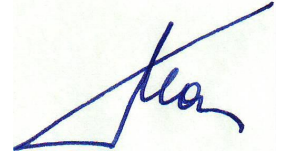


На правах рукописи



ГАЛИМЗЯНОВ Марат Назипович

**ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ С
ПАРОГАЗОВЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ И
ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ**

Специальность 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Уфа — 2024

Работа выполнена в Институте механики им. Р. Р. Мавлютова — обособленном структурном подразделении Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

Официальные оппоненты: **Прибатурин Николай Алексеевич**,
доктор технических наук, чл.–корр. РАН, главный научный сотрудник лаборатории физической гидродинамики ФГБУН Института теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН

Губайдуллин Амир Анварович,
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Тюменского филиала ФГБУН Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Осипцов Александр Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией механики многофазных средм научно-исследовательского института механики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», г. Казань

Защита состоится 19 декабря 2024 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.479.05 при Уфимском университете науки и технологий по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Уфимского университета науки и технологий <https://uust.ru/>.

Автореферат разослан _____ сентября 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н, доцент



Киреев Виктор Николаевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Технологические процессы нефтегазовой отрасли, теплоэнергетики, химической промышленности включают в себя течение жидкостей в широком спектре температур и давлений. Нередко значения физических параметров (давление, температура и т.д.) соответствуют состоянию метастабильности. Поведение жидкостей в таких условиях зависит от фонового излучения, наличия в составе среды примесей в виде газовых зародышей или твёрдых частиц, и многих других факторов. Переход системы из метастабильного состояния в устойчивое при сравнительно незначительном изменении внешнего воздействия может привести к аварийным последствиям, поэтому определение диапазона параметров устойчивости парогазожидкосных систем является актуальной проблемой современной механики.

Акустические волны – мощный диагностический инструмент мониторинга состояния газожидкостных систем. Дистанционные методы акустического зондирования используются для обнаружения и изучения глубоководных метановых факелов на дне океанов и морей, определения уровня жидкостей в межтрубном пространстве, исследования процесса вскипания жидкостей и т.д. В следствие чего необходимо развивать исследования акустики пузырьковых систем для эффективных и научно обоснованных технических и технологических решений при проектировании устройств акустического контроля.

Важнейшим условием безопасности трубопроводных систем, транспортирующих широкие фракции лёгких углеводородов, является понимание механизмов возбуждения и усиления амплитуды волновых процессов. Пузырьковые системы, как пассивные, так и содержащие взрывчатые газовые смеси, могут рассматриваться в качестве среды, возбуждение которой ударными волнами может привести к существенному усилению волнового поля и генерации мощного ударно-волнового импульса. Наряду с этим пристеночные пузырьковые зоны из-за фокусировки в них внешнего волнового поля могут оказать влияние на увеличение интенсивности кавитационной эрозии. Таким образом, пузырьковые среды как причина значимой кумуляции энергии волны представляют несомненный интерес.

К настоящему времени накоплен внушительный научный потенциал теоретических и экспериментальных исследований волновой динамики в пузырьковой жидкости. Однако остаётся ряд вопросов, на которые отсутствуют удовлетворительные ответы. Необходимость более подробного изучения акустических свойств пузырьковой жидкости и двумерных волн возникает, напри-

мер, в задачах эволюции волн давления в однородной жидкости, включающей пузырьковой зоны конечных размеров, или задаче точечного удара по объёму газожидкостной смеси.

В связи с вышеизложенным актуальность темы диссертации обусловлена необходимостью дальнейшего развития теории волновой динамики гетерогенных сред, углубления теоретических представлений о нестационарных волновых процессах в пузырьковых системах, интенсивным использованием многофазных смесей в технике и промышленности наряду с необходимостью анализа взрывобезопасности соответствующих гетерогенных систем.

Целью данной работы является построение и развитие теоретических моделей анализа зон устойчивости перегретой водовоздушной пузырьковой среды, отражения и преломления акустических волн на границе воды и смеси воды с парогазовыми пузырьками, а также численное исследование процессов фокусировки волн пузырьковыми кластерами различной формы.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Исследование распространения слабых возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках, помимо водяного пара, присутствует не участвующий в фазовых переходах инертный газ.
2. Исследование устойчивости парогазожидкостной смеси при различных показателях перегрева жидкости в широком диапазоне частот внешних возмущений.
3. Изучение особенностей отражения и преломления гармонических волн на границе раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками парогазовой смеси при прямом и «косом» их падении.
4. Построение и развитие теоретических моделей фокусировки волны давления пузырьковыми кластерами различной формы.

Основные положения, выносимые на защиту: соответствующие пунктам 7, 9, 15, 19 области исследования научной специальности 1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы:

1. Результаты исследований динамики слабых гармонических возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках помимо водяного пара присутствует не участвующий в фазовых переходах газ. Анализ карты зон устойчивости рассмотренных систем в зависимости от степени перегрева жидкости, построенной на плоскости объёмное содержание–радиус пузырьков в диапазоне равновесного давления от 0.1 до 10 МПа. Оценка влияния начального

перегрева (от сотых долей до одного градуса) и повышения давления на дисперсию гармонических волн, а также зависимость инкремента от радиуса пузырьков для неустойчивых систем (пп. 7, 9, 15, 19).

2. Закономерности отражения и преломления гармонических волн прямого и «косого» падения на границу раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками парогазовой смеси. Дисперсионные уравнения и их анализ для широкого диапазона частот, теплофизических параметров и параметров смеси (объёмного содержания и дисперсности). Оценка критических углов, при которых происходит явление полного внутреннего отражения (пп. 7, 9, 15, 19).
3. Теоретические модели фокусировки волн давления в заполненной водой трубе, содержащей пузырьковые кластеры различной формы. Анализ максимальных значений амплитуды волны, реализующихся на оси цилиндрического канала и на его стенках из-за фокусировки при различных параметрах задачи (пп. 7, 15, 19).

Научная новизна:

1. Впервые построены карты зон устойчивости парогазожидкостных систем в зависимости от степени перегрева жидкости. Проанализировано влияние начальной степени перегрева на эволюцию волновой картины течения. Для неустойчивых систем изучена зависимость инкремента от радиуса пузырьков при варьировании степени перегрева несущей жидкости.
2. Впервые установлены и изучены особенности отражения и преломления гармонических волн на границе раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками парогазовой смеси при прямом и «косом» их падении. Выписано дисперсионное уравнение, и проведён численный анализ влияния частот возмущений в диапазоне от 10 до 10^6 с⁻¹ на зависимость угла преломления от угла падения для нескольких значений равновесной температуры.
3. Графики зависимости достижения максимального значения давления в рабочем пространстве эксперимента от начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} и радиуса сферического пузырькового кластера R_{cl} , либо протяжённости цилиндрического Δz . Анализ влияния начального объёмного содержания пузырьков и геометрических размеров пузырькового экрана на кумуляцию или гашение волны давления.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе результаты расширяют знания о протекающих в многофазных средах физических процессах, более того, могут применяться для объяснения механизмов гашения и усиления волн давления пузырьковыми завесами. Разработанные модели, алгоритмы и программы могут быть использованы при разработке и эксплуатации различных технологических подводных объектов. Результаты численного моделирования возможно целенаправленно использовать в практической деятельности, в частности, для проектирования пузырьковой защиты подводных технических конструкций от разрушающего действия интенсивных волн. Вместе с тем, обеспечение затухания или локальной кумуляции энергии волн в жидкости посредством пузырьковых экранов может использоваться для эффективной охраны подводной фауны от взрывных волн, сопровождающих ремонтно-строительные работы. Карты зон устойчивости рассматриваемых парогазожидкостных систем могут быть полезны при расчётах и проектировании инженерных сооружений и т.д. Результаты моделирования взаимодействия акустических волн с пузырьковыми средами, с границами раздела между однофазной и двухфазной средой, полезны для проведения исследовательских работ в толще океана, анализа состояния воды и подводной фауны.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением фундаментальных уравнений механики многофазных сред при построении математических моделей, удовлетворением модельных допущений при постановке задач, использованием апробированных методов численного моделирования. Обоснованность результатов гарантируется верификацией расчётов посредством данных экспериментальных работ и численных исследований других авторов в некоторых случаях.

Апробация работы. Основные положения и результаты, представленные в диссертации, докладывались на следующих конференциях: Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006, 2011; Казань, 2015; Уфа, 2019; Санкт-Петербург, 2023); VI Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2006) (Санкт-Петербург, 2006); Российская научно-техническая конференция «Мавлютовские чтения» (Уфа, 2006); Школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2007, 2010); Международная конференция «Потоки и структуры» (Санкт-Петербург, 2007; Москва, 2009); Всероссийская конференция, посвящённая памяти академика А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 2006, 2008, 2012); Международная научная школа молодых учёных «Волны и

вихри в сложных средах» (Москва, 2017, 2022, 2023); Российская конференция «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения» и школа молодых учёных «Газовые гидраты – энергия будущего» (Уфа, 2017, 2023); Всероссийская конференция и школы для молодых учёных «Математические проблемы механики сплошных сред», посвящённая 100-летию академика Л.В. Овсянникова (Новосибирск, 2019) и др.

Кроме того, результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах в Институте механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН под руководством профессора С. Ф. Урманчеева и академика АН РБ, профессора В. Ш. Шагапова; на семинаре Института механики МГУ под руководством профессора А.Н. Осипцова (Москва); в Тюменском филиале ИТПМ СО РАН под руководством профессора А. А. Губайдуллина (Тюмень); на семинаре Института механики и машиностроения КазФИЦ РАН под руководством чл.-корр. РАН Д. А. Губайдуллина (Казань); на семинаре Института теплофизики СО РАН под руководством чл.-корр. РАН Н. А. Прибатурина (Новосибирск).

Личный вклад. Основные научные результаты получены автором самостоятельно. В работах, выполненных в соавторстве, диссертант, как правило, участвовал во всех этапах исследования от постановки задачи и выбора метода ее решения до получения и анализа результатов. Представление изложенных в диссертации и выносимых на защиту результатов, полученных в совместных исследованиях, согласовано с соавторами.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 36 работах, из которых 17 в изданиях, входящих в международные базы данных, 4 в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, где должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора наук. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации **243** страниц текста с **70** рисунками. Список литературы содержит **258** наименований.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность академику РАН Роберту Искандеровичу Нигматулину за создание научной школы данного направления, учеником которой он является.

Искреннюю благодарность за постоянный интерес к исследованиям и полезное обсуждение результатов работы автор выражает академику АН РБ, доктору физико-математических наук, профессору В. Ш. Шагапову, которого автор считает своим учителем и наставником.

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора С. Ф. Урманчеева и доктора физико-математических наук, профессора И. К. Гималтдинова за ценные советы и оказанную поддержку, а также своих коллег из Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН за творческое сотрудничество.

Автор особо благодарен кандидату физико-математических наук У. О. Агишевой за постоянную поддержку, веру и полезное обсуждение результатов работы.

Работа выполнена в рамках государственных заданий Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в сфере научной деятельности номер 0246–2019–0052 «Численные, аналитические и экспериментальные методы в многофазных, термовязких и микродисперсных системах газогидродинамики» и номер FMRS-2024-0001 «Гидрогазодинамика многофазных, термовязких и микродисперсных сред».

Содержание работы

Во введении отражена актуальность темы исследований, проводимых в диссертационной работе, сформулированы цели, отмечены научная новизна, достоверность и практическая значимость работы, а также кратко изложена структура диссертации.

В первой главе выполнен обзор значимых теоретических и экспериментальных работ, исследующих волновые процессы и устойчивость жидкости с газовыми и парогазовыми пузырьками.

Во второй главе выписаны основные допущения и уравнения модели динамики пузырьковой жидкости с газовыми и парогазовыми пузырьками. Для описания межфазных тепломассообменных процессов использована схема, основанная на решении уравнений переноса, таких, как уравнения теплопроводности и диффузии. Получено дисперсионное уравнение для моделирования распространения акустических волн в жидкости, включающей пузырьковую зону. С опорой на записанное дисперсионное соотношение получены уравнения для равновесной скорости звука в рассматриваемых средах, равновесного радиуса и определения критического объёмного содержания.

В пункте 2.1 выписаны основные уравнения для жидкости с парогазовыми пузырьками.

Для волновых процессов в пузырьковых жидкостях относительное движение фаз не существенно, поскольку основное влияние оказывает возникающая за счёт тепломассообменных процессов диссипация. Следовательно, модель предполагается односкоростной. Опираясь на все перечисленные предпо-

ложения, допустимо записать систему уравнений сохранения согласно теории динамики пузырьковых жидкостей, состоящую из уравнения сохранения массы каждой фазы, импульсов для каждой составляющей скорости, числа пузырьков в отсутствие их дробления, с учётом фазовых переходов следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_l}{dt} + \rho_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -I, & \frac{d\rho_g}{dt} + \rho_g \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= I, \\
\frac{dn}{dt} + n \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, & & \\
\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} &= 0, & \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial y} &= 0, \\
\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, & & I &= 4\pi a^2 n j, \\
\alpha_l + \alpha_g &= 1, & \alpha_g &= \frac{4}{3}\pi a^3 n, & \rho_i &= \rho_i^0 \alpha_i, & \rho &= \rho_g + \rho_l,
\end{aligned} \tag{1}$$

где индексы l, g относятся к параметрам несущей жидкости и газовой смеси в пузырьках, ρ_l и ρ_g , ρ_l^0 и ρ_g^0 – средние и истинные плотности жидкой и газовой фаз, α_l, α_g – объёмное содержание жидкой и газовой фазы, u и v – составляющие вектора скорости по координатам x и y , p_l – давление в жидкости, n – число пузырьков в единице объёма, a – радиус пузырьков, I и j – интенсивности массообмена, отнесённые к единице объёма смеси и к единице площади поверхности раздела фаз.

Термодинамические параметры жидкости описываются в предположении ее слабой сжимаемости, а газ полагается калорически совершенным

$$p_l = p_0 + C_l^2(\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g, \tag{2}$$

где C_l – скорость звука в жидкости, R – газовая постоянная. Здесь и в дальнейшем индексами 0 внизу снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущённому состоянию.

Для учёта влияния процессов тепло- и массообмена в газожидкостной смеси не достаточно макропараметров, зависящих от времени и координат x, y : скорости, давления, средней по смеси и фазе плотности, радиуса пузырьков. Это приводит к необходимости ввести систему микрокоординат внутри содержащей единичный пузырёк микрочастицы с координатами (x, y) , характеризующую распределение температуры, плотности, давления внутри и около пузырьков и зависящие от времени, макро- и микрокоординаты. Начало отсчёта микросистемы связано с центром пузырька, за микрокоординату принято расстояние до центра пузырька r , скорость полагается равной макро-

скорости в данной макроточке. Микропараметры отмечены штрихами сверху (рис. 1 на с. 10).

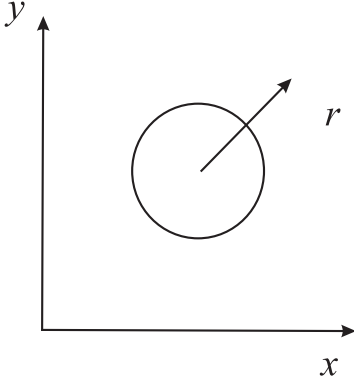


Рис. 1 — Схема микрочастицы.

Для учёта межфазного теплообмена записывается уравнение теплопроводности и диффузии внутри пузырька и уравнение теплопроводности в жидкости вокруг него. Для достаточно широкого класса задач порождаемые радиальными колебаниями пузырьков в жидкости температурные волны имеют длину значительно меньшую, чем средние расстояния между пузырьками. Этот факт даёт возможность записать уравнения теплопроводности в сферически симметричной постановке внутри и около каждого включения.

$$\begin{aligned} \rho_{g0}^0 c_{pg} \frac{\partial T'_g}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_g r^2 \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_g}{\partial t} + \rho_{g0}^0 (B_{air} - B_v) T_0 \frac{\partial k'}{\partial t}, \\ \frac{\partial k'}{\partial t} &= \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial k'}{\partial r} \right) \quad (0 < r < a_0), \\ \rho_{l0}^0 c_l \frac{\partial T'_l}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_l r^2 \frac{\partial T'_l}{\partial r} \right) \quad (a_0 < r < a_0 \alpha_{g0}^{-1/3}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $c_{pg} = c_{pv} k'_v + c_{pair}(1 - k'_v)$ — удельная теплоёмкость при постоянном давлении.

Соотношения на поверхности раздела фаз ($r = a_0$) определяются с опорой на условия баланса тепла и массы:

$$\begin{aligned} T'_g &= T'_l = T_{(a)}, \quad k' = k_{(a)}, \\ \lambda_l \frac{\partial T'_l}{\partial r} - \lambda_g \frac{\partial T'_g}{\partial r} &= j \cdot L, \quad j = \frac{D}{1 - k_0} \left(\frac{\partial k'}{\partial r} \right)_{a_0}, \\ \rho_v' \left(\frac{da}{dt} - w_g - w'_v \right) &= \rho_l^0 \left(\frac{da}{dt} - w_l \right) = j, \\ \rho_{air}' \left(\frac{da}{dt} - w_g - w'_{air} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где L — удельная теплота парообразования воды, $T_{(a)}$, $k_{(a)}$ — возмущения температуры и концентрации на поверхности пузырька. Для полей температуры и концентрации пара на границе выполняются соотношения

$$\frac{\partial k'}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T'_g}{\partial r} = 0 \quad (r = 0). \quad (5)$$

В систему граничных условий (4) — (5) важно включить определяющее соотношение для T'_l . В зависимости от поставленной задачи неоднородности поля

температур в жидкости могут выравниваться в слое существенно меньшем, чем средние расстояния между пузырьками. В такой постановке для жидкости можно принять условие изотермичности

$$T'_l = T_0 \quad (r = \infty). \quad (6)$$

Если же масштабы неоднородности поля температур в задаче сопоставимы со средними расстояниями между пузырьками, то справедливо предположить, что все пузырьки для фиксированной макрочастицы равноправны, и нет потока тепла между слоями жидкости, прилегающими к отдельным включениям. В таких ситуациях применяется условие адиабатичности:

$$\frac{\partial T'_l}{\partial r} = 0 \quad (r = a_* = a_0 \alpha_{g0}^{-1/3}) \quad (7)$$

где a_* – радиус содержащей пузырёк микрочастицы.

Соотношение, определяющее исходное равновесное состояние среды и однозначно связывающее массовую концентрацию пара в пузырьке с температурой T_0 :

$$\frac{p_{\text{eq}}(T_0)}{p_{g0}} = \frac{B_v k_0}{B_{\text{air}} + (B_v - B_{\text{air}}) k_0}, \quad (8)$$

равновесное давление $p_{\text{eq}}(T)$ подчиняется формуле

$$p_{\text{eq}}(T) = p_* \exp\left(\frac{-T_*}{T}\right),$$

где p_* , $T_* = L/R_v$ – эмпирические параметры, зависящие от вида жидкости.

Учитывая допущение о гомобаричности включений, можно получить соотношение

$$\frac{dp_g}{dt} = \left(-p_g a^2 w_g + \int_0^a G' r^2 dr \right) / \left(\frac{a^3}{3} + \int_0^a F' r^2 dr \right), \quad (9)$$

где

$$F' = \frac{B'}{c'_{pg}},$$

$$G' = \left\{ \left[(B_v - B_{\text{air}}) c'_{Vg} T'_g \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D r^2 \rho'_g \frac{\partial k'}{\partial r} \right) \right] + \right. \\ \left. + B' \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_g r^2 \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right) + (c_{Vv} - c_{Va}) D \rho'_2 \frac{\partial k'}{\partial r} \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right] \right\} \frac{1}{c'_{pg}}.$$

Уравнение радиальной скорости пузырьков с учётом $p_g = p_v + p_{\text{air}}$ имеет вид:

$$a \frac{dw_l}{dt} + \frac{3}{2} w_l^2 + 4\nu_l \frac{w_l}{a} = \frac{p_v + p_{\text{air}} - p_l - 2\sigma/a}{\rho_l^0}, \quad (10)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения воды.

Уравнение для определения скорости радиального движения пузырька записывается как

$$w'_g = -\frac{r}{3p_g} \frac{dp_g}{dt} + \frac{1}{r^2 p_g} \int_0^r \left(G' + F' \frac{dp_g}{dt} \right) r^2 dr. \quad (11)$$

Построенная система уравнений с учётом граничных условий является замкнутой. Таким образом, приведённая методика позволяет исследовать течения газожидкостных смесей без использования дополнительных эмпирических постоянных из-за двухфазности. Стоит отметить, что размерность задачи увеличивается на единицу из-за введения нового независимого микропараметра r .

В **пункте 2.2** сформулирована постановка задачи в плоско-одномерном и односкоростном приближении.

Пункт 2.3 посвящён выводу дисперсионного уравнения, соотношения для равновесной скорости в точке кипения и некоторым обсуждениям равновесного радиуса и критического объёмного содержания.

Решение приведённой выше системы уравнений ищется в виде бегущей волны с затухающей амплитудой:

$$p_l, p_g, v, a \sim e^{i(Kx-\omega t)}, \quad T'_l = T_l(r) e^{i(Kx-\omega t)}, \quad T'_g = T_g(r) e^{i(Kx-\omega t)}, \\ k' = k(r) e^{i(Kx-\omega t)}, \quad (K = k + i\delta, \quad C_p = \omega/k, \quad i = \sqrt{-1}).$$

После всех преобразований получено дисперсионное соотношение:

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{(1 - \alpha_{g0})^2}{C_l^2} + 3 \frac{\rho_{l0}^0 \alpha_{g0} (1 - \alpha_{g0})}{\psi}. \quad (12)$$

В **пункте 2.4** проводится сравнение тестовых численных расчётов с экспериментальными данными из работы E. Silberman¹.

Акустические измерения в эксперименте проводились в вертикальной трубе круглого сечения. Труба заполнялась водой до различного уровня, а воздушно-водяная смесь создавалась путём добавления пузырьков воздуха из отверстий на дне трубы. Звукогенераторы диафрагменного типа располагались заподлицо с днищем трубы. Верхняя поверхность трубы была открыта и имелся контакт с атмосферой, так что звуковые волны почти полностью отражались, а воздух свободно курсировал. Измерения звукового давления проводились с помощью небольших гидрофонов, установленных вертикально внутри трубы. Пар в пузырьках отсутствовал. Экспериментальные точки,

¹Silberman E. Sound velocity and attenuation in bubbly mixtures measured in standing wave tubes // The Journal of the Acoustical Society of America. 1957. Т. 29, № 8. С. 925–933.

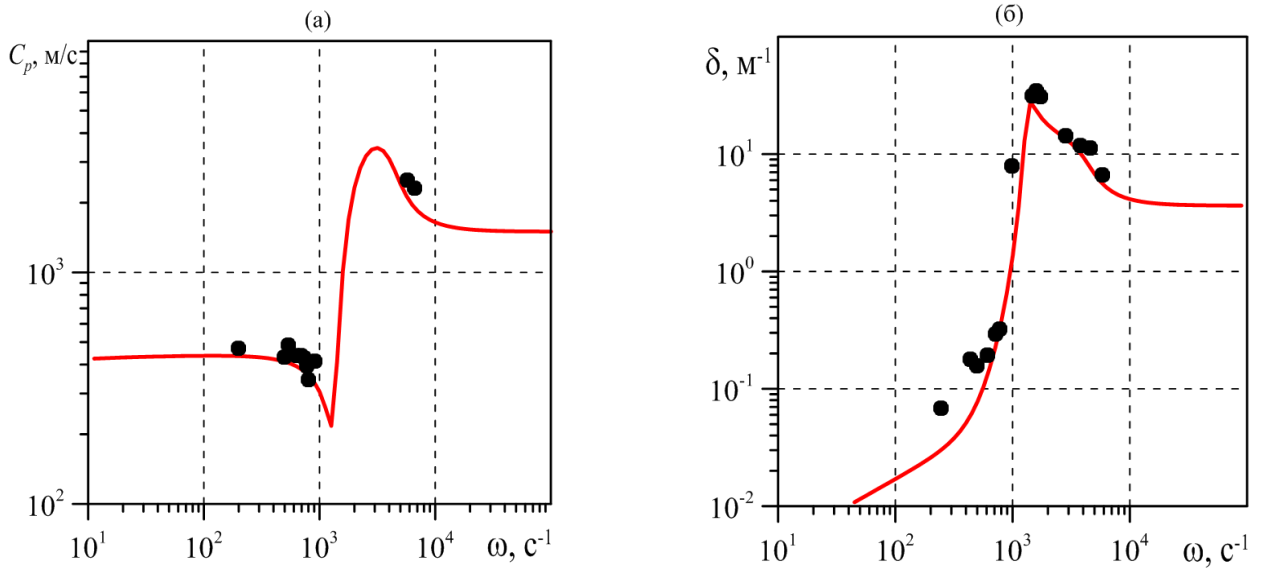


Рис. 2 — Сопоставление результатов теоретических исследований (сплошная линия) с экспериментальными данными (символы \bullet) работы Е. Silberman. На фрагменте (а) зависимость фазовой скорости, на фрагменте (б) — коэффициента затухания от частоты возмущений ω при $a_0 = 3.1 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 5.8 \cdot 10^{-4}$.

приведённые на рис. 2, соответствуют значениям параметров $a_0 = 1.9 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 5.8 \cdot 10^{-4}$. При численных расчётах использовались следующие общие данные: $\rho_{l0}^0 = 10^3$ кг/м³, $\rho_{g0}^0 = 1.31$ кг/м³, $p_0 = 10^5$ Па, $a_0 = 3.1 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 5.8 \cdot 10^{-4}$. На рис. 2 сравниваются данные численных расчётов и экспериментов для зависимостей фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущений. Можно заключить, что имеется хорошее согласование результатов расчётов с экспериментальными данными.

В пункте 2.5.1 проведён параметрический анализ акустических возмущений в пузырьковой жидкости. Изучены колебания фазовой скорости и коэффициента затухания вблизи двух характерных волновых частот ω_R (частота собственных колебаний пузырьков или частота Миннаэрта) и ω_C (частота, при которой фазовая скорость достигает своего максимального значения). Обсуждено влияние процесса диффузии на изменение величины фазовой скорости и коэффициента затухания. Установлено, что массообмен наиболее значим в низкочастотной области, где температура среды приближается к значению, для которого масса зародышей m_{g0} является критической.

В пункте 2.5.2 рассчитаны зависимости равновесной скорости, фазовой скорости и коэффициента затухания от начального радиуса и объёмного содержания пузырьков.

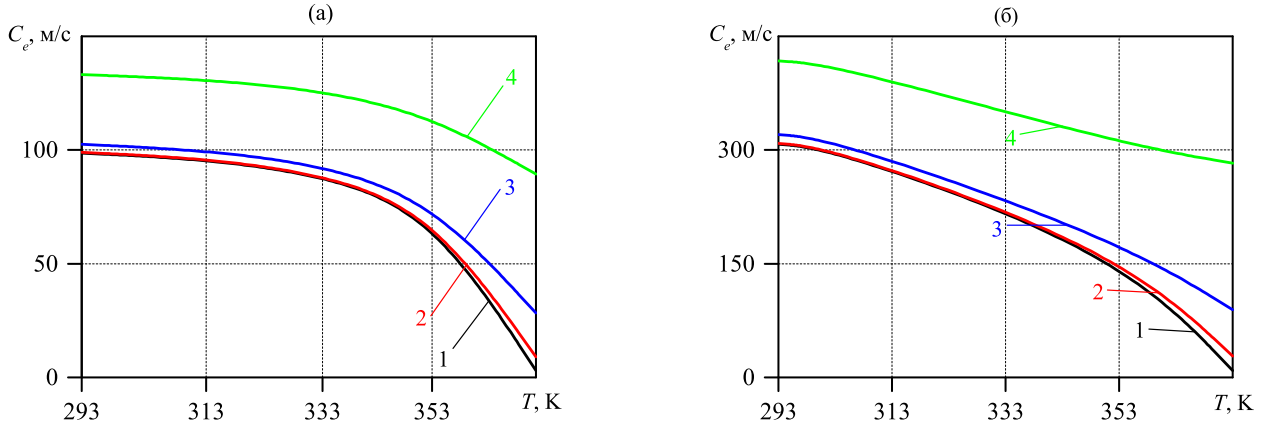


Рис. 3 — Изменение равновесной скорости звука с ростом температуры при различных значениях начального радиуса ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$ слева и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ справа): 1 — $a_0 = 10^{-3}$ м, 2 — 10^{-4} м, 3 — 10^{-5} м, 4 — 10^{-6} м.

Расчёты равновесной скорости звука в среде произведены в условиях $\omega \leq \omega_l^{(T)}$ ($\omega_l^{(T)} = \nu_l^{(T)} \alpha_{g0}^{2/3} / a_0$). Рис. 3, с. 14 даёт наглядное представление о зависимости от температуры воды T_0 для $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (слева) и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (справа). Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют начальным радиусам $a_0 = 10^{-3}$, 10^{-4} , 10^{-5} и 10^{-6} м, начальное давление в смеси $p_0 = 0.1$ МПа.

Результаты расчётов на рис. 3 обнаруживают рост равновесной скорости при сокращении размера пузырьков в обоих случаях, поскольку действующие на межфазной поверхности капиллярные силы и фазовые переходы делают мелкие пузырьки «жёстче». Следует отметить, что для обоих случаев расположение линий на графике соответствует характеру изменения радиуса пузырьков. Линия 4 располагается выше остальных и выбивается из общей картины, так как радиус $a_0 = 10^{-6}$ м далёк от равновесного при выбранном давлении и температуре (его значение 2.18×10^{-5} м), и, следовательно, вся система попадает в зону неустойчивости.

Пункт 2.5.3 даёт представление о динамике равновесной скорости, фазовой скорости и коэффициента затухания под влиянием величины равновесной температуры.

Роль равновесной температуры T_0 и, соответственно, равновесной концентрации пара в пузырьках k_0 , определяемой из соотношения (8), в формировании дисперсионных кривых фазовой скорости акустической волны и коэффициента ее затухания можно оценить с помощью рис. 4, с. 15 в крупнодисперсной ($a_0 = 10^{-3}$ м, слева) и мелкодисперсной ($a_0 = 10^{-6}$ м, справа) смесях. В качестве начальных данных принято давление $p_0 = 0.1$ МПа и объёмное газосодержание $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Кривые 1–3 рассчитывались при равновесных тем-

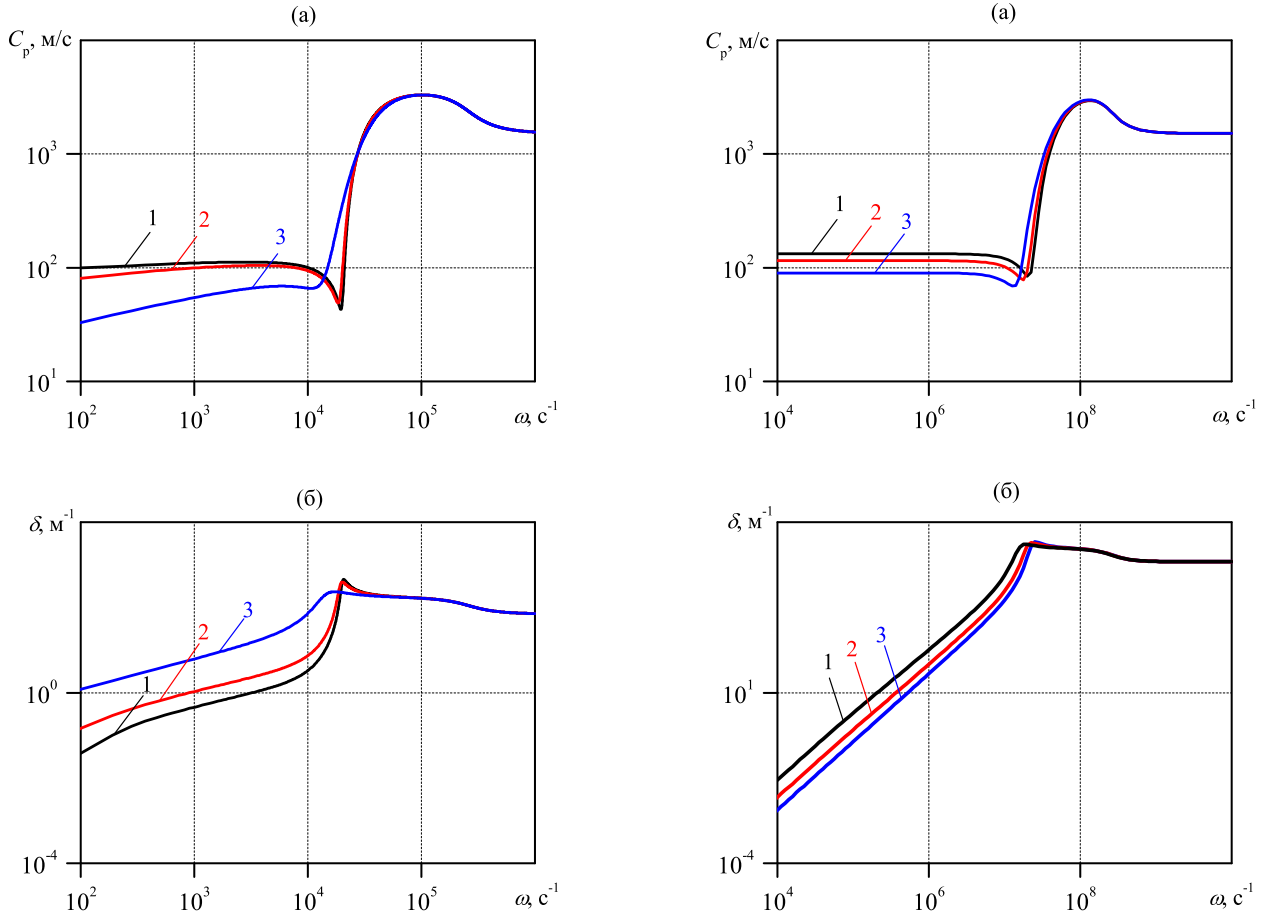


Рис. 4 — Влияние начальной равновесной температуры на дисперсионные кривые в смеси с крупнодисперсными парогазовыми включениями: 1 — $T_0 = 300$ К, 2 — 353 К, 3 — 373 К при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м (слева) и $a_0 = 10^{-6}$ м (справа).

пературах $T_0 = 300, 353, 373$ К, соответственно, массовая концентрация пара в пузырьках составила для крупнодисперсной смеси $k_0 = 0.023, 0.361, 0.996$, а для мелкодисперсной $k_0 = 0.001, 0.147, 0.347$.

Анализируя данные рис. 4, б, важно отметить резкий рост коэффициента затухания δ . А именно: в случае $a_0 = 10^{-3}$ м для частоты возмущения $\omega = 10^3$ s^{-1} коэффициент δ возрастает с $\delta = 10^{-1}$ m^{-1} до $\delta \simeq 5$ m^{-1} , а для $\omega = 10^4$ s^{-1} с $\delta = 1$ m^{-1} до $\delta = 10$ m^{-1} . Расчётные кривые слева на рис. 4 позволяют обнаружить тенденцию к более чем десятикратному увеличению интенсивности затухания слабых акустических волн с ростом температуры от комнатной до точки кипения. Что касается высоких частот ($\omega \gg \omega_R$), затухание волн в большей степени определяется акустической разгрузкой пузырьков, и, следовательно, изменение температуры системы мало влияет на коэффициент затухания. Подчеркнём, что дисперсионные свойства газожид-

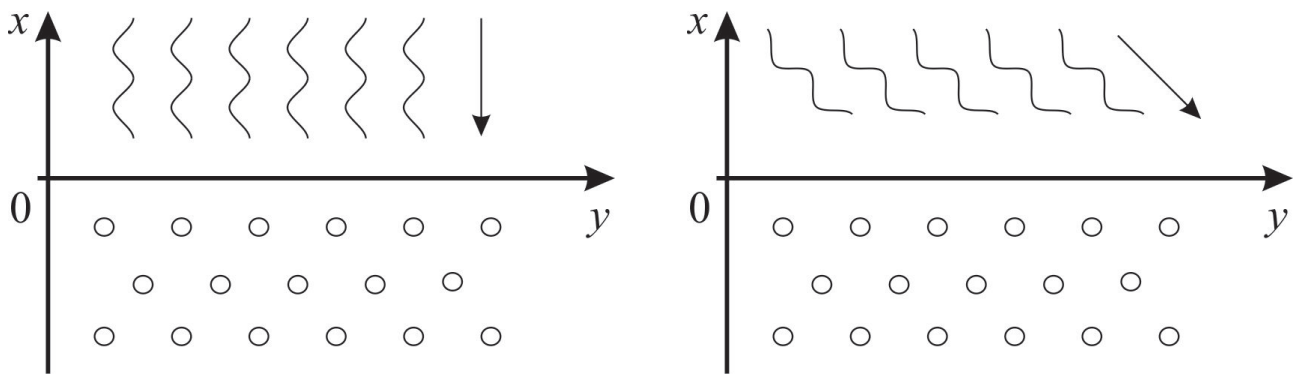


Рис. 5 — Схематическое изображение расчётной области при прямом (слева) и «косом» (справа) падении волны на границу раздела.

костной смеси колеблются минимально при температурах ниже комнатной ($273 \leq T_0 \leq 300$ К).

Особенности дисперсионных кривых в мелкодисперсных смесях ($a_0 = 10^{-6}$ м) наглядно отражены на рис. 4 справа. Поскольку в мелких пузырьках влияние силы поверхностного натяжения выше, равновесная концентрация пара в пузырьках становится меньше, чем при $a_0 = 10^{-3}$ м, и составляет $k_0 = 0.001, 0.147$ и 0.347 соответственно. Важно подчеркнуть, что при частоте возмущения $\omega = 10^3$ с $^{-1}$ коэффициенты затухания для выбранных равновесных температур могут варьироваться в 1.3 раза.

В третьей главе рассмотрены особенности отражения и преломления гармонических волн при столкновении с границей между «чистой» жидкостью и жидкостью, содержащей пузырьки с парогазовой смесью, как при прямом (рис. 5, *a*), так и при наклонном их падении (рис. 5, *б*). Исследовано воздействие частоты колебаний на коэффициенты отражения и преломления звука при прямом падении.

В пункте 3.1 представлена постановка задачи и выведено дисперсионное соотношение.

Пусть на плоскую границу раздела между жидкостью и газонасыщенной жидкостью под некоторым углом падает плоская гармоническая волна (рис. 5, с. 16). Схема прямого падения представлена на рис. 5, *a*, «косого» — на рис. 5, *б*. Будем полагать, что, как и в случае обычных однофазных сред, отражённая от границы и преломлённая волны представляют собой плоские гармонические волны². Тогда в области воды малые возмущения представляют собой сумму из двух гармонических волн, а в зоне пузырьковой жидкости — одну гармоническую волну. Возмущения, соответствующие падающей, отражённой и преломлённой волнам, снабдим верхними индексами (0), (*r*) и

²Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

(s). В рамках принятой модели пузырьковой жидкости вязкостные и теплообменные процессы учитываются лишь при межфазных взаимодействиях, смесь односкоростная, тензор напряжений – шаровой, поведение жидкости изотермическое, поэтому на границе $x = 0$, как и в случае однофазных сред, можно ограничиться лишь двумя граничными условиями: непрерывности давления и нормальной компоненты скорости

$$p^{(0)} + p^{(r)} = p^{(s)}, \quad v^{(0)} \cos \Theta^{(0)} - v^{(r)} \cos \Theta^{(r)} = v^{(s)} \cos \Theta^{(s)}. \quad (13)$$

Здесь $\Theta^{(0)}$, $\Theta^{(r)}$ и $\Theta^{(s)}$ – углы падения; $v^{(0)}$, $v^{(r)}$ и $v^{(s)}$ – возмущения скорости, соответствующие плоским падающим, отражённым и преломлённым волнам.

Тогда для перечисленных волн возможно записать

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= A_p^{(0)} \exp \left[i \left(K^{(0)} \left(n_x^{(0)} x + n_y^{(0)} y \right) - \omega t \right) \right], \\ p^{(r)} &= A_p^{(r)} \exp \left[i \left(K^{(r)} \left(n_x^{(r)} x + n_y^{(r)} y \right) - \omega t \right) \right], \\ p^{(s)} &= A_p^{(s)} \exp \left[i \left(K^{(s)} \left(n_x^{(s)} x + n_y^{(s)} y \right) - \omega t \right) \right], \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} n_x^{(0)} &= \cos \Theta^{(0)}, & n_y^{(0)} &= \sin \Theta^{(0)}, & n_x^{(r)} &= \cos \Theta^{(r)}, \\ n_y^{(r)} &= \sin \Theta^{(r)}, & n_x^{(s)} &= \cos \Theta^{(s)}, & n_y^{(s)} &= \sin \Theta^{(s)}. \end{aligned}$$

Для волновых чисел $K^{(0)}$ и $K^{(r)}$ имеет место $K^{(0)} = K^{(r)} = \omega / C_l$. При дальнейших рассуждениях будем полагать, что $\alpha_{g0} \ll 1$ и $1 - \alpha_{g0} \sim 1$. С учётом этого волновое число $K^{(s)}$ определяется из дисперсионного соотношения

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_l^2} + 3 \frac{\rho_{l0}^0 \alpha_{g0}}{\psi}. \quad (14)$$

Амплитуда возмущений скоростей с амплитудами давлений связаны выражениями вида

$$A_{(v)}^{(0)} = \frac{A_{(p)}^{(0)}}{\rho_{l0} C_l}, \quad A_{(v)}^{(r)} = -\frac{A_{(p)}^{(r)}}{\rho_{l0} C_l}, \quad A_{(v)}^{(s)} = \frac{K^{(s)} A_{(p)}^{(s)}}{\omega \rho_{l0}^0}. \quad (15)$$

На основе условий (13) с учётом (15) при $x = 0$ имеет место

$$\begin{aligned} A_{(p)}^{(0)} \exp \left(i K^{(0)} n_y^{(0)} y \right) + A_{(p)}^{(r)} \exp \left(i K^{(r)} n_y^{(r)} y \right) &= A_{(p)}^{(s)} \exp \left(i K^{(s)} n_y^{(s)} y \right), \\ A_{(p)}^{(0)} \cos \Theta^{(0)} \exp \left(i K^{(0)} n_y^{(0)} y \right) - A_{(p)}^{(r)} \cos \Theta^{(r)} \exp \left(i K^{(r)} n_y^{(r)} y \right) &= \\ &= A_{(p)}^{(s)} \cos \Theta^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\omega} C_l \exp \left(i K^{(s)} n_y^{(s)} y \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Чтобы эти уравнения выполнялись для любых значений y , должны выполняться равенства

$$K^{(0)}n_y^{(0)} = K^{(r)}n_y^{(r)} = K^{(s)}n_y^{(s)}, \quad (17)$$

отсюда следует

$$\sin \Theta^{(0)} = \sin \Theta^{(r)}, \quad \sin \Theta^{(0)} = \left(K^{(s)}/\omega \right) C_l \sin \Theta^{(s)}. \quad (18)$$

Поскольку определяемое из (14) волновое число $K^{(s)}$ – комплексное, то, как следует из второго равенства (17), угол преломления тоже имеет мнимую часть.

Для коэффициентов отражения и преломления, определённых как $R = A_{(p)}^{(r)}/A_{(p)}^{(0)}$ и $S = A_{(p)}^{(s)}/A_{(p)}^{(0)}$ на основе (16) с учётом (17) можно получить

$$S = 2 \left/ \left(1 + \frac{C_l K^{(s)} \cos \Theta^{(s)}}{\omega \cos \Theta^{(0)}} \right) \right., \quad R = S - 1.$$

Когда волна падает со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела, вместо второго равенства (18) запишется

$$\sin \Theta^{(s)} = \left(C_l K^{(0)} / \omega \right) \sin \Theta^{(0)}.$$

Волновое число $K^{(0)}$ определяется из дисперсионного уравнения (14). Для коэффициентов преломления и отражения в этом случае верно

$$S = 2 \left/ \left(1 + \frac{C_l K^{(0)} \cos \Theta^{(s)}}{\omega \cos \Theta^{(0)}} \right) \right., \quad R = S - 1.$$

Результаты **пункта 3.2** продолжают исследования предыдущего пункта. Для полноты картины отдельно рассмотрим случаи падения акустической волны под прямым и «косым» углами на границу раздела между средами.

В **пункте 3.2.1** обсуждается воздействие акустической волны на границу раздела между средами под прямым углом.

На рис. 6, с. 19 иллюстрируется случай воздействия гармонической волны на границу раздела между «чистой» жидкостью и пузырьковой смесью со стороны «чистой» жидкости (на рисунке слева) и со стороны пузырьковой жидкости (справа) для трёх значений температуры. Следует подчеркнуть, что для низкочастотного диапазона ($\omega < \omega_R$) $\phi \approx -180^\circ$ (для графиков слева), следовательно $R = -|R|$, в таком случае отражённая волна имеет отрицательную амплитуду. Причём, наибольшая амплитуда отражённой волны ($R = 1$) достигается в системе в условиях точки кипения $T_0 = 373$ К для $a_0 = 10^{-3}$ м. При набегании волны со стороны пузырьковой жидкости $\phi = 0^\circ$ градусов, следовательно, $R = |R|$. Что касается проходящей волны, ее амплитуда для всех

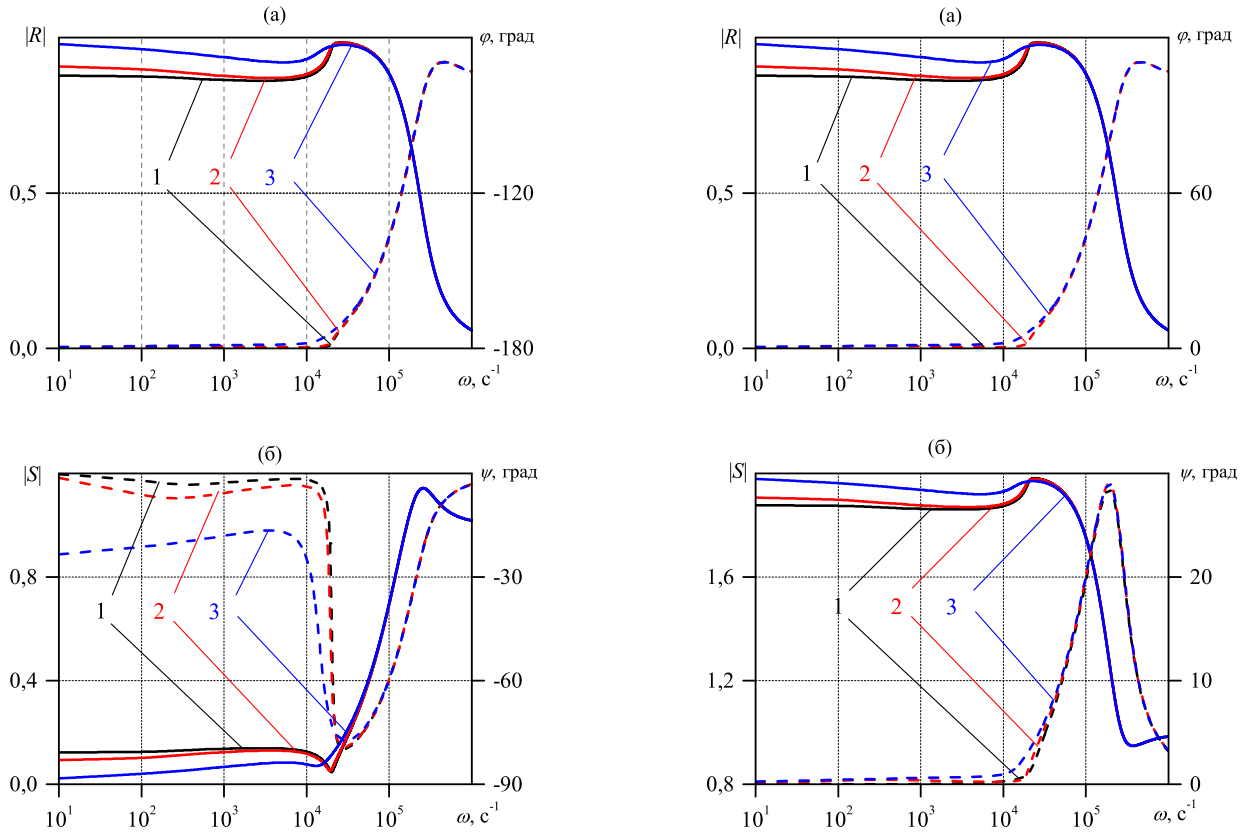


Рис. 6 — Влияние равновесной температуры T_0 на коэффициенты отражения и преломления в случае прямого падения волны при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м со стороны «чистой» жидкости (слева) и со стороны пузырьковой жидкости (справа).

трёх температур составляет 20% ($|S| \leq 0.2$) от амплитуды падающей волны при движении со стороны «чистой» жидкости, наименьшая амплитуда падающей волны реализуется в точке кипения. При падении волны со стороны пузырьковой жидкости амплитуда проходящей волны для всех трёх температур увеличивается почти вдвое ($|S| \sim 1.9$). Это объясняется относительно высокой мягкостью пузырьковой системы в сравнении с «чистой» жидкостью. Наибольшая амплитуда отражённой волны реализуется также в точке кипения. Отметим, что высокочастотные фрагменты кривых ($\omega > 10^4 \text{ с}^{-1}$) для всех значений температуры сливаются, поскольку из-за инерции радиальное движение пузырьков «замораживается». В связи с этим, акустический импеданс пузырьковой жидкости определяется скоростью звука в «чистой».

В пункте 3.2.2 анализируется воздействие акустической волны на границу раздела между средами под косым углом. Проведено сравнение с результатами других авторов в предельных случаях, получено удовлетворительное согласование.

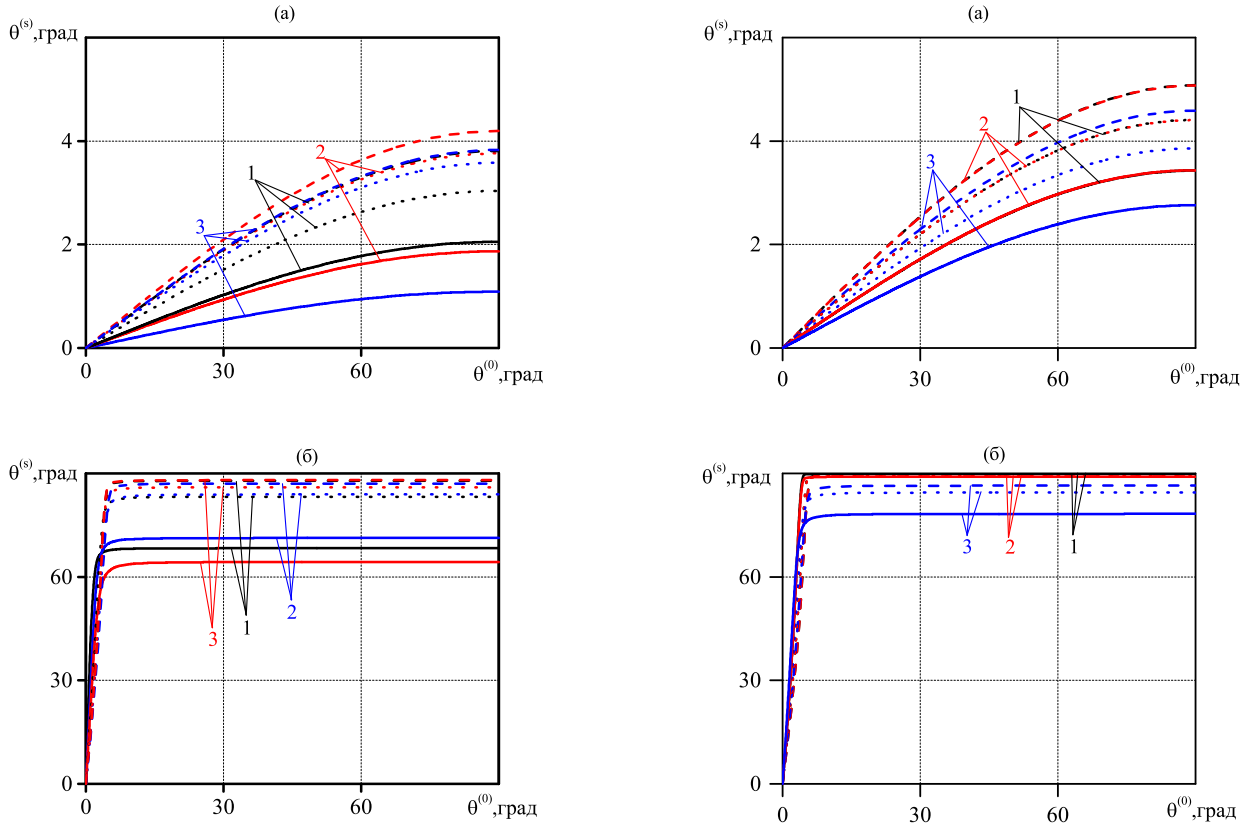


Рис. 7 — Зависимость угла преломления от угла падения со стороны «чистой» жидкости (а) и со стороны пузырьковой жидкости (б) при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ ($a_0 = 10^{-3}$ м — слева и $a_0 = 10^{-6}$ м — справа): 1 — $\omega = 10^2$ с $^{-1}$, 2 — 10^3 с $^{-1}$, 3 — 10^4 с $^{-1}$.

На рис. 7, с. 20 построены зависимости угла преломления от угла падения при трёх значениях температуры среды: $T_0 = 300$ (штриховая линия), 353 (пунктирная линия) и 373 К (сплошная линия). Для случая падения волны из «чистой» жидкости в зону пузырьковой жидкости угол преломления для всех случаев не превышает 5° (рис. 7, а), что обусловлено низким значением фазовой скорости, в особенности при $T_0 = 373$ К (угол преломления не более 3°). Волна из «чистой» жидкости для всех углов падения $\Theta^{(0)}$ проникает в пузырьковую жидкость практически перпендикулярно к поверхности раздела. Из рис. 7,а видно, что во всём диапазоне изменения угла падения $0 \leq \Theta^{(0)} \leq 90^\circ$ для рассматриваемых частот угол преломления меньше прямого угла ($\Theta^{(s)} < 90^\circ$). Следовательно, при любом угле падения акустическая волна проникает из «чистой» жидкости в пузырьковую.

Когда волна падает со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела сред (рис. 7, б), линии, соответствующие начальной температуре среды $T_0 = 300$ и 353 К, уже на малых углах падения ($\Theta^{(0)} \leq 5^\circ$) достигают значения

$\Theta^{(s)} \sim 90^\circ$. Следовательно, и в данном случае акустическая волна не проникнет через границу раздела, поэтому пузырьковый слой в «чистой» жидкости обладает свойствами звукового канала. Наряду с этим для начальной температуры среды $T_0 = 373$ К возникает иная картина: угол отражения достигает максимальной величины $\Theta^{(s)} \approx 70^\circ$. Таким образом, для системы при температуре 373 К формально не происходит полного внутреннего отражения. Однако необходимо добавить, что в этом случае из-за большого коэффициента затухания и малой фазовой скорости (что отражается на значении мнимой части $n_y^{(s)}$ (или $\cos \Theta^{(s)}$)) проникающая в «чистую» жидкость волна полностью затухает вблизи границы раздела сред. Следовательно, и в этом случае фактически реализуется полное внутреннее отражение.

В пузырьковой жидкости с малым начальным радиусом пузырьков $a_0 = 10^{-6}$ м (рис. 7, справа) наряду с начальной температурой среды важное влияние на значение угла преломления оказывает и частота возмущений. При температуре 373 К для частот, близких к частоте собственных колебаний пузырьков, угол отражения достигает максимума в $\Theta^{(s)} \approx 70^\circ$. Аналогично случаю $a_0 = 10^{-3}$ м, для системы, находящейся при температуре 373 К, формально не происходит полного внутреннего отражения. Однако и в этом случае из-за большого коэффициента затухания и малой фазовой скорости проникающая в «чистую» жидкость волна полностью затухает вблизи границы раздела сред. Следовательно, здесь также реализуется полное внутреннее отражение.

В пункте 3.3 исследуется акустическая устойчивость перегретой жидкости с газовыми пузырьками.

На основе полученного выше дисперсионного уравнения (12) проведены численные расчёты в воде с паровоздушными пузырьками. Значения физических и теплофизических параметров брались из справочника³. Линии 1, 2 и 3 на рисунках соответствуют значениям статического давления $p_0 = 0.1, 1$ и 10 МПа. Один, два и три штриха отмечают величину перегрева $\Delta T_0 = 10^{-2}, 10^{-1}$ и 1 К, соответственно.

На рис. 8, с. 22 построены линии на плоскости (α_0, a_0) , определяющие границу раздела устойчивых и неустойчивых состояний перегретой воды с паровоздушными пузырьками, находящейся при отмеченных выше трёх значениях давления p_0 ($T_{\text{eq}}(p_0) = 373, 453, 584$ К). График демонстрирует, что эти линии в левой части резко растут, справа постепенно снижаются. На участке

³Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2-е изд. М.: Наука, 1972. 720 с.

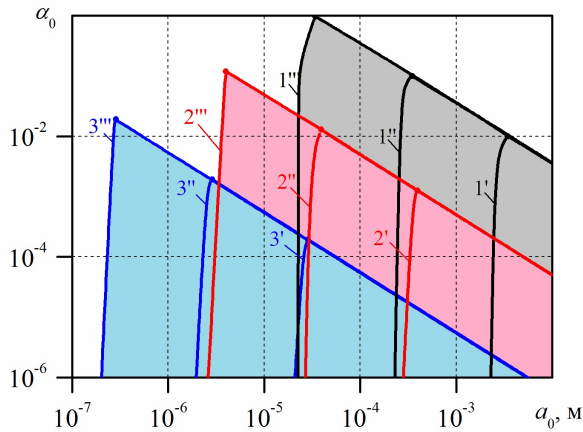
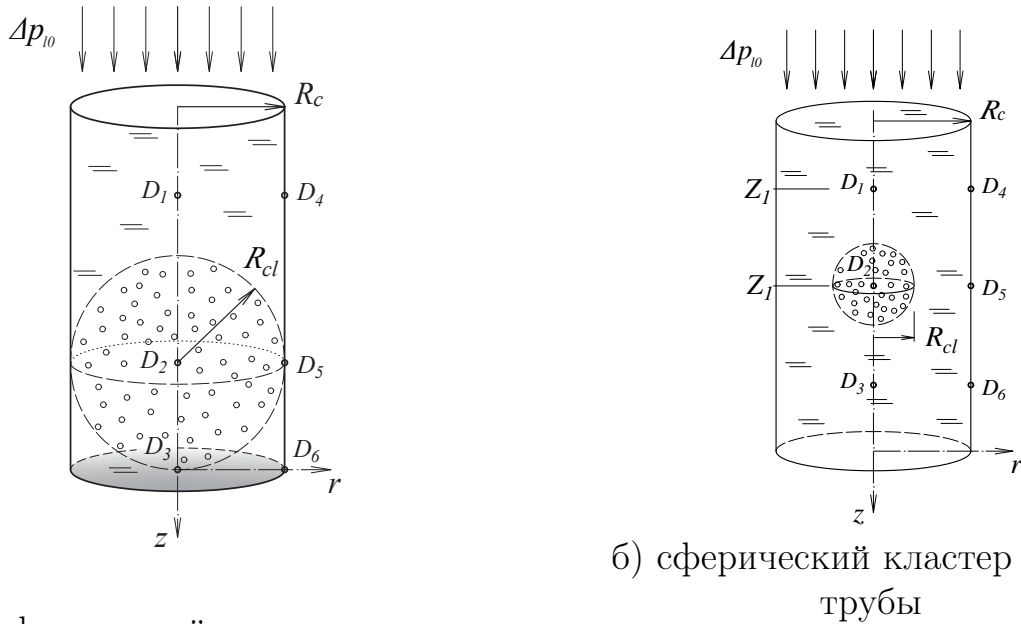


Рис. 8 — Линии, определяющие на плоскости (α_{g0}, a_0) границу раздела устойчивых и неустойчивых состояний перегретой воды с паровоздушными пузырьками.

роста соответствующая массовая концентрация k_0 пара также увеличивается, причём для давлений $p_0 = 1$ и 10 МПа при всех трёх значениях перегрева достигает значения $k_0 = 1$ (на графиках эти положения отмечены жирными точками). Для случая $p_0 = 0.1$ МПа и $\Delta T_0 = 1$ К при объёмной доле пузырьков в смеси $\alpha_0 \leq 0.1$ концентрация $k_0 = 1$ не достигается. На нисходящем участке массовая концентрация пара сохраняет своё постоянное значение $k_0 = 1$, то есть эти участки кривых соответствуют пароводяной пузырьковой системе. Зоны, расположенные вне кривых, соответствуют устойчивым, а внутри — неустойчивым состояниям. В случае чисто паровых пузырьков данные линии полностью определяют границу между устойчивыми и неустойчивыми состояниями. Причём зоны, расположенные правее этих линий, соответствуют устойчивым, а левее — неустойчивым состояниям. Этот случай был исследован в работе ⁴. Из представленных на рисунке данных можно сделать вывод, что величина объёмного содержания парогазовых пузырьков слабо влияет на характер кривых, определяющих границу устойчивости. Левые границы для всех значений перегревов — крутые, почти вертикальные линии. Необходимо добавить, что зоны левее нисходящих линий (правая граница) полностью принадлежат неустойчивым состояниям чисто парожидкостных пузырьковых систем. Вследствие чего наличие газа в пузырьках расширяет зону устойчивости перегретой жидкости. При этом, чем меньше перегрев, тем правее смещается линия, слева определяющая границу между устойчивыми и неустойчивыми состояниями. Поэтому чем меньше перегрев, тем более просторной становится зона устойчивости.

⁴Вахитова Н.К., Шагапов В.Ш. О распространении малых возмущений в парожидкостных пузырьковых средах // Прикладная математика и техническая физика. 1984. № 5. С. 34–43. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/71a/71a1de7a615a2b166abb82f311fe4a3c.pdf>.



а) сферический кластер на торцевой стенке

б) сферический кластер на оси трубы

Рис. 9 — Схема задачи. R_C и R_{cl} — радиусы трубы и сферического кластера. Z_1 — координата центра кластера. $D_1 - D_6$ — датчики давления.

В четвёртой главе выполнен анализ эволюции волн давления в заполненной чистой жидкостью цилиндрической трубе при наличии в ней пузырьковой области сферической формы. Рассмотрено два случая:

1. Пузырьковый кластер на оси трубы.
2. Сферический кластер, примыкающий к торцевой поверхности трубы.

Исследуется влияние объёмного содержания пузырьков и геометрии пузырьковой области на динамику волновой картины течения. Построены карты максимальных давлений, достигаемых в трубе, в зависимости от значений указанных параметров.

В пункте 4.1 записана постановка задачи, основные уравнения динамики волн в жидкости с газовыми пузырьками.

Далее будет рассмотрена следующая задача: пусть имеется заполненная водой труба, на её оси располагается область сферической формы, содержащая пузырьковую жидкость (рис. 9, с. 23); в начальный момент времени система находится в состоянии покоя при равновесном давлении p_0 , далее в некоторый момент времени, который в дальнейшем будем полагать началом отсчёта, на границе $z = 0$ возникает мгновенный скачок давления Δp_{l0} и далее поддерживается постоянным. Исследуется эволюция волнового процесса в трубе при $t > 0$.

Запишем систему макроскопических уравнений, которая используется для решения подобных задач, в приближении цилиндрической симметрии. В эту систему входят уравнения сохранения масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках.

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{v_r}{r} + \rho_i \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \quad (i = l, g), \\
\frac{dn}{dt} + n \frac{v_r}{r} + n \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0, \\
\rho \frac{dv_r}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial r} = 0, \quad \rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial z} &= 0, \\
\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \quad w = \frac{da}{dt}, \\
\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right), \\
\alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l.
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь использованы следующие обозначения: α_i – объёмные содержания фаз, v_r и v_z – радиальная и осевая составляющая скорости, a – радиус пузырьков, p_i – давления фаз, ρ_{i0} – истинные плотности фаз, γ – показатель адиабаты для газа, q – интенсивность теплообмена, n – число пузырьков в единице объёма, w – их радиальная скорость. Нижними индексами $i = l, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

Скорость движения границы пузырька w может быть представлена как сумма двух составляющих $w = w_R + w_A$, где w_R определяется из уравнения Релея–Ламба, а w_A находится из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}},$$

где ν_l – вязкость жидкости, C_l – скорость звука в «чистой» жидкости.

Тепловой поток q для расчёта нелинейных волн принято задавать приближённым конечным соотношением

$$\begin{aligned}
q &= \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3, \\
\text{Nu} &= \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe} < 100, \end{cases} \\
\text{Pe} &= 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}.
\end{aligned}$$

где $T_0 = \text{const}$ – температура жидкости, c_g и λ_g – теплоёмкость и теплопроводность газа, Nu и Pe – числа Нуссельта и Пекле.

Здесь стоит добавить, что из записанной математической модели в частном случае при $\alpha_{g0} = 0$ следует волновое уравнение для линейно сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой средой это обстоятельство, в свою очередь, позволяет использовать сквозные методы расчёта.

Пункт 4.2 содержит краткое изложение методики расчёта, уравнения в переменных Лагранжа, принцип построения разностной схемы, начальные и граничные условия.

В данной разделе для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных была выбрана конечно-разностная схема с использованием метода Рунге–Кутты.

В **пункте 4.3** выполнены тестовые расчёты. Их наглядное сравнение с экспериментальными данными из работы В.Е. Донцова ⁵ служит верификацией применимости записанной модели к обозначенному классу задач.

Эксперимент проводился в ударной трубе длиной 1 м с внутренним диаметром 0.053 м. На оси вдоль рабочего участка располагалась проволока из нержавеющей стали диаметром 0.001 м. Рабочий участок заполнялся жидкостью (дистиллированной водой) и насыщался пузырьками газа через генератор, расположенный в нижней части трубы. На проволоку надевался пузырьковый кластер – поролоновый шарик, заполненный жидкостью с пузырьками – и размещался у дна рабочего участка (см. рис. 10, с. 26). Верхний край кластера находился на расстоянии 0.01 м от поверхности жидкости. Были использованы поролоновые шарики диаметром 0.03 и 0.045 м и пластины диаметром 0.053 м и высотой 0.02 м.

Пузырьковый кластер создавался на вспомогательной установке: поролоновый шарик помещался в рабочий объём и насыщался дистиллированной водой под вакуумом, далее через жидкость прокачивались воздушные пузырьки при статическом давлении выше атмосферного. Таким образом, жидкость в рабочем объёме насыщалась воздухом до равновесного состояния при данном статическом давлении, и вследствие диффузии газ растворялся внутри поролонового шарика. Время выравнивания концентрации растворенного в жидкости газа на поверхности и в центре шарика τ составляло несколько десятков часов ($\tau \approx R^2/(2 \cdot D)$, где R – радиус кластера; D – коэффициент диффузии ⁶).

⁵Донцов В.Е. Взаимодействие ударной волны со сферическим газожидкостным кластером // Прикладная математика и техническая физика. 2004.Т. 45, № 1. С. 3–11.

⁶Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва: Гостехтеоретиздат, 1952. 600 с.

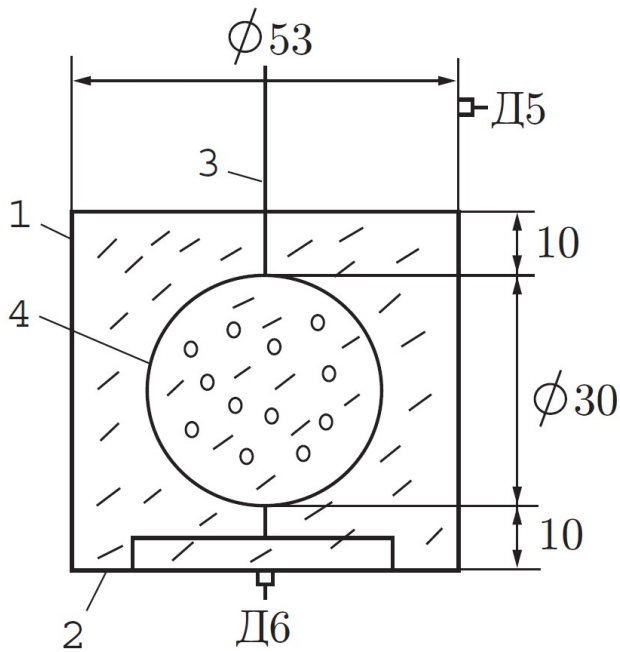


Рис. 10 — Схема расположения пузырькового кластера в ударной трубе: 1 — рабочий участок; 2 — дно рабочего участка; 3 — стальная проволока; 4 — газожидкостный кластер; Д5 и Д6 — датчики давления.

После сброса статического давления до атмосферного происходило выделение из жидкости газовых пузырьков, которые прилипали к порононому скелету и формировали собственно пузырьковый кластер.

Волны давления ступенчатой формы генерировались при разрыве диафрагмы, разделяющей камеру высокого давления и рабочий участок, и далее распространялись в жидкость. Профили волн давления регистрировались пьезоэлектрическими датчиками на боковой поверхности (Д1–Д5) и дне рабочего участка (Д6).

На рис. 11, с. 27 приведены профили волны давления в жидкости (Δp_l). В расчётах волна создавалась скачком граничного давления типа «ступенька» $p_l = p_0 + \Delta p_{l0}$ при $z = 0$ амплитудой $\Delta p_{l0} = 0.3$ МПа. Из рис. 11 следует удовлетворительное согласование расчётных данных с экспериментальными. Видно, что газожидкостный кластер, сжимаясь под действием входящей в жидкость волны давления ступенчатой формы, формирует солитоноподобный профиль давления в жидкости. Амплитуда волны в жидкости значительно превышает амплитуду граничной волны. Высокочастотные осцилляции на переднем фронте волны связаны с прохождением по жидкости высокочастотных пульсаций ударной волны и их отражением от дна и свободной поверхности жидкости, а также с колебаниями пузырьков в кластере.

В пункте 4.4 исследована эволюция волновой картины течения в цилиндрической трубе, заполненной жидкостью и содержащей сферический пузырьковый кластер. Численные расчёты проводились при следующих теплофизических параметрах: $c_g = 1006$ Дж/кг·К, $\rho_{g0} = 1.29$ кг/м³, $\lambda_g =$

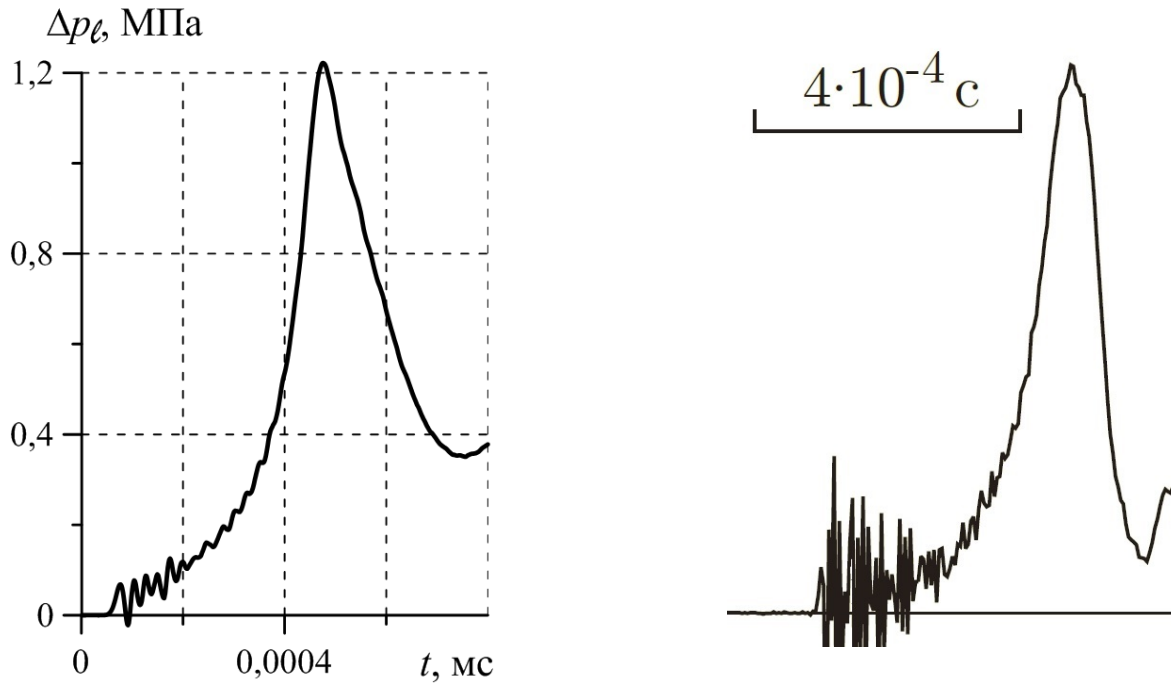


Рис. 11 — Оциллограмма датчика Д6. Слева представлен результат расчета, а справа — эксперимент. В расчетах и в эксперименте: $a_0 = 0.248$ мм, $\alpha_{g0} = 0.128$, $c_g = 1003$ Дж/кг·К, $\lambda_g = 0.0259$ м·кг/К·с³, $\Delta p_l = 1.28$ МПа.

0.026 м·кг/К·с³, $\gamma = 1.14$ ($\kappa_g = 2.003 \cdot 10^{-5}$ м²/с) (для воздуха); $C_l = 1500$ м/с, $\rho_{l0} = 10^3$ кг/м³, $\nu_l = 6 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $T_0 = 293$ К, $p_0 = 0.1$ МПа (для воды). Для h_{z_0} , h_{r_0} и τ брались следующие значения: $h_{z_0} = h_{r_0} = 10^{-3}$ м, $\tau = 10^{-7}$ с.

Пункт 4.4.1 посвящён следующей физической задаче: в заполненной жидкостью (водой) трубе цилиндрической формы находится сферической пузырьковый кластер, примыкающий непосредственно к торцевой твёрдой стенке (см. рис. 9, а на с. 23). В определённый момент система нагружается волной давления по направлению образующей трубы. Исследуется, каким образом наличие кластера у поверхности изменит интенсивность волнового импульса.

Параметры трубы и пузырьковой области определим так: радиус пузырькового кластера R_{cl} изменяется от 25 до 100 % радиуса трубы с шагом 25 %, длина расчётной области составляет $L_z = 0.5$ м, радиус трубы $R_c = 0.1$ м, начальное содержание газовой фазы $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, начальный радиус пузырьков $a_0 = 10^{-3}$ м, амплитуда скачка давления на границе $\Delta p_{l0} = 0.5$ МПа.

Для сравнения и анализа влияния начального объёмного содержания пузырьков на динамику волны в трубе на рис. 12, с. 28 представлены показания датчиков D_2 и D_3 для двух значений α_{g0} : 10^{-2} (слева) и 10^{-3} (справа). Датчик D_2 расположен в середине пузырьковой области для всех рассмотренных значений радиуса (см. рис. 9, а на с. 23) и фиксирует значение амплитуды

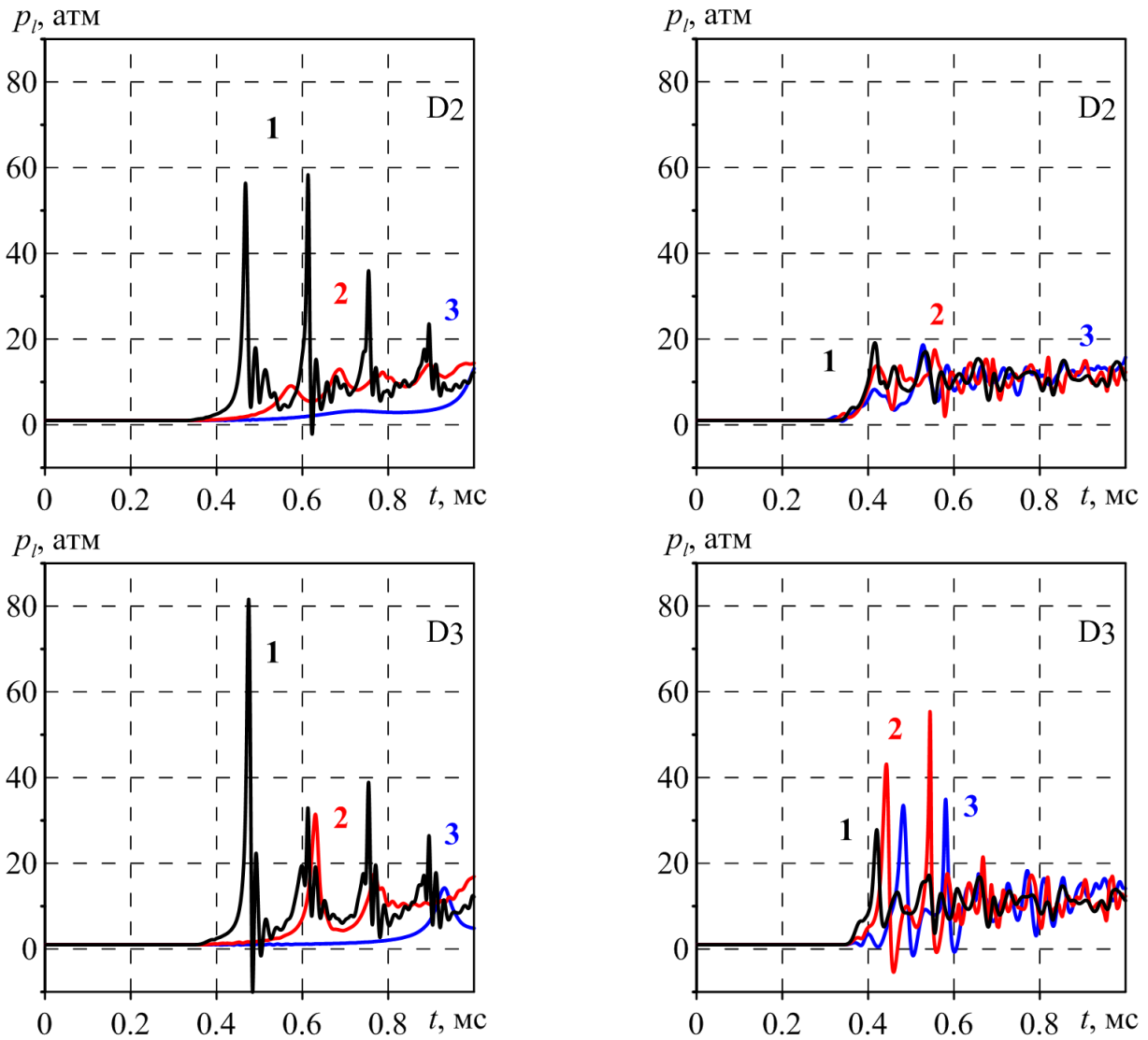


Рис. 12 — Показания датчиков D_2 и D_3 при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (слева) и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (справа). Линии **чёрного цвета** соответствуют сферическому кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.025$ м, **красного** – 0.05 м и **синего** – 0.075 м.

волны давления, дошедшей до середины кластера. Датчик D_3 расположен за кластером на торцевой стенке. Данные на графиках позволяют сделать следующие выводы: во-первых, при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ можно получить большие значения амплитуды давления, чем при $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ ceteris paribus. Это убедительно демонстрируют линии для радиуса кластера $R_{cl} = 0.025$ м. Однако, если радиус пузырьковой области равен $R_{cl} = 0.05$ м, большие давления фиксируются при $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Такое отличие объясняется геометрией кластера и разностью скоростей распространения волны в пузырьковой среде. Действительно, для $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ скорость распространения возмущений составляет всего 100–110 м/с, тогда как для $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ уже 400–440 м/с. Следовательно, во втором случае волна достигает центра пузырьковой области в четыре ра-

за быстрее. Но за счёт уменьшения времени прохождения волнового сигнала до середины пузырьковой области, уменьшается и «аккумулированная» областью энергия волны, а значит, и «отдача» от пузырьковой области становится меньше. Это повлияет на амплитуду результирующей волны, взаимодействующей с торцевой стенкой. С другой стороны, увеличение радиуса пузырькового кластера наращивает время на достижение середины области, что приводит к увеличению «аккумулированной» областью энергии от взаимодействия кластера с падающей на него волной давления. Во-вторых, для радиуса кластера $R_{cl} = 0.075$ м и случая $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ пузырьковая область существенно уменьшает возможное воздействие волны давления как на предмет, помещённый внутрь области, так и на торцевую стенку, в сравнении с другими случаями. Можно заключить, что правильный подбор размеров области и начального объёмного содержания позволяет как усилить волну давления перед взаимодействием с торцом трубы, так и существенно ее ослабить.

На следующих рисунках представлены распределения давления внутри трубы (слева) и на её оси (справа) для двух различных значений начального объёмного газосодержания: $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (рис. 13) и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (рис. 14). Момент времени выбирался наиболее близко к возникновению пикового давления, реализующегося на оси расчётной области для данного радиуса кластера.

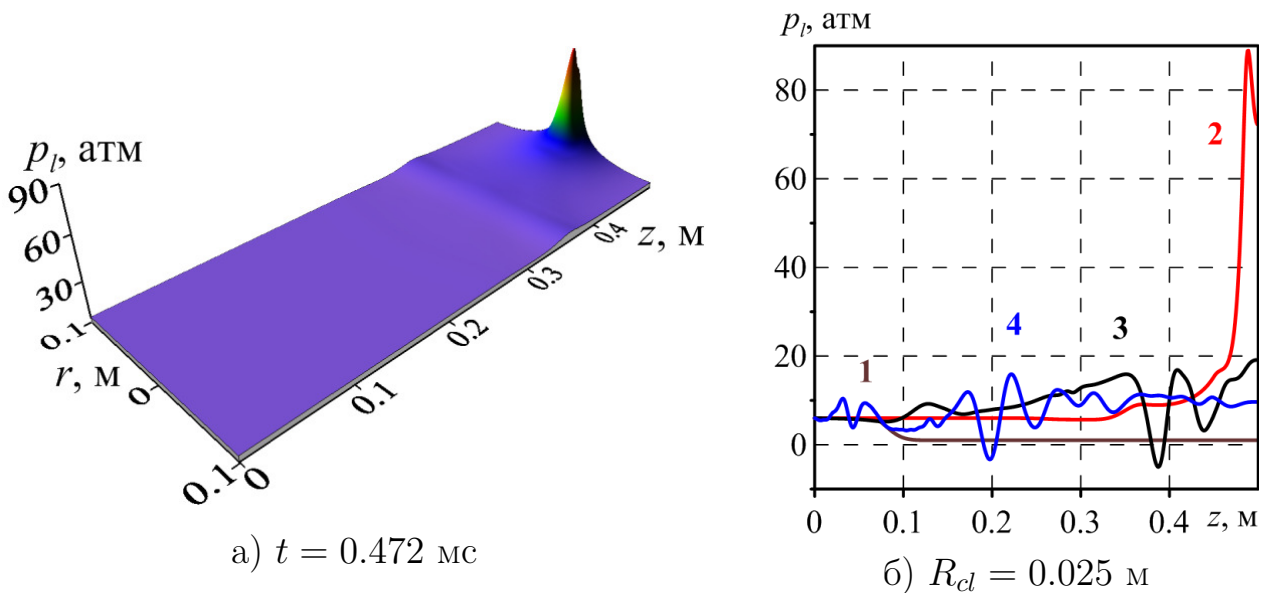


Рис. 13 — Распределение давления внутри трубы (слева) и на оси трубы (справа) при начальном объёмном газосодержании $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.092, 0.472, 0.631$ и 0.933 мс.

Согласно рис. 13,б, для начального объёмного содержания газовых пузырьков $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и радиуса $R_{cl} = 0.025$ м пиковое давление достигает

89 атм. Оно регистрируется на оси вблизи торцевой границы трубы. Сравнивая эти данные с рис. 12, с. 28 при аналогичных начальных условиях, можно заключить, что происходит некоторое снижение амплитуды давления при воздействии на твёрдую торцевую стенку за счёт геометрии пузырьковой области, формирующей волну подковообразной формы перед воздействием на стенку. Отметим наличие областей отрицательного давления на фрагменте б, влекущих за собой возникновение откольных эффектов, которые могут вызвать непоправимые последствия на производстве. Трёхмерная визуализация в соответствующий момент времени приведена для наглядности.

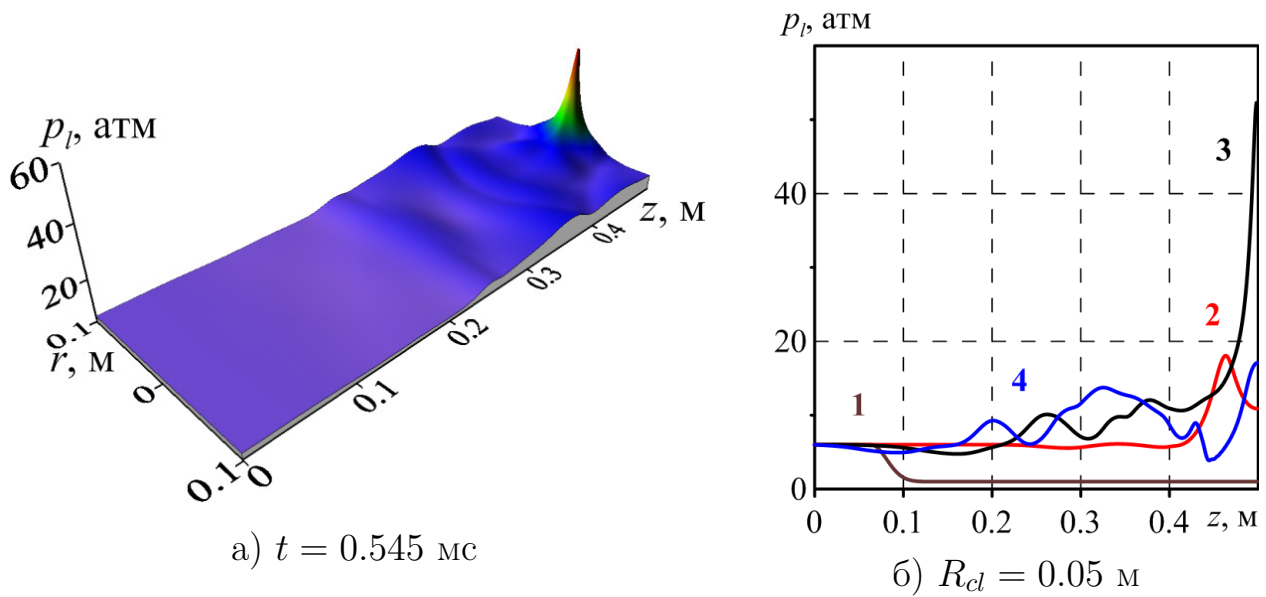


Рис. 14 — Распределение давления внутри трубы (слева) и на оси трубы (справа) при начальном объёмном газосодержании $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.092, 0.422, 0.545$ и 0.582 мс.

На рис. 14, с. 30 начальное объёмное содержание газа $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. В таком случае максимальное значение давления в расчётной области фиксируется для радиуса кластера $R_{cl} = 0.05$ м и составляет более 55 атм. Однако при таком газосодержании и радиусе кластера $R_{cl} = 0.025$ м на оси трубы тоже фиксируется значимое повышение давления, до 30 атм, что не составляет и трети максимального давления, зафиксированного на предыдущем рисунке. Важно отметить, что здесь не наблюдается отрицательных значений давления, а значит, и не предполагается возникновение откольных эффектов.

На рис. 15, с. 31 построена карта зон реализации максимального давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания и радиуса кластера. В расчётах этот радиус варьирует в диапазоне значений от 0 до радиуса трубы, равного 0.1 м. На карте отчётливо выделяются три ос-

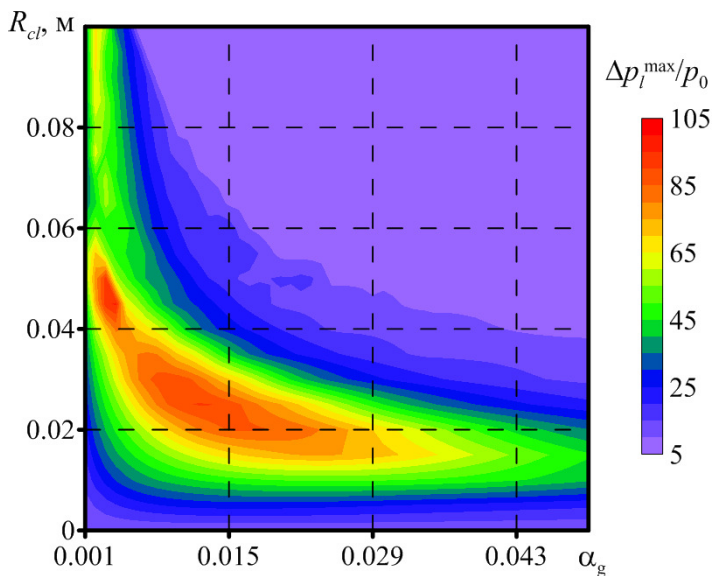


Рис. 15 — Зависимость максимального давления ($\Delta p_l^{\max}/p_0$) от радиуса кластера R_{cl} и объёмного содержания пузырьков α_{g0} для случая сферического кластера на торцевой стенке трубы.

новные зоны. Правая верхняя область отвечает пузырьковым завесам максимальных из рассмотренных размеров и начальных объёмных газосодержаний. Нижняя область характеризует кластеры минимального размера. И средняя зона расположена по диагонали (из левого верхнего в правый нижний угол). В верхней области геометрические размеры и большое объёмное газосодержание практически полностью гасят энергию падающей волны в рассматриваемом временном промежутке (порядка 1 мс), следовательно, увеличение волнового возмущения незначительно. В нижней области, напротив, из-за маленьких размеров кластера волна практически не замечает на своём пути пузырьковую область, и, следовательно, увеличения амплитуды волны давления снова не происходит. Наиболее интересной представляется третья, диагональная область, в которой возможна реализация высоких давлений. Для малых объёмных содержаний газовых пузырьков разброс геометрических размеров пузырьковой области велик: от 0.03 м до 0.1 м. А значит, в этом диапазоне размеров определяющим является объёмное газосодержание, оно регулирует скорость распространения волны в области. Но поскольку при таких содержаниях скорость распространения возмущения порядка 400 м/с, расстояние и в 0.03 м, и в 0.1 м преодолеваются волной за короткое время. С увеличением объёмного газосодержания скорость распространения волны падает (для $\alpha_{g0} = 0.02$ она порядка 100 м/с), и диапазон геометрических размеров сокращается. Из-за падения скорости внутри пузырьковой области увеличивается влияние размера пузырьковой сферы. В итоге, для получения высоких давлений необходимо подбирать наиболее эффективную комбинацию «объёмное содержание–радиус кластера». Аналогично, верно подобранные параметры позволяют существенно ослабить набегающую волну.

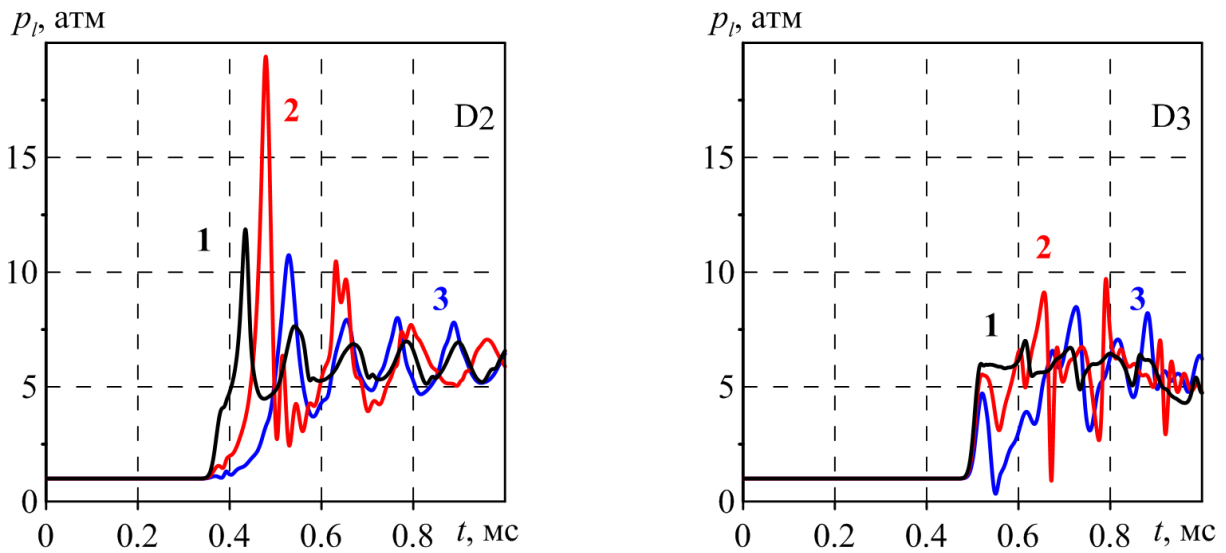


Рис. 16 — Показания датчиков D_2 и D_3 при $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$. Линии **чёрного** цвета соответствуют сферическому кластеру радиуса $R_{cl} = 0.01$ м, **красного** – 0.03 м и **синего** – 0.05 м.

В пункте 4.4.2 рассмотрен случай сферического кластера на оси трубы в центре расчётной области.

Примем следующие параметры задачи: радиус пузырькового кластера R_{cl} менялся от 0.005 до 0.05 м с шагом 0.005 м, длина расчётной области $L_z = 1.0$ м, радиус трубы $R_c = 0.1$ м, $a_0 = 10^{-3}$ м, начальное объёмное содержание пузырьков α_{g0} варьировалось от 0.0005 до 0.02 , амплитуда волнового импульса $\Delta p_{l0} = 0.5$ МПа.

На рис. 16, с. 32 представлены эпюры давления датчиков D_2 и D_3 , расположенных на оси симметрии. Датчик D_2 располагается на расстоянии 0.5 м (совпадает с центром сферического пузырькового кластера), D_3 – на расстоянии 0.7 м (см. рис. 9, б). Линии чёрного цвета соответствуют сферическому кластеру радиуса $R_{cl} = 0.01$ м, красного – 0.03 м и синего – 0.05 м. Из показаний датчика D_2 легко видеть, что максимальное давление в выбранных точках фиксируется в центре сферического кластера, и для радиусов кластера $R_{cl} = 0.01$ м и $R_{cl} = 0.05$ м наблюдаются подобные значения пикового давления. Получается, что кластеры выбранных размеров определяют одинаковый суммарный импульс, единственным отличием при этом является время его возникновения. Скорость распространения волн в пузырьковой жидкости с объёмным содержанием $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$ чуть меньше скорости в «чистой» жидкости, и небольшой разницы достаточно для того, чтобы основной фронт волны давления обогнул пузырьковый кластер и привёл к его всестороннему сжатию. Что касается различного времени фиксации пиковых

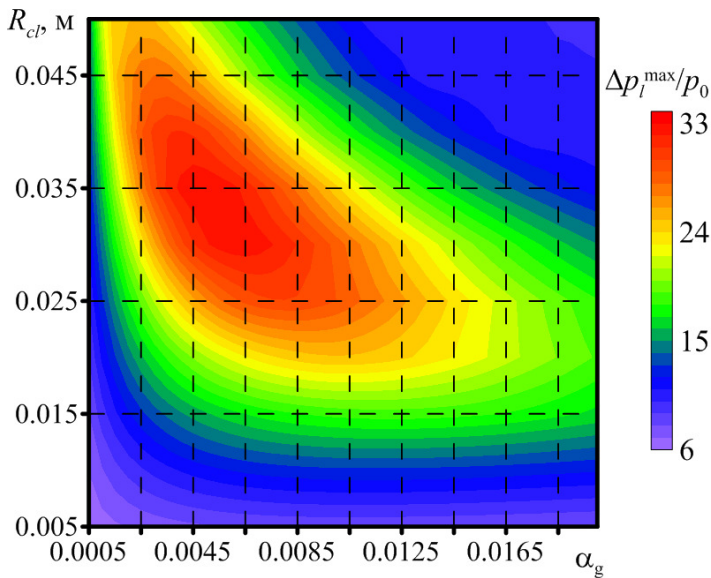
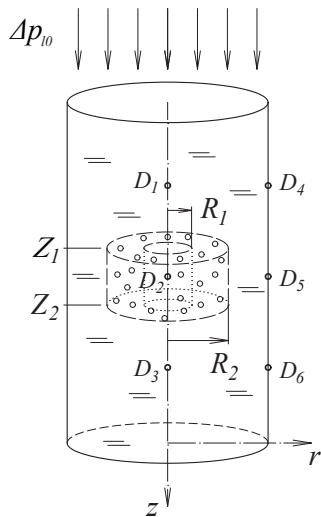


Рис. 17 — Зависимость максимального давления ($\Delta p_l^{\max}/p_0$) от радиуса кластера R_{cl} и объёмного содержания пузырьков α_{g0} для случая сферического кластера на оси трубы.

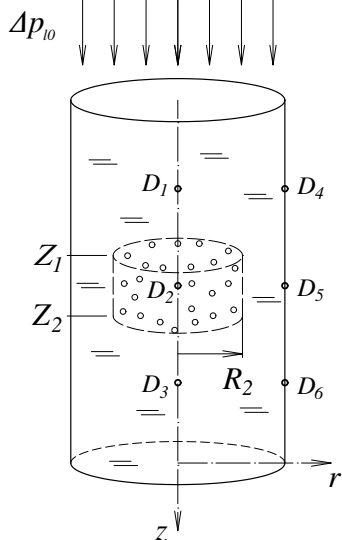
значений в центре пузырьковой сферы, это объясняется геометрическими размерами. Для радиуса $R_{cl} = 0.05$ м путь до центра в 5 раз дольше, чем для $R_{cl} = 0.01$ м, а значит, требуется дополнительное время на преодоление этого расстояния. Итак, можно сделать вывод, что наличие даже сравнительно небольших сферических пузырьковых завес с малым содержанием пузырьков может способствовать увеличению амплитуды волны давления до 4 раз в выбранных начальных условиях. Согласно показаниям датчика D_3 , волновой импульс после взаимодействия с пузырьковой областью распространяется далее по направлению движения волны с постепенным уменьшением амплитуды за счёт геометрии трубы.

На рис. 17, с. 33 построена карта зон реализации максимального давления в расчётной области в координатах начального объёмного газосодержания и радиуса сферического пузырькового кластера. Здесь радиус изменяется в диапазоне от 0.005 до радиуса трубы, равного 0.05 м. По аналогии со сферой на торцевой стенке трубы (рис. 15, с. 31), на карте выделяются три основные зоны. Правая верхняя область, отвечающая пузырьковым завесам максимального размера и наибольшего объёмного газосодержания. Нижняя зона, где рассматриваются кластеры минимального размера, и средняя зона, расположенная по диагонали (из левого верхнего в правый нижний угол). Характеристики зон аналогичны предыдущему случаю за исключением вариации некоторых количественных характеристик.

В пятой главе проводится анализ динамики волн давления в трубе, заполненной жидкостью и содержащей пузырьковую область конечных размеров в виде полого либо сплошного цилиндров. Пузырьковые кластеры располагались как на оси трубы, так и на её боковой поверхности. Установлены кри-



а) кластер в виде полого цилиндра
внутри трубы



б) кластер в виде полого цилиндра,
примыкающий к стенкам трубы

в) кластер в виде сплошного
цилиндра

Рис. 18 — Схема задачи. R_C — радиус трубы, R_1 и R_2 — внутренний и внешний радиусы цилиндрического кластера, Z_1 и Z_2 — координаты кластера. $D_1 - D_6$ — датчики давления.

терии усиления и ослабления волны пузырьковым экраном. Построена карта зон достижения максимального значения давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания пузырьков и протяжённости пузырькового цилиндра.

Пункт 5.1 содержит постановку задачи, начальные и граничные условия.

Рассматриваются двумерные осесимметричные волновые возмущения в трубе с водой, содержащей коаксиальный кластер в форме полого цилиндра, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью (рис. 18, с. 34). Волновое движение в трубе инициируется мгновенным повышением давления на гра-

нице $z = 0$ от равновесного p_0 до некоторого амплитудного значения Δp_{l0} и поддерживается все время расчёта. Исследуется эволюция волнового процесса в трубе при $t > 0$.

В пункте 5.2 анализируются результаты расчётов по фокусировке волны давления в пузырьковом кластере в форме полого цилиндра.

Численные расчёты проводились при следующих теплофизических параметрах: $c_g = 1006$ Дж/кг·К, $\rho_{g0} = 1.29$ кг/м³, $\lambda_g = 0.026$ м·кг/К·с³, $\gamma = 1.14$ ($\kappa_g = 2.003 \cdot 10^{-5}$ м²/с) (для воздуха); $C_l = 1500$ м/с, $\rho_{l0} = 10^3$ кг/м³, $\nu_l = 6 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $T_0 = 293$ К, $p_0 = 0.1$ МПа (для воды), h_{z_0}, h_{r_0} и τ брались равными $h_{z_0} = h_{r_0} = 10^{-3}$ м, $\tau = 10^{-7}$ с.

Пункт 5.2.1 посвящён случаю цилиндрического пузырькового кластера, не соприкасающегося со стенкой трубы.

Параметры пузырьковой области: $Z_1 = 0.25$ м, $Z_2 = 0.3$ м, $R_1 = 0.025$ м, $R_2 = 0.075$ м, $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м. Амплитуда волнового импульса $\Delta p_{l0} = 0.5$ МПа.

Под действием скачкообразного изменения граничного давления $\Delta p(0, r) = p_0 + \Delta p_{l0}$ в трубе формируется волна сжатия, распространяющаяся вдоль положительного направления оси z и взаимодействующая с пузырьковым кластером в виде полого цилиндра. Акустическая жёсткость кластера меньше, чем акустическая жёсткость окружающей воды, поэтому падающая волна будет отражаться от границ кластера как от свободной поверхности. С течением времени из-за двумерного волнового движения происходит кумуляция волны в область сильно сжимаемой пузырьковой жидкости⁷. Фокусировка сопровождается башнеобразными всплесками давления (рис. 19, *a* на с. 36) с амплитудой в несколько раз выше первоначальной (см. рис. 19, *б*). Отмечается, что увеличение линейных размеров пузырькового экрана не приводит к увеличению сфокусированной кластером энергии. В каждом случае существует некоторое предельное значение внешнего радиуса, превышение которого не приводит к увеличению амплитуды проходящей волны, поскольку волна, прошедшая через границу пузырькового кластера, не успевает сфокусироваться внутри, а значит, не проявляется значительный кумулятивный эффект. Внутри области зарождаются вторичные волны, что приводит к диссипации энергии и некоторой потере амплитуды возмущения.

На рис. 20, с. 37 построены зависимости максимального давления (слева) и его координаты z^{\max} от амплитуды начального давления Δp_{l0} для двух

⁷Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2002. № 2. С. 139–147. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39274845>.

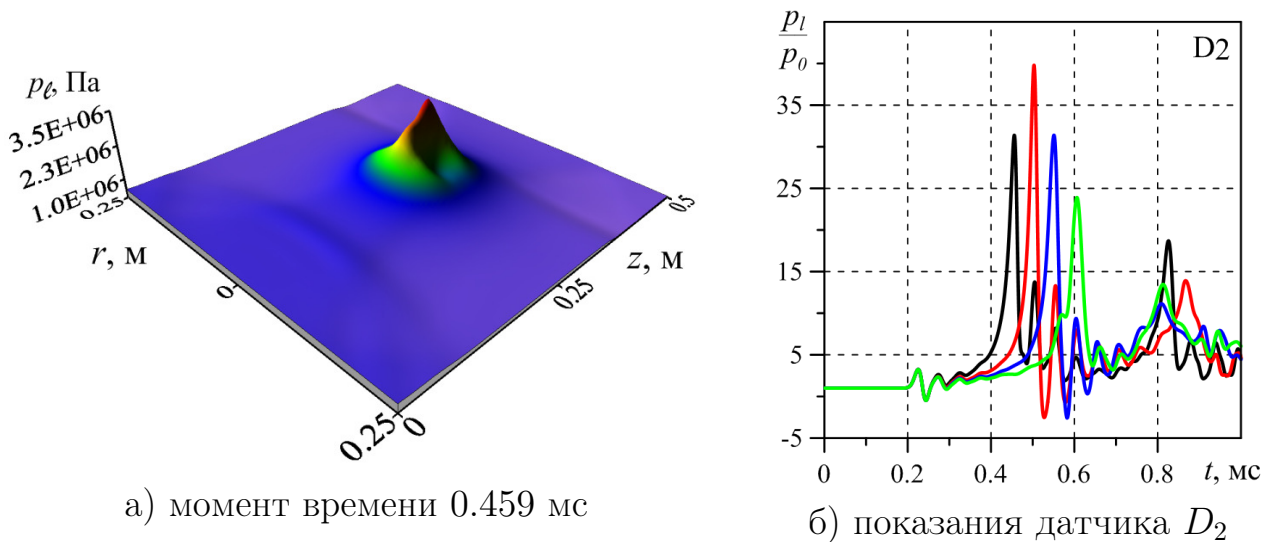


Рис. 19 — Поле давлений в виде изобар (слева) и показания датчика D_2 (справа). Линии **чёрного цвета** соответствуют полю цилиндрическому кластеру с внешним радиусом $R_2 = 0.075$ м, **красного** — 0.1 м, **синего** — 0.125 м и **зелёного** — 0.15 м.

типов кластеров: кластера в форме полого цилиндра (символы \bullet) и сплошного цилиндра (символы \blacktriangle). Стоит отметить, что при первоначальной амплитуде волны менее 0.2 МПа фокусировки на оси трубы не происходит. С ростом амплитуды первоначальной волны от 0.3 до 1.5 МПа происходит увеличение амплитуды результирующей волны от 1.2 до 22.1 МПа (символы \bullet). Дальнейшее увеличение амплитуды первоначальной волны не даёт значительного роста интенсивности результирующей. Согласно левому фрагменту рисунка, амплитуда волны, фокусирующейся в сплошном цилиндрическом пузырьковом кластере, для интервала начальных амплитуд $\Delta p_l \subset (0.5 - 2.5)$ МПа более чем вдвое превышает тот же показатель для полого цилиндра (символы \blacktriangle). Анализ правого фрагмента рисунка показывает, что координата точки фокусировки максимального давления по оси z с ростом амплитуды первоначальной волны Δp_l смещается к большим значениям координаты z для обоих типов кластеров.

В **пункте 5.2.2** рассмотрен случай цилиндрического пузырькового кластера, примыкающего к стенке трубы.

Приняты следующие параметры пузырьковой области: $Z_1 = 0.25$ м, $Z_2 = 0.3$ м, $R_1 = 0.1$ м, $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м. Амплитуда волнового импульса $\Delta p_{l0} = 0.5$ МПа.

Рис. 21, с. 37 даёт представление о зависимости максимального значения давления на стенке трубы (левый фрагмент) и его координаты (правый

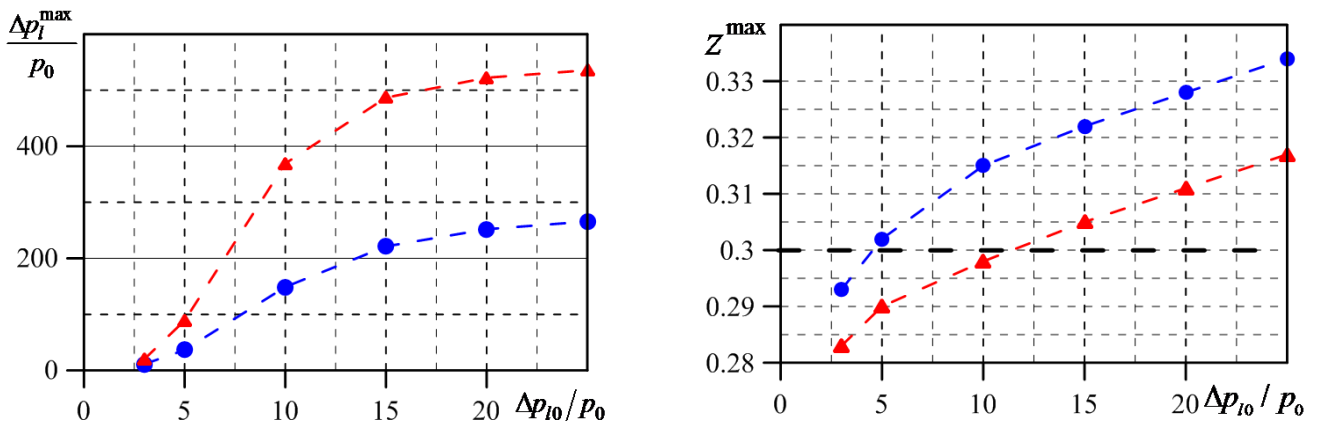


Рис. 20 — Зависимость максимального давления (слева) и его координаты z^{\max} (справа) от амплитуды начального давления Δp_{l0} . Пузырьковая область: ● — полый цилиндр, ▲ — сплошной цилиндр.

фрагмент) от первоначальной амплитуды давления. Символы ● соответствуют пузырьковому кластеру в виде полого цилиндра, примыкающего к внешней стенке трубы, ▲ — сплошному цилиндру. Рост начальной амплитуды скачка давления на границе расчётной области с 0,3 до 2,5 МПа обеспечивает увеличение максимального значения давления на стенке трубы с 1,0 до 17,5 МПа. График для примыкающего к стенке трубы полого цилиндра демонстрирует линейный рост значения максимального давления, тогда как график для сплошного цилиндра отражает более чем трёхкратное превышение показателей для полого цилиндра. В обоих случаях координата пика амплитуды давления соответствует зоне пузырькового кластера для значений первоначальной амплитуды до 1,0 МПа. С ростом начальной амплитуды координата максимума на несколько мм смещается в большую сторону вдоль оси z .

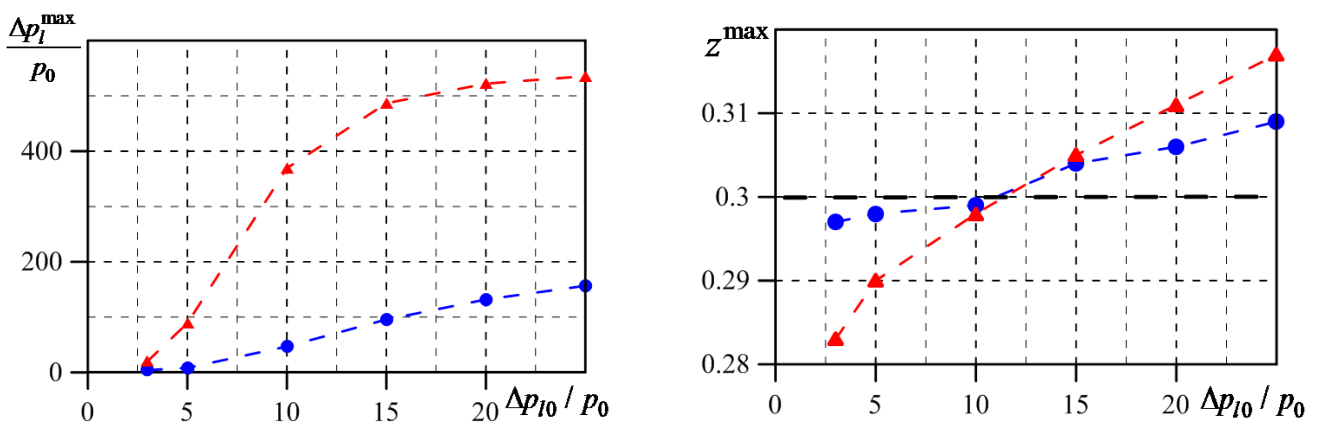


Рис. 21 — Зависимость максимального давления (слева) и его координаты на оси трубы z^{\max} (справа) от амплитуды начального давления Δp_{l0} . Пузырьковая область: ● — полый цилиндр, ▲ — сплошной цилиндр.

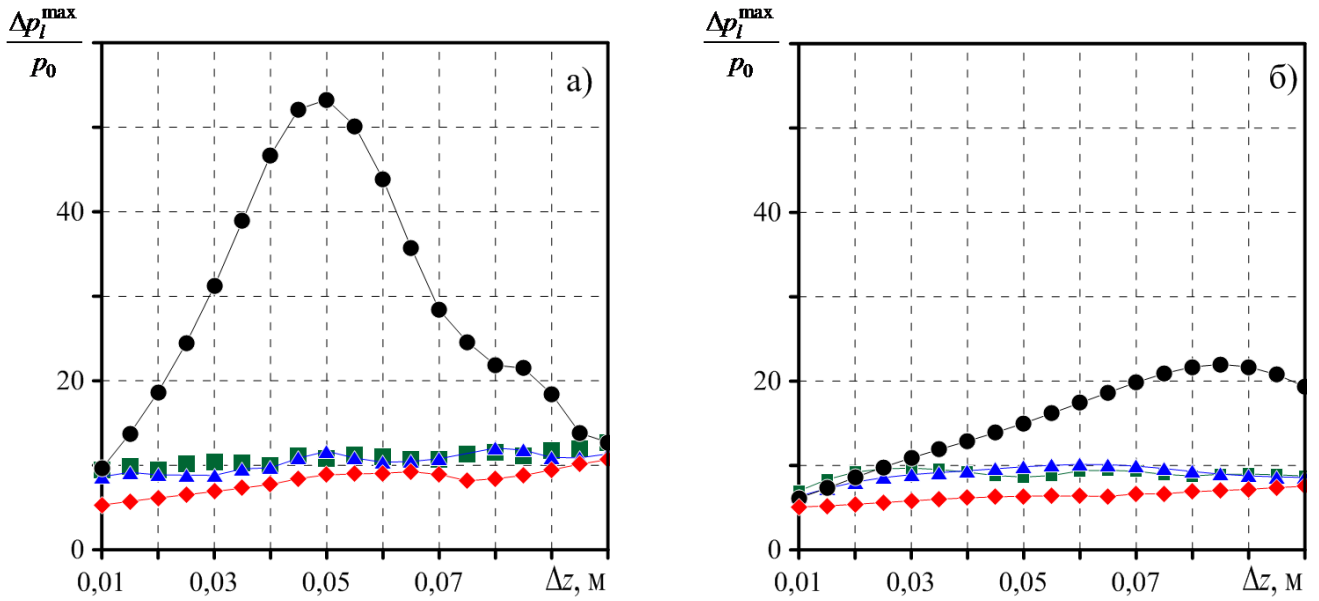


Рис. 22 — Зависимость максимального давления ($\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max} - p_0$) от радиуса кластера Δz ($\Delta z = R_c - R_1$) на оси трубы (круги и квадраты) и на стенке трубы (ромбы и треугольники). Круги и ромбы относятся к сплошному цилиндру, а квадраты и треугольники к полному цилиндру у внешней стенки. Левый рисунок при $\alpha_g = 10^{-2}$, а правый — $\alpha_g = 10^{-3}$.

В пункте 5.3 уделяется внимание особенностям кумуляции энергии в присутствии сплошного цилиндрического пузырькового кластера.

Проведено сравнение результатов численных исследований динамики волновой картины для двух разновидностей пузырьковых кластеров: полного цилиндра у внешней стенки трубы и сплошного цилиндра на её оси. Для корректного сравнения результатов пузырьковый кластер в виде сплошного цилиндра формировался соответственно базовым параметрам пристеночного кластера.

На рис. 22, с. 38 характеризуется зависимость максимального значения давления ($\Delta p_l^{\max}/p_0$), регистрируемого в трубе, от геометрических размеров пузырьковой области ($\Delta z = R_c - R_1$). Фрагмент рис. 22, а соответствует начальному объёмному содержанию $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, фрагмент рис. 22, б — значению $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Сравнив фрагменты, можно заключить, что некоторое повышение давления в трубе происходит при любом объёмном газосодержании. Однако из общей картины выделяются данные на оси трубы в присутствии сплошного цилиндрического пузырькового кластера, объясняемые эффектом фокусировки в центральной области за завесой. Во-первых, основной фронт огибает пузырьковую область и, соединяясь за ней, воздействует на завесу с тыльной стороны. Во-вторых, первичное возмущение, взаимодействуя с заве-

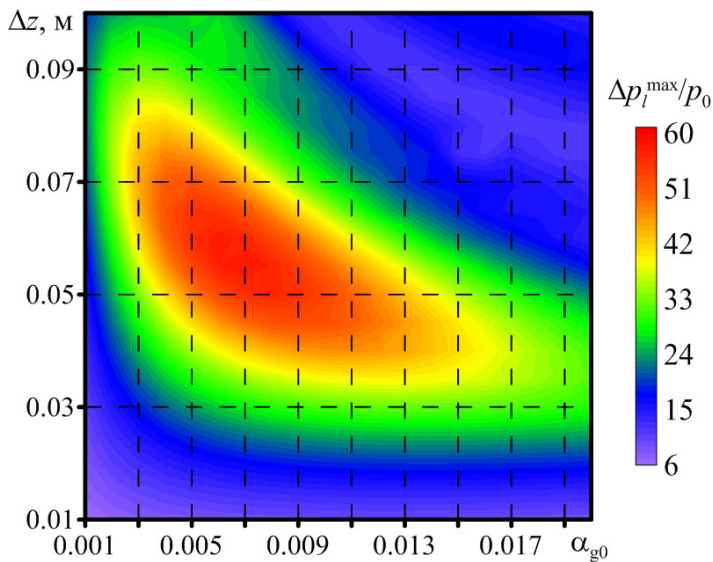


Рис. 23 — Зависимость максимального давления ($\Delta p_i^{\max}/p_0$) от радиуса кластера Δz ($\Delta z = R_2$) и объёмного содержания пузырьков α_{g0} .

сой, продолжает движение вглубь неё, где встречает волну сжатия, идущую с тыльной стороны. Синергия этих процессов обеспечивает достижение максимального повышения давления. Для пристеночной завесы такие механизмы эффективны в меньшей степени.

На основе результатов рис. 22, с. 38 и работы⁸, для дальнейших исследований был выбран случай пузырьковой области в виде сплошного цилиндра. На рис. 23, с. 39 построена карта зон реализации максимального давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания и протяжённости завесы. Здесь также выделяются три основные зоны. Это правая верхняя область завес максимального размера и наибольшего объёмного содержания. Нижняя зона, где рассматриваются кластеры минимального размера. И средняя зона, расположенная диагонально из левого верхнего в правый нижний угол. Основные характеристики зон при небольших вариациях количественных характеристик совпадают с предыдущими случаями.

В **заключении** представлены основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. Рассмотрено распространение слабых возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках помимо пара воды присутствует инертный газ (например, воздух), не участвующий в фазовых переходах.
 - На основе аналитических и численных расчётов **построены** карты зон устойчивости пузырьковой парогазожидкостной смеси в зависимости от величины перегрева жидкости на плоскости объёмное со-

⁸Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Агишева У.О. О фокусировке волн давления в тороидальном пузырьковом кластере // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27, № 1. С. 9–17. URL: <http://bulletin-bsu.com/archive/2022/1/2/>.

держание -- радиус пузырьков. **Установлено**, что наличие нерастворимого газа в пузырьках существенно расширяет зону устойчивости в пространстве параметров, заданных значениями объёмного содержания и радиуса пузырьков на плоскости (a_0, α_g) . С ростом статического давления зона устойчивости системы с паровыми пузырьками расширяется, а зона устойчивости, где в пузырьках присутствует газ, при одних и тех же перегревах сужается.

– **Изучено** влияние перегрева жидкости на величину фазовой скорости и коэффициента затухания, когда система находится в устойчивом состоянии. **Установлено**, что для мелкодисперсной смеси (при $a_0 = 10^{-6}$ м) в зоне устойчивости перегрев несущественно влияет на изменение фазовой скорости и коэффициента затухания, что связано с достаточно высокой концентрацией инертного газа в пузырьках. Для приведённых в задаче параметров декремент затухания в устойчивой области меняется не более чем в два раза.

– Исследование гармонических волн в жидкости с достаточно крупными ($a_0 = 10^{-3}$ м) паровоздушными пузырьками **показало**, что при изменении равновесной температуры от 300 К до точки кипения 373 К вблизи низких частот ($\omega \leq \omega_R$, где $\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{\ell 0}^0}$ – собственная частота колебаний пузырьков или частота Миннаэрта) коэффициент затухания увеличивается в сто и более раз в зависимости от частоты возмущений. В случае же мелкодисперсных смесей ($a_0 = 10^{-6}$ м) изменение фазовой скорости и коэффициента затухания гораздо слабее: не более, чем вдвое. Этот эффект может быть объяснён снижением роли фазовых переходов для мелкодисперсных систем из-за роста массовой концентрации газа в пузырьках, связанного с действием капиллярных сил на межфазной поверхности.

– **Установлено**, что в диапазоне частот $\omega_R < \omega < \omega_C$ ($\omega_C = \omega_R \sqrt{1 + \rho_{\ell 0}^0 \alpha_{g0} C_\ell^2 / \gamma p_0}$) фазовая скорость растёт и достигает своего максимума при ω_C . Однако в данном диапазоне коэффициент затухания принимает аномально высокие значения, следовательно, этот интервал соответствует полосе непропускания.

– Исследование гармонических волн в жидкости с паровоздушными пузырьками размера $a_0 = 10^{-6}$ м **показало**, что при изменении начального объёмного газосодержания α_{g0} от 10^{-4} до 10^{-1} при равновесной температуре $T_0 = 373$ К, вблизи низких частот ($\omega \leq \omega_R$) коэффициент затухания меняется незначительно (в зависимости от

частоты возмущений). **Установлено**, что с уменьшением равновесного радиуса пузырьков a_0 в диапазоне от $a_0 = 10^{-3}$ м до $a_0 = 10^{-6}$ м имеет место некоторое увеличение фазовой скорости в низкочастотной области ($\omega \ll \omega_R$), а коэффициент затухания δ при этом может изменяться на несколько порядков. Роль фазовых переходов значительно снижается.

2. Рассмотрено взаимодействие гармонических волн с границей раздела между «чистой» жидкостью и жидкостью с пузырьками парогазовой смеси при «косом» их падении.

– **Изучены** особенности отражения и преломления гармонических волн на границе раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками парогазовой смеси при «косом» их падении. Для начальных температур 300 К и 353 К **показано**, что при падении акустической волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела двух сред для низкочастотных волн ($\omega \leq \omega_R$) при углах, больших критического угла падения, она полностью отражается от границы раздела. Например, при углах падения, превышающих значение $\Theta^{(0)} = 10^\circ$, угол преломления асимптотически приближается к значению $\Theta^{(s)} = 90^\circ$. **Установлено**, что в данном случае пузырьковый слой в «чистой» жидкости обладает свойствами подводного звукового канала.

– **Показано**, что для начальной температуры среды $T_0 = 373$ К угол отражения достигает максимальной величины $\Theta^{(s)} = 70^\circ$. Следовательно, для системы, находящейся при температуре 373 К, формально не происходит полного внутреннего отражения. Однако в этом случае из-за большого значения коэффициента затухания и малого значения фазовой скорости (что отражается в значении мнимой части $n_y^{(s)}$ (или $\cos \Theta^{(s)}$)) проникающая в «чистую» жидкость волна полностью затухает вблизи границы раздела сред. Таким образом, фактически реализуется полное внутреннее отражение.

– **Показано**, что при падении волны со стороны «чистой» жидкости на границу раздела двух сред, она при любом угле падения проходит в пузырьковую жидкость.

3. Исследовано распространение волны давления вида «ступенька» в цилиндрической трубе с водой, содержащей сферический пузырьковый кластер. В численных расчётах кластер располагался на оси трубы у торцевой стенки и в центре расчётной области. **Установлены** следующие закономерности:

– Для обоих случаев расположения сферического пузырькового кластера **построены** карты областей реализации максимального значения давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} и протяжённости области по координате z .

– **Обнаружено**, что при воздействии волны вида «ступенька» на сферический пузырьковый кластер в жидкости образуется уединённая волна, чья амплитуда может превышать амплитуду первоначальной волны в десятки раз.

– **Установлено**, что сферический кластер у торцевой стенки «генерирует» уединённую волну большей амплитуды, чем кластер в центре расчётной области. Возникновение эффекта обусловлено наличием торцевой стенки, способствующей дополнительной фокусировке волны давления в пузырьковом кластере.

– **Установлено**, что при воздействии волны давления на торцевую стенку трубы, если сферический кластер прилегает к ней, наибольшая амплитуда волны реализуется, когда радиус кластера составляет половину радиуса канала. Это воздействие может быть в десятки раз сильнее, чем в отсутствие пузырькового кластера как такового.

– Для рассматриваемых параметров **показано**, что увеличение амплитуды первоначальной волны давления приводит к нелинейному увеличению максимального значения давления в расчётной области.

4. Исследована динамика волн давления вида «ступенька» в канале, заполненном водой и содержащем соосный пузырьковый кластер в виде полого или сплошного цилиндров. В расчётах пузырьковый кластер в виде полого цилиндра был либо расположен на оси трубы без соприкосновений с её стенками, либо прилегал к боковой поверхности трубы. Случай сплошного цилиндра, не соприкасающегося со стенками трубы, был рассмотрен для сравнения характеристик и особенностей течения.

– **Построена** карта областей реализации максимального значения давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} и протяжённости области по координате z для сплошного цилиндрического пузырькового кластера.

– **Проведено сравнение** результатов численного расчёта взаимодействия волны давления с пузырьковой областью в случае кластеров в форме полого и сплошного цилиндров. **Показано**, что расположение точки фиксации максимального значения давления в расчётной

области зависит от начальной амплитуды волны давления и выходит за пределы пузырькового кластера при увеличении амплитуды. В рассмотренных задачах наибольшее значение скачка амплитуды для полого цилиндра, примыкающего к внешней стенке канала, равно 0.82 МПа, для полого цилиндра на оси канала – 3.6 МПа, для сплошного цилиндра – 8.7 МПа.

– **Показано**, что существует предельное значение амплитуды первоначальной волны давления в случаях полого и сплошного цилиндрического кластера, не достигая которого возможно увеличить амплитуду результирующей волны, сфокусированной на оси канала, более, чем в десять раз. Дальнейшее увеличение амплитуды первоначальной волны не приводит к росту результирующей амплитуды, а выводит процесс на стационарное значение.

– Численно **установлено**, что для выбранных параметров расчёта взаимодействие импульса с пузырьковой областью в виде сплошного цилиндра приводит к формированию волны давления с амплитудой, более чем в пять раз превышающей аналогичную для полого цилиндра.

Список публикации автора по теме диссертации

В изданиях, переводные версии которых входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science, Scopus:

1. Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Propagation of a Pressure Wave in a Tube Filled with Liquid Containing of a Bubble Cluster in the Form of a Hollow Cylinder // Fluid Dynamics. 2023. Vol. 58, № 8. Pp. 1495–1501. DOI: 10.1134/S0015462823602759.
2. Гималтдинов И. К., Галимзянов М. Н., Кочанова Е. Ю. Динамика волны давления в цилиндрическом канале, содержащей кольцевую пузырьковую зону // Инженерно-физический журнал. 2023. Т. 96, № 4. С. 1008–1016. DOI: 10.1007/s10891-023-02764-3.
3. Agisheva U. O., Galimzyanov M. N. Acoustic Waves Propagation in Heated Water with Vapor Bubbles // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical modelling, programming and computer software. 2020. Vol. 13, № 1. Pp. 28–38. DOI: 10.14529/mmp200102.
4. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И., Хабеев Н. С. Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками //

Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 4. С. 912–921. DOI: 10.1007/s10891-018-1809-9.

В изданиях, включенных в перечень ведущих рецензируемых научных журналов Russian Science Citation Index (RSCI):

1. Галимзянов М. Н., Гималтдинов И. К., Кочанова Е. Ю. Взаимодействие волны давления в цилиндрическом канале со сферическим пузырьковым кластером // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 2. С. 96–104. DOI: 10.15372/PMTF202215182.
2. Agisheva U. O., Galimzyanov M. N. Focusing of Compression Waves in a Pipe Containing Annular Bubble Cluster // Lobachevskii Journal Mathematics. 2023. Vol. 44, № 5. Pp. 1564–1570. DOI: 10.1134/S1995080223050062.
3. Галимзянов М. Н., Агишева У. О. Распространение волны давления в канале, заполненном жидкостью при наличии в ней пузырькового кластера тороидальной формы // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23, № 6. DOI: 10.33257/PhChGD.23.6.1029.
4. Галимзянов М. Н., Агишева У. О. Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, № 2. С. 232–240. DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240.
5. Agisheva U. O., Galimzyanov M. N. Wave equation for bubble liquid in Lagrangian variables // Lobachevskii Journal Mathematics. 2019. Vol. 40, № 11. Pp. 1922–1928. DOI: 10.1134/S199508021911009X.
6. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И. Особенности устойчивости и акустических свойств перегретой жидкости с газовыми зародышами при повышении давления // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 5. С. 748–754. DOI: 10.1134/S0018151X19050146.
7. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И. Акустика и устойчивость перегретой жидкости с газовыми зародышами // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 3. С. 85–95. DOI: 10.15372/PMTF20190309.
8. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при «косом» их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 3. С. 464–468. DOI: 10.1134/S0018151X19020184.
9. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой

вой жидкости при прямом их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 2. С. 284–290. DOI: 10.1134/S0018151X1901022X.

В изданиях, включенных в перечень Высшей аттестационной комиссии Российской Федерации (ВАК РФ):

1. Галимзянов М. Н. Динамика импульсного сигнала в цилиндрическом канале с жидкостью, содержащем сферический пузырьковый кластер // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27, № 2. С. 275–286. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2022.2.5.
2. Галимзянов М. Н., Гималтдинов И. К., Агишева У. О. О фокусировке волн давления в тороидальном пузырьковом кластере // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27, № 1. С. 9–17. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2022.1.2.
3. Галимзянов М. Н., Агишева У. О. Волновое уравнение для пузырьковой жидкости в переменных Лагранжа // Вестник Башкирского университета. 2019. Т. 24, № 2. С. 278–284. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2019.2.4.

В других изданиях:

1. Галимзянов М. Н. Волны давления в каналах с жидкостью, содержащих пузырьковые кластеры // Материалы Третьей международной летней конференции «Физико-химическая гидродинамика: модели и приложения», Уфа. 2023. С. 36.
2. Агишева У. О., Галимзянов М. Н. Волны давления в трубе, заполненной жидкостью, содержащей пузырьковую зону в виде цилиндра // Сб. мат. 14-ой международной конференции - школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Москва. 2023. С. 16–19.
3. Агишева У. О., Галимзянов М. Н. Взаимодействие волны давления в цилиндрическом канале с пузырьковым кластером тороидальной формы // Сб. тез. докл. XIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Санкт-Петербург. 2023. С. 927–930.
4. Gimaltdinov I. K., Nasyrov A. A., Gimaltdinova A. A., Gizzatullina A. A., Galimzyanov M. N., Kochanova E. Yu. Focusing of a compression waves in a toroidal bubble cluster // Journal of Physics: Conf. Series. 2022. Vol. 2388. 012113. DOI: 10.1088/1742-6596/2388/1/012113.
5. Агишева У. О., Вдовенко И. И., Галимзянов М. Н. Акустическая устойчивость перегретой жидкости с парогазовыми пузырьками // Материалы 13-ой международной научной школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Москва. 2022. С. 27–30.
6. Агишева У. О., Галимзянов М. Н. Волны давления в трубе заполненной жидкостью, содержащий пузырьковую область конечных размеров // Ма-

- териалы 13-ой международной научной школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Москва. 2022. С. 24–27.
7. Agisheva U. O., Galimzyanov M. N. Modeling of heat and mass transfer processes in petroleum industry // Book of abstract V International Workshop «Thermal Methods for Enhanced Oil Recovery: Laboratory Testing, Simulation and Oilfields Applications» ThEOR2022, Baku. 2022. Pp. 84.
 8. Галимзянов М. Н. Волны давления в трубе, заполненной жидкостью при наличии в ней пузырьковой области в форме тора // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 3–4. С. 112–120. DOI: 10.21662/mfs2021.3.015.
 9. Агишева У. О., Галимзянов М. Н. Особенности устойчивости и акустических свойств перегретой жидкости с газовыми зародышами // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 8. DOI: 10.21662/mfs2020.2.
 10. Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Acoustic properties of overheated liquid with gas nuclei during temperature increasing // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1400. 077044. DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077044.
 11. Агишева У. О., Галимзянов М. Н. Взаимодействие акустической волны с многослойной средой, содержащей слой пузырьковой жидкости // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 4. С. 233–242. DOI: 10.21662/mfs2019.4.030.
 12. Agisheva U. O., Vdovenko I. I., Galimzyanov M. N. Acoustic waves in a superheated liquid with a gas nuclei // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1158. 022007. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022007.
 13. Агишева У. О., Вдовенко И. И., Галимзянов М. Н. Влияние диффузии на акустические свойства пузырьковой жидкости // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 3. С. 165–175. DOI: 10.21662/mfs2019.3.023.
 14. Agisheva U. O., Galimzyanov M. N. Evolution of pressure waves acting on a bubble liquid through adjacent boundaries // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1158. 022008. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022008.
 15. Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И. Акустические свойства и устойчивость перегретой жидкости с газовыми зародышами // Сб. тр. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике, Уфа. 2019. С. 982–984.
 16. Галимзянов М. Н., Агишева У. О. Волны давления слабой интенсивности в стратифицированной пузырьковой жидкости // Сб. тр. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике, Уфа. 2019. С. 979–981.

17. Agisheva U. O., Galimzyanov M. N. Low-intensity pressure waves in a stratified bubbly liquid // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1400. 077045. DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077045.
18. Агишева У. О., Вдовенко И. И., Галимзянов М. Н. Устойчивость и акустические свойства перегретой жидкости с газовыми зародышами при повышении давления // Материалы всероссийской конференции и школы для молодых ученых «Математические проблемы механики сплошных сред», посвященной 100-летию академика Л.В. Овсянникова, Новосибирск. 2019. С. 16.
19. Агишева У. О., Галимзянов М. Н. Эволюция волн давления в стратифицированной пузырьковой жидкости // Материалы VII международной конференции с элементами научной школы для молодежи «Экологические проблемы нефтедобычи», Уфа. 2018. С. 8–10.
20. Агишева У. О., Вахитова Н. К., Галимзянов М. Н., Заляева Э. З. Эволюция волн давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы», Стерлитамак. 2018. С. 46–50.

Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ:

1. Фаттахов С. Р., Сафиуллин А. Р., Галимзянов М. Н. «Двумерные волны в пузырьковой жидкости: гидродинамический симулятор для моделирования волн давления в каналах с жидкостью при наличии в ней пузырьковой области». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023687121 от 12.12.2023 г.
2. Сафиуллин А. Р., Фаттахов С. Р., Галимзянов М. Н. «Акустические волны в жидкости с парогазовыми зародышами: гидродинамический симулятор для моделирования динамики акустических волн в жидкости с парогазовыми зародышами». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024660458 от 07.05.2024 г.