей без

учёта влияния гравитационных и капиллярных сил. Модель Рапопорта-Лиса [119] учитывает капиллярные силы. Но задачи многофазной фильтрации в многомерном случае при учёте неоднородности пласта, фазовых переходов, наличии капиллярных и гравитационных сил аналитическими методами на сегодняшний день решить не представляется возможным [56].

Исходные уравнения в частных производных, такие как уравнение неразрывности потока, уравнение движения и уравнение состояния, записываются для каждого флюида. Рассмотрим однофазную жидкость [56]. Уравнение неразрывности потока выражает закон сохранения массы и записывается в дифференциальном виде как

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}.$$

Общий вид уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla(\rho v),$$

где  $\nabla(\rho v)$  – дивергенция потока флюида,  $v = (v_x, v_y, v_z)$  – вектор скорости фильтрации.

Далее приведём уравнение сохранения массы для течения, перпендикулярного трещине в пористой среде, а именно

$$m_p \frac{\partial\rho_p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_p v_p)}{\partial y} = 0, \quad (0 < y < \infty),$$

где  $m_p$  – пористость пласта,  $\rho_p$  – плотность,  $v_p$  – скорость.

Уравнение движения устанавливает зависимость между скоростью фильтрации и градиентом давления для каждой фазы

$$v = -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \gamma\nabla h),$$

где  $k$  – тензор абсолютной проницаемости пористой среды,  $\gamma$  – удельный вес флюида,  $\nabla P$  и  $\nabla h$  – векторные величины (градиенты),  $\mu$  – вязкость флюида.

Установленный опытным путём закон Дарси [16] показывает, что скорость фильтрации прямо пропорциональна градиенту перепада давления в пористой среде и обратно пропорциональна динамической вязкости флюида. Закон имеет свои условия применимости: небольшие скорости, жидкость ньютоновская, поток ламинарный. Закон Дарси для описания фильтрации в трещине и пласте имеет вид

$$v_f = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial x}, \quad (0 < x < \infty);$$

$$v_p = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P_p}{\partial y}, \quad (0 < y < \infty).$$

В качестве критерия применимости закона Дарси используют параметр Рейнольдса

$$Re = \frac{QD_\Gamma}{\eta A},$$

характеризующий режим течения (ламинарный, переходный или турбулентный), при этом  $Q$  – объемный расход [ $\text{м}^3/\text{с}$ ],  $D_\Gamma$  – гидравлический диаметр ( $D_\Gamma = \eta A / P$ ),  $\eta$  – кинематическая вязкость [ $\text{м}^2/\text{с}$ ] ( $\eta = \mu / \rho$ ),  $\mu$  – вязкость [ $\text{Па}\cdot\text{с}$ ],  $\rho$  – плотность жидкости [ $\text{кг}/\text{м}^3$ ],  $A$  – площадь сечения канала [ $\text{м}^2$ ],  $P$  – смоченный периметр поперечного сечения потока.

Формула Дюпюи описывает частный случай закона Дарси. Дебит несжимаемой жидкости из недеформируемого пласта для установившегося плоскорадиального притока записывается в виде

$$Q = -\frac{2\pi kh (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}},$$

где  $p_c$  – забойное давление [атм],  $p_\kappa$  – давление на контуре питания [атм],  $r_c$  – радиус скважины [м],  $R_\kappa$  – радиус контура питания [м],  $h$  – продуктивная толщина пласта [м],  $k$  – проницаемость породы [мД],  $\mu$  – вязкость жидкости [сП],  $Q$  – дебит скважины в пластовых условиях [м<sup>3</sup>/сут].

С помощью формулы Дюпюи [34] можно сделать вывод, что давление незначительно меняется у контура питания и сильно вблизи скважины. Область с таким перепадом давления, приводящим к вытеснению флюидов из пласта, называется воронкой депрессии.

Обобщённая функция Лейбензона [18] показывает связь между давлением, свойствами жидкости и пористой среды. Данная функция позволяет уравнения фильтрации несжимаемой жидкости преобразовывать в уравнения для сжимаемой жидкости:

$$P = \int_0^p \frac{k(p)}{\mu(p)} \rho(p) dp + const.$$

Для плоскорадиального потока давление в любой точке определяется основной формулой теории упругого режима фильтрации [34]:

$$p(r, t) = p_\kappa - \frac{Q_0 \mu}{4\pi k h} \left[ -E_i \left( -\frac{r^2}{4\alpha t} \right) \right], \quad E_i(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du,$$

где  $E_i(x)$  – экспоненциальный интеграл значения  $x$ ,  $\alpha$  – пьезопроводность [м<sup>2</sup>/сут].

Уравнение состояния описывает соотношение между давлением и объёмом или между давлением и плотностью для различных флюидов. Если сжимаемость флюида постоянна в рассматриваемом диапазоне изменения давления [34], то уравнение принимает вид

$$C = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P},$$

где  $C$  – коэффициент сжимаемости флюида [ $\text{атм}^{-1}$ ],  $V$  – объем флюида в пласте [ $\text{м}^3$ ],  $\rho$  – плотность флюида [ $\text{кг}/\text{м}^3$ ].

Сжимаемость флюида в акустическом приближении записывается следующим образом:

$$P_f - P_0 = C^2(\rho_f - \rho_0), \quad P_p - P_0 = C^2(\rho_p - \rho_0),$$

где  $P_f$  и  $P_p$  – давление в трещине и пласте соответственно.

Основное уравнение упругого нестационарного режима фильтрации имеет следующий вид

$$\beta^* \frac{dp}{dt} = \frac{k}{\mu} \Delta p.$$

По предложению В.Н. Щелкачева данное уравнение математической физики называют уравнением пьезопроводности [18]. Оно учитывает состояние фильтрующей пористой среды (коэффициент упругоёмкости  $\beta^*$ , коэффициент проницаемости  $k$ ) и состояние насыщающей её жидкости (коэффициент вязкости  $\mu$ ). Перечисленные физические величины позволяют определить пьезопроводность по формуле В.Н. Щелкачева

$$\alpha = \frac{k}{\mu\beta^*}.$$

Пьезопроводность – это параметр, характеризующий скорость перераспределения давления в пласте и/или трещине. При этом под упругоёмкостью горных пород понимают способность к изменению объёма пор и трещин в процессе нестационарной фильтрации (в результате изменения пьезометрического напора), а упругоёмкость трещины фактически означает упругоёмкость находящегося в ней флюида [18].

На практике выбор модели (однофазной, двухфазной, трёхфазной, многокомпонентной) зависит от физико-химических свойств насыщающих пласт флюидов и нагнетаемых агентов. Важен тип залежи и условия

разработки. Модель трёхфазной изотермической фильтрации (нелетучей нефти, black oil) – часто применяется при разработке месторождений.

Понятие «сложная структура пустотного пространства» подразумевает наличие в пласте трещин, то есть механических разрывов или разделений, приводящих к нарушению целостности объекта. Диапазон видов природных трещин достаточно широк: от почти повсеместных микротрещин до единичных многокилометровых разломов или их кластеров. Что касается наличия в пласте трещин проводящих, то их высокие проницаемости являются гарантом получения высоких дебитов скважин при незначительных депрессиях. По этой же причине операция ГРП, создающая трещины техногенного плана, столь востребована на практике.

### 1.3 Особенности технологического процесса ГРП

Процедура гидравлического разрыва пласта (рис. 1.5) дорогостоящая, требующая тщательной подготовки и серьёзных технико-экономических расчётов.



Рис. 1.5. Схема проведения операции ГРП

Выбор скважины-кандидата в полностью автоматизированном режиме невозможен, так как слишком много факторов необходимо учитывать, в том числе фильтрационно-ёмкостные свойства (ФЕС) пласта, состояние скважины, тип реагентов и жидкости разрыва. Важнейший элемент при подготовке операции – сбор и анализ первичной информации [97].

Наиболее подходящими пластами для проведения ГРП считают те, которые содержат значительные геологические объёмы углеводородов, имеют мощную продуктивную толщину, но требующие увеличения коэффициента продуктивности скважин [44, 99]. К числу таких пластов относятся карбонатные коллектора.

Успешность процедуры ГРП зависит от многих факторов, основными из них являются качество жидкости разрыва и пропанта.

Изначально использовали жидкости разрыва на нефтяной основе, а водная основа считалась вредной для пластов. С годами это утверждение было опровергнуто. Жидкости как на нефтяной, так и на водной основе, применяемые в наши дни, значительно усовершенствованы [111]. Основным назначением жидкости разрыва является передача на забой скважины энергии, необходимой для раскрытия трещины, и доставка расклинивающего материала.

Огромное влияние на эффективность процедуры оказывает выбор расклинивающего материала. Ранее на практике использовался преимущественно речной песок, а теперь – пропант. С одной стороны, чем крупнее гранулы пропанта, тем больше пропускная способность трещины, но при этом крупные гранулы, как правило, более хрупкие. Размер гранул пропанта выбирают в зависимости от диаметра перфорационного отверстия в обсадной трубе. Они должны быть достаточными для похождения гранул, иначе произойдёт закупорка перфораций и поступление пропанта в пласт прекратится.

На промысле перед основным ГРП часто проводят нагнетательный тест для уточнения информации о пласте при высоких давлениях, называемый

мини-ГРП. Он даёт ценную информацию о потерях давления, развитии трещин и предсказывает поведение системы во время основного ГРП. Знание величин давления на этапах разрыва породы, начального роста трещины, развития и её смыкания – это основополагающий пункт на пути к успешному ГРП [111].

Некоторые из теорий гидравлического разрыва пласта конфликтуют между собой или утверждения авторов требуют уточнения [14]. На небольших глубинах будет ли образовываться горизонтальная трещина ГРП или множество мелких канавок [32]? Пропант проникает в канавки и трещины, но не весь задерживается потом в них из-за движения флюидов? К тому же есть споры по поводу возможных значений параметров трещин [98].

Изначально, когда только начинали применять ГРП, было сделано допущение, что созданная трещина по умолчанию горизонтальная, так как рост трещины вероятно идёт между плоскостями напластования [35, 111].

Нынешние исследования трещинообразования гласят, что в нормальных условиях горизонтальные трещины образуются на глубинах до 200 м, а вертикальные – на глубине свыше 400 м. На промежуточных глубинах, где главные напряжения примерно равны, на ориентацию трещин влияют такие факторы, как анизотропия свойств. В основном теоретические исследования посвящены вертикальным трещинам, поскольку разрабатываемые месторождения приурочены к значительным глубинам [44].

Считается, что в будущем будет сделан упор на изучение неоднородности породы, анизотропии свойств, утечек; описание одновременно всех стадий ГРП; на явление переноса пропанта [31]. Не хватает моделей для расчёта комплексной проводимости, которые бы учитывали влияние распределения пропанта в трещинах, шероховатость поверхности трещины, растворение, диффузию, осаждение, упругое внедрение и ползучесть, вызванные напряжением [125].

Обычно ГРП проводят с целью увеличения продуктивности скважины путём создания высокопроводящего канала. Помимо этого, данная технология



может применяться для устранения загрязнения призабойной зоны пласта (ПЗП) или восстановления сообщения скважины с пластом. Редко ГРП может быть проведено просто для поддержания высокого уровня добычи на высокопродуктивных скважинах, но со временем показатели даже таких скважин достигают своего экономического предела.

Для добывающих компаний значительный интерес представляет практическая сторона вопроса: технология ГРП как способа повышения коэффициента продуктивности и изменения фильтрационных свойств в призабойной зоне пласта. Появление новых реагентов, технологий ГРП, например, многостадийного гидроразрыва пласта (МГРП), требует создания специальных расчётных моделей фильтрации и трещинообразования [42, 99]. Постепенно количество горизонтальных скважин с МГРП начинает превышать численность вертикальных и наклонно-направленных скважин с ГРП [99], разрабатывается новое программное обеспечение для построения дизайна и анализа эффективности ГРП.

Построение дизайна ГРП для конкретной скважины или создание некоторого «типового дизайна» осуществляется с помощью специального программного обеспечения (ПО). Одним из самых востребованных в России является «РН-ГРИД».

А.В. Татосов и А.С. Шляпкин в работе [96] представили математическую модель, позволяющую детально изучать процесс движения частиц пропанта в трещине ГРП, так как это движение оказывает существенное влияние на протяжённость трещины и её форму. Данная модель положена в основу авторского программного комплекса TSH FRAC.

Инструменты моделирования ГРП позволяют оценить возможные технологические риски, определить экономический эффект, выбрать наиболее оптимальные сценарии ещё до проведения данной операции в продуктивных пластах.

## 1.4 ГРП как геомеханический процесс и параметры трещин

Вопрос интенсификации добычи нефти стал актуальным с первых тонн добытого «чёрного золота». Известно, что в 1868 году предпринимались попытки увеличить продуктивность скважин путём подрыва их порохом. Затем на протяжении 20 лет с этой же целью, но уже более успешно, применялся нитроглицерин [112, 115]. Следует отметить, что использование взрывчатки приводило к серьезным деформациям и разрушению горных пород.

Поскольку до XIX века не учитывались природные факторы, использовались не научные подходы и моделирование, а практический опыт, наблюдения и порой просто интуиция рабочих, неправильно учтённые напряжения горных пород приводили к прорывам плотин и затоплению целых поселений.

Сегодня основная задача геомеханики на объектах недропользования состоит в рациональном управлении горным давлением, что важно для предотвращения возможных аварий, обрушений горных пород, затопления выработок и т.д.

С точки зрения геомеханики можно дать ещё одно определение операции гидравлического разрыва пласта. Это механический метод воздействия на пласт, в результате которого порода разрывается по плоскостям минимальной прочности под действием избыточного давления, создаваемого закачкой в скважину жидкости разрыва. Таким образом, для гидроразрыва необходимо превысить предел прочности породы на разрыв. Математическое моделирование процесса трещинообразования основано на фундаментальных законах теории упругости, физики нефтегазоносных пластов, фильтрации и термодинамики [44].

Поскольку геомеханика является наукой о прочности, устойчивости, деформируемости горных пород и сооружений под действием природных и техногенных сил, к предметам её изучения исследователи относят также естественную трещиноватость. Естественная трещиноватость является одним

из тех природных факторов, которые существенно влияют на процесс фильтрации флюидов в толще продуктивных пластов и разработку таких месторождений [4].

После гидроразрыва образовавшаяся техногенная трещина может активировать естественные трещины вблизи ствола скважины [114, 126, 127], при этом дренируемый объём увеличится, что приведёт к росту дебита скважины. Даже трещина длиной не более 20 м может повысить дебит в несколько раз [44].

Однако трещина ГРП может пересекать естественные трещины или отклоняться и даже останавливаться ими [127]. Интересный факт, что в определённых условиях одиночная естественная трещина может отклонить направление распространения трещины гидроразрыва как минимум на  $22^\circ$  [128]. Особое внимание к этой теме прослеживается в последнее время, поскольку в трещиновато-кавернозном карбонатном коллекторе основными хранилищами нефти и газа является система естественных трещин и каверн.

В целом направление и рост трещины зависит от трёх основных напряжений горной породы: минимального горизонтального, максимального горизонтального и вертикального, равного весу вышележащих пород (рис. 1.6).

Налегая друг на друга, горные породы находятся в напряжённом состоянии, которое вызвано их собственным весом и зависит от характера пород и глубины их залегания. При достаточно высоком давлении на значительной глубине в невозмущённой системе, то есть до начала воздействия на пласт, внешнее давление от веса вышележащих пород и возникающие ответные напряжения в породе находятся в состоянии равновесия [22].

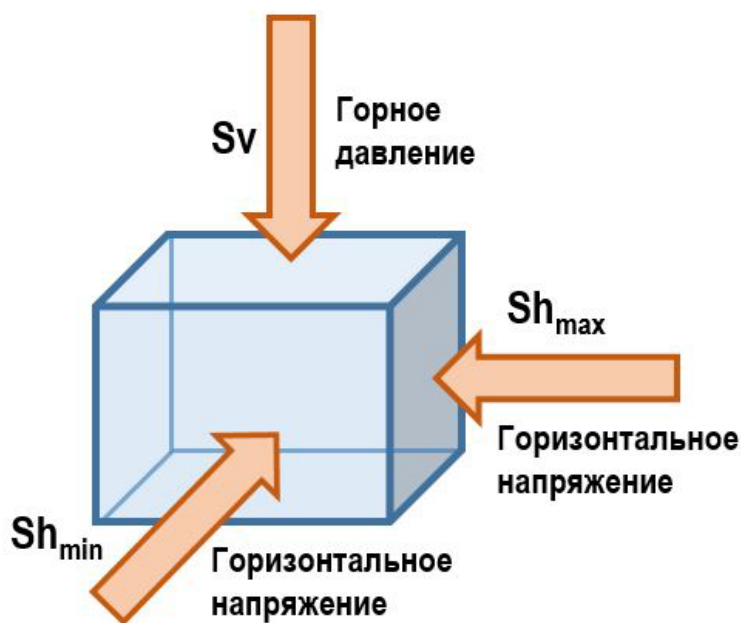


Рис. 1.6. Основные напряжения горных пород

В процессе ГРП эти естественные горные напряжения определяют ориентацию создаваемой трещины, то есть влияют на азимут её распространения.

Поскольку деформация и последующий разрыв происходят по направлению действия силы, трещины первого ГРП в скважине развиваются преимущественно вдоль максимального и перпендикулярно минимальному горизонтальному напряжению.

В направлении перпендикулярном трещине поровое давление изменяется от забойного до пластового на контуре питания скважины. Поэтому при определённых условиях в процессе эксплуатации скважин с ГРП максимальное горизонтальное напряжение может изменяться, что в свою очередь приводит к переориентации трещин при повторном проведении ГРП [49].

Помимо азимута основными параметрами трещины являются ширина, длина и высота (рис. 1.7). Исследователями было замечено, что чем шире трещина, тем вероятней её развитие по вертикали.

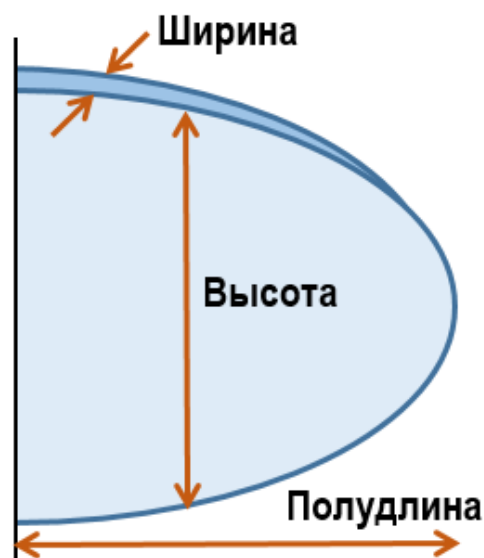


Рис. 1.7. Основные геометрические параметры трещины

На практике для максимального эффекта от операции ГРП высота создаваемой трещины должна обеспечивать охват всех продуктивных пропластков в пределах пласта, поэтому важным показателем является соотношение высоты трещины к эффективной толщине продуктивного пласта. Однако, слишком большая высота негативно сказывается на длине, которая отвечает за степень развития трещины вдоль продуктивных пропластков. Кроме того, опасность заключается в том, что в отдельных случаях, если высота трещины выходит за границы определённого стратиграфического интервала, то может быть нанесен ущерб целостности покрывающей породы, что ставит под угрозу подземные питьевые воды [124].

Однако прогнозируемая высота трещины ГРП часто не соответствует фактической высоте в реальных условиях. В статье [123] рассматриваются модели геометрии трещин в слоистых пластах, анализируются многочисленные факторы, которые влияют на распространение трещины по высоте.

Кроме геометрических параметров трещины показательными характеристиками являются проводимость трещины  $C_f$  и её безразмерная проводимость

$$C_{fd} = \frac{k_f d_f}{k_p l_f},$$

где  $k_f$  – проницаемость пропанта [ $\text{м}^2$ ],  $d_f$  – ширина трещины [ $\text{м}$ ],  $k_p$  – проницаемость пласта [ $\text{м}^2$ ],  $l_f$  – полудлина трещины [ $\text{м}$ ].

Проводимость  $C_f$  характеризует способность трещины пропускать флюиды и определяется как произведение проницаемости расклиниваемой пропантной набивки на раскрытие трещины, то есть на её ширину. В свою очередь  $C_{fd}$  – это отношение проводимости трещины к проводимости пласта, то есть к возможности пласта доставлять флюиды в трещину.

Следует отметить, что увеличение длины и проводимости трещины не означает пропорционального увеличения показателей добычи. Кроме того, для каждой трещины можно определить предельную длину, превышение которой не приводит к росту дебита скважины [40, 41]. Известно, что для оптимального извлечения запасов углеводородов желательны недлинные, но при этом широкие трещины [26].

Среди факторов, влияющих на геометрию трещины, отмечают модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона. До проведения гидроразрыва строят специальные геомеханические модели, которые позволяют оценивать модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона, а также предел прочности породы на разрыв. Необходимые для этого напряжения горных пород определяют с помощью акустического каротажа, измеряя скорости пробега продольной и поперечной волн через породу.

Таким образом, каждая операция ГРП сопряжена с большой предварительной работой, связанной с изучением геолого-промыслового материала, характеристик месторождения, пластов, отдельных скважин. Следует выбрать скважину-кандидата, провести оценку её технического состояния, выполнить ряд расчётов и построить дизайн ГРП для создания оптимальной трещины гидроразрыва.

## 1.5 Об оценке качества проведённого ГРП

В процессе эксплуатации скважин возникают осложнения, их продуктивность со временем падает. При управлении разработкой месторождения для повышения её эффективности применяют различные методы воздействия на пласт, в том числе ГРП, кислотную обработку ПЗП и т.д. [111]. Часто такие операции проводятся на скважинах с некоторой периодичностью.

При повторном проведении гидроразрыва пласта в скважине наблюдается явление переориентации уже существующей трещины ГРП, либо образование новой техногенной трещиноватости. Задача о прогнозировании переориентации рассматривается в работе [5], предлагается её решение с помощью геомеханического моделирования.

Стоит отметить, что всегда результаты моделирования напрямую зависят от качества исходной информации, а получение достоверных данных о начальных и текущих свойствах пласта вызывает определённые сложности. Как правило, на практике выявление направления развития трещин осуществляется посредством проведения акустических исследований. Это один из методов ГДИС.

ГДИС – это комплекс мероприятий, включающий в себя замеры с помощью глубинных приборов ряда величин, последующий их анализ и интерпретацию полученной информации. Существует несколько видов гидродинамических исследований скважин, основными из них принято считать КВД (кривая восстановления давления) и КПД (кривая падения давления) (рис. 1.8). Отправляют импульс посредством изменения дебита скважины, затем фиксируют ответную реакцию пласта в виде перепада давления. На основе входных и выходных сигналов изучаются характеристики системы «пласт-скважина» [93].

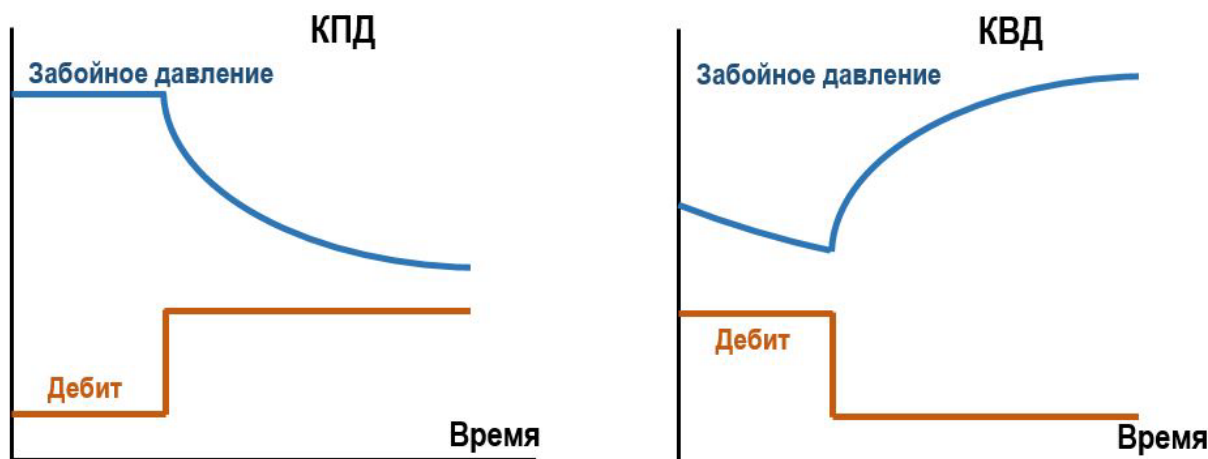


Рис. 1.8. Типовые графики изменения дебита и давления добывающей скважины при проведении ГДИС

ГДИС является одним из способов оценки качества проведённого ГРП. Принято считать, что вблизи трещины жидкость движется перпендикулярно ей, а на отдалении течение радиальное. Поэтому при интерпретации ГДИС устанавливают КВД участки радиальной и линейной фильтрации, что помогает определять параметры исследуемого пласта. Но, как показывает практика, в явном виде такие режимы фиксируются редко.

При анализе ГРП условно выделяют контролируемые факторы и неконтролируемые. Например, свойства пласта относятся к неконтролируемым факторам, а вот условиями при проведении операции гидроразрыва можно варьировать [111].

Подходы к анализу данных ГДИС разделяют на три группы методов: традиционный, типовых кривых и нелинейной регрессии. На практике обычно используют более одного метода и сравнивают полученные значения. О допущенной ошибке при анализе или интерпретации данных свидетельствуют различные результаты при применении разных методов.

В числе ПО, позволяющего проводить все этапы ГДИС от проектирования и обработки данных до интерпретации с моделированием, стоит выделить «РН-ВЕГА» и Saphir NL Kappa Engineering.

Вычислительный алгоритм для интерпретации данных гидродинамических исследований скважин (по кривым восстановления



давления) был предложен Е.Р. Бадертдиновой, И.Т. Салимьяновым, М.Х. Хайруллиним и М.Н. Шамсиевым [12]. Они рассматривали процесс нестационарной фильтрации нефти к скважине, пересечённой вертикальной трещиной ГРП. На основе данного алгоритма авторы определяют ФЕС пласта и параметры трещины гидроразрыва. Суть подхода заключается в решении обратной задачи о минимизации функционала-невязки между наблюдаемыми и вычисленными давлениями скважины.

Интерпретация данных ГДИ для скважин с трещинами ГРП, работающих при постоянном давлении, обычно проводится с использованием метода типовых кривых. К.Н. Guppy, S. Kumar и V.D. Kagawan [110] с помощью полуаналитической модели разработали набор корреляций. Согласно предложенной ими методике для высокопродуктивных скважин используется билинейный период притока для определения «вероятной» или «кажущейся» проводимости трещины (an apparent fracture conductivity), и представленные в исследовании корреляции позволяют скорректировать «кажущиеся» значения до искомым значений проводимости трещины.

В работах М.Н. Шамсиева [94, 95] предложена математическая модель, проведена оценка параметров пласта, разработан метод интерпретации гидродинамических исследований вертикальных скважин. Он проводил численное моделирование процесса нестационарной фильтрации воды к вертикальной скважине с учётом влияния объёма ствола скважины [37].

Представители уфимской научной школы внесли значительный вклад в изучение методов ГДИС и ГРП. В работах А.Я. Давлетбаева была рассмотрена задача о двух скважинах, соединённых одной вертикальной трещиной ГРП [23]. В случае, если такая трещина проходит через нагнетательную скважину и достигает добывающей, то возникает проблема преждевременного обводнения добывающей скважины [25, 30]. Кроме того, на основе проведённых численных экспериментов А.Я. Давлетбаева и З.С. Мухаметовой для двух перпендикулярных трещин показано влияние геометрии трещины и её проводимости на динамику давления в скважине [24].

Специалисты рекомендуют любой опыт проведения ГРП фиксировать, после чего проводить наблюдение за работой скважины, в том числе с помощью ГДИС на неустановившихся режимах притока, что даёт информацию, способную привести к усовершенствованию технологии ГРП и увеличению эффективности от проведения данных операций в дальнейшем.

## Выводы по первой главе

- Результаты многолетних теоретических и практических исследований гидравлического разрыва пласта помогают совершенствовать данную технологию. В связи с тем, что наблюдается истощение традиционных углеводородных запасов и увеличение доли трудноизвлекаемых, актуальность данной операции как метода интенсификации добычи не угасает до сих пор.
- ГРП используется для повышения дебита добывающих и приёмистости нагнетательных скважин за счёт образования высокопроводящих трещин. Применяется с целью увеличения коэффициента продуктивности, для устранения загрязнения призабойной зоны пласта, поддержания высокого уровня добычи или восстановления связи скважины с пластом.
- Фундаментальные законы сохранения массы, импульса, энергии позволяют описать фильтрацию жидкостей и газов в продуктивных пластах.
- Множество работ посвящено темам моделирования процессов фильтрации в нефтегазовой отрасли, применения гидравлического разрыва пласта для разработки месторождений углеводородов. Проводятся теоретические исследования фильтрации в пластах с трещинами ГРП. Одним из актуальных и перспективных направлений исследований является нестационарная фильтрация флюида в трещине ГРП при переменных режимах работы скважины.
- До выполнения операции гидроразрыва пласта требуется серьёзная подготовка: анализ имеющейся информации, подбор скважин-кандидатов, геомеханическое моделирование и построение дизайна ГРП. Для оценки качества проведённого ГРП используют гидродинамические исследования скважин, основанные на анализе данных по замерам глубинными приборами.

## Глава 2. Фильтрация флюида в трещине ГРП и пористой среде вблизи трещины

### 2.1 Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим вертикальную трещину, полученную в результате проведения операции гидравлического разрыва пласта. Предполагается, что, во-первых, данная трещина симметрична относительно ствола скважины, во-вторых, для предотвращения смыкания она закреплена пропантом, то есть её размеры не изменяются. Нашей задачей является изучение динамики распределения давления в описанной трещине ГРП во время работы скважины.

Закачиваемая жидкость попадает из скважины в трещину, затем «вытекает» в пласт и течёт перпендикулярно направлению развития трещины (рис. 2.1). В рамках поставленной задачи считаем, что жидкость из трещины в пористую среду поступает только через её боковые поверхности, поток через торцы трещины не учитывается вследствие его незначительности.

Предполагаем, что пласт однородный с постоянной толщиной и проницаемостью, глубина залежи не влияет на давление жидкости в трещине и пласте, скелет пористой среды пласта и трещины несжимаемый.

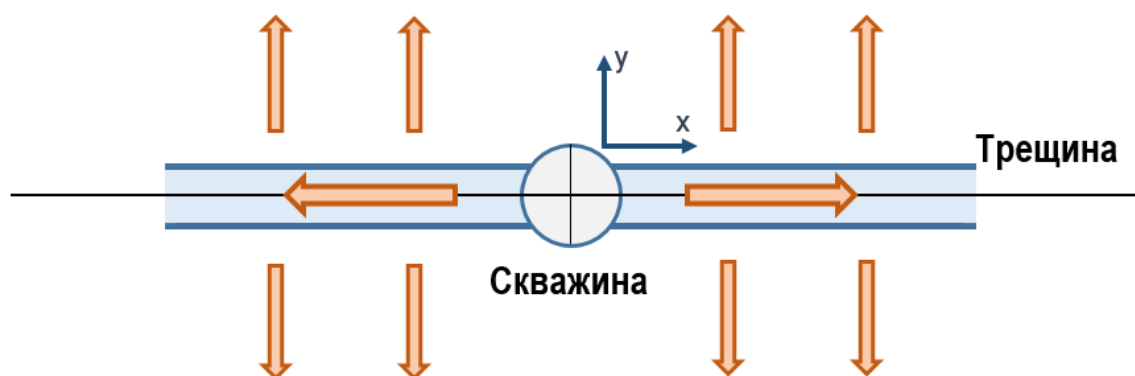


Рис. 2.1. Схема билинейного потока (в проекции OX-OY) для нагнетательной скважины

Схема билинейного течения (рис. 2.1) симметрична относительно осей  $OX$  и  $OY$ . Учитывая постановку задачи, можно уточнить, что в данном случае рассматриваем фильтрацию в первой четверти системы координат при положительных значениях  $OX$  и  $OY$ .

Отсчёт ведётся от стенки забойного участка (граница пласт-трещина), трещина проходит вдоль оси  $OX$  и перпендикулярно оси  $OY$ . Течение билинейное.

Трещина считается недеформируемой, её ширина  $d_f$  значительно меньше высоты  $h_f$ , то есть  $h_f \gg d_f$ . Проницаемость пласта  $k_p$  намного меньше проницаемости трещины  $k_f$ , то есть  $k_f \gg k_p$ . Индекс  $f$  соответствует трещине, а  $p$  маркирует пласт. Рассматриваем только одно крыло трещины, поскольку предполагается, что трещина симметричная.

Систему уравнений, которая описывает фильтрацию жидкости в пласте и трещине ГРП, получаем в предположении, что длина трещины  $l_f$  бесконечна.

Запишем уравнение сохранения массы жидкости в трещине ГРП

$$d_f m_f \frac{\partial(\rho_f v_f)}{\partial x} - 2m_p \rho_0 v_p \Big|_{y=0} = d_f m_f \left( \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \right), \quad 0 < x < +\infty, \quad (2.1)$$

где  $v_p(x, y, t)$  – скорость флюида в пласте,  $v_f(x, t)$  – скорость флюида в трещине ГРП,  $\rho_p(x, y, t)$  и  $\rho_f(x, t)$  – плотности жидкости в пласте и трещине, соответственно,  $m_f$  – пористость трещины,  $m_p$  – пористость пласта.

Считаем, что скорости небольшие, жидкость ньютоновская, поток ламинарный. Тогда согласно закону Дарси, описывающему течение в трещине и пористой среде, имеем

$$v_f = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial x}, \quad v_p = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P_p}{\partial y}, \quad (2.2)$$

где  $P_f, P_p$  – давление жидкости,  $\mu$  – динамическая вязкость.

Сжимаемость флюида учитывается в акустическом приближении, то есть

$$P_f - P_0 = C^2(\rho_f - \rho_0), \quad P_p - P_0 = C^2(\rho_p - \rho_0), \quad (2.3)$$

где  $C$  – скорость звука флюида. Нижний индекс 0 соответствует начальному невозмущенному состоянию. Жидкость будем считать слабосжимаемой, значит,  $|\rho_i - \rho_0| \ll \rho_i \approx \rho_0$ .

Подставляем закон Дарси (2.2) и условие для сжимаемости жидкости (2.3) в уравнение (2.1), получим

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\rho_0 C^2 k_f}{\mu m_f} \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p}{m_f d_f} \frac{\rho_0 C^2 k_p}{\mu m_p} \frac{\partial P_p}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad 0 < x < l_f. \quad (2.4)$$

Предполагаем, что жидкость в пласте распространяется преимущественно перпендикулярно стенкам трещины. Данное допущение принято в работах многих авторов, например, Н. Cinco-Ley [106], З.М. Нагаевой и В.Ш. Шагапова [61], И.Л. Хабибуллина и А.А. Хисамова [83]. Кроме того, в работе [61] даны необходимые оценки, при которых можем пренебречь радиальной составляющей течения жидкости в направлении от скважины.

Запишем уравнение сохранения массы для данного случая

$$m_p \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_p v_p)}{\partial y} = 0, \quad 0 < y < \infty. \quad (2.5)$$

Учитывая (2.2) и (2.3), получаем

$$m_p \frac{1}{C^2} \frac{\partial P_p}{\partial t} - \frac{\rho_0 k_p}{\mu} \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} = 0. \quad (2.6)$$

Подставим выражение для коэффициента пьезопроводности

$$\alpha_i = \frac{\rho_0 C^2 k_i}{\mu m_i}$$

в уравнения (2.4), (2.6) и запишем систему, описывающую фильтрацию флюида в трещине ГРП и окружающем пласте, в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{\partial P_f}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \frac{\partial P_p}{\partial y} \Big|_{y=0}, & 0 < x < l_f, \\ \frac{\partial P_p}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2}, & 0 < x < l_f, 0 < y < \infty. \end{cases} \quad (2.7)$$

При этом  $P_f = P_f(t, x)$ ,  $P_p = P_p(t, x, y)$ ,  $l_f = \infty$ .

Заметим, что первое уравнение отличается от классического уравнения пьезопроводности последним слагаемым правой части  $2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \frac{\partial P_p}{\partial y}$ , которое появляется в (2.1) при учёте фильтрации флюида через стенки трещины.

Определим краевые условия.

Во-первых, давление на поверхности стенки равно давлению в трещине, то есть

$$P_f = P_p \Big|_{y=0}. \quad (2.8)$$

Во-вторых, давление на большом расстоянии от трещины совпадает с начальным значением, значит

$$P_p \Big|_{y=\infty} = P_0. \quad (2.9)$$

При  $t \rightarrow -\infty$  система находится в покое, поэтому

$$P_f \Big|_{t=-\infty} = P_p \Big|_{t=-\infty} = P_0, \quad (2.10)$$

$$\Delta P_f = P_f - P_0.$$

Рассмотрим второе уравнение системы (2.7) и воспользуемся классическим решением уравнения пьезопроводности (теплопроводности) [69, с. 238]

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2}, \quad P_p = P_p(x, y, t). \quad (2.11)$$

Сначала найдём решение  $P_p = U(x, y, t)$ ,  $0 < x < l_f$ , удовлетворяющее условиям (рис. 2.2)

$$U \Big|_{\substack{t>0 \\ y=0}} = 1, \quad (2.12)$$

$$U \Big|_{\substack{t=0 \\ y>0}} = 0. \quad (2.13)$$

Тогда

$$U(x, y, t) = \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{\alpha_p t}} \right), \quad t > 0, \quad (2.14)$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds. \quad (2.15)$$

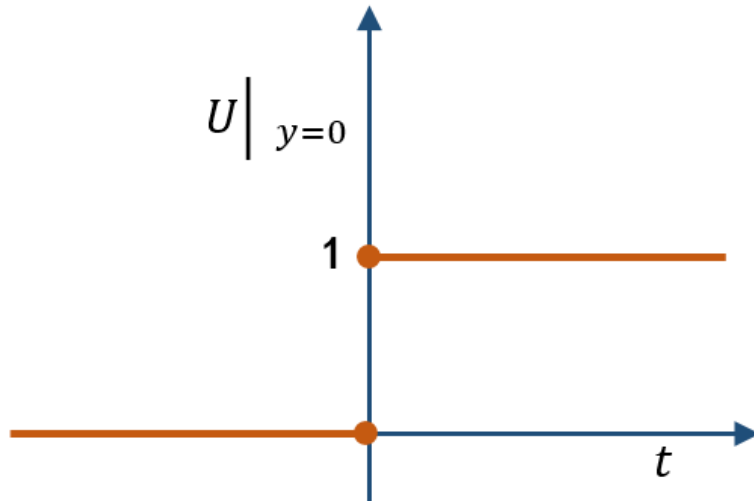


Рис. 2.2. График функции  $U$  при  $y = 0$



Рассмотрим решение  $P_p = v(x, y, t)$  уравнения (2.11), удовлетворяющее условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad (2.16)$$

$$v|_{y=0} = \begin{cases} c_0, & t_0 < t \leq t_1, \\ 0, & t > t_1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Воспользуемся линейностью уравнения (2.11), тогда

$$v = c_0 [U(x, y, t - t_0) - U(x, y, t - t_1)]$$

удовлетворяет условиям (2.16) и (2.17).

Продолжая данные рассуждения в поисках решения уравнения (2.11) с условиями (2.16) и

$$v|_{y=0} = f(t), \quad t > 0, \quad (2.18)$$

$$f(t) = \begin{cases} c_0, & t_0 < t \leq t_1, \\ c_1, & t_1 < t \leq t_2, \\ \dots & \\ c_n, & t_n < t, \end{cases} \quad (2.19)$$

получим

$$v = \sum_{i=1}^{n-1} c_{i-1} [U(x, y, t - t_{i-1}) - U(x, y, t - t_i)] + c_n U(x, y, t - t_n). \quad (2.20)$$

Заметим, что

$$U(x, y, t - t_{i-1}) - U(x, y, t - t_i) = \frac{\partial U}{\partial t}(x, y, t - \tau)|_{\tau=\tau_i} \cdot \Delta \tau_i, \quad (2.21)$$

где  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Применяем теорему о среднем. Если рассматривать произвольную функцию  $f(t)$  как предел кусочно-постоянных функций вида (2.19), то получаем решение уравнения (2.11) при условии (2.18)

$$v = \lim_{\max \Delta \tau_i \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} c_i \frac{\partial U}{\partial t}(x, y, t - \tau) \Delta \tau_i + c_n U(x, y, t - t_n) \right],$$

то есть

$$v = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, y, t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (2.22)$$

Итак, решение, определяемое формулой (2.22), удовлетворяет уравнению (2.11) с условиями (2.16) и (2.18).

Справедливость данных рассуждений можно строго обосновать, используя теорию интегралов Римана-Стилтьеса [68].

Таким образом, подставляя формулу (2.22) во второе уравнение системы (2.7) и применяя в качестве  $f(\tau)$  значения на границе трещины ГРП  $\Delta P_f(\tau, x)$ , получим

$$\Delta P_p = \int_{-\infty}^t \frac{\partial U(y, t - \tau)}{\partial t} \Delta P_f(\tau, x) d\tau, \quad (2.23)$$

где

$$U(y, t - \tau) = \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{\alpha_p(t - \tau)}} \right),$$

$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$  – дополнительная функция ошибок [69, с. 233].

Далее интегрируем по частям (2.23), то

$$\Delta P_p = -\Delta P_f(\tau, x) U(y, t - \tau) \Big|_{\tau=-\infty}^t + \int_{-\infty}^t U(y, t - \tau) \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau.$$

Заметим, что  $U(y, 0) = 0$ . Учитывая краевые условия, решение второго уравнения в системе (2.7) запишем в виде

$$P_p(t, x) - P_0 = \int_{-\infty}^t U(y, t - \tau) \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.24)$$

Найдем  $\left. \frac{\partial P_p}{\partial \tau} \right|_{y=0}$  для подстановки в первое уравнение системы (2.7)

$$\left. \frac{\partial P_p}{\partial y} \right|_{y=0} = \int_{-\infty}^t \left. \frac{\partial U(y, t - \tau)}{\partial y} \right|_{y=0} \cdot \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.25)$$

Вычислим

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{2\sqrt{\alpha_p(t-\tau)}} \right) \right) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left( \frac{y}{2\sqrt{\alpha_p(t-\tau)}} \right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha_p(t-\tau)}}.$$

Тогда

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_p(t-\tau)}}.$$

С учётом последнего выражения и (2.25) можем записать

$$\left. \frac{\partial P_p}{\partial y} \right|_{y=0} = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p(t-\tau)}}.$$

Подставляя полученное выражение в первое уравнение системы (2.7), запишем основное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Delta P_f}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} - \frac{2m_p \alpha_p}{m_f d_f} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p(t-\tau)}}, \quad (2.26)$$

описывающее фильтрацию флюида в трещине ГРП.

В рамках рассматриваемой задачи можно пренебречь упругоёмкостью трещины [61], то есть не учитывать слагаемое в левой части уравнения (2.26).

Тогда получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} = \chi_f \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}, \quad (2.27)$$

где

$$\chi_f = \frac{2 m_p \sqrt{\mathfrak{a}_p}}{d_f m_f \mathfrak{a}_f}. \quad (2.28)$$

Если расписать (2.28) с учётом выражения для коэффициента пьезопроводности, то заметим, что значение пористости трещины сокращается, тогда

$$\chi_f = \frac{2\sqrt{m_p}\sqrt{\mu}\sqrt{k_p}}{d_f Ck_f\sqrt{\rho_0}}.$$

Таким образом, решение (2.27) от  $m_f$  не зависит, но  $m_f$  влияет на оценку критического времени.

Заметим, что уравнение (2.27) линейное и однородное относительно  $\Delta P_f$ . Найдем решение данного уравнения.

Оценим для каких значений времени можно пренебречь слагаемым в левой части (2.26), то есть определим при каких  $t^*$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{2m_p\sqrt{\mathfrak{a}_p}}{m_f d_f \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \right| \gg \left| \frac{\partial \Delta P_f}{\partial t} \right|.$$

Заметим, что

$$\left| \frac{2m_p\sqrt{\mathfrak{a}_p}}{m_f d_f \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \right| / \left| \frac{\partial \Delta P_f}{\partial t} \right| \sim \left| \frac{2m_p\sqrt{\mathfrak{a}_p}}{m_f d_f \sqrt{\pi}} \sqrt{t^*} \right|,$$

тогда  $t^* = \left( \frac{m_f d_f \sqrt{\pi}}{2m_p \sqrt{\mathfrak{a}_p}} \right)^2$ .

Значит, слагаемое в левой части уравнения (2.26) можно не учитывать, если для времени выполняется условие

$$\tilde{t} \gg t^*, \quad t^* = \frac{\pi}{4} \left( \frac{m_f}{m_p} \right)^2 \frac{d_f^2}{\mathfrak{a}_p}. \quad (2.29)$$

Таким образом, получена оценка критических значений характерного времени (2.29).

Учитывая принятые в работе значения параметров ( $m_f = 0.3$  д. ед.,  $m_p = 0.1$  д. ед.,  $d_f = 0.005$  м) и величину коэффициента пьезопроводности ( $\alpha_p = 0.0225$  м<sup>2</sup>/с) было рассчитано значение  $t^*$  по формуле (2.29). Оно составляет 0.00785 с, что значительно меньше одной секунды.

Для определения границ применимости модели рассмотрим следующий случай. Предположим, что ширина трещины достигает некоторого предельного значения  $d_f = 0.01$  м. При этом  $t^*$  будет составлять 0.0314 с.

На рис. 2.3 показана зависимость критического времени  $t^*$  от ширины трещины ГРП  $d_f$ . На рисунке приведены результаты при различных значениях проницаемости пласта ( $10^{-14}$ ,  $10^{-15}$ ,  $10^{-16}$  м<sup>2</sup>) и ширины трещины (от 0.001 до 0.01 м). Заметим, что чем больше ширина трещины, тем больше значение критического времени. Кроме того, чем выше проницаемость пласта, тем ниже критическое время.

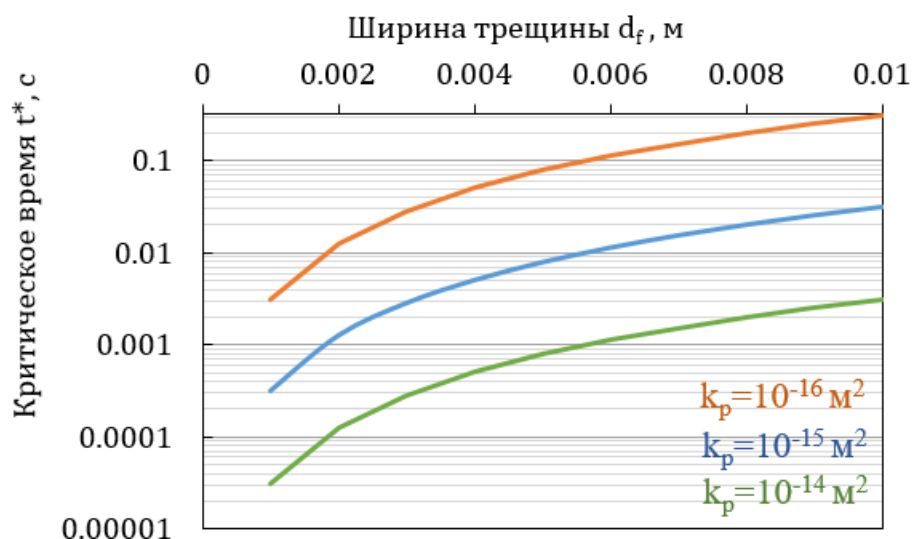


Рис. 2.3. Зависимость критического времени от ширины трещины

Зависимость критического времени  $t^*$  от пористости пласта представлена на рисунке 2.4.

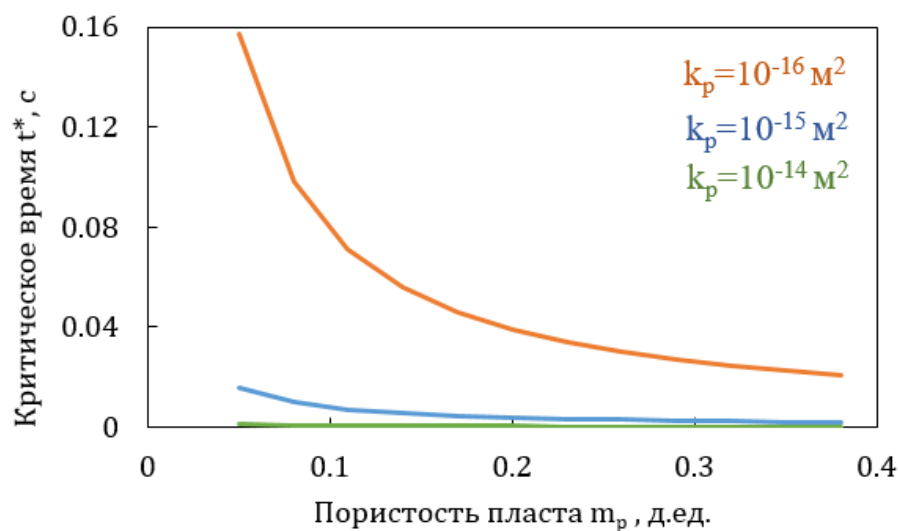


Рис. 2.4. Зависимость критического времени от пористости пласта

Учитывая результаты, представленные на рисунках 2.3 и 2.4, отметим, что с улучшением фильтрационно-ёмкостных свойств породы значение критического времени уменьшается.

Итак, по итогам вышесказанного можно сделать вывод, что для нефтепромысловых задач величина времени (секунда, час, сутки, месяц, год) удовлетворяет условию (2.29).

## 2.2 Решение при резком изменении давления на постоянную величину

Пусть изначально флюид в пласте и трещине пребывает в покое, то есть при  $t < \tau_0$  скорости течения флюида равны нулю  $v_p = v_f = 0$ , а давление в пласте и трещине постоянно  $P_p = P_f = P_0 = const$ .

Условия изменения давления в трещине можно представить в виде

$$\Delta P_f = \begin{cases} 0, & t < \tau_0, x > 0, \\ \Delta P_{(w)}, & t \geq \tau_0, x = 0. \end{cases}$$

В работе З.М. Нагаевой и В.Ш. Шагапова [112] приводится решение поставленной задачи через функцию

$$\text{Gil}(z) = 1 - \frac{1}{\pi^0} \int_0^\infty \frac{\sin(z\eta^{1/4})}{\eta} e^{-\eta - z\eta^{1/4}} d\eta.$$

Распределение давления в трещине определяется формулой

$$\Delta P_f = \Delta P_{(w)} \cdot \text{Gil} \left( \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{x}{(t - \tau_0)^{1/4}} \right), \quad t > \tau_0, \quad (2.30)$$

где  $\chi_f = \frac{2 m_p \sqrt{\alpha_p}}{d_f m_f \alpha_f}$ .

На основе этого решения определяется объёмный расход жидкости в одном крыле на единицу высоты трещины

$$q = \frac{d_f k_f}{\mu} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = -\frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{d_f k_f}{\mu} \Delta P_{f(w)} \int_0^\infty e^{-(t-\tau_0)\xi^4} d\xi,$$

при этом

$$\int_0^\infty e^{-(t-t_0)\xi^4} d\xi = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) (t - t_0)^{-1/4},$$

где  $\Gamma$  – Гамма-функция [70] и  $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0.906$ .

Расход жидкости можно вычислить по формуле

$$q \approx -\frac{3.6}{\pi} \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{d_f k_f}{\mu} \frac{\Delta P_{f(w)}}{(t - \tau_0)^{1/4}}, \quad t > \tau_0. \quad (2.31)$$

Допустим, что в момент времени  $t = \tau_0$  происходит скачок давления на величину  $\Delta P_{(w)} = P_{(w)} - P_0$  вследствие запуска в работу скважины или смены её режима. Значение  $\Delta P_{(w)}$  может быть положительным или отрицательным, что зависит от режима работы скважины: нагнетание или добыча флюида. В данной работе рассматривается процесс нагнетания в пласт, а значит  $\Delta P_{(w)} > 0$ .

Затем давление не меняется вплоть до следующего скачка  $\Delta P_{(w)1}$  в момент времени  $\tau_1$ .

На рисунке ниже схематично показана динамика забойного давления в зависимости от величины  $\Delta P_{(w)}$ . В одном случае график выглядит как буква «П» (рис. 2.5 а), в другом – как ступеньки лестницы (рис. 2.5 б).

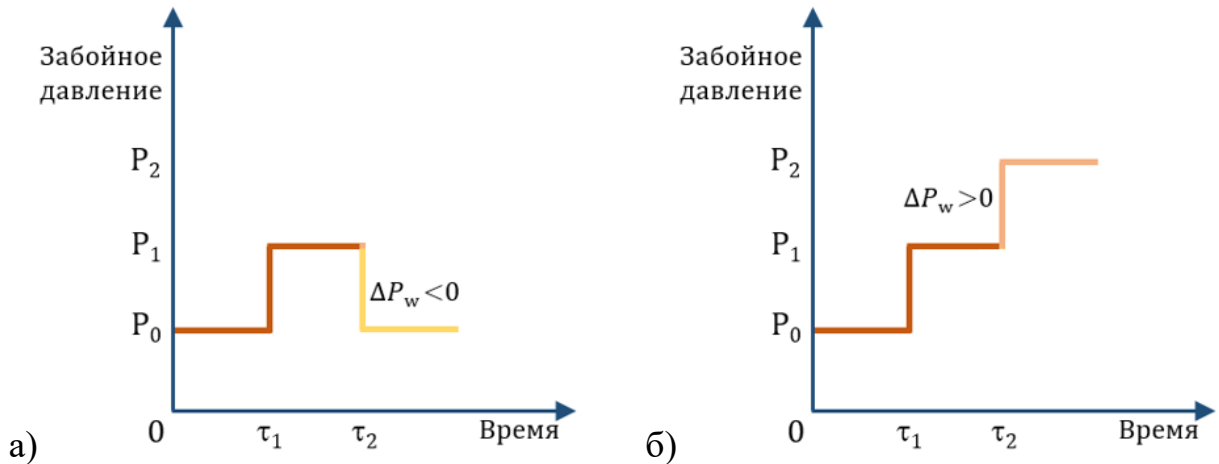


Рис. 2.5. Изменение забойного давления:

а) П-образное; б) двухступенчатое

Объём флюида, закачанного в пласт ( $\Delta P_{(w)} > 0$ ) или извлечённого из пласта ( $\Delta P_{(w)} < 0$ ) через два крыла трещины при высоте трещины  $h_f$ , будет определяться по формуле

$$V = 2h_f \int_{t_0}^t q dt = -\frac{4.8 \cdot 2}{\pi} \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{d_f k_f h_f \Delta P_{(w)}}{\mu} (t - \tau_0)^{3/4}, \quad t > \tau_0.$$

### 2.3 Случай кусочно-постоянного изменения давления скважины

Используя формулу (2.30), найдем решение, которое будет учитывать скачки давления в моменты времени  $\tau_j$ , а в интервалах времени  $[\tau_{j-1}, \tau_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  перепад давления будет принимать постоянное значение  $\Delta P_{(w)j}$ .



При таких условиях решение, описывающее эволюцию давления в трещине ГРП, примет вид

$$\Delta P_f(x, t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \Delta P_{(w)0} \cdot \text{Gil}(z_0), & 0 \leq t < \tau_1, \\ \Delta P_{(w)0} \cdot \text{Gil}(z_0) + (\Delta P_{(w)1} - \Delta P_{(w)0}) \cdot \text{Gil}(z_1), & t \geq \tau_1, \end{cases} \quad (2.32)$$

где

$$z_0 = \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} x t^{-\frac{1}{4}}, \quad z_1 = \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} x (t - \tau_1)^{-\frac{1}{4}}.$$

В данном случае решение определяется выражением

$$\Delta P_f(t, x) = H(t) \Delta P_{(w)0} \cdot \text{Gil}(z_0) + \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) \text{Gil}(z_i),$$

где

$$z_i = \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} x (t - \tau_i)^{1/4}$$

и  $H(t)$  – функция Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда формула (2.31) преобразуется следующим образом

$$q = -\frac{3.6}{\pi} \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{d_f k_f}{\mu} \left[ H(t) \frac{\Delta P_{(w)0}}{\tau^{1/4}} + \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) \frac{(\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1})}{(t - \tau_i)^{1/4}} \right]. \quad (2.33)$$

Из (2.32) получим выражения для вычисления расхода жидкости на единицу высоты трещины

$$q = \begin{cases} -\Delta P_{(w)0} \cdot \frac{3.6}{\pi} \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{d_f k_f}{\mu} t^{-1/4}, & 0 \leq t < \tau_1, \\ -\frac{3.6}{\pi} \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{d_f k_f}{\mu} \left( \Delta P_{(w)0} \cdot t^{-1/4} - \left( \Delta P_{(w)1} - \Delta P_{(w)0} \right) \cdot (t - \tau_1)^{-1/4} \right), & t > \tau_1. \end{cases} \quad (2.34)$$

Формулы (2.32) и (2.34) записаны для случая двухступенчатого изменения забойного давления скважины на величину  $\Delta P_{(w)0}$  МПа при  $\tau_0 = 0$  и резком увеличении до  $\Delta P_{(w)1}$  МПа в момент времени  $\tau_1$ .

Для описания П-образного изменения забойного давления также используются формулы (2.32), (2.34), но учитываем, что  $\Delta P_{(w)1} = 0$ .

При проведении дальнейших вычислений для свойств флюида и фильтрационных характеристик системы «скважина-пласт-трещина» использовали значения, приведенные в таблице 1.

Таблица 1. *Параметры системы, используемые для расчёта*

Параметр	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Пористость пласта	$m_p$	0.1	д. ед.
Проницаемость пласта	$k_p$	$10^{-15}$	$\text{м}^2$
Проницаемость трещины	$k_f$	$10^{-10}$	$\text{м}^2$
Ширина трещины	$d_f$	0.005	м
Плотность жидкости	$\rho_0$	1000	$\text{кг}/\text{м}^3$
Скорость звука	$C$	1500	м/с
Динамическая вязкость	$\mu$	$10^{-3}$	Па·с

На рисунке 2.6 представлено двухступенчатое изменение давления скважины за двое суток: на величину  $\Delta P_{(w)0} = 10$  МПа в момент времени  $\tau_0 = 0$  и резкое увеличение до  $\Delta P_{(w)1} = 20$  МПа через одни сутки в момент времени  $\tau_1$ .

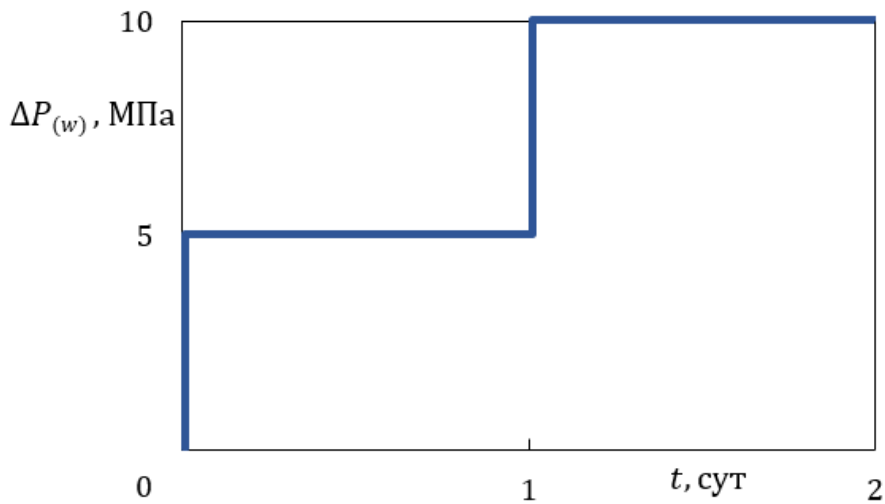


Рис. 2.6. Двухступенчатое изменение забойного давления

По формуле (2.34) определён расход жидкости на единицу высоты трещины при двухступенчатом изменении давления (рис. 2.7). Стоит отметить, что  $q = Q / h$ , поэтому единица измерения расхода [ $\text{м}^2/\text{сут}$ ].

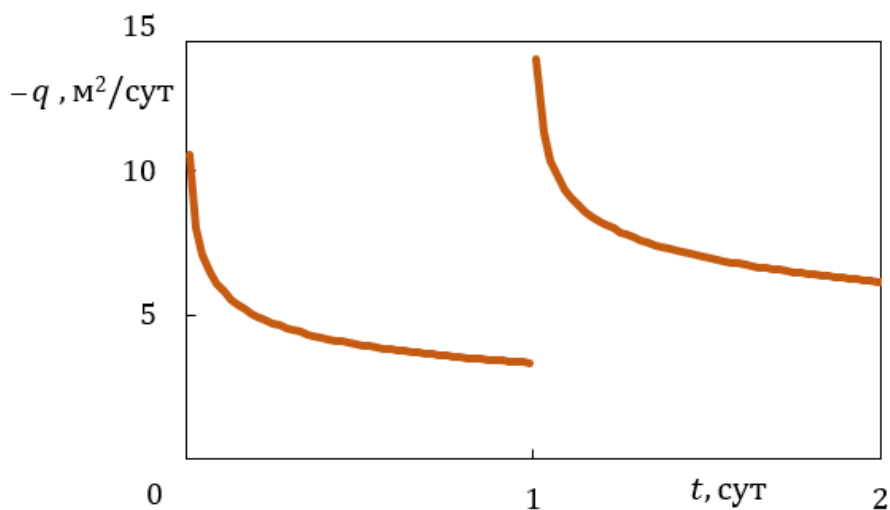


Рис. 2.7. Динамика расхода жидкости при двухступенчатом изменении давления

Эволюция давления в трещине при двухступенчатом изменении забойного давления скважины представлена на рис. 2.8. Линии 1, 2, 3, 4 соответствуют моментам времени  $t$  (6 часов; 1 сутки; 1 сутки 30 минут; 2 суток).

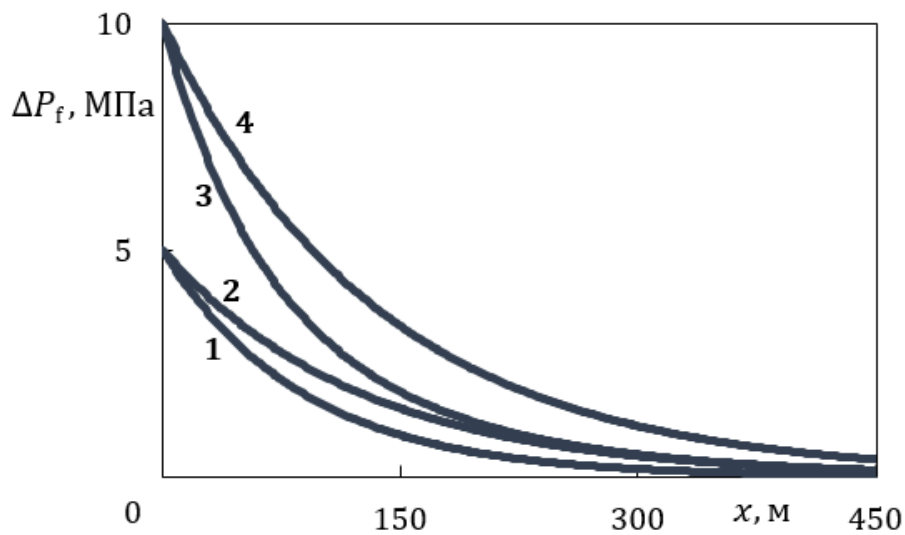


Рис. 2.8. Давление в трещине при двухступенчатом изменении забойного давления спустя: 1) 6 часов; 2) 1 сутки; 3) 1 сутки 30 мин.; 4) 2 суток

Проведём аналогичные расчёты для П-образного изменения давления. На рис. 2.9 показано, что в момент времени  $\tau_0 = 0$  происходит скачок значения забойного давления, затем оно не меняется в течении суток, то есть до момента  $\tau_1$ , где вновь возвращается к начальному значению.

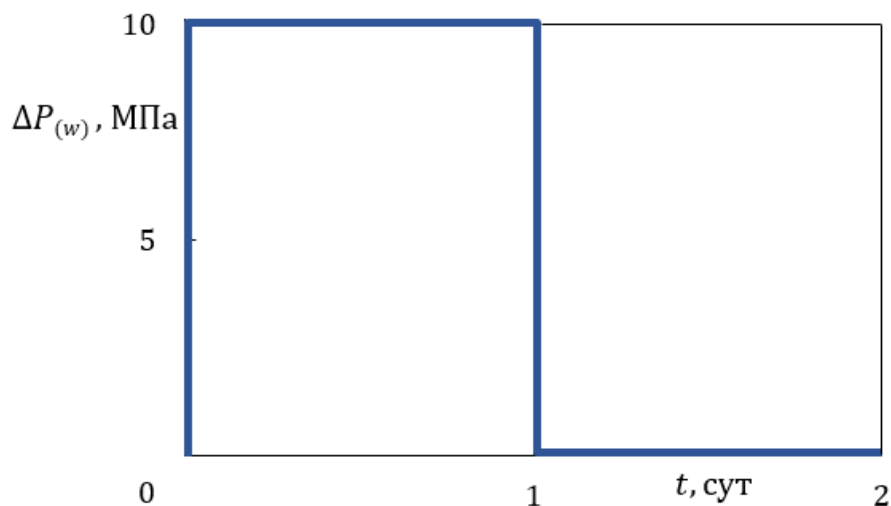


Рис. 2.9. П-образное изменение давления на забое скважины

На рис. 2.10 представлен расход жидкости при П-образном изменении забойного давления за двое суток.

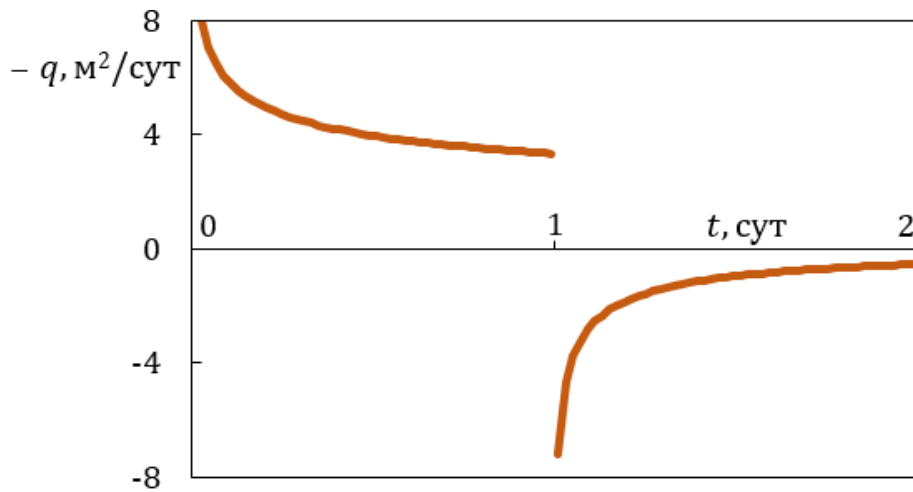


Рис. 2.10. Изменение расхода жидкости на единицу высоты трещины при П-образном изменении давления

Распределение давления в трещине при П-образном изменении забойного давления скважины приведено на рис. 2.11, причём линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют определённым моментам времени.

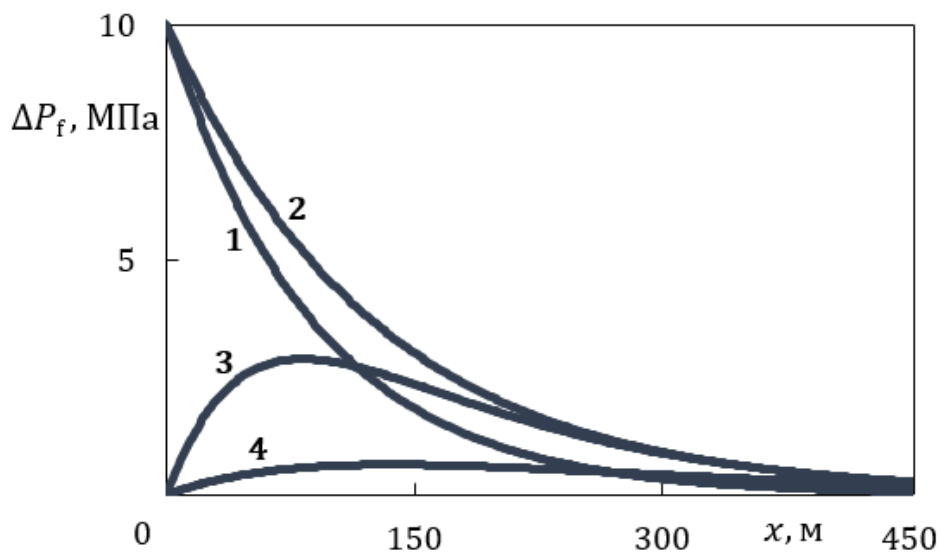


Рис. 2.11. Давление в трещине при П-образном изменении забойного давления спустя: 1) 6 часов; 2) 1 сутки; 3) 1 сутки 30 мин.; 4) 2 суток

Далее были проведены расчёты для линейного и Λ-образного изменения давления на забое скважины, то есть рассмотрен случай, когда перепад

давления  $\Delta P_{(w)}$  увеличивается по линейному закону от нулевого значения до значения  $\Delta P_{(w)1}$  за время  $\tau_1$ . Значит, можем записать

$$\Delta P_{(w)}(t) = \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} t,$$

$$\Delta P_f(t, x) = \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} \cdot \int_0^t \text{Gi}l \left( \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{x}{(t-\tau)^{1/4}} \right) d\tau.$$

При этом расход жидкости на единицу высоты трещины составляет

$$q = -1.53 \frac{\sqrt{\frac{\chi_f}{2}} k_f d_f}{\mu} \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} t^{3/4}.$$

## 2.4 Случай непрерывного изменения давления в скважине

Считаем, что начальное давление в пласте и на забое равно  $P_0$  (рис. 2.12).

Давление в скважине изменяется непрерывно, значит

$$\Delta P_{(w)}(t) = \Delta P_f(t, 0), \quad \Delta P_f = P_f - P_0, \quad t \geq \tau_0.$$

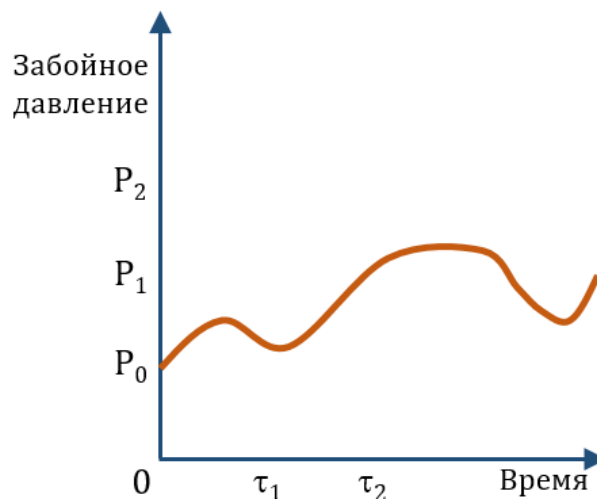


Рис. 2.12. Пример непрерывного изменения забойного давления скважины

Пусть временной интервал  $[\tau_0, t)$  разбит на промежутки точками  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ . Введем сумму

$$\Delta P_f(t, x) = \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) \cdot \text{Gil} \left( \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{x}{(t - \tau_i)^{\frac{1}{4}}} \right) + (\Delta P_{(w)}(\tau_i) - \Delta P_{(w)}(\tau_{i-1})).$$

Данное выражение соответствует ступенчатому изменению давления в скважине. При  $\max(\tau_i - \tau_{i-1}) \rightarrow 0$  оно может рассматриваться, как интегральная сумма

$$\Delta P_f(t, x) = \int_{\tau_0}^t \text{Gil} \left( \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{x}{(t - \tau)^{\frac{1}{4}}} \right) dP_{(w)}(\tau). \quad (2.35)$$

С учётом (2.35) расход жидкости скважины представим в виде

$$q = \frac{d_f k_f}{\mu} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \frac{d_f k_f \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \text{Gil}'(0)}{\mu} \int_{\tau_0}^t (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial P_{(w)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

где

$$\text{Gil}'(0) = \left( \frac{d}{dz} \text{Gil}(z) \right) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \eta^{-\frac{3}{4}} e^{-\eta} d\eta = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi}.$$

Поэтому

$$q = \frac{d_f k_f \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\mu} \int_{\tau_0}^t (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial P_{(w)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad t > \tau_0,$$

то есть

$$q = -1.154 \frac{d_f k_f \sqrt{\frac{\chi_f}{2}}}{\mu} \int_{\tau_0}^t (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial P_{(w)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.36)$$

Пусть забойное давление скважины меняется согласно линейному закону (рис. 2.13).

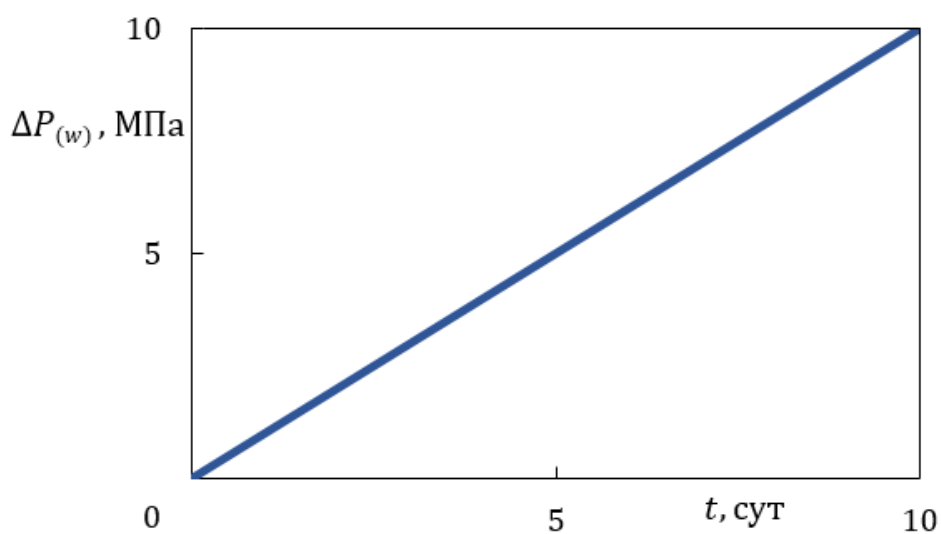


Рис. 2.13. График изменения забойного давления по линейному закону

На основе формул (2.35) и (2.36) определяем расход жидкости скважины с вертикальной трещиной ГРП (рис. 2.14) и давление в самой трещине (рис. 2.15).

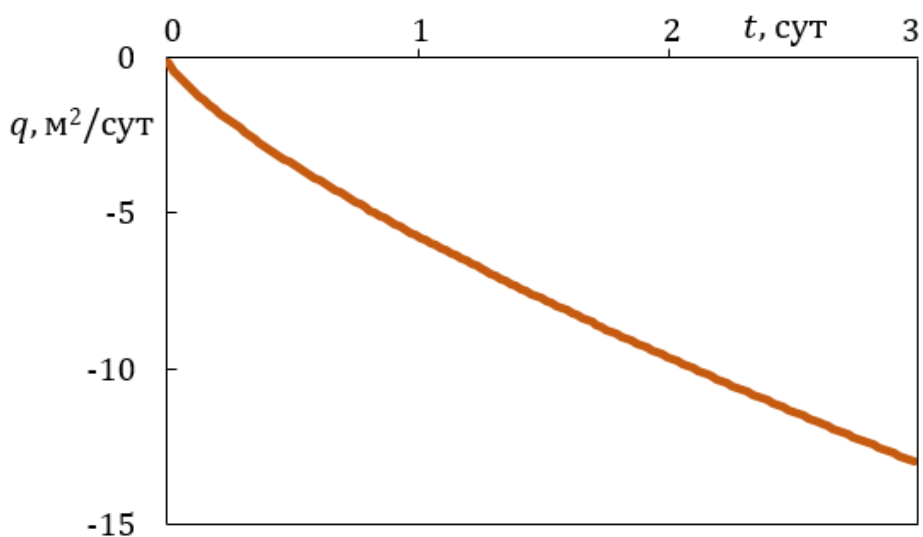


Рис. 2.14. Динамика расхода жидкости при росте давления по линейному закону



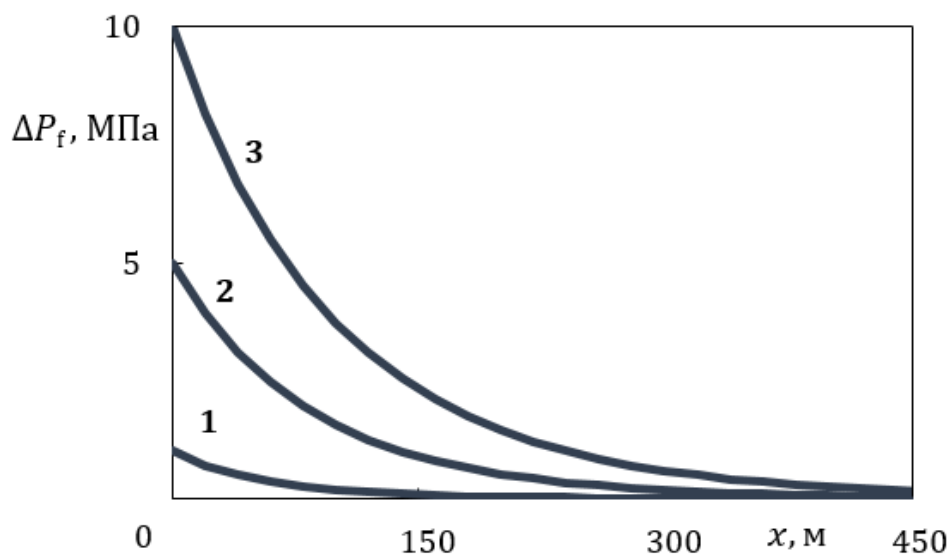


Рис. 2.15. Распределение давления в трещине при линейном изменении забойного давления спустя: 1) 1 сутки; 2) 5 суток; 3) 10 суток

Рассмотрим  $\Lambda$ -образное изменение забойного давления скважины с вертикальной трещиной ГРП (рис. 2.16).

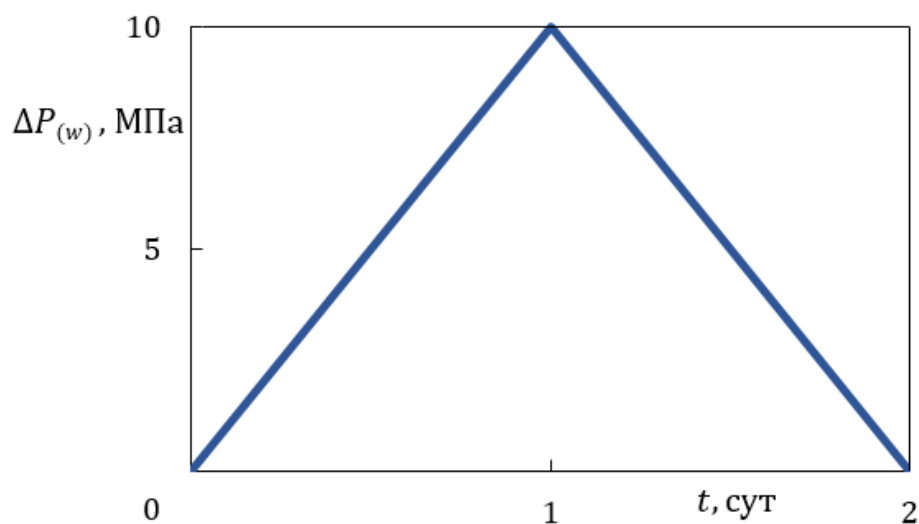


Рис. 2.16.  $\Lambda$ -образное изменение забойного давления

Для вычисления динамики расхода жидкости на единицу высоты трещины (рис. 2.17) используем выражение

$$q = -1.53 \frac{\sqrt{\chi_f} k_f d_f}{\mu} \Delta P_{(w)l} (t^{3/4} - 2(t - \tau_1)^{3/4}).$$

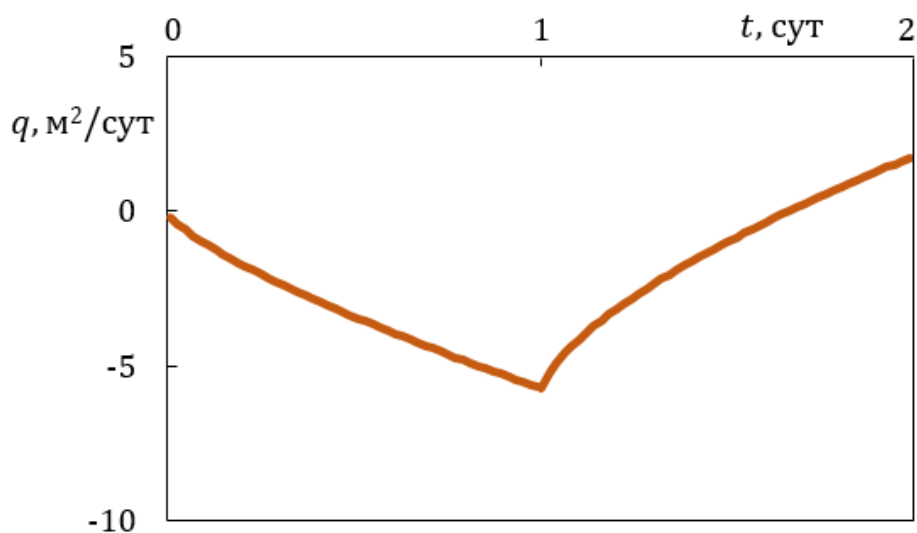


Рис. 2.17. Расход жидкости при  $\Lambda$ -образном изменении забойного давления

Давление в трещине ГРП (рис. 2.18) при  $\Lambda$ -образном изменении забойного давления определяем как

$$\Delta P_f(t, x) = \frac{\Delta P_{(w)l}}{\tau_1} \cdot \int_0^{\tau_1} \text{Gil} \left( \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{x}{(t-\tau)^{1/4}} \right) d\tau - \frac{\Delta P_{(w)l}}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \int_{\tau_1}^t \text{Gil} \left( \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{x}{(t-\tau)^{1/4}} \right) d\tau.$$

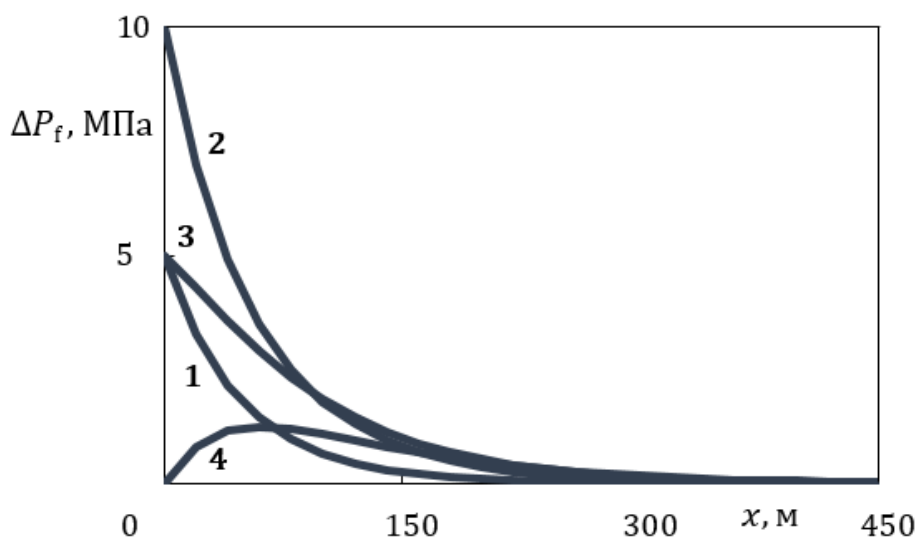


Рис. 2.18. Распределение давления в трещине при  $\Lambda$ -образном изменении забойного давления спустя: 1) 0.5 суток; 2) 1 сутки; 3) 1.5 суток; 4) 2 суток

Объём флюида, проходящий через два крыла трещины с момента начала работы скважины до момента времени  $t$ , вычисляем по формуле

$$V = 2h_f \int_{t_0}^t q(\tau) d\tau = -\frac{9.6}{\pi} \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{d_f k_f h_f}{\mu} \left( \Delta P_{(w)0} t^{\frac{3}{4}} + \sum_{i=1}^n H(t-t_i) \Delta P_{(w)i} (t-t_i)^{\frac{3}{4}} \right), t > 0.$$

Объём жидкости, поступающий в трещину из скважины, можно представить в виде

$$V = \begin{cases} \Delta P_{(w)0} \cdot \frac{9.6}{\pi} \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{d_f k_f h_f}{\mu} t^{\frac{3}{4}}, & 0 \leq t < \tau_1, \\ \Delta P_{(w)0} \cdot \frac{9.6}{\pi} \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{d_f k_f h_f}{\mu} \left( t^{\frac{3}{4}} - (t-\tau_1)^{\frac{3}{4}} \right), & t \geq \tau_1. \end{cases}$$

На рис. 2.19 показано изменение общего объёма закачиваемой в пласт жидкости через два крыла трещины высотой  $h_f = 20$  м при двухступенчатом (точечная линия) и П-образном (пунктирная линия) изменении давления.

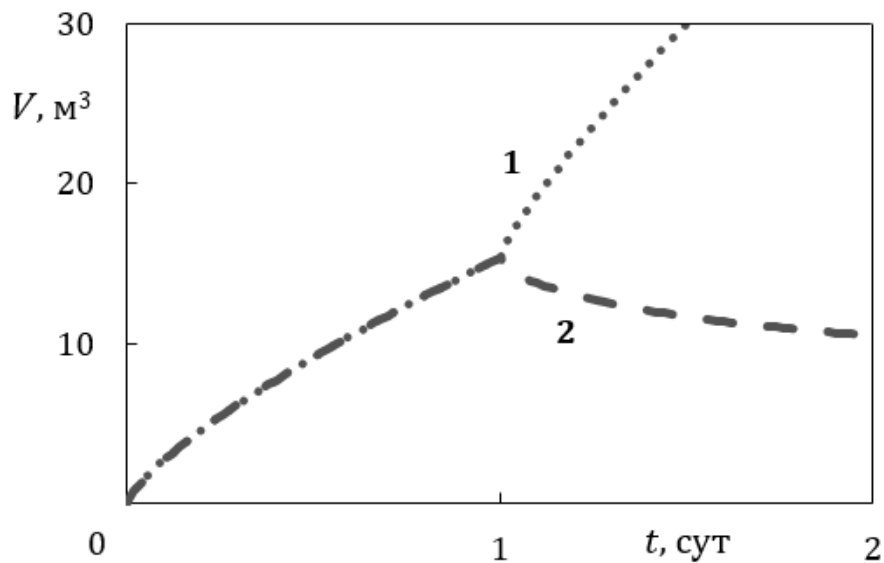


Рис. 2.19. Объём закачиваемой в пласт жидкости

## Выводы по второй главе

- Описана математическая модель фильтрации флюида в вертикальной трещине ГРП, удерживаемой пропантом. Нагнетаемая жидкость поступает из скважины в трещину, далее распространяется в пористую среду. Модель подразумевает билинейную схему течения жидкости. При постановке задачи сформулирован ряд допущений в качестве условий применимости данного подхода. Предполагается, что длина трещины гораздо больше ширины; трещина симметрична относительно ствола скважины; пласт однородный; глубина залегания залежи не влияет на давление жидкости в трещине и пласте и т.д.
- Теоретически изучена фильтрация флюида в трещине ГРП, окружающем пласте, а также динамика изменения давления и дебита при различных режимах работы скважины с непрерывным и кусочно-постоянным изменением забойного давления.
- Получено аналитическое решение интегро-дифференциального уравнения, которое, зная закон изменения забойного давления, позволяет определить расход жидкости на единицу высоты трещины в любой момент времени, а также динамику давления в трещине ГРП. Рассмотрены случаи П-образного, двухступенчатого, линейного, Л-образного изменения давления.
- Приведена формула для вычисления объёма флюида, проходящего через два крыла трещины, с начала работы скважины до определённого момента времени при двухступенчатом и П-образном изменении забойного давления.
- Все построенные графики отражают физику процесса.

### Глава 3. Определение давления скважины по изменению расхода

Рассмотрим обратную ситуацию. Пусть на основе известного изменения расхода необходимо смоделировать динамику давления. С практической точки зрения такая задача актуальна, и её решение позволит сделать выводы о характеристиках модели «скважина-трещина-пласт».

В рамках поставленной задачи рассматриваем вертикальную трещину, полученную в результате проведения ГРП. Предполагаем, что трещина симметрична относительно ствола скважины, и для предотвращения смыкания она закреплена пропантом.

Закачиваемая жидкость попадает из скважины в трещину, затем «вытекает» в пласт и течёт перпендикулярно направлению её развития. Считаем, что жидкость из трещины в пористую среду поступает только через её боковые поверхности; пласт однородный с постоянной толщиной и проницаемостью; глубина залежи не влияет на давление жидкости в трещине и пласте; скелет пористой среды пласта несжимаемый.

Фильтрацию флюида в трещине ГРП и пласте можно описать с помощью системы (2.7), ранее приведённой в главе 2, а именно

$$\begin{cases} \frac{\partial P_f}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \frac{\partial P_p}{\partial y} \Big|_{y=0}, & 0 < x < l_f, \\ \frac{\partial P_p}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2}, & 0 < x < l_f, \quad 0 < y < \infty. \end{cases}$$

Граничные условия (2.8), (2.9) предполагают, что давление на поверхности стенки равно давлению в трещине, то есть  $P_f = P_p \Big|_{y=0}$ . Давление на большом расстоянии от трещины совпадает с начальным значением, значит  $P_p \Big|_{y=\infty} = P_0$ .

При  $t \rightarrow -\infty$  система находится в покое, поэтому  $P_f|_{t=-\infty} = P_p|_{t=-\infty} = P_0$ ,  
 $\Delta P_f = P_f - P_0$ .

В данной главе описывается динамика расхода жидкости в трещине ГРП во время работы скважины, а также приводится сопоставление результатов с промысловыми данными.

### 3.1 Эволюция давления в призабойной зоне и в трещине ГРП при постоянном расходе скважины

При  $t < \tau_0$  флюид в пласте и трещине находится в невозмущённом состоянии ( $v_p = v_f = 0$ ). Запишем закон изменения давления в случае поддержания постоянного расхода  $q_0$  с момента времени  $\tau_0$

$$q_0 = \frac{d_f k_f}{\mu} \left( \frac{\partial \Delta P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}. \quad (3.1)$$

Если  $\Delta P_f$  – решение (2.28) то, в силу линейности этого уравнения, функция

$$Q = \frac{d_f k_f}{\mu} \frac{\partial \Delta P_f}{\partial x} \quad (3.2)$$

тоже является решением (2.28), то есть справедливо выражение

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \frac{\alpha_p}{\alpha_f} \int_{\tau_0}^t \frac{\partial Q}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}}. \quad (3.3)$$

Значит, решение вида (2.30) для этого случая при выполнении граничного условия (3.1) примет вид

$$Q = q \cdot \text{Gil} \left( \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{x}{(t - \tau_0)^{\frac{1}{4}}} \right).$$

Из (3.2) после взятия интеграла с учётом условия  $\Delta P_f|_{x=\infty} = 0$  получим

$$\Delta P_f = -\frac{(t - \tau_0)^{\frac{1}{4}} \cdot q\mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} \cdot \text{Zil}(z_0), \quad (3.4)$$

где согласно работе З.М. Нагаевой и В.Ш. Шагапова [61]

$$\text{Zil}(z) = \int_0^z \text{Gil}(\xi) d\xi,$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{x}{(t - \tau_0)^{\frac{1}{4}}}, \quad (\tau_0 \leq t).$$

Так как  $\Delta P_{(w)} = \Delta P_f|_{x=0}$ , то из (3.4) получим закон изменения перепада забойного давления

$$\Delta P_{(w)} = \frac{\text{Zil}(0)(t - \tau_0)^{\frac{1}{4}} \cdot q\mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}}, \quad (3.5)$$

где  $\chi_f = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \frac{\sqrt{\alpha_p}}{\alpha_f}$ .

Графики функций  $\text{Gil}(z)$  и  $\text{Zil}(z)$  приведены в работе [62], а величина  $\text{Zil}(0) \approx 0.78$ .

На рисунке 3.1 продемонстрировано распределение давления в трещине при внезапном изменении расхода на постоянную величину 1 м<sup>2</sup>/сут (спустя 6 часов от начала работы и к концу первых суток).

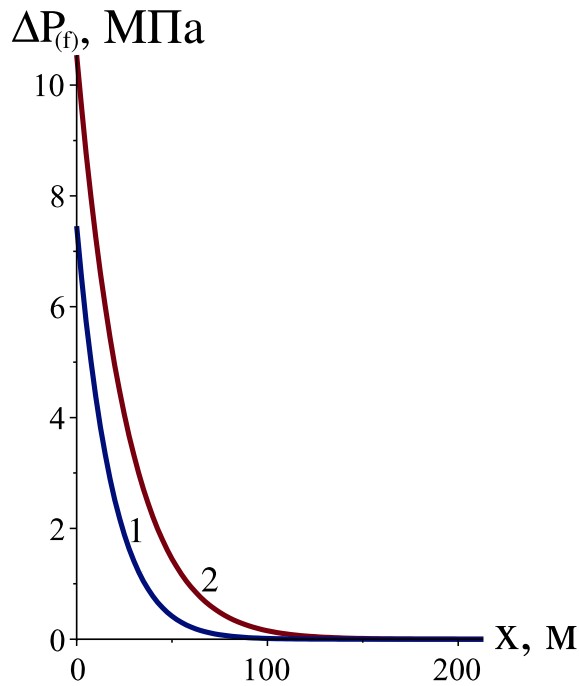


Рис. 3.1. Динамика давления в трещине ГРП спустя: 1) 6 часов; 2) 1 сутки

### 3.2 Случай кусочно-постоянного изменения расхода скважины

В силу однородности и линейности уравнения (3.3) можно получить функцию распределения давления в трещине ГРП, основываясь на решении (3.5). Рассмотрим случай, когда расход может быть представлен кусочно-постоянной функцией.

Пусть до момента времени  $\tau_0$  флюид в пласте и трещине находится в покое. В момент времени  $\tau_0$  расход переходит на значение  $q_0$  и поддерживается постоянным до момента времени  $\tau_1$ , затем он резко изменяется до величины  $q_1$  и держится постоянным до  $\tau_2$  и так далее.

Запишем уравнение для эволюции давления в трещине ГРП

$$\Delta P_f = -\frac{\mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} \left[ H(t) q_0 t^{\frac{1}{4}} \text{Zil}(z_0) + \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (q_i - q_{i-1}) \text{Zil}(z_i) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right], \quad (3.6)$$



где  $Zil(z_i) = \int_{z_i}^{+\infty} Gil(\xi) d\xi$ ,  $z_i = \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} x(t - \tau_i)^{\frac{1}{4}}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ).

Для перепада давления на забое скважины  $\Delta P_{(w)} = \Delta P_f(t, 0)$  при изменении расхода получим выражение

$$\Delta P_{(w)} = \frac{-0.78\mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} \left( H(t - \tau_0) q_0 \cdot (t - \tau_0)^{\frac{1}{4}} + \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (q_i - q_{i-1}) \cdot (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right). \quad (3.7)$$

Рассмотрим случай П-образного изменения расхода. Пусть в течении первых суток расход на единицу высоты трещины поддерживался равным  $1 \text{ м}^2/\text{сут}$ , затем снизился до  $0 \text{ м}^2/\text{сут}$  и оставался неизменным следующие сутки (рис. 3.2).

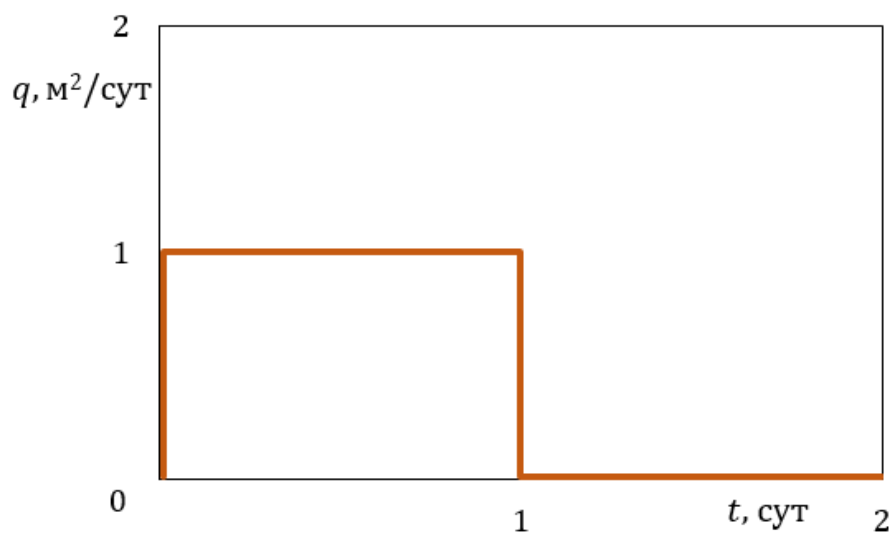


Рис. 3.2. График П-образного изменения расхода скважины на единицу высоты трещины

Тогда в соответствии с уравнением (3.6) давление в трещине можно представить в виде

$$\Delta P_f = \begin{cases} -\frac{q_0 \mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} \cdot t^{\frac{1}{4}} \cdot \text{Zil}(z_0), & 0 \leq t < \tau_1, \\ -\frac{q_0 \mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} \cdot \left( t^{\frac{1}{4}} \cdot \text{Zil}(z_0) - (t - \tau_0)^{\frac{1}{4}} \cdot \text{Zil}(z_1) \right), & t \geq \tau_1. \end{cases}$$

В свою очередь, давление на забое можно выразить в виде системы

$$\Delta P_{(w)} = \begin{cases} -\frac{\text{Zil}(0) \mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} q_0 t^{\frac{1}{4}}, & 0 \leq t < \tau_1, \\ -\frac{\text{Zil}(0) \mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} q_0 \left( t^{\frac{1}{4}} - (t - \tau_1)^{\frac{1}{4}} \right), & t \geq \tau_1. \end{cases}$$

На рисунках 3.3 и 3.4 представлены графики давления на забое скважины и в трещине при П-образном изменении расхода. Рисунок 3.4 демонстрирует изменение давления в трещине гидроразрыва в различные моменты времени: 6 часов; 1 сутки; 1 сутки и 2 часа; 2 суток.

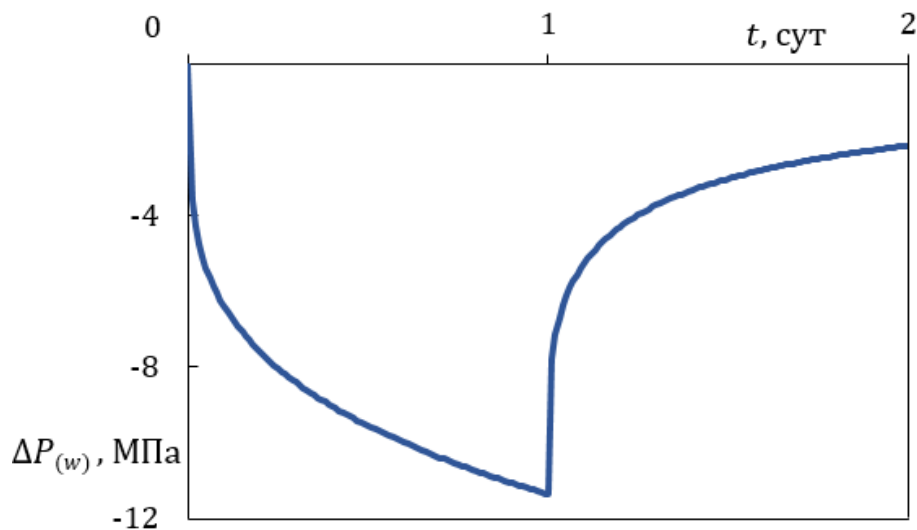


Рис. 3.3. Перепад забойного давления при П-образном изменении расхода

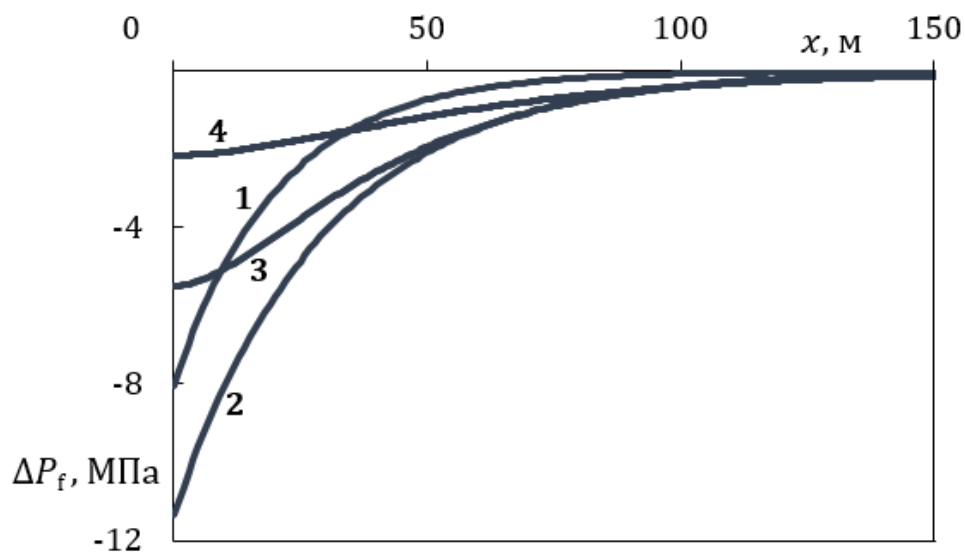


Рис. 3.4. Перепад давления в трещине ГРП спустя:  
 1) 6 часов; 2) 1 сутки; 3) 1 сутки и 2 часа; 4) 2 суток

Рассмотрим двухступенчатое изменение расхода (рис. 3.5). До момента времени  $\tau_1 = 1$  сут расход жидкости на единицу высоты трещины равен  $1 \text{ м}^2/\text{сут}$  и затем резко возрастает до  $2 \text{ м}^2/\text{сут}$ .

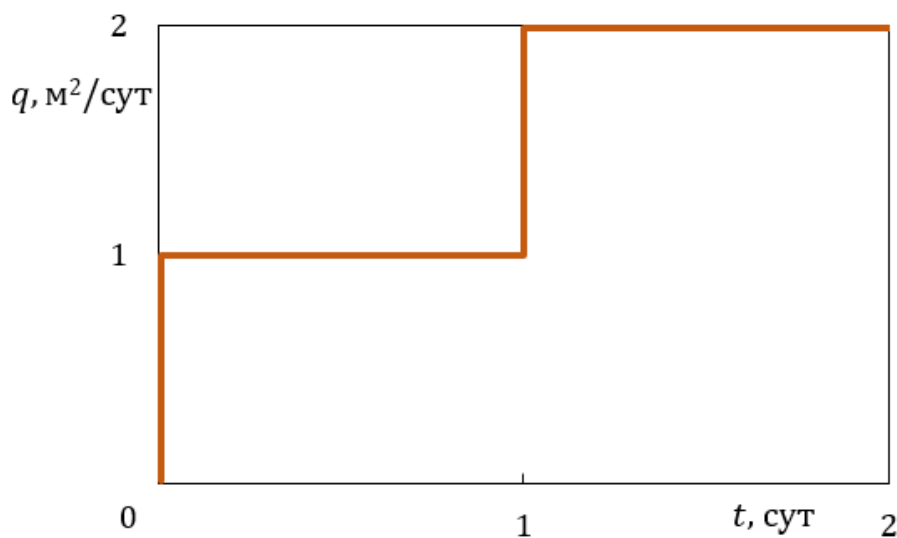


Рис. 3.5. График двухступенчатого изменения расхода скважины на единицу высоты трещины

Далее на рисунке 3.6 показана динамика забойного давления при двухступенчатом изменении расхода в течении первых двух суток.

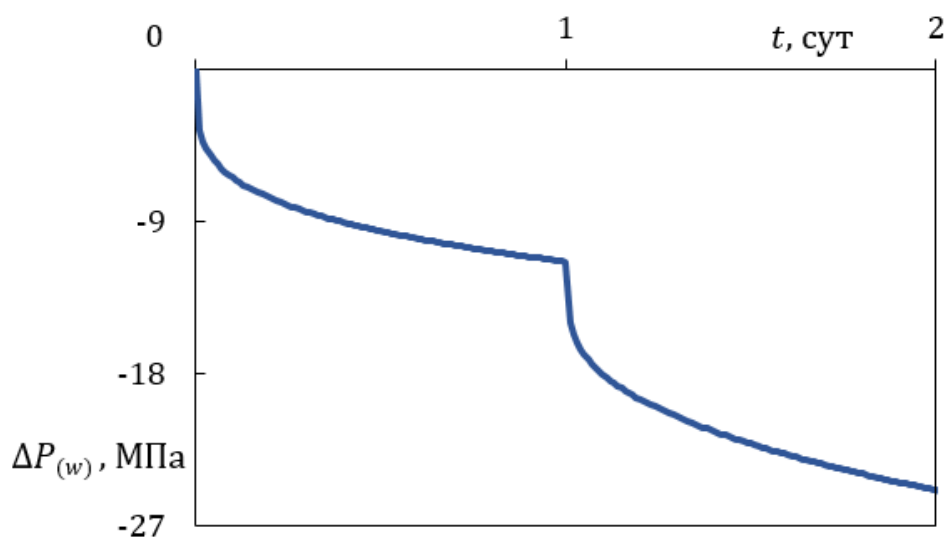


Рис. 3.6. Перепад забойного давления при двухступенчатом изменении расхода

На рисунке 3.7 отображена эволюция давления в трещине гидроразрыва в определённые моменты времени (6 часов; 1 сутки; 1 сутки и 2 часа; 2 суток) при двухступенчатом изменении расхода.

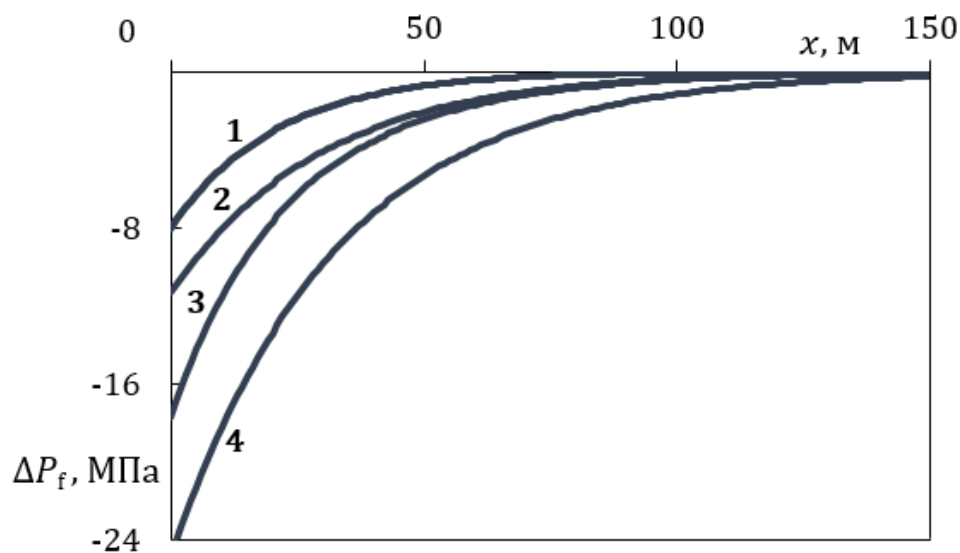


Рис. 3.7. Перепад давления в трещине спустя:  
1) 6 часов; 2) 1 сутки; 3) 1 сутки и 2 часа; 4) 2 суток

Предполагается, что расход жидкости скважины регулируется работой насоса. При этом проводятся постоянные замеры забойного давления. На рисунках 3.2 и 3.5 показан расход вследствие изменения режима работы

насоса (его включения и отключения на определённые промежутки времени). На рисунках 3.3, 3.4, 3.6 и 3.7 представлен перепад давления в скважине и трещине ГРП. При запуске нагнетательной скважины наблюдается рост давления, а в период её остановки начинается процесс восстановления забойного давления до пластового.

Был рассмотрен ещё один случай. Пусть при П-образном изменении расход жидкости снижается не до нулевого значения, а до некоторой величины  $q^* \neq 0$  м<sup>2</sup>/сут. Такая ситуация может представлять интерес именно с практической точки зрения. Графики изменения расхода скважины на единицу высоты трещины и соответствующей динамики давления приведены на рисунке 3.8.

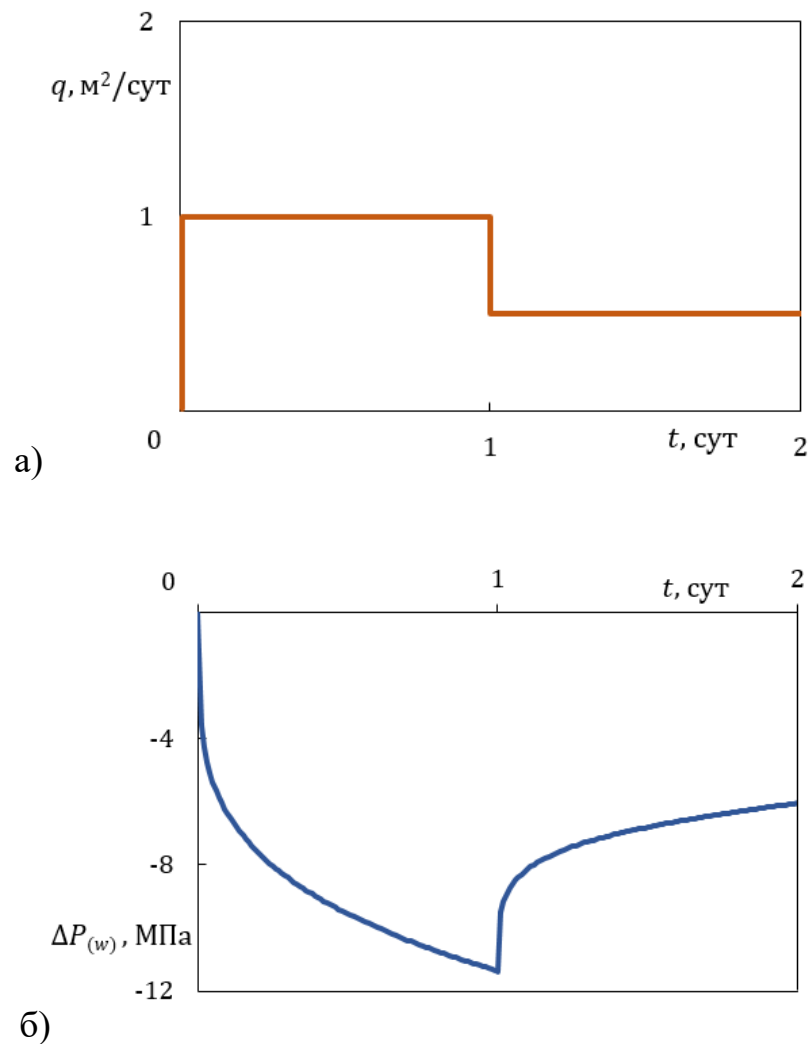


Рис. 3.8. Изменение расхода скважины на единицу высоты трещины (а) и соответствующий график динамики давления (б)

### 3.3 Эволюция давления при непрерывном изменении расхода скважины

Формула (3.6) может быть обобщена для случая непрерывного плавного изменения расхода скважины. Пусть до момента времени  $\tau_0$  скважина находится в покое, и в момент времени  $\tau_0$  резко расход скважины становится равным  $q(0)$  и далее плавно изменяется без резких скачков до некоторого времени  $t$ , где значение равно  $q(t)$ . Тогда из формулы (3.6) получим

$$\Delta P_f = -\frac{\mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} \left[ q(0) t^{\frac{1}{4}} \text{Zil}(z_0) + \int_0^t \text{Zil} \left( \sqrt{\frac{\chi_f}{2}} \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{1}{4}}} \right) (t-\tau)^{\frac{1}{4}} dq(\tau) \right],$$

подставляя  $x = 0$ , выведем уравнения для забойного давления скважины

$$\Delta P_{(w)} = -\frac{\mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} \cdot \text{Zil}(0) \cdot \left[ q(0) t^{\frac{1}{4}} + \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{4}} dq(\tau) \right], \text{ где } \text{Zil}(0) \approx 0.78.$$

Если в качестве примера рассматривать линейное изменение расхода скважины  $q(t) = t$ ,  $t \geq 0$ , то формула примет вид

$$\Delta P_{(w)} = \frac{\mu}{\sqrt{\frac{\chi_f}{2} d_f k_f}} \cdot 0.78 \cdot \frac{4}{5} \cdot t^{\frac{5}{4}}.$$

### 3.4 Сопоставление с промысловыми данными

Прежде, чем приступить к сопоставлению модельных и промысловых данных проведён анализ влияния длины трещины на полученное решение. Представленные в работе формулы были выведены для трещины бесконечной длины. Приведём результаты применения данных формул для трещин длиной 50 и 70 метров. Как показано в работе [121], для трещин с различной протяжённостью при увеличении длины результаты расчётов (по данным формулам) отличались незначительно. Кроме того, авторами в статье

показано, что эволюция давления в трещине ГРП длиной 70 метров фактически демонстрирует картинку давления для трещины бесконечной длины.

На рисунке 3.10 показано сопоставление давления в трещине ГРП длиной 50 метров (оранжевая линия), 70 метров (синяя линия) и бесконечной длины (чёрный пунктир) при П-образном изменении забойного давления (рис. 3.9).

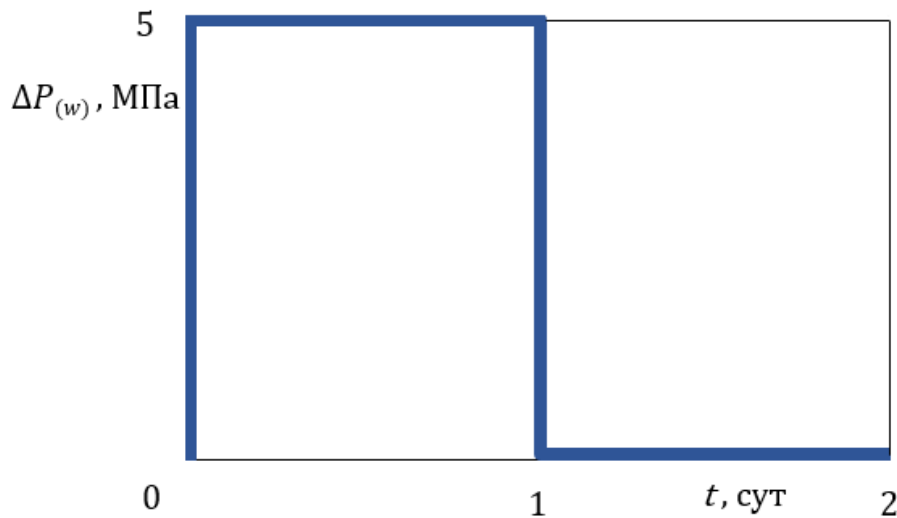


Рис. 3.9. График П-образного изменения забойного давления

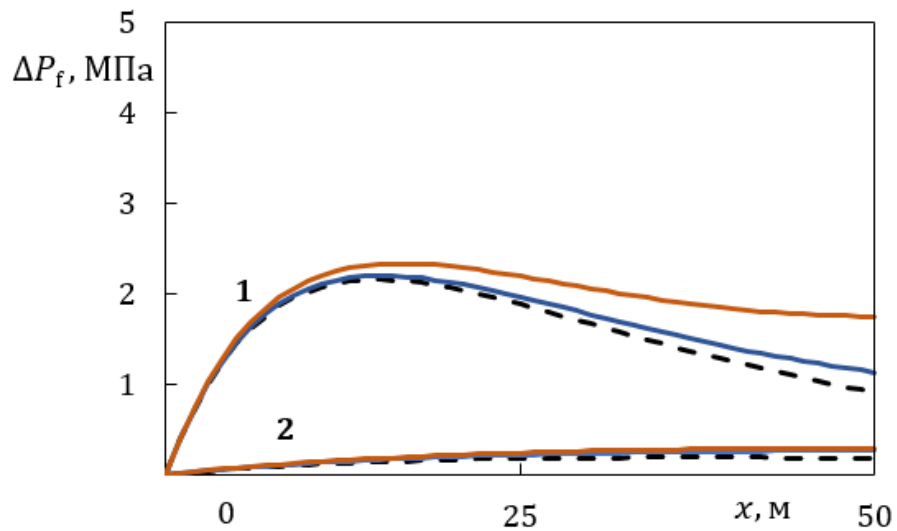


Рис. 3.10. Давление в трещине ГРП: длиной 50 метров (оранжевая линия), 70 метров (синяя линия), бесконечной длины (чёрный пунктир) спустя: 1) 1 сутки 10 минут; 2) 3 суток

На графиках наблюдается отклонение давления для трещин длиной 50 и 70 метров при расчёте спустя 1 сутки и 10 минут после запуска скважин в эксплуатацию. Это связано с выбранным П-образным режимом работы скважин, так как через 1 сутки дебит резко снижается до нуля. Если рассматривать графики давлений спустя 3 суток после запуска скважины, то данное отклонение минимально.

Следовательно, с одной стороны, в рамках поставленной задачи рассматриваем трещину бесконечную, но с другой, вполне правомерно использовать полученные выражения для работы с фактическими данными, полагая, что длина находится в диапазоне  $0 < x < l_f$ , где  $l_f < \infty$ .

Итак, с целью верификации выведенных формул и анализа предложенных подходов моделирования фильтрации флюида в вертикальной трещине ГРП проведены расчёты с использованием реальных промысловых данных трёх скважин, относящихся к разным месторождениям. Было выполнено сопоставление полученного аналитического решения и известных фактических данных. Заметим, что данная методика может быть применима как к нагнетательным, так и к добывающим скважинам.

Формула (3.7) предполагает расход скважин в пластовых условиях, а реальные промысловые данные скважин по добыче представлены в поверхностных условиях. Поэтому они были приведены в условия пластовые для дальнейшего сопоставления с аналитическим решением. С этой целью использован объёмный коэффициент нефти  $B_n$ , поскольку нефтяные скважины в данное время работали в безводном режиме.

На рисунке 3.11 показана траектория скважины № 1 с выделенным интервалом перфорации. Далее на рисунке 3.12 приведены замеры забойного давления скважины № 1 с февраля 2015 по август 2016 года. На интервале 85–105 суток отмечается резкое увеличение значений давления, связанное с проведением ГРП и запуском скважины после этого. В интервале 189–201 суток выполнено ГДИС методом КВД. В расчётах использованы значения забойного давления, начиная со 105 суток, то есть после проведения ГРП.



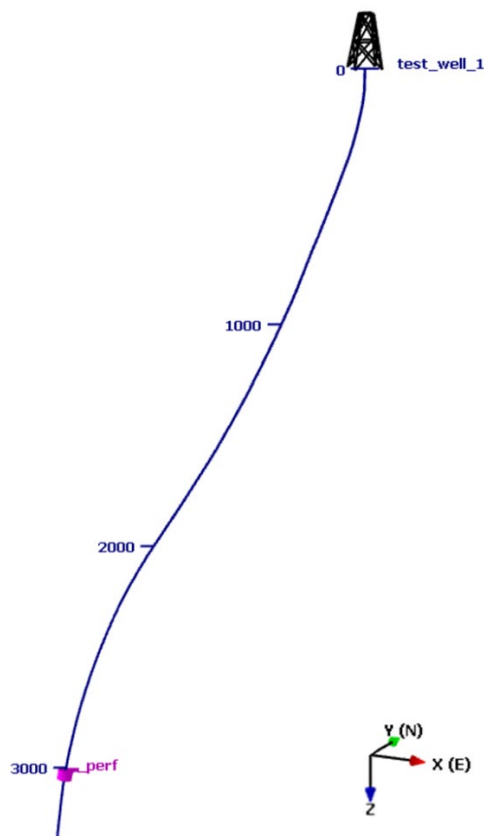


Рис. 3.11. Траектория скважины № 1

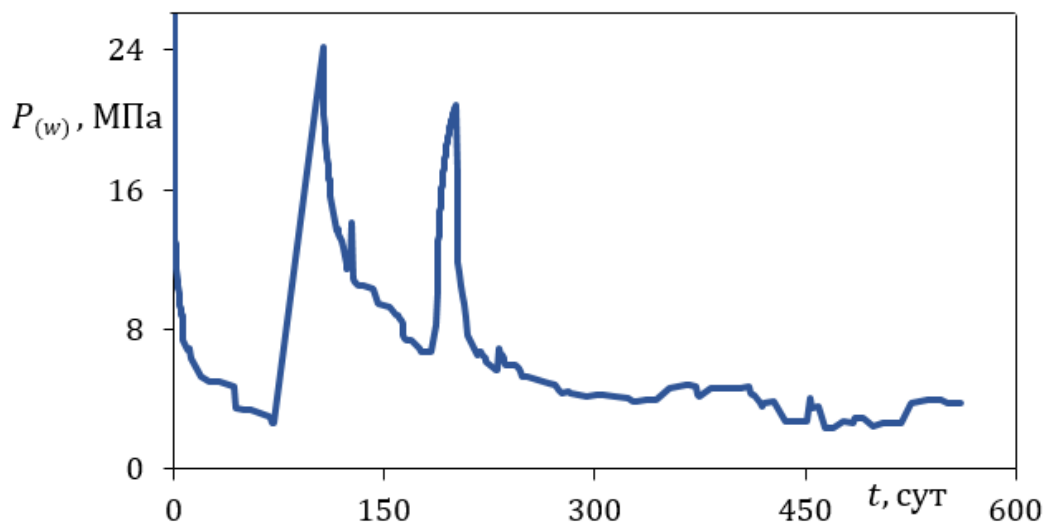


Рис. 3.12. Промысловое давление скважины №1

Для определения забойного давления по формуле (3.7) используется фактический дебит скважины № 1 (рис. 3.13). Заметим, что резкое падение дебита до  $0 \text{ м}^3/\text{сут}$  соответствует времени технической остановки скважины для проведения ГДИС. В период 189–201 суток наблюдается рост забойного

давления, то есть идёт процесс его восстановления до пластового, что отображается на соответствующем графике (рис. 3.12).

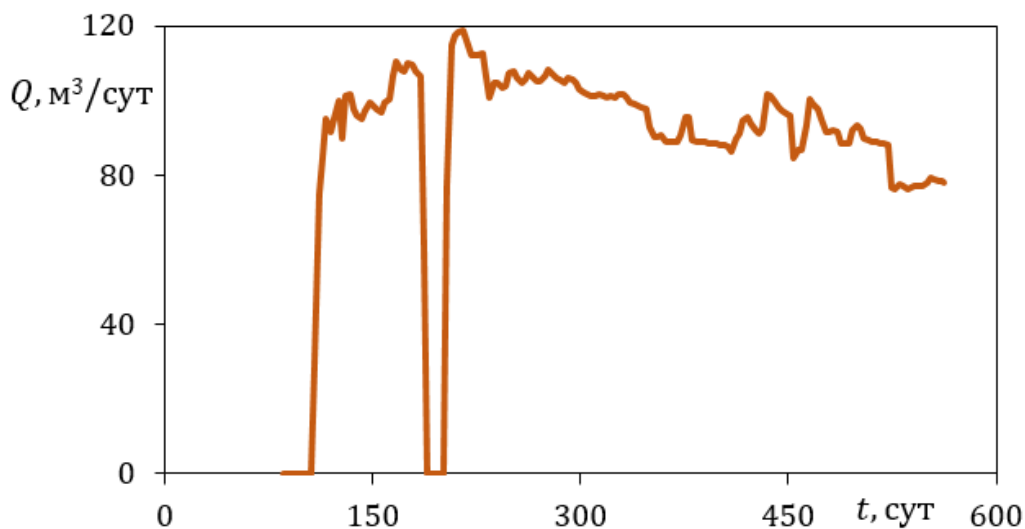


Рис. 3.13. Дебит скважины № 1 по промышленным данным

На рисунке 3.14 приведено сопоставление давления исходного промышленного и результатов вычислений по точным аналитическим формулам. Динамика изменения давлений в целом совпадает, но есть отклонение в период до 150 суток. Скорее всего это связано с кратковременной остановкой скважины, что прослеживается на данных графиках.

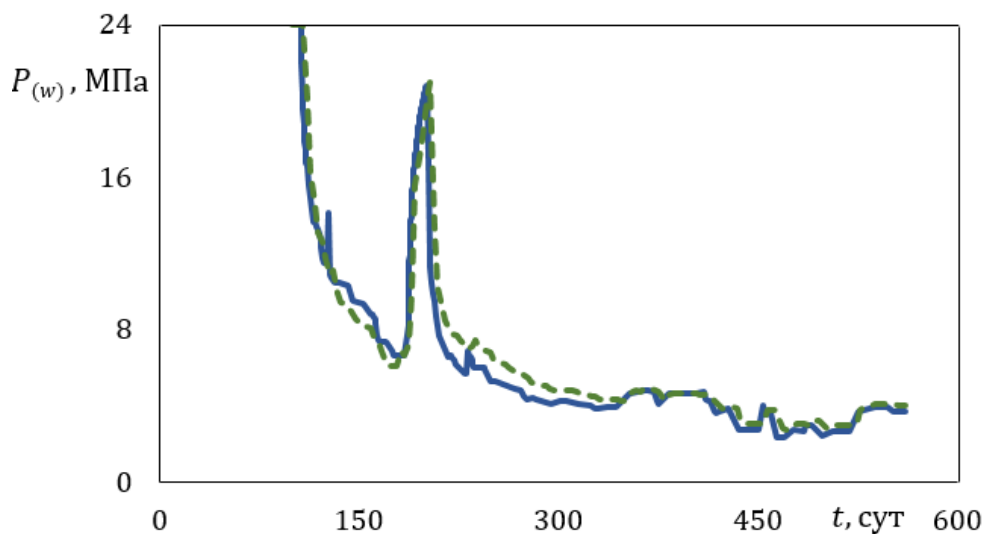


Рис. 3.14. Сопоставление для скважины № 1 промышленного давления (синяя сплошная линия) и результатов расчёта (зелёная пунктирная)

Рассмотрим промысловые данные скважины № 2, замеренные в течении 1 года. Забойное давление представлено на рисунке 3.15 и дебит скважины – на рисунке 3.16. Известно, что после 365 суток было выполнено ГДИС методом КВД.

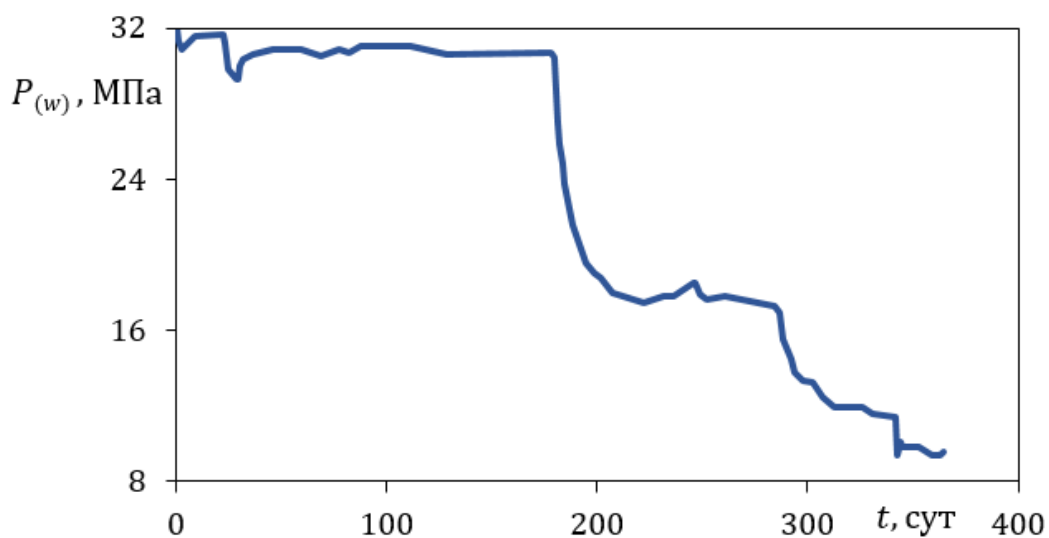


Рис. 3.15. Промысловое давление скважины № 2

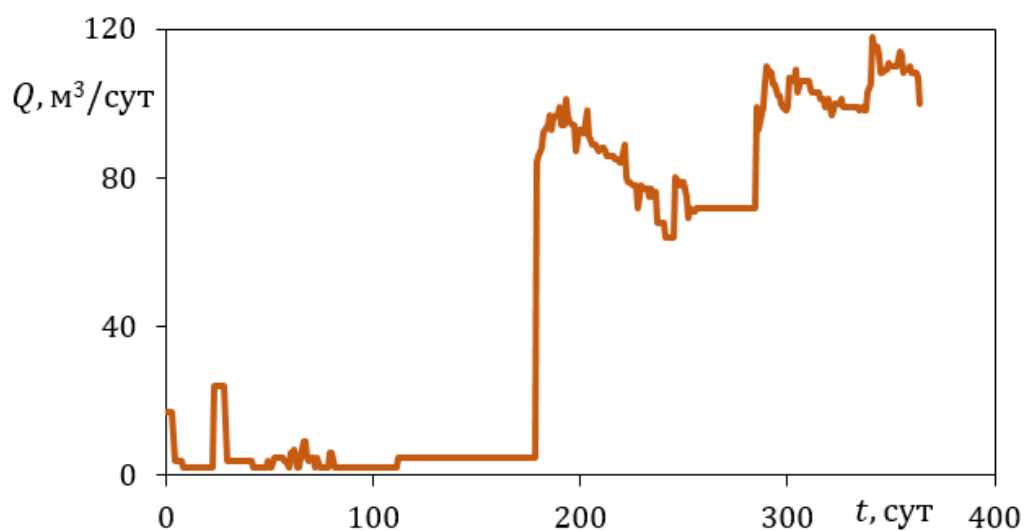


Рис. 3.16. Дебит скважины № 2

Для скважины № 2 аналогично выполнено сопоставление забойного давления и результатов расчёта (рис. 3.17). Максимальное отклонение кривых друг от друга не превышает 2 МПа, что в связи со столь резкими скачками значений и вполне объяснимо.

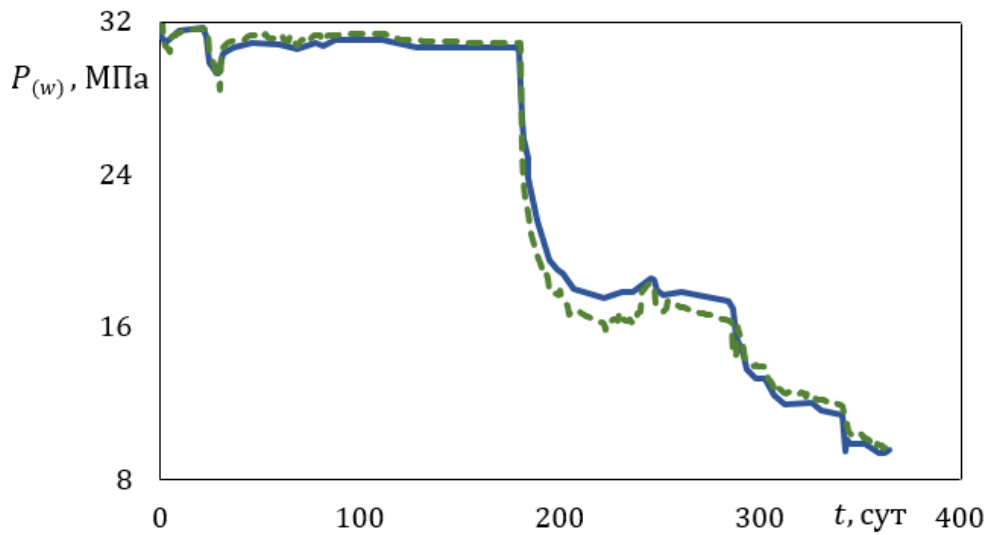


Рис. 3.17. Сопоставление для скважины № 2 промыслового давления (синяя сплошная линия) и результатов расчёта (зелёная пунктирная)

Для скважины № 2 с использованием формулы (3.6) было рассчитано давление в вертикальной трещине ГРП в моменты времени 2, 100, 185, 220, 280 и 320 суток. Эволюция давления представлена в виде графиков на рисунке 3.18.

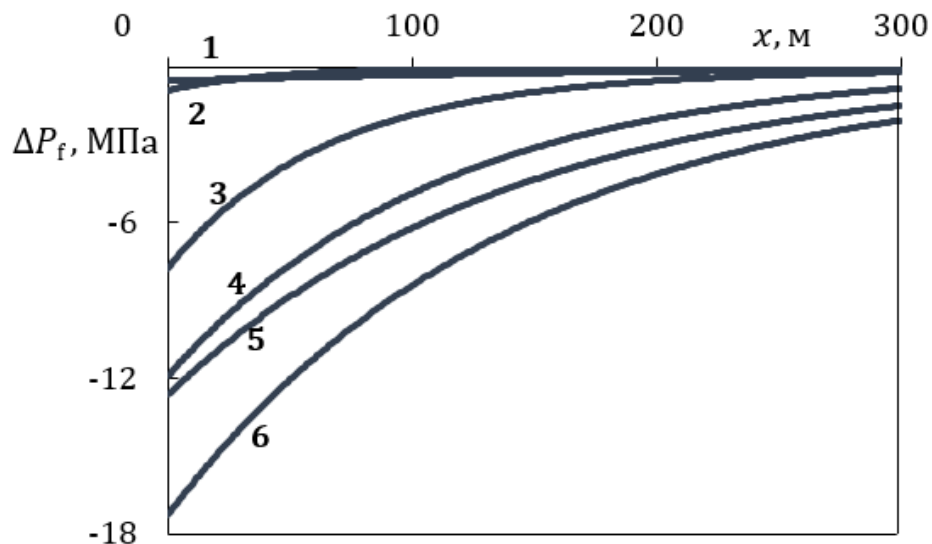


Рис. 3.18. Перепад давления в трещине ГРП скважины № 2 спустя:  
1) 2; 2) 100; 3) 185; 4) 220; 5) 280; 6) 320 суток

На рисунке 3.19 изображена траектория скважины № 3 с выделенным интервалом перфорации, а также схематично показана трещина ГРП.

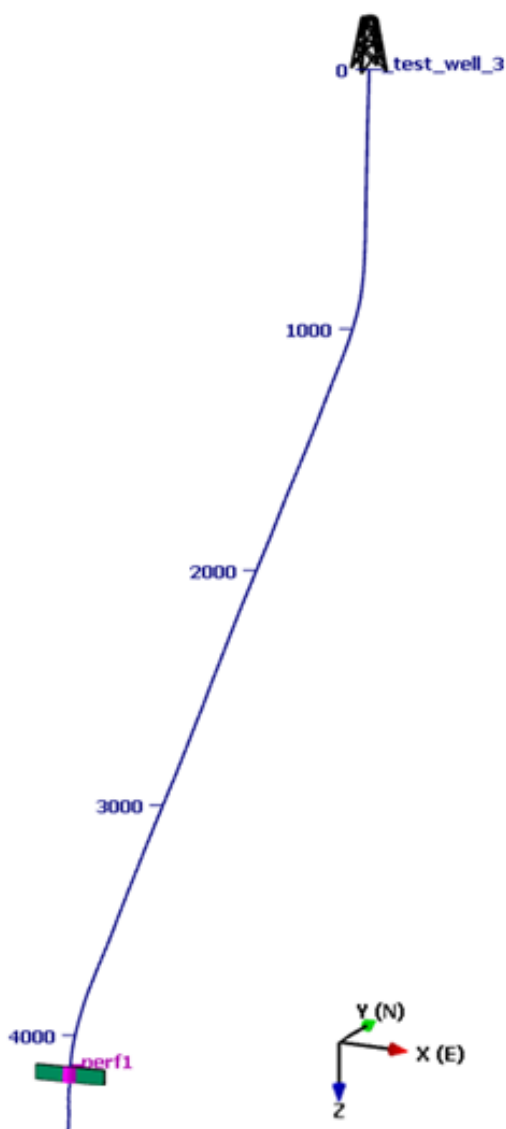


Рис. 3.19. Траектория скважины № 3 и схематично изображённая трещина ГРП в интервале перфорации

На рисунке 3.20 показано промысловое забойное давление скважины № 3. ГРП в этой скважине был выполнен незадолго до приведённых замеров. Известно, что это данные 2020 года, которые измерялись в течение 2 месяцев.

Начиная с 17 суток на графике фиксируется время проведения ГДИС методом КВД. Стоит отметить, что из-за технических проблем данное исследование не было завершено.

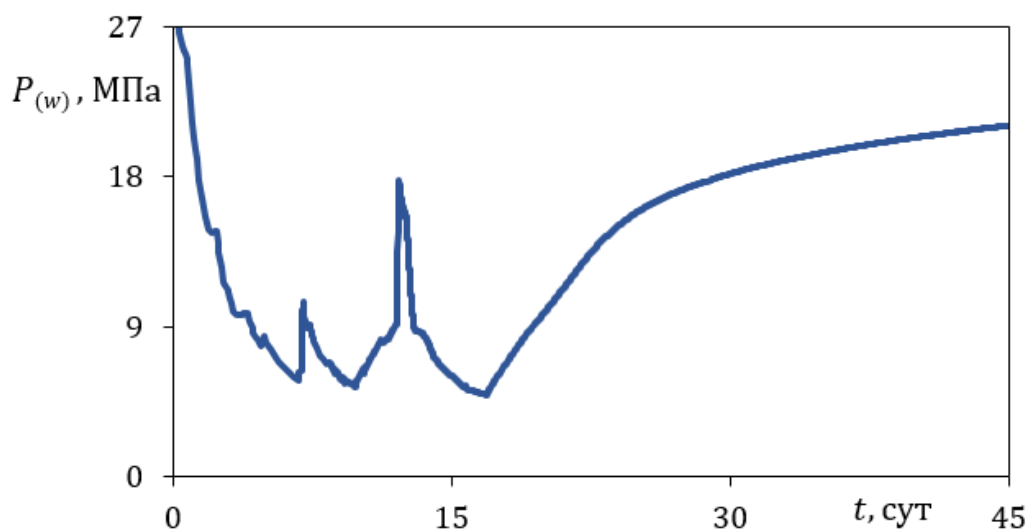


Рис. 3.20. Забойное давление скважины № 3

Дебит скважины № 3 по промысловым данным приведён на рисунке 3.21. Эти значения легли в основу расчёта давления скважины по формуле (3.7), которая позволяет, используя информацию о дебите скважины, рассчитать забойное давление.

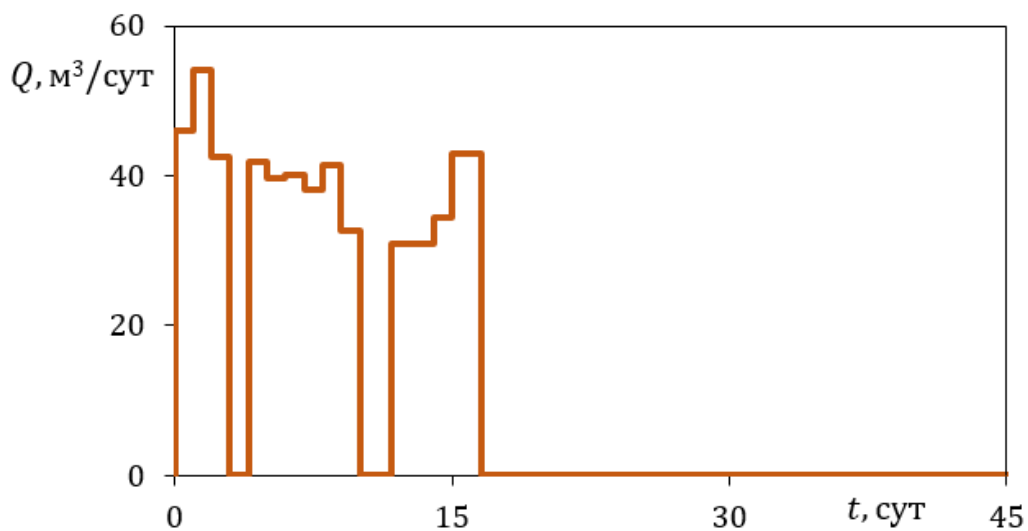


Рис. 3.21. Промысловый дебит скважины № 3

На рисунке 3.22 показано сопоставление рассчитанного и фактического забойного давления скважины № 3.

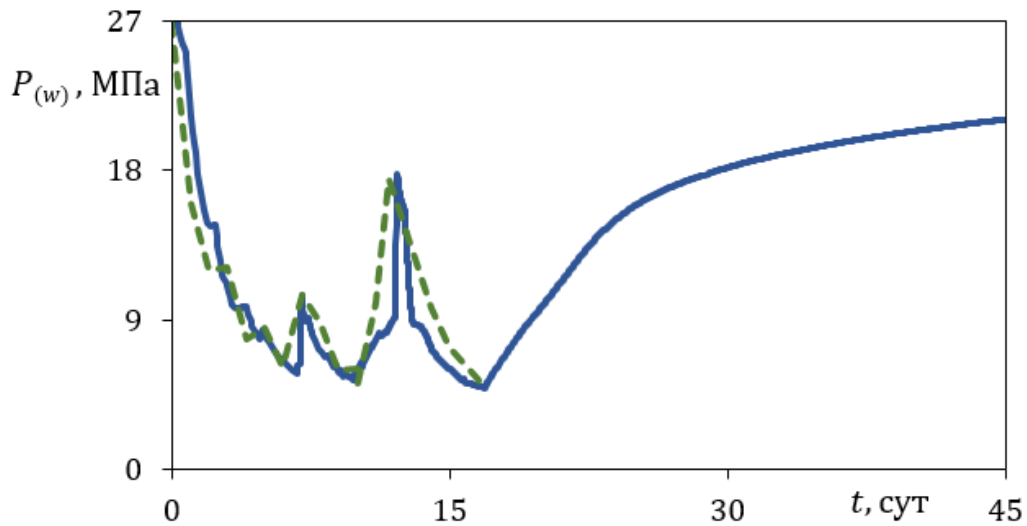


Рис. 3.22. Сопоставление для скважины № 3 промышленного давления (синяя сплошная линия) и результатов расчёта (зелёная пунктирная)

Анализ полученных результатов показывает, что выбранная математическая модель воспроизводит фильтрацию флюида в трещине ГРП при переменных режимах работы скважины. Сопоставление рассчитанных давлений с результатами замеров в скважинах демонстрирует хорошую согласованность. Отдельные отклонения наблюдаются в период резких смен режима работы скважин и нивелируются в течении короткого промежутка времени (до 2 суток для рассматриваемых в работе данных).

### 3.5 Проводимость трещины ГРП

Одной из важнейших характеристик трещины является проводимость  $C_f$ . Она определяется как произведение ширины трещины на её проницаемость

$$C_f = d_f k_f, \quad (3.8)$$

где  $k_f$  – проницаемость трещины [ $\text{м}^2$ ],  $d_f$  – ширина трещины [ $\text{м}$ ].

На практике обычно используют безразмерную проводимость  $C_{fd}$ , которая вычисляется по формуле

$$C_{fd} = \frac{k_f d_f}{k_p l_f}, \quad (3.9)$$

где  $k_f$  – проницаемость [ $\text{м}^2$ ],  $d_f$  – ширина [ $\text{м}$ ],  $l_f$  – полудлина трещины [ $\text{м}$ ],  $k_p$  – проницаемость пласта [ $\text{м}^2$ ].

Значит, для нахождения проводимости трещины гидроразрыва по формуле (3.9) используются параметры  $k_f$ ,  $d_f$  и  $l_f$ . Из-за невозможности прямого точного определения в условиях пласта их обычно принимают по результатам дизайна ГРП.

Изложенная в данной работе методика позволяет вычислять проводимость трещины, не используя при этом параметры  $k_f$ ,  $d_f$  и  $l_f$ , а зная только режим работы скважины после проведения ГРП и данные геолого-физических характеристик продуктивных пластов.

Значение проводимости можно определить через П-образное изменение дебита и соответствующее изменение забойного давления скважины непосредственно после проведения ГРП по формуле

$$C_f = \frac{0.6084 \cdot q^2 \sqrt{\tau}}{(P_{(w)}(\tau))^2} \cdot \frac{\mu^{3/2}}{\sqrt{k_p}} \cdot \frac{C \sqrt{\rho}}{\sqrt{m_p}}, \quad (3.10)$$

где  $k_p$  – проницаемость пласта [ $\text{м}^2$ ],  $P_{(w)}$  – забойное давление [ $\text{Па}$ ],  $\mu$  – динамическая вязкость [ $\text{Па} \cdot \text{с}$ ],  $\rho$  – плотности жидкости в пласте и трещине [ $\text{кг}/\text{м}^3$ ],  $m_p$  – пористость пласта [д. ед.],  $C$  – скорость звука [ $\text{м}/\text{с}$ ],  $\tau$  – время [ $\text{с}$ ],  $q$  – расход на единицу высоты трещины ( $q = Q \cdot B / h$ ) [ $\text{м}^2/\text{с}$ ],  $B$  – объёмный коэффициент [д. ед.].

Выражение (3.10) получено путём преобразований из (3.5), а именно было выражено произведение  $d_f k_f$  и подставлены значения  $\alpha_f$ ,  $\alpha_p$  и  $\chi_f$ .

Заметим, что коэффициент 0.6084 получен в результате вычисления  $(Zil(0))^2 = 0.78^2$ . Если воспользоваться приближённой формулой с помощью



метода ПССС [121], то вместо 0.6084, будет коэффициент  $2^{\frac{1}{2}} = 0.707$ , что в 1,16 раз больше.

Ниже в таблице 2 показаны рассчитанные по формуле (3.10) проводимости трещин ГРП для скважин № 1, 2, 3 на основе реальных промысловых данных, а также проводимость по принятым в работе данным, которые представлены в таблице 3.

Таблица 2. Проводимость трещин ГРП

Параметр	Проводимость по принятым в работе данным	Скважина № 1	Скважина № 2	Скважина № 3
$C_f$ , мД*м	506.6	533.5	338.4	277.2

Таблица 3. Параметры модельной трещины ГРП

Параметр	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Проницаемость пласта	$k_p$	$10^{-15}$	м <sup>2</sup>
Проницаемость трещины	$k_f$	$10^{-10}$	м <sup>2</sup>
Ширина трещины	$d_f$	0.005	м
Полудлина трещины	$l_f$	60	м

При этом для расчёта проводимости трещин ГРП для скважин № 1, 2, 3 использовались такие показатели ГФХ соответствующих продуктивных пластов, как коэффициенты пористости и проницаемости породы; средняя мощность пластов; объёмный коэффициент жидкости; плотность и вязкость жидкости в пластовых условиях.

Значения  $C_f$ , вычисленные по промысловым данным скважин № 1, 2, 3 (столбцы 3, 4, 5 таблицы 2) и принятым в работе (столбец 2 таблицы 2), одного порядка и вполне сопоставимы.

Проницаемость трещин является одним из важнейших параметров системы, но при этом это один из самых неопределённых параметров. Предположим, что ширина трещины  $d_f$  изменяется в диапазоне значений от 0.003 до 0.005 м, тогда можно установить возможные значения проницаемости трещин (таблица 4).

Таблица 4. Диапазон значений проницаемости трещин ГРП

Параметр	Проницаемость по принятым в работе данным	Скважина № 1	Скважина № 2	Скважина № 3
$k_f, \text{м}^2$	$[9.9 \cdot 10^{-11}, 1.6 \cdot 10^{-10}]$	$[1.1 \cdot 10^{-10}, 1.7 \cdot 10^{-10}]$	$[6.7 \cdot 10^{-11}, 1.1 \cdot 10^{-10}]$	$[5.5 \cdot 10^{-11}, 9.1 \cdot 10^{-11}]$

Далее, в качестве примера была вычислена безразмерная проводимость  $C_{fd}$  для рассматриваемой в работе модельной трещины ГРП по формуле (3.9), используя значения параметров, представленные выше в таблице 3. Значение составило 8.33. Полученный показатель можно назвать «хорошим» с учётом того, что «идеальной» считается трещина бесконечной проводимости, а это недостижимо в реальности.

В работах И.В. Кривоносова, И.А. Чарного и М. Пратса было установлено, что трещина бесконечной проводимости, то есть некая «идеальная» трещина, равносильна скважине с диаметром, равным половине длины этой трещины [48, 118]. В 1889 году аналогичный вывод был сформулирован в трудах Н.Е. Жуковского [36] при исследовании стационарной фильтрации жидкости к галерее конечной длины (фактически к «идеальной» трещине) [60].

### 3.6 О понятии «обратная задача»

Используемый в работе термин «обратная задача» нуждается в уточнении. В большинстве случаев под обратной задачей понимается восстановление параметров системы по наблюдаемым данным. Такую

трактовку обратной задачи мы можем встретить в инженерной практике, геофизике, исследованиях Земли и космоса, гидромеханике, электротехнике и т.д. Часто можно слышать замечания о некорректности обратных задач. При этом под некорректностью обратной задачи обычно понимают нарушение условия существования и единственности, либо неустойчивость решения обратной задачи. В математике под корректностью обратной задачи понимается существование непрерывного обратного оператора, то есть устойчивости решения обратной задачи по отношению к малым вариациям данных. В более узкой области математики (в математической физике) под обратными задачами понимают те задачи, в которых основным объектом исследования являются вопросы определения коэффициентов дифференциального уравнения по некоторым функционалам от его решений [66].

Для определённых видов уравнений в частных производных традиционно считается, что не существует корректных краевых задач [64].

Л. Хёрмандер установил факт существования корректных задач для всех уравнений с постоянными коэффициентами [85].

Более глубокий анализ понятия «корректность обратной задачи» можно найти в статьях Б.К. Кокебаева, М. Отелбаева и А.Н. Шыныбекова [47], А.А. Дезина [28].

Под решением обратной задачи также часто понимают восстановление коэффициентов уравнения и краевых условий по известному спектру [10, 11, 67].

В задачах гидродинамики под решением обратной задачи понимают определение неизвестных свойств среды по данным изменения давления и скорости/расхода жидкости. Фактически требуется определить либо коэффициенты дифференциальных уравнений, описывающих фильтрацию флюида; либо неизвестные начальные или граничные условия; либо местоположение, границы и другие свойства области, в которой происходит исследуемый процесс [1].

В данной диссертационной работе под решением обратной задачи понимается определение параметров трещины гидроразрыва, в частности, её проводимости, по данным изменения давления и дебита. Показано, что наиболее удобным для определения проводимости трещины ГРП с практической точки зрения является режим работы скважины, при котором дебит изменяется П-образно.

### Выводы по третьей главе

- Выведены формулы для определения динамики забойного давления и давления в трещине гидроразрыва пласта на основе данных о расходе жидкости скважины после проведения ГРП.
- Используя полученные формулы и принятые в работе параметры теоретической системы «скважина-трещина-пласт», построены тренды давления для случаев П-образного и двухступенчатого изменения расхода жидкости скважины.
- В рамках поставленной задачи предполагается, что расход жидкости скважины регулируется работой насоса. При этом проводятся постоянные замеры забойного давления. В периоды остановок скважин отмечается восстановление забойного давления до пластового.
- Проанализированы имеющиеся промысловые данные скважин № 1, 2, 3, относящихся к разным месторождениям, до и после операции ГРП.
- Проведена верификация полученных в работе формул посредством сопоставления с реальными промысловыми данными трёх скважин с вертикальными трещинами ГРП.
- Представлена формула для вычисления проводимости трещины гидроразрыва, которая позволяет делать расчёты без учёта параметров трещины (её проницаемости и ширины), основываясь на динамике давления и дебита при эксплуатации скважины после ГРП, а также данных о геолого-физической характеристике продуктивных пластов.
- В таблице 2 отражены результаты расчёта проводимости трещин для скважин № 1, 2, 3 на основе реальных промысловых показателей, а также для некоторой модельной скважины по принятым в работе данным. Получены вполне сопоставимые величины одного и того же порядка.

## Глава 4. Влияние параметров системы на решение задачи

### 4.1 Влияние упругоёмкости трещины

В работе З.М. Нагаевой и В.Ш. Шагапова [62, 90] рассматривалась нестационарная фильтрация флюида и предполагалось, что слагаемым  $\partial \Delta P_f / \partial t$  в левой части уравнения (2.26) можно пренебречь (данное предположение допустимо для времён, больших критического значения  $t^*$  (2.29)). В статье И.Л. Хабибуллина и А.А. Хисамова [83] также представлены исследования нестационарного процесса фильтрации и рассматривается такая же исходная система дифференциальных уравнений, как в [62, 90], но решается без дополнительных ограничений. Ими описаны случаи постоянного расхода жидкости и постоянного давления на забое скважины.

В главах 2 и 3 данной работы также не учитывалась упругоёмкость трещины ГРП. Далее определим изменение давления на забое при переменном дебите скважины. При этом будем учитывать слагаемое  $\partial P_f / \partial t$  в первом уравнении системы (2.7).

Рассматриваемая трещина ГРП симметрична относительно ствола скважины, и для предотвращения смыкания она закреплена пропантом.

Закачиваемая жидкость попадает из скважины в трещину, затем «вытекает» в пласт. Схема течения билинейная. Считаем, что жидкость из трещины в пористую среду поступает только через её боковые поверхности; пласт однородный с постоянной толщиной и проницаемостью; глубина залежи не влияет на давление жидкости в трещине и пласте; скелет пористой среды пласта несжимаемый.

В работе [83] система уравнений, описывающая фильтрацию флюида в трещине ГРП и пласте, представлена в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial P_f}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{k_p \alpha_f}{k_f (d_f / 2)} \frac{\partial P_p}{\partial y} \Big|_{y=0}, & 0 < x < l_f, \\ \frac{\partial P_p}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2}, & 0 < x < l_f, \quad 0 < y < \infty. \end{cases}$$

Данная система полностью совпадает с системой уравнений (2.7), хотя второе слагаемое в первом уравнении записано несколько иначе.

Пусть до момента времени  $t = 0$  скважина не работает, то есть

$$P_f \Big|_{t=0} = P_p \Big|_{t=0} = 0. \quad (4.1)$$

Запишем следующие условия на границах

$$P_f = P_p \Big|_{y=0} = 0, \quad P_p \Big|_{y=\infty} = P_p \Big|_{x=\infty} = 0. \quad (4.2)$$

Для скважины задается расход (2-ая краевая задача)

$$\frac{\partial P_f}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{Q(t)\mu}{d_f k_f h_f}, \quad (4.3)$$

где  $Q = qh_f$  – дебит жидкости скважины.

Определим динамику давления в трещине ГРП и в скважине при изменяющемся дебите. Рассмотрим систему (2.7) с условиями (4.1) – (4.3) при постоянном расходе скважины  $q = \frac{Q}{h_f} = const$ .

В статье [83] задача решена для общего случая, и решение представлено в безразмерных переменных

$$\bar{P}_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{t}\rho^2 b + \bar{y}}{2\sqrt{\bar{t}}\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\rho. \quad (4.4)$$

При  $\bar{y} = 0$  давление в трещине можно записать как

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\rho, \quad (4.5)$$

где  $\bar{P}_i = \frac{P_i k_p}{q\mu}$ , ( $i = f, p$ ),  $\bar{y} = \frac{y}{l_f}$ ,  $\bar{x} = \frac{x}{l_f}$ ,  $\bar{t} = t \frac{\alpha_p}{l_f^2}$ ,  $a = \frac{\alpha_f}{\alpha_p}$ ,  $b = a \frac{k_p}{k_f} \frac{l_f}{(d_f/2)}$ ,

причём  $\frac{a}{b} = \frac{k_f(d_f/2)}{k_p l_f}$  – безразмерная проводимость трещины [83].

При переходе в формуле (4.5) к размерным величинам, считая, что расход жидкости скважины на единицу высоты трещины равен  $q$ , получим, что давление в трещине ГРП изменяется по закону

$$P_f(x, t) = \frac{-2\mu q \sqrt{\alpha_f} \sqrt{t}}{(d_f/2) k_f \sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha_f t \rho^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{k_p}{k_f} \frac{\alpha_f \sqrt{t}}{\sqrt{\alpha_p} (d_f/2)}\right) d\rho. \quad (4.6)$$

Формула (4.6) даёт решение системы (4.1) – (4.3) при условии

$$\left. \frac{\partial P_f}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{q\mu}{d_f k_f}.$$

Для решения задачи воспользуемся линейностью системы (4.1) – (4.3). Пусть дебит скважины на единицу высоты трещины не является постоянной величиной, то есть

$$q = q(t).$$

Отметим, что согласно закону Дарси

$$q = \frac{d_f k_f}{\mu} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}. \quad (4.7)$$

Далее введём функцию

$$\Psi(x, t) = \frac{-2\mu \sqrt{\alpha_f} \sqrt{t}}{d_f k_f \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha_f t \rho^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\alpha_f}{\sqrt{\alpha_p}} \frac{k_p \sqrt{t}}{k_f d_f}\right) d\rho.$$



Если расход жидкости скважины принимает кусочно-постоянные значения  $q_1, q_2, \dots, q_n$  в промежутках времени  $[t_0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_{n-1}, t_n)$ , то изменение давления в трещине при  $t > t_0$  можно записать следующим образом:

$$P_f(x, t) = \sum_{i=1}^n H(t - t_i)(q_i - q_{i-1})\Psi(x, t - t_i), \quad (4.8)$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда, кроме того  $q_0 = 0$ .

Приближая изменяющийся во времени расход скважины  $q(t)$  кусочно-постоянными функциями, получим из (4.7), переходя к пределу при  $\max|t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$ , формулу

$$P_f(x, t) = \int_0^t \Psi(x, t - \tau) dq(\tau). \quad (4.9)$$

Последнее выражение носит название интеграла Римана-Стилтьеса [70].

При значении  $x = 0$  запишем давление в скважине

$$P_w(t) = \int_0^t \Psi(0, t - \tau) dq(\tau), \quad (4.10)$$

$$\text{где } \Psi(0, t) = \frac{-2\mu\sqrt{\alpha_f}\sqrt{t}}{d_f k_f \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^1 \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\alpha_f k_p}{d_f k_f} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\alpha_p}}\right) d\rho.$$

Формула (4.9) даёт выражение для определения давления в трещине.

Пусть расход  $q(t)$  изменяется скачкообразно в моменты времени  $0, t_1, t_2, \dots, t_n$ , а в промежутках времени  $(0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n), (t_n, t)$  изменяется непрерывно. Тогда при  $t > 0$  получим

$$P_f(x, t) = \Psi(x, 0)[q(0+) - q(0)] + \sum_{k=1}^n \Psi(x, t_k)[q(t_k + 0) - q(t_k - 0)] + \int_0^t \Psi(x, t) q'(t) dt,$$

где  $q'(t)$  – производная функции  $q(t)$  на интервалах  $(0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n), (t_n, t)$ . Здесь  $q(t_k - 0)$  и  $q(t_k + 0)$  – это расход до момента времени  $t_k$  и

после него, то есть  $q(t_k + 0) + q(t_k - 0)$  – величина скачка дебита в момент времени  $t_k$ .

Формула (4.9) по известному закону изменения расхода жидкости скважины позволяет определить динамику давления в трещине и в самой скважине.

На практике удобно использовать выражение (4.8), так как обычно данные со скважины снимаются не непрерывно, а дискретно в некоторые моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

Рассмотрим кривые изменения забойного давления скважины, получаемые по формулам из работ З.М. Нагаевой, В.Ш. Шагапова [55, 78] и И.Л. Хабибуллина, А.А. Хисамова [83] во время эксплуатации скважины, находившейся в покое до момента времени  $t = 0$  и работающей с постоянным расходом при  $t > 0$  (считая, что  $q = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $t > 0$ ).

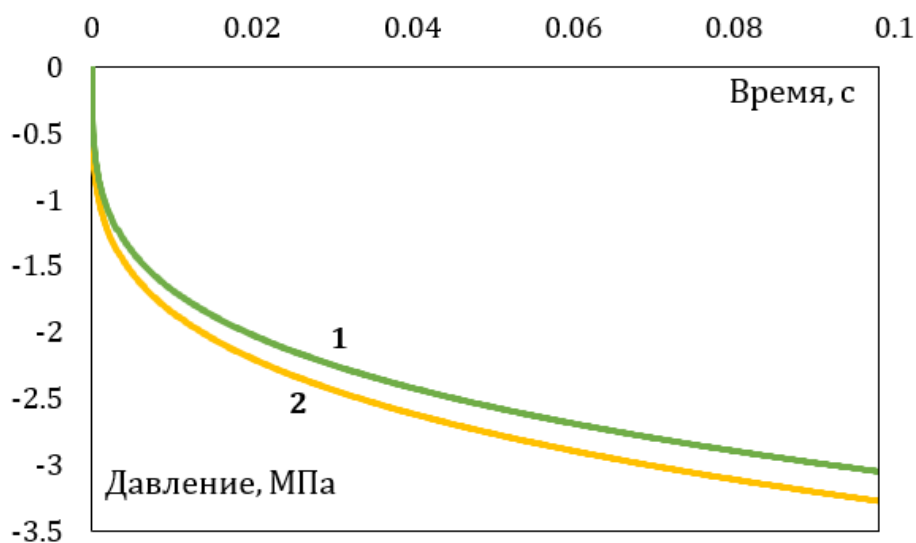


Рис. 4.1. Сопоставление кривых изменения давления скважины при малых временах:

1) по формуле (3.4) (зелёная линия); 2) по формуле (4.6) (жёлтая линия)

Для очень малых времен (порядка 0.0001 с) значения, получаемые по формуле (4.6) на 44 % больше, чем по формуле (3.4). Для времени  $t = 0.001$  с эта разница составляет 18 %, и при временах больших 0.1 с – не превосходит

7 %. Таким образом, оба подхода дают при временах, рассматриваемых при решении практических задач (секунды, часы, сутки и т.д.), близкие значения.

На рисунках 4.2, 4.3 и 4.4 приведено сопоставление графиков промыслового давления скважин № 1, 2, 3 и результатов расчётов по формуле (4.10).

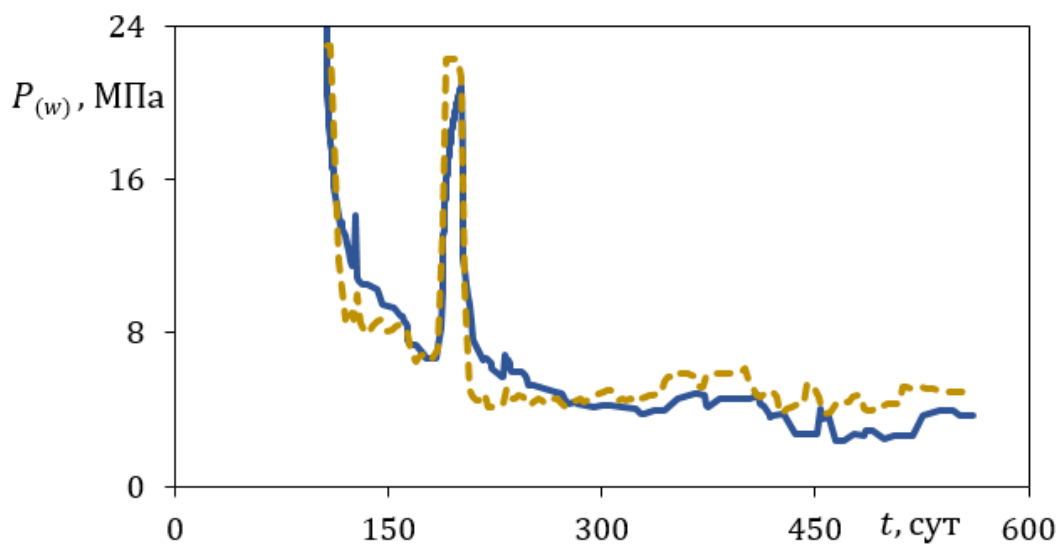


Рис. 4.2. Сопоставление промыслового давления (синяя сплошная линия) и результатов расчёта (жёлтая пунктирная) для скважины № 1

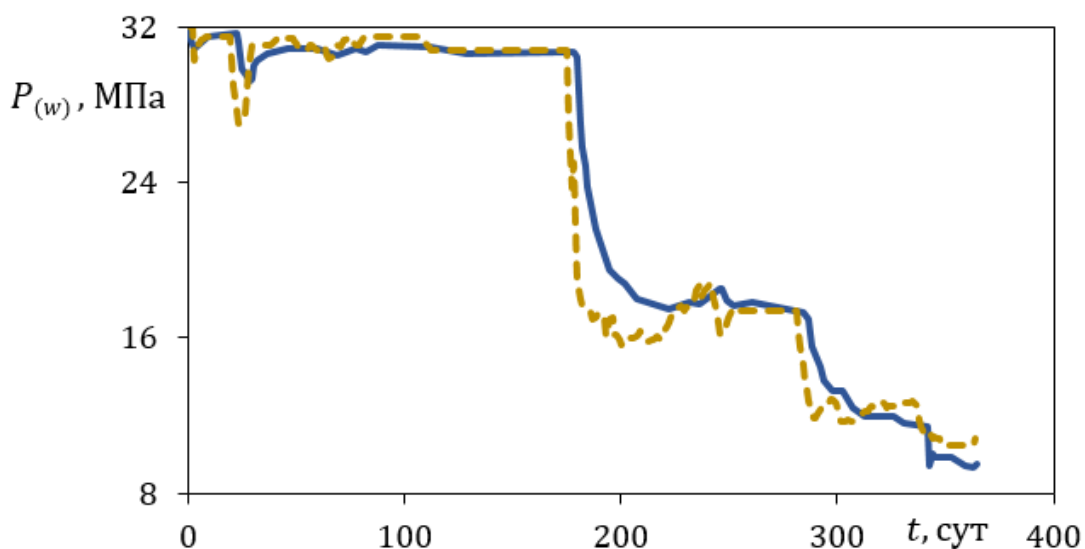


Рис. 4.3. Сопоставление промыслового давления (синяя сплошная линия) и результатов расчёта (жёлтая пунктирная) для скважины № 2

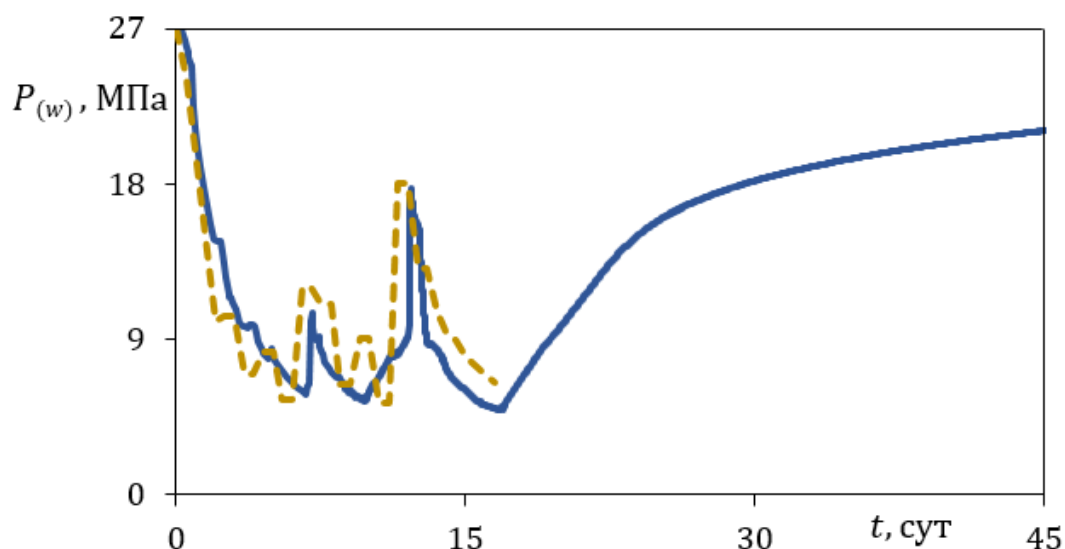


Рис. 4.4. Сопоставление промыслового давления (синяя сплошная линия) и результатов расчёта (жёлтая пунктирная) для скважины № 3

Таким образом, получено решение задачи нестационарной фильтрации при заданном изменяющемся расходе жидкости скважины с учётом упругоёмкости трещины. С целью апробации полученных результатов проведены расчёты с промысловыми данными и выполнено сопоставление кривых давления.

Сопоставление промыслового забойного давления с рассчитанным, а также анализ используемых методов показывают, что влияние коэффициента упругоёмкости трещины существенно на ранних этапах, а при временах больших 0.1 секунды отклонение не превосходит 7 %. Поскольку при решении практических задач обычно используют времена больше, чем 0.1 с (секунды, часы, сутки и т.д.), то можно считать, что оба подхода дают близкие значения.

#### 4.2 Анализ влияния изменения параметров системы на решения

Рассмотрим случай П-образного дебита (рис. 4.5) из главы 3, который стал основой для сопоставления расчётов с промысловыми данными. Определим насколько чувствительно построенное решение к изменению таких параметров системы, как ширина трещины ГРП, проницаемость и пористость среды.

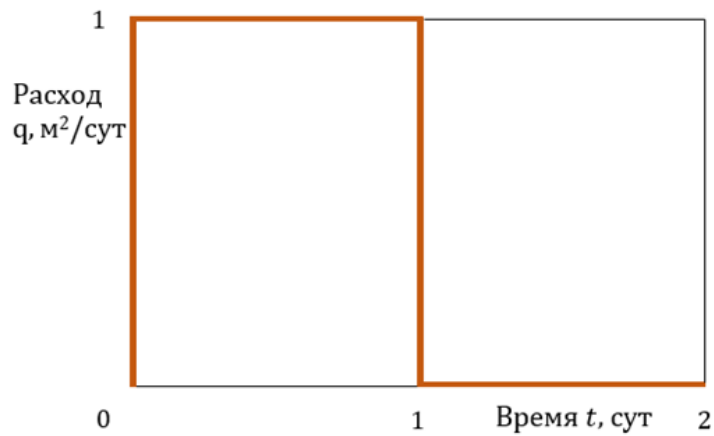


Рис. 4.5. П-образный расход скважины

В работе были приняты следующие величины:  $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $m_p = 0.1$  д. ед.,  $d_f = 0.005 \text{ м}$  (на графиках отмечены синим цветом). Построим графики изменения забойного давления скважины (рис. 4.6) в случае П-образной динамики дебита при значениях проницаемости пласта  $10^{-14}$  и  $10^{-16} \text{ м}^2$ .

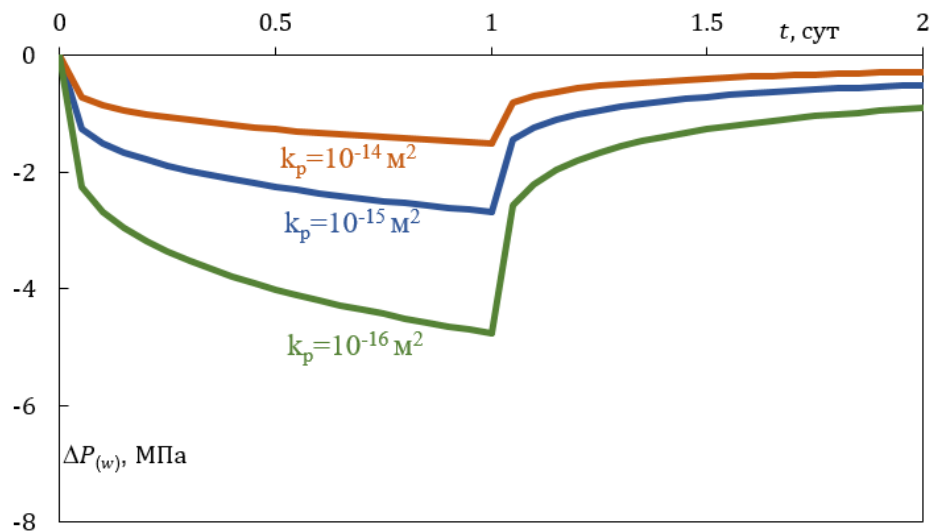


Рис. 4.6. Изменение забойного давления при различных значениях проницаемости пласта

На рисунке 4.7 показан перепад забойного давления при значениях пористости пласта 0.1, 0.2 и 0.05 д. ед. При этом остальные параметры системы остаются неизменными.

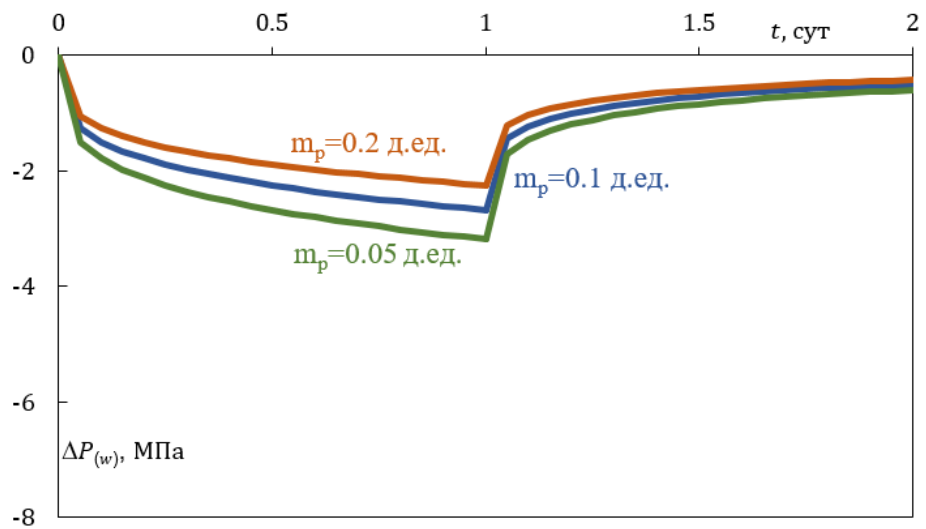


Рис. 4.7. Изменение забойного давления при различных значениях пористости пласта

Заметим, что расчёты по чувствительности модели на изменение параметров выполнены для пористости пласта. Как было показано в главе 2, пористость трещины не влияет на решение.

Аналогично на рисунке 4.8 приведены результаты для трещин шириной 0.005, 0.01 и 0.001 м.

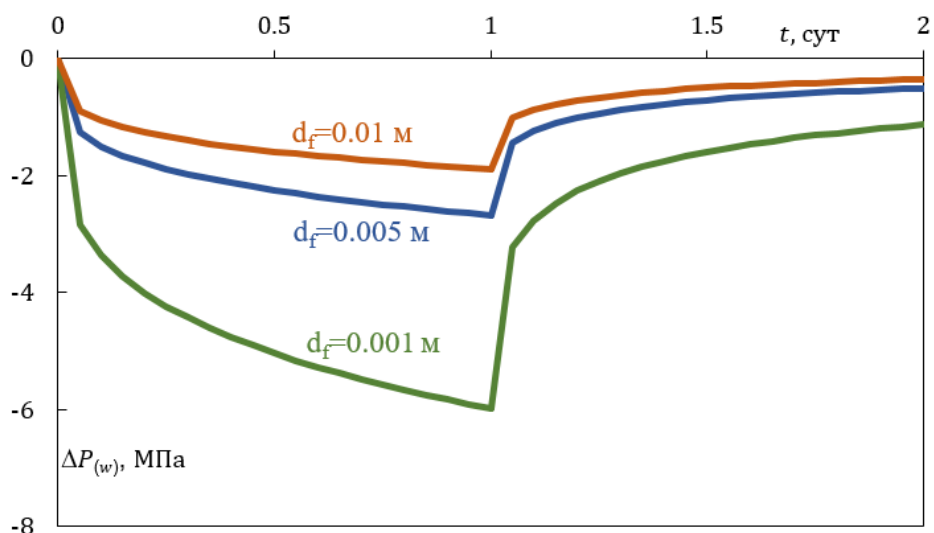


Рис. 4.8. Изменение забойного давления при различных значениях ширины трещины

Таким образом, по результатам, приведённым на рисунках 4.6-4.8, можно отметить, что увеличение любого из данных параметров (ширина трещины, пористость и проницаемость пласта) приводит к уменьшению  $\Delta P_w$ . Наибольшее влияние на систему оказывает изменение ширины трещины, а наименьшее – пористость среды.

## Заключение

Основные выводы по проведённому диссертационному исследованию:

1. Получены аналитические решения интегро-дифференциального уравнения, которые, зная закон изменения забойного давления, позволяют определить расход жидкости на единицу высоты трещины в любой момент времени, а также рассчитать динамику давления в трещине ГРП при изменяющемся расходе скважины. Выявлена взаимосвязь между динамикой давления на забое скважины, в трещине и в пласте при изменении расхода жидкости.

2. Проведено сопоставление полученных решений с промышленными данными трёх скважин. Рассчитанное по предлагаемой методике забойное давление хорошо согласуется с забойным давлением скважин по промышленным данным. Максимальное отклонение составило не более 5 %, что свидетельствует о целесообразности подхода и возможности его применения, в частности при интерпретации ГДИС.

3. Предложена формула для вычисления проводимости трещины гидроразрыва пласта на основе данных эксплуатации скважин, свойств жидкости и фильтрационно-ёмкостных свойств продуктивных пластов

$$C_f = \frac{0.6084 \cdot q^2 \sqrt{\tau}}{(P_{(w)}(\tau))^2} \cdot \frac{\mu^{3/2}}{\sqrt{k_p}} \cdot \frac{C\sqrt{\rho}}{\sqrt{m_p}}.$$

При этом не используются такие параметры трещины, как её проницаемость и ширина. Проведена апробация формулы с использованием практических данных.



## Список литературы

1. Азис, Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азис, Э. Сеттари – М.: Недра, 1982. – 407 с.
2. Александрова, Е.А. Динамика давления на скважине с трещиной ГРП по заданному дебиту / Е.А. Александрова, Р.А. Башмаков, А.А. Махота, Н.О. Фокеева, К.Р. Яхина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023617532. Роспатент. Дата государственной регистрации в Реестр программ для ЭВМ 11.04.2023.
3. Аносова, Е.П. Фильтрация флюида к скважине через радиальную трещину ГРП при постоянном расходе // Известия РАН. Механика жидкости газа и плазмы. – 2023. – № 2. – С. 90–101.
4. Ардисламова, Д.Р. Построение модели вторичной пустотности карбонатного коллектора на примере одного из месторождений Тимано-Печорской провинции / Д.Р. Ардисламова, В.А. Колесов, Н.О. Фокеева, А.Г. Малов, С.А. Рабцевич, М.Н. Харисов // Материалы 23-й конференции по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа (Геомодель 2021). Геленджик. – 2021. – С. 115. DOI: 10.3997/2214-4609.202157136
5. Асалхузина, Г.Ф. Диагностирование переориентации техногенной трещины при повторном гидроразрыве пласта методами анализа добычи/давления и моделирования в геомеханическом симуляторе / Г.Ф. Асалхузина, А.Я. Давлетбаев, А.И. Федоров, А.Р. Юлдашева, А.Н. Ефремов, А.В. Сергейчев, Д.З. Ишкин // Доклад на Российской нефтегазовой технической конференции SPE. 187750-RU. – 2017. – 12 с.
6. Асалхузина, Г.Ф. К вопросу выбора длительности режимов при гидродинамических исследованиях скважин на установившихся режимах закачки в низкопроницаемых коллекторах / Г.Ф. Асалхузина, А.Я. Давлетбаев, И.Л. Хабибуллин, Р.Р. Ахметова // Вестник Тюменского

государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2020. – Т. 6, №1(21). – С. 135–149.

7. Астафьев, В.И. Моделирование процесса заводнения при наличии несплошности нефтяного пласта / В. И. Астафьев, И. А. Васильев, И. И. Киреев, С. А. Булгаков // Ашировские чтения. – 2022. – Т. 2, № 1(13). – С. 107-116.
8. Астафьев, В.И. Моделирование фильтрации жидкости при наличии трещины гидравлического разрыва пласта / В.И. Астафьев, Г.Д. Федорченко // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2007. – № 2 (15). – С. 128–132.
9. Афанасьев, А.А. Осредненная асимптотическая модель двухфазной фильтрации в трещиновато-пористых средах / А.А. Афанасьев // Изв. РАН МЖГ. – 2019. – №5. – С. 83–92.
10. Ахтямов, А.М. О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по её спектру / А.М. Ахтямов // Фундамент. и прикл. матем. – 2000 – Т. 6, в. 4. – С. 995–1006.
11. Ахтямов, А.М. Теория идентификации краевых условий и её приложения / А.М. Ахтямов // ФИЗМАТЛИТ, Москва – 2009. – 272 с.
12. Бадертдинова, Е.Р. Численное решение коэффициентной обратной задачи о нестационарной фильтрации к скважине, пересеченной трещиной гидравлического разрыва / Е.Р. Бадертдинова, И.Т. Салимьянов, М.Х. Хайруллин, М.Н. Шамсиев // ПМТФ. – 2012. – Т. 53, № 3. – С. 84–89.
13. Байков, В.А. К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта / В.А. Байков, Г.Т. Булгакова, А.М. Ильясов, Д.В. Кашапов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2018. – № 5 – С. 64–75.
14. Баймаханов, Г.А. О существующих теориях гидравлического разрыва пласта (ГРП) / Г.А. Баймаханов, О.П. Помашев // Материалы МНТК «Новые технологии и инновационные проекты в горной и нефтегазовой отраслях». – Алматы. – 2012. – С. 179–182.

15. Баренблатт, Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва пласта // Г.И. Баренблатт // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, № 4. – С. 475–486.
16. Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах // Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик / М.: «Недра». – 1984. – 211 с.
17. Баренблатт, Г.И. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов / ДАН СССР. – 1960. – Т. 132, № 3. – С. 545–548.
18. Басниев, К.С. Нефтегазовая гидромеханика // К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг / Учебное пособие для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2005. – 544 с.
19. Башмаков, Р.А. Давление и дебит при переходных режимах работы скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва / Р.А. Башмаков, Н.О. Фокеева, В.Ш. Шагапов // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т. 86, Вып. 6. – С. 998–1012. DOI: 10.31857/S0032823522060017
20. Башмаков, Р.А. Зависимость между давлением и расходом при переходных режимах работы скважины с ГРП / Р.А. Башмаков, В.Ш. Шагапов, Н.О. Фокеева // Актуальные проблемы науки и образования в современном вузе: Сборник трудов V Международной научно-практической конференции. – Sterlitaмак. – 2021. – С. 316–320.
21. Башмаков, Р.А. Особенности фильтрации флюидов в коллекторах, подверженных гидроразрыву пласта, при переходных режимах работы скважины / Р.А. Башмаков, Н.О. Фокеева, В.Ш. Шагапов // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, №3. – С. 117–127. DOI: 10.15372/PMTF20220312.
22. Гиматудинов, Ш.К. Физика нефтяного и газового пласта / Ш.К. Гиматудинов // Учебник. Изд. 2, перераб. и доп. М., «Недра». – 1971. – 312 с.

23. Давлетбаев, А.Я. Фильтрация жидкости в пористой среде со скважинами с вертикальной трещиной гидроразрыва пласта / А.Я. Давлетбаев // Инженерно-физический журнал. – 2012. – Т. 85, № 5. – С. 919–924.
24. Давлетбаев, А.Я. Моделирование фильтрации в низкопроницаемом пласте с двумя перпендикулярными техногенными трещинами гидроразрыва / А.Я. Давлетбаев, З.С. Мухаметова // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, № 3. – С. 632–639.
25. Давлетбакова, Л.А. Моделирование исследования методом установившихся режимов закачки между нагнетательной и добывающей скважинами с техногенной трещиной гидроразрыва // Л.А. Давлетбакова, А.Я. Давлетбаев / Вестник Башкирского университета. – 2016. – Т. 21, №4. – С. 884–892.
26. Давлетгареев, Д.И. Современные методы проведения ГРП / Д.И. Давлетгареев // Аллея науки. – Т. 1, № 4 (79). – 2023. – С. 355–358.
27. Деги, Д.В. Численное решение уравнения Навье – Стокса на компьютерах с параллельной архитектурой / Д.В. Деги, А.В. Старченко // Вестник Томского государственного университета. – 2012. – № 2. – С. 88–97.
28. Дезин, А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач / А.А. Дезин // Труды МИАН. – 2000. – Т. 229. – С. 3–175.
29. Добрынин, В.М. Деформация и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа / В.М. Добрынин. – М.: Недра, 1970. – 239 с.
30. Евсеев, О.В. Методы исследования трещины автоГРП в нагнетательных скважинах / О.В. Евсеев, А.В. Колонских, И.Д. Латыпов, Э.К. Уматов // Научно-технический вестник ОАО «НК «Роснефть». Разработка месторождений. – 2013. – С. 30–35.
31. Есипов, Д.В. Математические модели гидроразрыва пласта / Д.В. Есипов, Д.С. Куранаков, В.Н. Лапин, С.Г. Чёрный // Вычислительные технологии. – 2014. – Т. 19, № 2. – С. 33–61.

32. Желтов, Ю.П. Гидравлический разрыв пласта. Обзор зарубежной практики (под редакцией М.А. Геймана) / Ю.П. Желтов. – Гос. научно-техн. издательство нефтяной и горно-топливной литературы. – М.: Недра, 1957. – 75 с.
33. Желтов, Ю.П. Деформации горных пород / Ю.П. Желтов. – М.: Недра, 1966. – 198 с.
34. Желтов, Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта / Ю.П. Желтов. – М.: Недра, 1975. – 216 с.
35. Желтов, Ю.П. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта / Ю.П. Желтов, С.А. Христианович // Изв. АН СССР. ОТН. – 1955. – № 5. – С. 3–41.
36. Жуковский, Н.Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод / Н.Е. Жуковский // Поли. Собр. Соч. – М.: ГПИ. – 1937. – Т. 7.
37. Зиннатуллина, А.Н. Численное моделирование фильтрации воды в вертикальной скважине / А.Н. Зиннатуллина, М.Н. Шамсиев, Р.И. Ибятков // Вестник технологического университета. – 2018. – Т. 21, № 7. – С. 87–90.
38. И «нефтянка» по плечу. Диверсификация в космической отрасли – Журнал «Русский космос» – №04 (38) 2022 – С. 64–67. <https://www.roscosmos.ru/34908/>
39. Исламов, Д.Э. Совершенствование методов проектирования операций по гидроразрыву пластов для повышения продуктивности скважин: дис. канд. техн. наук 25.00.17 / Д.Э. Исламов – Тюмень, 2015. – 124 с.
40. Кадет, В.В. Фильтрация флюида в среде, содержащей эллиптическую трещину гидроразрыва / В.В. Кадет, В.И. Селяков // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1988. – № 5 – С. 54–60.
41. Каневская, Р.Д. Аналитические решения задач о притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва и их использование в численных моделях фильтрации / Р.Д. Каневская, Р.М. Кац // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1996. – № 6. – С. 69–80.

42. Каневская, Р.Д. Зарубежный и отечественный опыт применения гидроразрыва пласта / Р.Д. Каневская. – М.: ВНИИОЭНГ, 1998. – 40 с.
43. Каневская, Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов / Р.Д. Каневская. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 140 с.
44. Каневская, Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта / Р.Д. Каневская. – М.: ООО “Недра-Бизнесцентр”, 1999. – 212 с.
45. Каневская, Р.Д. Применение гидравлического разрыва пласта для интенсификации добычи и повышения нефтеотдачи / Р.Д. Каневская, И.Р. Дияшев, Ю.В. Некипелов // Нефт. хоз-во. – 2002. – № 5. – С. 96–101.
46. Ковалева, Л.А. Физика нефтегазового пласта / Л.А. Ковалева. – Учебное пособие, РИО БашГУ. – 2008. – 280 с.
47. Кокебаев, Б.К. К вопросам расширения и сужения операторов / Б.К. Кокебаев, М. Отелбаев, А.Н. Шыныбеков // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 271, № 6. – С. 1307–1310.
48. Кривоносов, И.В. Расчет дебитов скважин с трещиноватой призабойной зоной пласта / И.В. Кривоносов, И.А. Чарный // Нефтяное хозяйство. – 1955. – № 4. – С. 40–47.
49. Латыпов, И.Д. Исследование явления переориентации азимута трещины повторного гидроразрыва пласта / И.Д. Латыпов, А.И. Федоров, А.Н. Никитин // Нефтяное хозяйство. Разработка и эксплуатация нефтяных месторождений. – 10.2013. – С. 74–78.
50. Лейбензон, Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л.С. Лейбензон. – М.: Гостоптехиздат, 1947. – 244 с.
51. Лейбензон, Л.С. Николай Егорович Жуковский: (К 100-летию со дня рождения) / Л.С. Лейбензон. – М.; Л.: Изд-во Акад. Наук СССР, 1947. – 184 с.

52. Лейбензон, Л.С. Руководство по нефтепромысловой механике. Гидравлика. Ч. 1. / Л.С. Лейбензон. – М., Л.: Огиз – Гос. научн.-техн. изд-во, 1931. – 335 с.
53. Лейбензон, Л.С. Руководство по нефтепромысловой механике. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. Ч. 2. / Л.С. Лейбензон. – М., Л.: Огиз – Гос. научн.-техн. изд-во, 1934. – 351 с.
54. Маскет, М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. – М., Л.: Гостехтопиздат, 1949. – 628 с.
55. Месторождение идей. РН-БашНИПИнефть. Роснефть. Уфа. 2022. – 300 с. ISBN 978-5-604-72-33-3-3.
56. Методические указания по созданию постоянно действующих геолого-технологических моделей нефтяных и газонефтяных месторождений (Часть 2. Фильтрационные модели). – М.: ОАО «ВНИИОЭНГ». – 2003. – 228 с.
57. Мигранова, З.Н. Об определении параметров трещины ГРП / З.Н. Мигранова, Р.А. Башмаков, Н.О. Фокеева // Материалы IX Международной молодежной научно-практической конференции. – Стерлитамак. – 2019. – С. 251–253.
58. Митрушкин, Д.А. Расчет фильтрационных течений в трещиновато-пористых средах при наличии каверн / Д.А. Митрушкин, П.Ю. Томин // Георесурсы, геознергетика, геополитика. – 2014. – № 1(9). – 12 с.
59. Морозов, П.Е. Исследование распространения фильтрационных волн давления в пластах с искусственной или естественной трещиноватостью / П.Е. Морозов // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник трудов в 4-х томах. – Уфа. – 2019. – Том 2. – С. 1230–1232.
60. Морозов, П.Е. Псевдоскин-фактор и оптимальная проводимость трещины гидроразрыва в круговом пласте / П.Е. Морозов // Нефтяное хозяйство – 2019. – № 3. – С. 74–77.

61. Нагаева, З.М. К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой и проницаемой среде: дис. канд. физ.-мат. наук 01.02.05. / З.М. Нагаева – Уфа, 2018. – 112 с.
62. Нагаева, З.М. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте / З.М. Нагаева, В.Ш. Шагапов // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81, № 3. – С. 319–329.
63. Павловский, Н.Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и её основные приложения / Н.Н. Павловский. – Научно-мелиорационный институт. - Петербург: 1-я типо-литография «Транспечати» НКПС имени тов. Дзержинского, 1922. – 53 с.
64. Петровский, И.Т. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными / И.Т. Петровский // Успехи математических наук. – 1946. – Т. 1, № 3–4. – С. 44–77.
65. Равшанов, Н. Компьютерное моделирование процесса фильтрации флюидов в пористых средах / Н. Равшанов, Н.М. Курбонов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Выч. матем. информ. – 2015. – Т. 4, Вып. 2. – С. 89–106.
66. Романов, В.Г. Обратные задачи математической физики / В.Г. Романов // М.: «Наука», 1984. – 262 с.
67. Садовничий, В.А. Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями / В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, А.М. Ахтямов // Издательство МГУ, Москва, 2009. – 184 с.
68. Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш // М.: «Наука», 1980. – 463 с.
69. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.Н. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
70. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Том 3. / Г.М. Фихтенгольц. – Из-во: Лань, 2021. – 662 с.
71. Фокеева, Н.О. Динамика давления в трещине гидроразрыва при переходных режимах работы скважины // Многофазные системы. – 2022. – Т. 17, № 3–4. – С. 195.



72. Фокеева, Н.О. Задача о фильтрации флюида при переходных режимах работы скважина с ГРП / Н.О. Фокеева, Р.А. Башмаков // *Материалы XVI Всероссийской молодежной научной конференции «Мавлютовские чтения».* – Уфа. – 2022. – Т. 5. – С. 1262–1265.
73. Фокеева, Н.О. К моделированию работы скважины с трещиной ГРП / Н.О. Фокеева, А.А. Шамматова // *Вестник Башкирского университета* – 2023. – Т. 28, № 1. – С. 10–14.
74. Фокеева, Н.О. Моделирование работы вертикальной скважины с ГРП при переходном режиме / Н.О. Фокеева, Р.А. Башмаков // *Материалы международной научно-практической конференции им. Д.И. Менделеева: Сборник статей.* Т. 3. – Тюмень. – 2023. – С. 225–226.
75. Фокеева, Н.О. О динамике давления в трещине ГРП при переходных режимах работы скважины / Н.О. Фокеева, Р.А. Башмаков // *Уфимская осенняя математическая школа: Материалы Международной научной конференции.* – Уфа. – 2022. – Том 2. – С. 457–459.
76. Фокеева, Н.О. Особенности фильтрации при переходных режимах работы скважины с трещиной ГРП / Н.О. Фокеева, Р.А. Башмаков // *XXII Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: тезисы докладов.* – Новосибирск. – 2021. – С. 35–36.
77. Фокеева, Н.О. Распределения давления в трещине ГРП при переходных режимах работы скважины / Н.О. Фокеева, Р.А. Башмаков // *Уфимская осенняя математическая школа: Материалы международной научной конференции.* – Уфа. – 2021. – Том 2. – С. 242–244. DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.94.
78. Фокеева, Н.О. Распределение дебита и давления в скважине с ГРП при переходных режимах работы / Н.О. Фокеева, Р.А. Башмаков // *XXIII Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: тезисы докладов.* – Новосибирск. – 2022. – С. 39–40.

79. Фокеева, Н.О. Распределение дебита и давления в скважине с ГРП при переходных режимах работы / Н.О. Фокеева, Р.А. Башмаков // Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли. – Москва. – 2022. – С. 103–105.
80. Хабибуллин, И.Л. К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва / И.Л. Хабибуллин, А.А. Хисамов // Вестник Башкирского университета. – 2018. – Т. 23, № 4. – С. 958–963.
81. Хабибуллин, И.Л. Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт-трещина гидроразрыва / И.Л. Хабибуллин, А.А. Хисамов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 77. – С. 158–168.
82. Хабибуллин, И.Л. Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва / И.Л. Хабибуллин, А.А. Хисамов // Вестник Башкирского университета. – 2017. – Т. 22, № 2. – С. 309–314.
83. Хабибуллин, И.Л. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва / И.Л. Хабибуллин, А.А. Хисамов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2019. – № 5. – С. 6–14.
84. Халявин, С.А. Численное моделирование переходных режимов двухфазной фильтрации в трещиновато-пористой среде / С.А. Халявин, А.А. Афанасьев // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2019. – Т. 20 (3). – 12 с.
85. Хёрмандер, Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер // М.: ИЛ, 1959. – 131 с.
86. Чарный, И.А. Подземная гидрогазодинамика. / И.А. Чарный. – М.: Изд-во нефтяной и горно-топливной литературы, 1963. – 396 с.
87. Черницкий, А.В. Геологическое моделирование нефтяных залежей массивного типа в карбонатных трещиноватых коллекторах / А. В. Черницкий. – М.: ОАО «РМНТК «Нефтеотдача», 2002. – 254 с.

88. Шагапов, В.Ш. Динамика давления жидкости в трещине гидроразрыва при изменяющихся режимах работы скважины / В.Ш. Шагапов, Р.А. Башмаков, Н.О. Фокеева, А.А. Шамматова // Многофазные системы. – 2022. – Т. 17, № 1–2. – С. 113–121. DOI: 10.21662/mfs2022.1.009
89. Шагапов, В.Ш. К теории локального акустического зондирования прискважинных областей горных пород / В.Ш. Шагапов, З.А. Булатова // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – Т. 43, № 6. – С. 142–150.
90. Шагапов, В. Ш. К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде / В.Ш. Шагапов, З.М. Нагаева // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 5 (345). – С. 121–130.
91. Шагапов, В.Ш. О фильтрации жидкости в трещине ГРП при переменных режимах работы скважины / В.Ш. Шагапов, Н.О. Фокеева, З.Н. Мигранова // Многофазные системы. – 2020. – Т. 15, № 1–2. – С. 121. DOI: 10.21662/mfs2020.2
92. Шагапов, В.Ш. Упругий режим фильтрации жидкости к скважине через перпендикулярную ей трещину, образовавшуюся при гидроразрыве пласта / В.Ш. Шагапов, З.М. Нагаева, Е.П. Аносова // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – № 4 – С. 105–115.
93. Шагиев, Р.Г. Исследования скважин по КВД / Р.Г. Шагиев. – Москва «Наука», 1998. – 304 с.
94. Шамсиев, М.Н. Оценка фильтрационных параметров пласта с учетом разгазирования нефти в призабойной зоне / М.Н. Шамсиев // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 3(373). – С. 109–116.
95. Шамсиев, М.Н. Оценка параметров призабойной зоны скважины по результатам вертикального гидропрослушивания газового пласта / М.Н. Шамсиев, М.Х. Хайруллин, П.Е. Морозов // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93, № 2. – С. 324–330.
96. Шляпкин, А.С. Численная и программная реализация одномерной математической модели гидроразрыва пласта / А.С. Шляпкин, А.В.

- Татосов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2021. – Т. 7, № 1 (25). – С. 126–145.
97. Экономидес М. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике / М. Экономидес, Р. Олини, П. Валько // М.: Ижевск: Ин-т компьютер. технологий, 2007. – 236 с.
98. Экономидес М. Унифицированное проектирование гидроразрыва пласта. Установление взаимосвязи между теорией и практикой/ М. Экономидес, Р. Олини, П. Валько // Изд. «Компьютерные исследования», 2007. – 231 с.
99. Яркеева, Н.Р. Применение гидроразрыва пласта для интенсификации притока нефти в скважинах / Н.Р. Яркеева, А.М. Хазиев // Нефтегазовое дело. – 2018. – Т. 16, № 5. – С. 30–36.
100. Amini, S. Evaluation of the Elliptical Flow Period for Hydraulically-Fractured Wells in Tight Gas Sands / S. Amini, D. Ilk, T. A. Blasingame // Theoretical Aspects and Practical Considerations SPE 106308, Texas A&M University.
101. Ardislamova, D.R. Construction of The Secondary Voidness Model on The Example of Carbonate Reservoir Timan-Pechora Province Deposits / D.R. Ardislamova, V.A. Kolesov, N.O. Fokeeva, A.G. Malov, S.A. Rabzevich, M.N. Harisov // Geomodel 2021, Sep 2021. – V. 2021. – P.1–5.
102. Bashmakov, R.A. Some Features of Fluid in a Hydraulic Fracture under Transient Well Operation Conditions / R.A. Bashmakov, N.O. Fokeeva, V. Sh. Shagapov // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 57, No. 8. – P. 1923–1935.
103. Buckley, S.T. Mechanics of Fluid Displacement in Sands // S.T. Buckley, M.C. Leverett / Trans., AIME. – 1942. – Vol. 146. – P. 107–116.
104. Chen, J. Hydraulic fracturing: paving the way for a sustainable future? / J. Chen, M.H. Al-Wadei, R.C. Kennedy, P.D. Terry // Journal of environmental and public health. – 2014 – 656824.
105. Christianovich, S. A. On the mechanism of the hydraulic fracturing of the oil-bearing strata / S.A. Christianovich, Yu.P. Zheltov, G.I. Barenblatt //

- Neftyanoye Khozyaistvo (Oil Industry). – 1957. – No 1. – P. 44–52 (in Russian).
106. Cinco-Ley, H. Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods / H. Cinco-Ley // Intern. Petrol. Exh. and Tech. Symp., Beijing (China), Mar 18-26. – SPE 10043. – 1982.
  107. Cinco-Ley, H. Transient Pressure Analysis for Fractured Wells / H. Cinco-Ley, V.F. Samaniego // Journal of Petroleum Technology. – 1981. – P. 1749–1766.
  108. Cinco-Ley, H. Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture / H. Cinco-Ley, V.F. Samaniego, A.N. Dominguez // Soc. Petrol. Engrs J. – 1978. – V. 18, No 4. – P. 253–264.
  109. Gringarten, A. C. Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well with a Single Horizontal Fracture, Partial Penetration, or Restricted Entry. / A.C. Gringarten, H.J. Ramey // SPE J. 14 (1974). – P. 413–426.
  110. Guppy, K.H. Pressure-transient analysis for fractured wells producing at constant pressure / K.H. Guppy, S. Kumar, V.D. Kagawan // SPE Format. Evaluat. – 1988. – V. 3, No 1. – P. 169–178.
  111. Jennings, A.R. OGCI/PetroSkills Hydraulic Fracturing Applications / Alfred R. Jennings, Jr. P.E. // Enhanced Well Stimulation, Inc. 2003. – 168 c.
  112. Larkin, S. Hydraulic Fracturing by Stephen Larkin. Willis Towers Watson. – February 25, 2016. – P. 11.
  113. Liao, Y. Depth of Investigation for Elliptical Flow Problems and Its Applications to Hydraulically Fractured Wells / Yizhu Liao, W.J. Lee, // Texas A&M U. SPE 27908. – 1994. – P. 581–597.
  114. Liu, S. Numerical study on hydraulic fracture-cavity interaction in fractured-vuggy carbonate reservoir / Sai Liu, Zhiyuan Liu, Zhennan Zhang // Journal of Petroleum Science and Engineering. – V. 213, 2022. – 110426.
  115. Montgomery, C. T. Hydraulic Fracturing. History of an Enduring Technology / Carl T. Montgomery and Michael B. Smith // NSI Technologies. – December 2010. – P. 26–40.

116. Narr, W. Naturally fractured reservoir characterization // Wayne Narr, David W. Schechter, Laird B. Thompson / SPE, 2006. – P. 115.
117. Perkins, T.K. Widths of hydraulic fracturing / T.K. Perkins, L.R. Kern // J. Petrol. Technol. – 1961. – № 9. – P. 937–949.
118. Prats, M. Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior-Incompressible Fluid Case // SPE 1575-6. – 1961. – No. 1. – P. 105–118.
119. Rapoport, L.A. Properties of Linear Waterfloods / L.A. Rapoport, W. J. Leas // Trans. AIME. – 1953. – Vol. 198. – P. 139–148.
120. Ren, X. Numerical investigation of poroelastic effects during hydraulic fracturing using XFEM combined with cohesive zone model // Xiaoyu Ren, Yueyang Guan, Xiaofei Zhang, Xiaobao Liu, Jie Liu, Kang Liu, Jiangwei Luo, Guiyuan Shi / E3S Web of Conferences – Volume 375, № 01011 – 2023 – p. 7.
121. Shagapov, V.S. Evolution of Filtration Pressure Waves in a Hydraulic Fracture during Transient-Well-Operation Modes / V.S. Shagapov, R.A. Bashmakov, N.O. Fokeeva, A.A. Shammatoeva // Mathematics 2023, 11, 98.
122. Shagapov, V.S. Fluid filtration in reservoirs subjected to hydraulic fracturing during transient well operation / V.S. Shagapov, R.A. Bashmakov, N.O. Fokeeva // J Appl Mech Tech Phy 63. 2022. – P. 474–483.
123. Tan, P. A Review on Hydraulic Fracture Height Growth for Layered Formation / Peng Tan, Jiawei Kao, Fushan Cheng, Yiliu Sun, Shihao Fu, Lejia Ren // Geotechnical and Geological Engineering. 2022. – V. 40, p. 4057–4067.
124. Wu, B. Effect of stress and material barriers on hydraulic fracture height containment in layered formations / Wu Baocheng, Wei Xiaochen, Wang Wanbin, Li Jiaqi, Liu Tong, Wang Xuancheng // Environ Earth Sci. – 81, 255 – 2022.
125. Wu, Z. Advances and challenges in hydraulic fracturing of tight reservoirs: A critical review / Zhongwei Wu, Chuanzhi Cui, Peifeng Jia, Zhen Wang, Yingfei Sui // Energy Geoscience, 2021.
126. Xi, X. Mixed-Mode Fracture Modelling of the Near-Wellbore Interaction Between Hydraulic Fracture and Natural Fracture / Xun Xi, Zoe K. Shipton,

Jackie E. Kendrick, Andrew Fraser-Harris, Julien Mouli-Castillo, Katriona Edlmann, Christopher I. McDermott & Shangtong Yang // *Rock Mech Rock Eng* 55, 5433–5452. – 2022.

127. Zhao, H. The Influence of the Distribution Characteristics of Complex Natural Fracture on the Hydraulic Fracture Propagation Morphology / Zhao Huan, Li Wei, Wang Lei, Fu Jing, Xue Yun Long, Zhu Jian Jun, Li Si Qi // *Frontiers in Earth Science*. – V. 9. – 2022.

128. Zheng, P. Formation mechanisms of hydraulic fracture network based on fracture interaction / Peng Zheng, Yucheng Xia, Tingwei Yao, Xu Jiang, Peiyao Xiao, Zexuan He, Desheng Zhou // *Energy*. – Volume 243, 2022. – 123057.