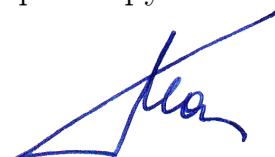


ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ИМ. Р. Р. МАВЛЮТОВА —
ОБОСОБЛЕННОЕ СТРУКТУРНОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ ФЕДЕРАЛЬНОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО НАУЧНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
УФИМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



ГАЛИМЗЯНОВ Марат Назипович

**ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ С
ПАРОГАЗОВЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ И ЗАДАЧИ
АКУСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ**

Специальность 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Уфа — 2024

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Современное состояние исследований	13
1.1 Обзор работ, посвященных теоретическому изучению акустических свойств пузырьковых жидкостей	13
1.2 Обзор работ, посвященных экспериментальным исследованиям акустических свойств пузырьковых жидкостей	37
1.3 Выводы по главе	49
Глава 2. Специфика распространения звука в воде с парогазокапельными пузырьками	51
2.1 Основные уравнения для жидкости с парогазовыми пузырьками .	51
2.2 Постановка задачи	61
2.3 Дисперсионный анализ	64
2.4 Сравнение с экспериментальными данными	77
2.5 Параметрический анализ акустических возмущений в пузырьковой жидкости	80
2.5.1 Влияние диффузии	80
2.5.2 Влияние начального радиуса и объёмного содержания пузырьков	88
2.5.3 Влияние равновесной температуры	97
2.6 Выводы по главе	100
Глава 3. Акустические свойства и устойчивость жидкости с парогазовыми пузырьками	102
3.1 Постановка задачи и дисперсионный анализ	102
3.2 Особенности отражения и прохождения акустических волн через границу раздела	107
3.2.1 Прямое падение плоской акустической волны на границу раздела между фазами	107
3.2.2 Падение плоской акустической волны на границу раздела под косым углом	112

3.3	Акустическая устойчивость перегретой жидкости с газовыми зародышами	120
3.4	Выводы по главе	130
Глава 4. Волны давления в заполненной жидкостью трубе, содержащей сферическую пузырьковую область		
4.1	Общая постановка задачи и система уравнений	131
4.2	Методика численного расчёта	134
4.2.1	Уравнения в переменных Лагранжа	135
4.2.2	Принцип построения разностной схемы	136
4.2.3	Начальные и граничные условия	137
4.3	Тестовые расчёты и сравнение с экспериментальными данными .	138
4.4	Фокусировка волны давления в сферическом пузырьковом кластере	142
4.4.1	Случай сферического кластера у торцевой стенки	142
4.4.2	Случай сферического кластера на оси канала	156
4.5	Выводы по главе	166
Глава 5. Волны давления в заполненной жидкостью трубе, содержащей цилиндрическую пузырьковую область		
5.1	Постановка задачи	169
5.1.1	Начальные и граничные условия	169
5.2	Фокусировка волны давления в пузырьковом кластере в виде полого цилиндра	171
5.2.1	Пузырьковый кластер, не соприкасающийся с боковой поверхностью трубы	172
5.2.2	Случай соприкасающегося со стенкой цилиндрического кластера	179
5.3	Специфика фокусировки волны давления в полых и сплошных цилиндрических пузырьковых кластерах	184
5.4	Выводы по главе	194
Заключение		196
Список литературы		201

Список рисунков	233
Приложение А. Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ	242

Введение

Технологические процессы нефтегазовой отрасли, теплоэнергетики, химической промышленности включают в себя течение жидкостей в широком спектре температур и давлений. Нередко значения физических параметров (давление, температура и т.д.) соответствуют состоянию метастабильности. Поведение жидкостей в таких условиях зависит от фонового излучения, наличия в составе среды примесей в виде газовых зародышей или твёрдых частиц, и многих других факторов. Переход системы из метастабильного состояния в устойчивое при сравнительно незначительном изменении внешнего воздействия может привести к аварийным последствиям, поэтому определение диапазона параметров устойчивости парогазожидкосных систем является актуальной проблемой современной механики.

Акустические волны – мощный диагностический инструмент мониторинга состояния газожидкостных систем. Дистанционные методы акустического зондирования используются для обнаружения и изучения глубоководных метановых факелов на дне океанов и морей, определения уровня жидкостей в межтрубном пространстве, исследования процесса вскипания жидкостей и т.д. В следствие чего необходимо развивать исследования акустики пузырьковых систем для эффективных и научно обоснованных технических и технологических решений при проектировании устройств акустического контроля.

Важнейшим условием безопасности трубопроводных систем, транспортирующих широкие фракции лёгких углеводородов, является понимание механизмов возбуждения и усиления амплитуды волновых процессов. Пузырьковые системы, как пассивные, так и содержащие взрывчатые газовые смеси, могут рассматриваться в качестве среды, возбуждение которой ударными волнами может привести к существенному усилению волнового поля и генерации мощного ударно-волнового импульса. Наряду с этим пристеночные пузырьковые зоны из-за фокусировки в них внешнего волнового поля могут оказать влияние на увеличение интенсивности кавитационной эрозии. Таким образом, пузырьковые среды как причина значимой кумуляции энергии волны представляют несомненный интерес.

К настоящему времени накоплен внушительный научный потенциал теоретических и экспериментальных исследований волновой динамики в пузырь-

ковой жидкости. Однако остаётся ряд вопросов, на которые отсутствуют удовлетворительные ответы. Необходимость более подробного изучения акустических свойств пузырьковой жидкости и двумерных волн возникает, например, в задачах эволюции волн давления в однородной жидкости, включающей пузырьковую зону конечных размеров, или задаче точечного удара по объёму газожидкостной смеси.

В связи с вышеизложенным актуальность темы диссертации обусловлена необходимостью дальнейшего развития теории волновой динамики гетерогенных сред, углубления теоретических представлений о нестационарных волновых процессах в пузырьковых системах, интенсивным использованием многофазных смесей в технике и промышленности наряду с необходимостью анализа взрывобезопасности соответствующих гетерогенных систем.

Целью данной работы является построение и развитие теоретических моделей анализа зон устойчивости перегретой водовоздушной пузырьковой среды, отражения и преломления акустических волн на границе воды и смеси воды с парогазовыми пузырьками, а также численное исследование процессов фокусировки волн пузырьковыми кластерами различной формы.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Исследование распространения слабых возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках, помимо водяного пара, присутствует не участвующий в фазовых переходах инертный газ.
2. Исследование устойчивости парогазожидкостной смеси при различных показателях перегрева жидкости в широком диапазоне частот внешних возмущений.
3. Изучение особенностей отражения и преломления гармонических волн на границе раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками парогазовой смеси при прямом и «косом» их падении.
4. Построение и развитие теоретических моделей фокусировки волны давления пузырьковыми кластерами различной формы.

Основные положения, выносимые на защиту, соответствующие пунктам 7, 9, 15, 19 области исследования научной специальности 1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы:

1. Результаты исследований динамики слабых гармонических возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках помимо водяного пара присутствует не участвующий в фазовых переходах газ. Анализ карты зон устойчивости рассмотренных систем в зависимости от степени перегрева жидкости, построенной на плоскости объёмное содержание–радиус пузырьков в диапазоне равновесного давления от 0.1 до 10 МПа. Оценка влияния начального перегрева (от сотых долей до одного градуса) и повышения давления на дисперсию гармонических волн, а также зависимость инкремента от радиуса пузырьков для неустойчивых систем (пп. 7, 9, 15, 19).
2. Закономерности отражения и преломления гармонических волн прямого и «косого» падении на границу раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками парогазовой смеси. Дисперсионные уравнения и их анализ для широкого диапазона частот, теплофизических параметров и параметров смеси (объёмного содержания и дисперсности). Оценка критических углов, при которых происходит явление полного внутреннего отражения (пп. 7, 9, 15, 19).
3. Теоретические модели фокусировки волн давления в заполненной водой трубе, содержащей пузырьковые кластеры различной формы. Анализ максимальных значений амплитуды волны, реализующихся на оси цилиндрического канала и на его стенках из-за фокусировки при различных параметрах задачи (пп. 7, 15, 19).

Научная новизна:

1. Впервые построены карты зон устойчивости парогазожидкостных систем в зависимости от степени перегрева жидкости. Проанализировано влияние начальной степени перегрева на эволюцию волновой картины течения. Для неустойчивых систем изучена зависимость инкремента от радиуса пузырьков при варьировании степени перегрева несущей жидкости.
2. Впервые установлены и изучены особенности отражения и преломления гармонических волн на границе раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками парогазовой смеси при прямом и «косом» их падении. Выписано дисперсионное уравнение, и проведён численный анализ влияния частот возмущений в диапазоне от 10 до 10^6 с^{-1} на зависимость

угла преломления от угла падения для нескольких значений равновесной температуры.

3. Графики зависимости достижения максимального значения давления в рабочем пространстве эксперимента от начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} и радиуса сферического пузырькового кластера R_{cl} , либо протяжённости цилиндрического Δz . Анализ влияния начального объёмного содержания пузырьков и геометрических размеров пузырькового экрана на кумуляцию или гашение волны давления.

Научная и практическая значимость. Полученные в работе результаты расширяют знания о протекающих в многофазных средах физических процессах, более того, могут применяться для объяснения механизмов гашения и усиления волн давления пузырьковыми завесами. Разработанные модели, алгоритмы и программы могут быть использованы при разработке и эксплуатации различных технологических подводных объектов. Результаты численного моделирования возможно целенаправленно использовать в практической деятельности, в частности, для проектирования пузырьковой защиты подводных технических конструкций от разрушающего действия интенсивных волн. Вместе с тем, обеспечение затухания или локальной кумуляции энергии волн в жидкости посредством пузырьковых экранов может использоваться для эффективной охраны подводной фауны от взрывных волн, сопровождающих ремонтно-строительные работы. Карты зон устойчивости рассматриваемых парогазожидкостных систем могут быть полезны при расчётах и проектировании инженерных сооружений и т.д. Результаты моделирования взаимодействия акустических волн с пузырьковыми средами, с границами раздела между однофазной и двухфазной средой, полезны для проведения исследовательских работ в толще океана, анализа состояния воды и подводной фауны.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается применением фундаментальных уравнений механики многофазных сред при построении математических моделей, удовлетворением модельных допущений при постановке задач, использованием апробированных методов численного моделирования. Обоснованность результатов гарантируется верификацией расчётов посредством данных экспериментальных работ и численных исследований других авторов в некоторых случаях.

Апробация работы. Основные положения и результаты, представленные в диссертации, докладывались на следующих конференциях: Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006, 2011; Казань, 2015; Уфа, 2019; Санкт-Петербург, 2023); VI Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2006) (Санкт-Петербург, 2006); Российская научно-техническая конференция «Мавлютовские чтения» (Уфа, 2006); Школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2007, 2010); Международная конференция «Потоки и структуры» (Санкт-Петербург, 2007; Москва, 2009); Всероссийская конференция, посвящённая памяти академика А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 2006, 2008, 2012); Международная научная школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2017, 2022, 2023); Российская конференция «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения» и школа молодых учёных «Газовые гидраты – энергия будущего» (Уфа, 2017, 2023); Всероссийская конференция и школы для молодых учёных «Математические проблемы механики сплошных сред», посвящённая 100-летию академика Л.В. Овсянникова (Новосибирск, 2019) и др.

Кроме того, результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах в Институте механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН под руководством профессора С. Ф. Урманчеева и академика АН РБ, профессора В. Ш. Шагапова; на семинаре Института механики МГУ под руководством профессора А.Н. Осипцова (Москва); в Тюменском филиале ИТПМ СО РАН под руководством профессора А. А. Губайдуллина (Тюмень); на семинаре Института механики и машиностроения КазФИЦ РАН под руководством чл.-корр. РАН Д. А. Губайдуллина (Казань); на семинаре Института теплофизики СО РАН под руководством чл.-корр. РАН Н. А. Прибатурина (Новосибирск).

Личный вклад. Основные научные результаты получены автором самостоятельно. В работах, выполненных в соавторстве, диссертант, как правило, участвовал во всех этапах исследования от постановки задачи и выбора метода ее решения до получения и анализа результатов. Представление изложенных в диссертации и выносимых на защиту результатов, полученных в совместных исследованиях, согласовано с соавторами.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 36 работах, из которых 17 в изданиях, входящих в международные базы данных, 4 в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, где должны быть

опубликованы основные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора наук. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 243 страницы с 70 рисунками. Список литературы содержит 258 наименований.

Во введении отражена актуальность темы исследований, проводимых в диссертационной работе, сформулированы цели, отмечены научная новизна, достоверность результатов и практическая значимость работы, а также кратко изложена структура диссертации.

В первой главе выполнен обзор теоретических и экспериментальных исследований, посвященных изучению волновых процессов и устойчивости жидкостей с газовыми и парогазовыми пузырьками.

Во второй главе выписаны основные уравнения динамики пузырьковой жидкости с газовыми и парогазовыми пузырьками. Для описания межфазных теплообменных процессов использована схема, основанная на решении уравнений переноса типа уравнений теплопроводности и диффузии. Получено дисперсионное уравнение для моделирования распространения акустических волн в жидкости, включающей пузырьковую зону. С опорой на записанное дисперсионное соотношение получены уравнения для равновесной скорости звука в рассматриваемых средах, уравнение на равновесный радиус и соотношение для определения критического объемного содержания. Результаты по данной главе опубликованы в работах [3], [7], [23], [24], [72], [110], [228], [247], [248], [249], [250], [251], [252].

В третьей главе изучены особенности отражения и преломления гармонических волн на границе раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками с парогазовой смесью при прямом и «косом» их падении. Изучено влияние частот возмущений на коэффициенты отражения и преломления звука при прямом падении. Получено дисперсионное уравнение и проведен численный анализ влияния частот возмущений на зависимость угла преломления от угла падения для трех значений равновесной температуры T_0 . Исследована величина критического угла падения, при котором реализуется то же отражение от параметров двухфазной системы и частот возмущений. Изучена динамика слабых гармонических возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде. Проанализи-

зированы карты зон устойчивости рассмотренных систем в зависимости от степени перегрева жидкости на плоскости объемное содержание–радиус пузырьков с повышением равновесного давления от 0.1 до 10 МПа. Основное содержание данной главы опубликовано в работах [6], [23], [73], [228], [248], [249], [250], [251].

В четвертой главе посвящена исследованию динамики волн давления различной конфигурации в трубе, заполненной жидкостью при наличии в ней пузырьковой области в форме сферы. Изучены двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей сферический кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью, расположенный в двух случаях: на торцевой границе канала и на оси канала. По результатам численных расчетов проанализирована зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся в канале, от геометрических параметров кластера и канала, а также от амплитуды первоначального воздействия. Построены карты зон достижения максимального значения давления в расчетной области в зависимости от начального объемного содержания пузырьков и протяженности пузырьковой области. Основное содержание данной главы опубликовано в работах [109], [114], [241].

Пятая глава посвящена исследованию динамики волн давления различной конфигурации в трубе, заполненной жидкостью при наличии в ней пузырьковой области в форме полого или сплошного цилиндров. Изучены двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей пузырьковый кластер, заполненный водовоздушной смесью, расположенный в двух случаях: на внешней стенке канала и на оси канала. По результатам численных расчетов проанализирована зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся в канале, от геометрических параметров кластера и канала, а также от амплитуды первоначального воздействия. Установлено, что в случае цилиндрического кластера амплитуда волнового сигнала за пузырьковую зону в несколько раз превышает амплитуду для случая цилиндрического полого кластера. Основное содержание данной главы опубликовано в работах [2], [4], [5], [8], [25], [74], [108], [111], [113], [140], [143], [241].

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в работе и выносимые на защиту.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность академику РАН Роберту Искандеровичу Нигматулину, инициировавшему развитие данного направления, за научную школу, учеником которой является автор.

Искреннюю благодарность за постоянный интерес к исследованиям автора и полезное обсуждение результатов работы автор выражает академику АН РБ, доктору физико-математических наук, профессору В. Ш. Шагапову, которого автор считает своим учителем и наставником.

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора С. Ф. Урманчеева и доктора физико-математических наук, профессора И. К. Гималтдинова за ценные советы и оказанную поддержку, а также своих коллег из Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН за творческое сотрудничество.

Автор особо благодарен кандидату физико-математических наук У.О. Агишевой за постоянную поддержку, веру и полезное обсуждение результатов работы.

Работа выполнена в рамках государственных заданий Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в сфере научной деятельности номер 0246–2019–0052 «Численные, аналитические и экспериментальные методы в многофазных, термовязких и микродисперсных системах газогидродинамики» и номер FMRS-2024-0001 «Гидрогазодинамика многофазных, термовязких и микродисперсных сред».

Глава 1. Современное состояние исследований

Обширная практика в различных отраслях хозяйства показывает, что пузырьковые жидкости обладают уникальными особенностями. Добавление небольшого объёма газовых включений придает среде высокую сжимаемость. В то же время плотность остаётся близка к плотности жидкости, и это обуславливает нелинейность среды. Следует отметить, что пузырьковые среды проявляют значительные диссипативные свойства благодаря процессам межфазного теплообмена. Наблюдаемые на практике значительные особенности распространения возмущений в пузырьковых средах есть результат комплексного воздействия дисперсионных, диссипативных и нелинейных эффектов.

В первой главе настоящей диссертации содержится обзор теоретических и экспериментальных научных работ, исследующих воздействие акустических возмущений на пузырьковые жидкости, границы раздела, и пузырьковые кластеры, расположенные в несущей жидкости.

1.1 Обзор работ, посвященных теоретическому изучению акустических свойств пузырьковых жидкостей

Сложные пузырьковые системы повсеместно встречаются в инженерных потоках, таких как подводные взрывы, промышленные трубопроводные системы и гидравлические машины. Морская вода у поверхности моря содержит довольно большие пузыри из-за прибоев. Даже в жидкостях с малой популяцией зародышей при их взаимодействии с конструкциями часто встречаются сложные двухфазные режимы течения и волны разрежения, которые обуславливают кавитацию. Важность изучения динамики ударных волн в газожидкостных средах подкрепляется широким спектром практических задач: обеспечение шумоподавления, пожаро- и взрывобезопасности технологических процессов, защита зданий, сооружений от разрушительной силы ударной волны. Пузырьковые среды способны поглощать, трансформировать и повторно излучать энергию волны сжатия, причём амплитуда возникшего локального импульса может превышать амплитуду первоначального возмущения, что приводит к кумулятив-

ному сжатию и, как следствие, значительному росту давления и температуры внутри пузырьков.

Первые теоретические исследования по образованию кавитационных полостей были представлены в работе J. Ackeret [1]. В ходе исследований были проведены аналогии между пульсационным схлопыванием пузырьков с ударным сжатием газа и сделано предположение, что схлопывание пузырьков во время ударного сжатия вызывает очень высокое давление внутри, что отчасти является причиной коррозии.

Одними из первых результатов по изучению колебаний пузырьков в движущейся жидкости, а так же расчёты по определению давления в среде были представлены в статье [54]. M. Strasberg провёл расчёты звуковых давлений, возникающих при возбуждении объёмных пульсаций по следующим механизмам: за счёт образования, слияния или деления пузырьков; движением свободного потока жидкости, содержащей увлечённые пузырьки, мимо препятствия и течением жидкости, содержащей увлечённые пузырьки, по трубе за сужением. Расчёт звукового давления, создаваемого образованием пузырьков, был подтверждён измерениями с образованием пузырьков на стенках сопла.

На базисе созданных А.И. Седовым моделей сплошных сред [229], усовершенствованных В.С. Когарко [185], была построена модель для многофазной смеси, состоящей из жидкости с газовыми и паровыми включениями. В разработанной модели принималась во внимание трансформация энергии основного потока в энергию движения жидкости вблизи пузырька в процессе его колебаний. В эти же годы появился ряд работ, в которых были предложены уточнения модели типа «жидкость–пузырьки» с учётом введённых концепций относительного движения фаз и тепломассообмена. В их числе выделим важные работы С.В. Иорданского [178] и L. Wijngaarden [62].

Разделение исходного волнового импульса на упругий предвестник и ударную волну во время движения сквозь пузырьковую жидкость было открыто и исследовано в научной работе В.К. Кедринского [180], более того, высокочастотный упругий предвестник двигался со скоростью звука в «чистой» жидкости.

Следующий этап исследований ударных волн начался с изучения волн, движущихся в пузырьковой среде без ускорения и с сохранением их структуры. Обратившись к статье Р.И. Нигматулина и др. [209], обсудим исследование структуры стационарных ударных волн, моделируемых в двухскоростном,

двухтемпературном приближении с неизменным числом Нуссельта Nu , описывающим межфазный теплообмен. В числе важных результатов было отмечено, что двухскоростные эффекты значимы лишь в тех случаях, когда модель не включает в себя диссипацию тепла. В терминах данной модели в исследовании В.Ш. Шагапова [242] были численно описаны структуры стационарных ударных волн в смеси с включениями различных параметров. Обращаясь к деталям, подчеркнём, что в расчётах обнаружена осцилляционная нерегулярность и представлена возможность «осреднения» смеси по параметрам для нахождения эпюры давления в ней.

В работе В.В. Гончарова и др. [147] для одномерных стационарных возмущений получено точное решение линейных уравнений акустики и нелинейного уравнения Рэлея для пузырьков. Показано, что в достаточно широких пределах изменения энергии возмущения нелинейностью акустических уравнений можно пренебречь. Качественный анализ решения на основе анализа фазовых диаграмм показал, что в области малых скоростей возмущения могут быть как периодическими нелинейными волнами, так и уединёнными возмущениями типа «солитон». В области же больших скоростей возникают только периодические возмущения.

А.А. Губайдуллиным с коллегами в статьях [156] и [157] проведены исследования нестационарных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры. Получено обобщение уравнения Рэлея – Ламба для случая ансамбля пульсирующих пузырьков [156]. Обсуждаются вопросы построения адекватной модели динамического поведения двухфазной смеси жидкости с пузырьками газа. В рамках представлений ячеистой схемы получено уточнённое условие совместного деформирования фаз смеси (обобщённое уравнение Рэлея – Ламба). Исследованы основные закономерности распространения нестационарных ударных волн. Изучено влияние начального давления смеси и теплофизических свойств газа в пузырьках на процесс эволюции их структур [157]. В дальнейших исследованиях [153], [154] было проведено численное моделирование процесса отражения ступенчатой ударной волны от покрытой слоем пористого вещества стенки в воздушной среде. Расчёты проводились с использованием математической модели с двумя скоростями и тензорами напряжений, созданной в рамках механики многофазных систем. В результате было изучено воздействие параметров ударно-волнового возмущения и пористой структуры на формирование

отражённого импульса. В продолжение цикла предыдущих работ, статья [148] посвящена описанию частотных зависимостей скорости гашения волны, распространяющейся вдоль границы раздела жидкости и насыщенной пористой среды. Отмечено влияние характеристик насыщенной пористой среды и граничных условий на развитие режимов одно-, двух- или трехповерхностных мод, каждая из которых может быть истинной или псевдомодой. Статьи [149] и [150] посвящены численному моделированию особенностей распространения волн давления в заполненной жидкостью цилиндрической полости в пористой среде, содержащей пузырьковую жидкость, с использованием двухскоростной, с двумя напряжениями модели пористой среды. Получены дисперсионные зависимости. Исследовано прохождение волны ступенчатого профиля из жидкости в пористую среду, насыщенную пузырьковой жидкостью [149]. Установлено, что наличие пузырьков приводит к усилению затухания сигнала как внутри полости, так и в пористой среде [150]. В [149] произведён обзор исследований, посвящённых распространению волн в жидкостях с пузырьками постоянной массы и волновой динамике в среде, содержащей пузырьки пара или растворимого газа. Кроме того, изложены основные особенности динамики двухфазных сред пузырьковой структуры.

В одном из самых ранних исследований В.Ш. Шагапова [243] в рамках m -скоростной и с m давлениями модели ($m \geq 2$) обсуждены особенности распространения волн малой амплитуды в жидкости, содержащей газы пузырьки. Сформулировано дисперсионное соотношение, где скорость движения волны и коэффициент её затухания представлены как функции частоты возмущения. Выявлено влияние массообмена (в случае паровых пузырьков), теплообмена, скольжения фаз, полидисперсности на скорость распространения и затухания малых возмущений.

Статья Р.Р. Айдагулова и др. [76] представляет итоги исследования строения ударной волны на основании двухдавленческой, двухскоростной модели с реальным полем температур внутри пузырьков. Обоснована возможность применения фиксированного коэффициента теплообмена в расчётах нестационарных процессов переноса теплоты в системе жидкость – пузырёк при пульсациях последнего.

В статье Ю.Я. Богуславского и С.Б. Григорьева [89] получено выражение для скорости стационарной волны в пузырьковой жидкости. Получен критерий

для максимального значения давления в стационарной волне сжатия, выше которого волна перестаёт быть стационарной, т.е. дисперсия не может уравновесить нелинейное нарастание крутизны профиля.

И.С. Радовский и Н.В. Дробан в своей работе [226] привели систематические данные в диапазоне температур $50\text{--}340^\circ\text{C}$ и степеней сухости $10^{-8}\text{--}10^{-2}$, полученные на основании релаксационной термодинамической теории с учётом одновременного влияния процессов теплообмена между фазами, фазовых переходов, проскальзывания фаз и пульсаций пузырьков пара при различной степени их неравновесности.

Стоит отметить работы С.S Martin, В.В. Кузнецова и Н.J. Rath, в которых использовалась гомогенная модель среды в пренебрежении радиальной инерцией жидкости, возникающей вокруг пульсирующего пузырька, процессов межфазного теплообмена и др. Такой подход позволил качественно описать актуальные на тот момент данные экспериментов [46], [191], [51]. Характерными особенностями упомянутых работ были высокая вязкость несущей жидкости, волны большой интенсивности и пузырьки малого радиуса. В [46] экспериментально и аналитически исследовано распространение волн конечного давления через двухфазную пузырьковую воздушно-водяную смесь. Разработана одномерная однородная модель, которая пренебрегает каким-либо относительным движением между двумя фазами. Из трёх определяющих уравнений сохранения (массы газа, массы жидкости и импульса смеси) была получена система дифференциальных уравнений, которые решались методом характеристик и двухшаговой схемой Лакса – Вендрофа. В [191] показано, что начальный импульс в жидкости с пузырьками газа эволюционирует в соответствие с уравнением Кортевега–де Вриза–Бюргерса. За счёт подбора безразмерных комплексов, характеризующих процесс, удалось наблюдать распространение сигнала в форме монотонных и осцилляторных ударных волн, солитонов и волновых пакетов. В [51] из нестационарных уравнений в случае односкоростной модели получена нелинейная гиперболическая система дифференциальных уравнений. Исследовано распространение волн давления конечной длительности и ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. Приведены значения скоростей распространения волн.

В работах Р.И. Нигматулина [211] и З.А. Шихмурзаева [258] решены: задача о взаимодействии коротковолновых импульсов и задача о взаимодействии

длинноволнового импульса с пузырьковым экраном и его отражение от твердой стенки.

В статье БыЕ. Адельфана, А.В. Губа нова и Е.И. Тимофеев [126] на основе экспериментальных данных изучено наклонное падение ударных волн на границу раздела в двухфазных средах. Приведена подробная постановка задачи и проанализировано влияние начального давления на параметры преломлённых ударных волн.

В более поздних работах исследовалась динамика волн в газожидкостных пузырьковых смесях в рамках теории нелинейной волновой динамики диспергирующих сред. Авторы исследований В.Е. Накоряков, С.С. Кутателадзе, Б.Г. Покусаев, И.Р. Шрейбер и др. ([192] и [204]) применяли модель политропного газа и формулу эффективной вязкости, включающую тепловые потери в процессе колебаний пузырька. Описанный метод применим к нелинейным волнам небольшой амплитуды и позволяет получить представление о специфических характеристиках их динамики в пузырьковой жидкости. Здесь же хочется отметить несколько работ В.Г. Гасенко, выполненных под руководством В.Е. Накорякова [122], [123] и [121]. В [122] получено одно уравнение и его решение для распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа для волн конечной амплитуды, имеющих произвольную крутизну нарастания. Показано, что начальное возмущение распадается на упругий предвестник, движущийся со скоростью звука в жидкости, и второй фронт волны, имеющий скорость существенно ниже. В [123] приведено модельное уравнение, описывающее усиление ударных волн в кипящей жидкости и возникновение осциллирующей структуры ударной волны с заостренными гребнями в жидкости с пузырьками газа и полученное на основе предположения о доминирующем влиянии нелинейности вида $\left(\frac{da}{dt}\right)^2$ (где a – радиус пузырька) в процессе сильного сжатия пузырьков. В [121] на основе двухтемпературной модели распространения волн в жидкости с пузырьками пара приведены расчёты структуры и динамики волн давления в парожидкостной среде. Характерные структуры волн – решения модельного уравнения – приведены в единой таблице-карте. В последующих работах В.Г. Гасенко с коллегами было уделено особое внимание предвестнику в газожидкостных смесях. Большой круг задач рассмотрен в докторской диссертации В.Г. Гасенко [117]. К ним можно отнести результаты исследования динамики стационарных и нестационарных волн в полидисперсных газожидкостных

смесях с двумя размерами пузырьков; результаты расчёта теплофизических свойств и уравнения состояния паро- и газожидкостных смесей в гомогенном приближении на основе решённых задач динамики и теплообмена отдельной парогазовой полости; результаты исследований двумерных линейных и нелинейных волн в расслоенных газожидкостных смесях в вертикальных трубах. В [120] рассмотрены численные методы моделирования нелинейных волновых процессов в парожидкостной среде для модельной сферически симметричной ячейки, на внешней границе которой прилагается скачок давления, при пренебрежении вязкости и сжимаемости жидкости, а также радиальной зависимости давления в паре. Приводятся и обсуждаются результаты численных экспериментов при критических термодинамических характеристиках воды для различных начальных значениях радиусов пузырьков пара и прилагаемого скачка давления. В [118] и [119] представлены результаты по низкочастотному предвестнику, обнаруженному авторами. Установлено, что низкочастотный предвестник имеет существенно большую амплитуду пульсаций, меньшее затухание и в рамках гомогенной модели газожидкостной смеси не описывается.

В статье M.J. Tan и S.G. Bankoff [55] численно исследовано распространение установившихся возмущений давления через жидкость, содержащую мелкие пузырьки газа. Были учтены эффекты относительных поступательных движений между пузырьками и жидкостью. Результаты показали возможность колебательных ударных волн, которые начинаются с резкого повышения давления, за которым следует область релаксации. Для сильных толчков прогнозируемые частоты колебаний давления настолько высоки, что их невозможно измерить.

Академик В.Е. Накоряков с коллегами в [205] представил дисперсионный анализ модельного уравнения для описания распространения волн в жидкости с пузырьками пара. Показано, что фазовые переходы первого рода существенно влияют на дисперсию акустических волн на низких частотах, меньших резонансной частоты пузырька. В работе [48] предложены новые волновые модели для пузырьковой парожидкостной среды и методы задания межфазного теплообмена. Исследована эволюция пузырьков пара в волне давления и связь структуры и динамики волны с ней. Представлены результаты решения основных модельных уравнений для волн в парожидкостной среде и проведено сравнение этих решений с полученными экспериментальными данными.

З.М. Оренбахом и И.Р. Шрейбером выполнено ряд теоретических исследований по распространению волн в пузырьковых структурах [214] и [213]. В [214] получено дисперсионное соотношение для жидкости с пузырьками пара, непрерывное в дорезонансной области. Показано, что в случае интенсивных фазовых переходов на границе пузырёк–жидкость нельзя переходить от уравнений, описывающих распространение волн в обе стороны к эволюционным уравнениям, описывающим распространение волн в одну сторону. В работе [213] рассмотрено влияние эффектов нестационарных деформаций и вязкости на структуру линейных волн в трубе, заполненной жидкостью.

В одной из своих первых статей Д.А. Губайдуллин совместно с А.И. Ивандаевым [155] исследовали распространение слабых возмущений в одно- и двухкомпонентных капельных системах, принимая во внимание влияние нестационарности на межфазные процессы обмена энергией, массой или импульсом. В общем виде записано дисперсионное соотношение волнового числа и частоты колебаний. Дополнительно обсуждалось, что при наличии фазовых переходов функция декремента затухания от частоты колебаний может иметь два максимальных значения. В заключении, обнаружено свойство немонотонной зависимости линейного коэффициента затухания низкочастотных возмущений от массового содержания капель в дисперсной смеси.

В статье [104] С.Л. Гаврилюком с соавторами исследована структура ударных волн в пузырьковой жидкости с дискретной функцией распределения пузырьков по размерам. Доказано существование, единственность и устойчивость соответствующей структуры.

В работах Y. Matsumoto [47] и M. Watanabe [61] численно моделировалось распространение слабых ударных волн в жидкостях, содержащих малую концентрацию пузырьков газа с учётом внутренних явлений внутри пузырьков. Сформулированы основные уравнения для пузырьковой жидкости с акцентом на радиальное и поперечное движение пузырьков. Численные результаты при выбранных условиях показывают, что радиальное движение пузырьков, на которое влияют внутренние явления, такие как теплопроводность через стенку пузырька, оказывают существенное влияние на изменение скорости распространения ударной волны и явления релаксации за волной. Авторами точно описан теплообмен между пузырьками газа и жидкостью. Подчёркнута исключительная важность этого аспекта в противовес таким эффектам, как относительное

движение между фазами, имеющим второстепенную роль. Показано, что проскальзывания между пузырьками и жидкостью не так сильно влияют на волновые явления, как тепловые условия внутри пузырька.

Д.ф.-м.н. В.С. Суровым проведены численные и аналитические исследования взаимодействия ударных волн с пузырьковыми экранами. В статье [231] изложено полное решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва для односкоростной модели пузырьковой жидкости, с использованием которой анализируется распространение и взаимодействие ударных волн в пузырьковой газожидкостной системе. В [232] исследован вопрос прохождения ударной волны через слой пузырьковой жидкости. Для нормального экрана в случае импульса давления в виде полубесконечной ступеньки построено точное решение. Приведены результаты численных экспериментов для длинных и коротких импульсов давления, полученные с использованием модифицированного метода Годунова. В работе [233] исследована задача о регулярном отражении воздушной ударной волны от сферической капли пузырьковой жидкости. В рамках обобщённо-равновесной модели численно изучено воздействие ударных волн на одиночные, имеющие различные формы капли пузырьковых жидкостей, а также на ансамбли капель (капельные экраны). Показано существенное различие режимов распада в ударных волнах капель пузырьковых жидкостей и капель без газовых включений.

В начале 2000-х годов автором настоящей диссертации с коллегами было опубликовано несколько статей, из которых выделим две пионерские работы по распространению двумерных возмущений в жидкости, содержащей пузырьковые зоны конечных размеров. Согласно результатам исследования [212] сформулированы условия фокусировки и демпфирования волн давления путём варьирования основных параметров пузырьковых зон. Дополнительно обсуждаются результаты численного моделирования процесса распространения волны давления в форме подковы в жидкости с газовыми пузырьками. Продолжая данное направление, статья [115] содержит основные выводы из численного решения задачи о распространении акустического возмущения в кусочно-неоднородной по объёмному содержанию пузырьков области и воздействии на пузырьковую жидкость импульсом давлением через смежные границы. Стоит отметить, что движению волны давления сопутствует формирование поперечных фронтов давления. Пиковые значения во фронтах достигаются на границах между слоя-

ми, и это явление следует объяснять отличием скорости распространения волны в слоях с разным объёмным газосодержанием.

Профессор В.К. Кедринский с коллегами рассматривал вопросы усиления ударной волны посредством пузырьковых кластеров различной геометрии. В книге [181] сделан обзор теоретических и экспериментальных исследований по подводному взрыву, включающий детальный анализ структуры и параметров волнового поля. Проанализированы особенности трансформации ударных волн в пузырьковых средах, их усиление при столкновении и фокусировке. В [184] численный анализ взаимодействия плоской стационарной ударной волны с пассивным сферическим кластером, выполненный в рамках неравновесной двухфазной математической модели пузырьковой жидкости, показал, что различие в скоростях распространения волн в кластере и окружающей жидкости, выбор реальной геометрии кластера приводят к неожиданным эффектам. Показана возможность возникновения пиковых давлений при прохождении волны через сферический кластер. В [182] выполнено исследование динамики полей давления в аксиально-симметричной постановке при воздействии ударной волны на «свободную» пузырьковую систему (тороидальным кластером). Подчёркивается, что в конечном итоге в жидкости устанавливается стационарная осциллирующая ударная волна. Переходя к деталям, отметим, что отражение волны от оси симметрии имеет нерегулярную природу, возникает аксиальный диск Маха, содержащий ядро определённого размера, давление в котором распределено радиально неравномерно. Получены данные по динамике «радиуса» ядра диска Маха и максимального значения давления в нем в зависимости от объёмной доли газовой фазы в кластере. В [183] представлены результаты численного моделирования структуры и динамики поля давлений, созданного цилиндрическим аксиальным пузырьковым кластером (шнуром) под действием плоской ударной волны, направленной по оси ударной трубы. Отмечается установление квазистационарной ударной волны как следствие последовательного возникновения пульсаций пузырьков в осесимметричном шнуре и жидкости вокруг него.

В статье Д.В. Воронина и коллег [103] проведено экспериментальное и теоретическое моделирование воздействия волнового возмущения на кавитационный пузырьковый кластер. Согласно полученным результатам, на начальном этапе становления кластера образуются две различные подгруппы пузырьков с разным временем схлопывания и фазами колебаний. Далее отмечается раз-

рушение в области внутреннего положительного давления кластера мелких пузырьков, накапливавших энергию в исходной волне давления.

В работах профессора Н.А. Кудряшова с учениками [188] рассмотрена квазиодномерная модель течения жидкости в вязко-эластичной трубке, основанная на замкнутой системе нелинейных уравнений для описания возмущений давления и радиуса. Найдены точные решения некоторых нелинейных эволюционных уравнений. В [189] рассмотрена двумерная задача о распространении уединённой волны давления в жидкости, содержащей пузырьки воздуха. Изучены режимы распространения волн давления в жидкости с пузырьковой областью прямоугольного сечения. Найдены значения параметров математической модели, для которых амплитуда волны давления превосходит амплитуду начальной волны. В статье [35] выведены нелинейные эволюционные уравнения четвёртого порядка и его частные случаи для описания нелинейных волн давления в смеси пузырьков жидкости и газа, учтено влияние вязкости и теплопередачи. В [34] исследованы нелинейные волны, описываемые дисперсионным нелинейным эволюционным уравнением пятого порядка. Предложен численный метод решения краевой задачи для этого уравнения. Приведены точные решения нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка.

Автор настоящей диссертации принял участие в ряде совместных работ с коллегами Р.Х. Болотновой, У.О. Агишевой и В.А. Коробчинской, посвященных распространению двумерных волн в пузырьковой жидкости. В статьях [106] и [107] были исследованы характеристики двумерных нелинейных волн в жидкости, содержащей пузырьковые области конечных размеров, выявлены значимые двумерные эффекты. В [91] представлена модель газожидкостной смеси для анализа динамики сильной ударной волны в жидкости с пузырьками газа. Применяется широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара Нигматулина – Болотновой в аналитической форме — наиболее эффективный инструмент описания термодинамических свойств газожидкостной смеси под действием сильной ударной волны. Выполнено сопоставление результатов численного моделирования с экспериментальными данными из работы А.И. Сычева [236], описывающей распространение ударной волны $p_1 = 2.4$ МПа в водной среде, содержащей пузырьки азота объёмной долей 4 %; исследована динамика поля давлений при прохождении и отражении от твёрдой стенки волн амплитудой от 2 до 100 МПа в среде с начальным содержанием газовой фазы от 0.5 до 6 %. В

статье [112] разработаны системы моделирования динамики интенсивных ударных волн в газожидкостных средах и скоростных потоков вскипающей жидкости в условиях разгерметизации сосудов высокого давления. Получены результаты воздействия волновых импульсов на твёрдую стенку, частично покрытую пузырьковой завесой. В работе [90] построена двухфазная модель парожидкостной среды и исследованы процессы полного истечения вскипающей жидкости при разгерметизации трубы высокого давления. Задача решалась в переменных Лагранжа в однотемпературном, односкоростном, одномерном плоском приближении с использованием законов сохранения массы каждой фазы, импульса и энергии смеси с применением широкодиапазонного уравнения состояния воды и пара. Получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными для регистрируемых зависимостей давления и объёмного паросодержания. В статье [71] с использованием широкодиапазонного уравнения состояния воды и пара исследованы особенности ударного и изоэнтропического воздействия на газожидкостные среды. Рассмотрено влияние давления, паро- и газосодержания на скорость звука в газожидкостной смеси. С использованием ударной адиабаты Ранкина – Гюгонио рассчитаны характеристики проходящей и отражённой волны в пузырьковой жидкости с газовыми пузырьками, сжимающимися по адиабатическому, ударному и изотермическому законам в различных расчётах. В работе [2] исследованы особенности распространения двумерных акустических волн слабой интенсивности в пузырьковой жидкости со слоями различного объёмного газосодержания. Проанализировано влияние ширины пузырькового слоя на динамику распространения импульсного сигнала. Показана возможность образования пиков давления вблизи границы между слоями. В статье [8] освещаются итоги моделирования динамики двумерных волн давления в газожидкостной среде при прохождении нагрузки через соседние границы. Наглядно изучена сравнительная эволюция волн колоколообразной и ступенчатой начальной формы.

В области изучения формирования гидратов на основе теоретической модели пузырьковой жидкости, учитывающей возможное гидратообразование, изучена динамика плоскоодномерных ударных волн применительно к имеющимся экспериментальным данным для системы вода-фреон [105]. Предложена схема учёта дробления пузырьков в ударной волне, которое является одним из главных факторов интенсификации процесса гидратообразования с ростом ам-

плитуды ударной волны. В [116] решена задача об акустическом воздействии на жидкость с пузырьками гидратообразующего газа. В качестве газовой фазы были приняты фреон-12 и метан. Выписано дисперсионное уравнение для волнового числа и определены параметры, влияющие на интенсивность перехода газа в гидратное состояние.

Выделим ряд работ профессора А.Н. Осипцова с учениками по исследованиям распространения ударных волн в многофазных средах с использованием лагранжева метода механики сплошных сред. В [144] для случаев симметричного и несимметричного взаимодействия плоских волн в стационарном потоке запылённого газа показано, что при определённых величинах параметров задачи (числа Маха чистого газа, относительной массовой доли частиц, отношения теплоёмкостей фаз и углов между приходящими волнами и невозмущённым потоком) возможны режимы течения, в которых некоторые из падающих либо отражённых волн вырождаются в волны с полной дисперсией. Найдены области определяющих параметров, соответствующие различным волновым конфигурациям. В этой же работе в рамках двухскоростной двухтемпературной модели запылённого газа численно исследована структура прямой волны с полной дисперсией, а также структура течений в области пересечения двух плоских волн в случае, когда все либо только отражённые волны являются волнами с полной дисперсией. В статье [145] обнаружена возможность формирования волновых структур, в которых все либо только некоторые из падающих или отражённых волн вырождаются в волны с полной дисперсией, т.е. зоны непрерывного изменения параметров обеих фаз. С использованием соотношений Рэнкина-Гюгонио для односкоростной модели «эффективного газа» найдены диапазоны безразмерных определяющих параметров (числа Маха, углов между падающими волнами и набегающим потоком, отношения теплоёмкостей фаз и массовой концентрации частиц), соответствующие различным волновым конфигурациям. Обнаружен диапазон определяющих параметров, в котором температура несущей фазы имеет локальный максимум внутри структуры волны. В [146] исследовано изменение траекторий частиц в ударном слое, распределений по поверхности цилиндра потока их энергии, а также пиковых тепловых нагрузок на поверхность цилиндра при наличии косога скачка по сравнению со случаем симметричного обтекания. В работе [219] и [220] представлены расчёты, на основании которых обнаружен эффект аэродинамической фокусировки частиц на

оси канала. Указанный эффект связан с действием на частицы подъемных сил Сэфмана, обусловленных локальной сдвиговостью потока на масштабе обтекания частиц. В [218] обсуждается полный лагранжев подход для расчёта полей скорости и плотности в континуальных моделях сред, лишенных собственных напряжений, обычно используемых для описания дисперсной фазы в разреженных дисперсных системах. Суть метода состоит в использовании лагранжевой формы уравнений импульса и неразрывности дисперсной фазы и привлечении дополнительных уравнений для компонент якобиана перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным. Метод позволяет вычислять плотность дисперсной фазы вдоль выбранных траекторий частиц из решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, что делает возможным исследование поведения дисперсной примеси в существенно неоднородных и нестационарных течениях с разрывами сплошности, множественными пересечениями траекторий частиц и локальными зонами накопления дисперсной фазы. В работе [36] представлен новый подход к численному моделированию двухфазных, двумерных течений, основанный на сочетании полного лагранжева метода для дисперсной фазы и бессеточного метода вихревых пузырей для несущей фазы. В работе [194] развивается комбинированный полностью лагранжев подход для бессеточного моделирования нестационарных осесимметричных вихревых течений газодисперсной среды с несжимаемой несущей фазой. Предлагаемый подход основан на сочетании бессеточного вихревого метода для расчёта осесимметричных течений несущей фазы, описываемых уравнениями Навье-Стокса (или Эйлера), и полного лагранжева метода для расчёта параметров дисперсной среды. Сочетание указанных методов сводит задачу моделирования течений двухфазной среды к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка для координат тороидальных вихревых элементов в несущей фазе, а также траекторий частиц, компонент скорости и компонент якобиана перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным для дисперсной фазы.

Профессором А.Г. Петровым с учениками опубликованы работы по колебаниям пузырьков в жидкости. В [224] рассмотрены малые нелинейные колебания эллипсоидального пузырька в жидкости при резонансе частот радиальной и эллипсоидальной мод 2:1. Показано, что при отсутствии резонанса решение нелинейных уравнений отличается от решения линейных уравнений только малым (квадратичным по амплитуде) изменением частоты колебаний.

В резонансном случае радиальная и эллипсоидальная моды колебаний периодически меняются местами и энергия одной моды переходит в другую, чем и обусловлен интерес к системе при резонансе. Рассмотрен вопрос о влиянии диссипации в реальных средах. В статьях [221] и [223] для теоретического вывода условий слияния пузырьков рассмотрены вынужденные нелинейные колебания двух сферических пузырей, движущихся в непосредственной близости друг от друга под действием внешнего периодического поля давлений. Показано, что в результате нелинейного взаимодействия силы вязкости с радиальными и поступательными колебаниями пузырьков вырабатывается квадратичная по вязкости однонаправленная сила отталкивания, которая останавливает сближение пузырьков. В [222] получены асимптотические по малому расстоянию между границами сфер уравнения сближения пузырьков под действием осреднённой по периоду колебаний силы притяжения Бьеркнеса и силы вязкого сопротивления. В [96] методом инвариантной нормализации гамильтониана описана перекачка колебаний из радиальной в произвольную деформационную моду, отвечающую n -му полиному Лежандра. В [95] показано, что при перекачке энергии происходит аномальное увеличение амплитуды деформационной моды и это может быть одним из механизмов дробления пузырьков. В работе [97] представлена линейная теория затухания радиальных колебаний пузырька в жидкости с учётом основных диссипативных механизмов: термического, вязкого и акустического. Показано, что при относительно небольшой амплитуде давления возбуждающей акустической волны развивается достаточно большая амплитуда деформационных колебаний для дробления, а также появляются субгармоники в спектре акустического излучения. Получено условие дробления пузырька для быстрого и медленного старта акустической волны. В статье [98] рассматриваются две нелинейные колебательные системы. Первая – материальная точка на пружине при вертикальной вибрации точки подвеса с частотой, которая совпадает с частотой свободных вертикальных колебаний и в два раза больше частоты свободных колебаний по горизонтали. Методом осреднения построено асимптотическое решение, описывающее переходный процесс установления периодического решения. Вторая система – осесимметричный пузырёк в жидкости под действием переменного давления. Установлена аналогия этой системы с предыдущей. Показано, что при перекачке энергии радиальных колебаний амплитуда резонансной деформационной моды колебаний пузырька

аномально растёт, что позволяет раздробить пузырьёк в жидкости при малых энергетических затратах на подачу переменного внешнего поля давления.

В работе Ж.-В. Дос и др. [16] численно исследовано слабонелинейное распространение акустических волн в монодисперсных пузырьковых жидкостях. Анализ волн давления в линейном режиме позволяет выделить две резонансные частоты: частоту Миннаэрта и резонанс многократного рассеяния, который сильно зависит от концентрации пузырьков. Для слабонелинейных режимов генерация высших гармоник наблюдается только для частоты Миннаэрта. Также наблюдаются линейные комбинации между гармониками Миннаэрта и резонансом многократного рассеяния. Однако наиболее значимый наблюдаемый эффект – это появление эффектов разупрочнения-упрочнения, которые имеют некоторое сходство с эффектами, наблюдаемыми для песчаников или материалов с трещинами. Эти эффекты связаны с резонансом многократного рассеяния.

Стоит отметить ряд статей, подготовленных в результате совместных исследований Н.А. Прибатурина и С.И. Лежнина с коллегами. В [196] исследован процесс распространения волны разрежения в насыщенном паре при его внезапном контакте с холодной жидкостью. В [195] рассмотрены общие и специфические закономерности и генерации волн давления на границе «жидкость–пар» в различных физических ситуациях. Исследован процесс формирования и распространения волны разрежения при внезапном контакте холодной жидкости и насыщенного пара в газодинамическом приближении. На основе модели поршневого оттеснения жидкости от поверхности вскипания получены простые аналитические и численные аппроксимации динамики инерционного роста ансамбля паровых пузырьков на плоской теплоотдающей поверхности для различных условий. Найдены законы роста пузырьков и изменения пристенного давления жидкости. В [87] представлены результаты численного моделирования ударных волн и генерации вихревых структур при нестационарном истечении струи вскипающей жидкости. Проведено сопоставление особенностей эволюции ударных волн и формирования вихревых структур при нестационарном истечении вскипающей воды с соответствующими структурами при нестационарном истечении газа. В [86] проведено численное моделирование процесса формирования и эволюции волны сжатия при взрывном вскипании теплоносителя, вызванного торцевым разрывом трубопровода высокого давления. Рассчитаны амплитуды

и профили волн при различных временах и типах разрыва. Предложено обоснование выбора «парожидкостной» модели окружающей атмосферы. Показано, что тип разрыва (способ раскрытия диафрагмы) принципиально влияет на форму и амплитуду волны сжатия и разрежения. В [85] рассчитаны амплитуды волн сжатия на преграде при различных временах и типах разрыва. Показано, что расчётное давление отражённой от преграды волны вблизи сопла отличается от теоретически предсказанного для идеального газа, а при удалении от сопла различие между расчётным и теоретическим значениями уменьшается. Получены предельные размеры капель, для которых справедлива односкоростная гомогенная модель, т.е. эффект влияния скольжения фаз оказывается незначительным. В [44] рассмотрена осесимметричная задача об истечении газа из конца трубы в область повышенной плотности (двухфазная смесь). Моделирование истечения двухфазного теплоносителя без фазового перехода осуществляется с помощью двухскоростной модели, решаемой программным комплексом LCPFCT и проведена перекрёстная проверка с результатами расчёта, полученными в программе OpenFoam методом VOF для аппроксимации односкоростной модели двухфазной сжимаемой среды.

В статье К. Ando и др. [11] численно исследовано влияние распределённых размеров зародышей пузырьков на распространение ударной волны в пузырьковой жидкости. Был использован метод усреднения по ансамблю для вывода статистически усреднённых законов сохранения для полидисперсных пузырьковых течений. Расчёты одномерного удара показывают, что распределение равновесных размеров пузырьков приводит к кажущемуся демпфированию динамики усреднённого скачка из-за фазовых компенсаций в колебаниях пузырьков разного размера. Если распределение достаточно широкое, эффект компенсации фазы может преобладать над однопузырьковой динамической диссипацией, и усреднённый профиль скачка сглаживается.

В работе Н. Grandjean и др. [27] исследуется влияние кластеризации пузырьков на распространение ударных волн в пузырьковых жидкостях. Разработана континуальная модель для описания макроскопического отклика газожидкостной смеси с кластерной пузырьковой структурой с использованием метода двухступенчатой гомогенизации. Показано, что типичная длина ударного профиля связана с глобальным откликом кластеров, а не с однопузырьковой динамикой, как в однородных пузырьковых течениях. Точность предлагаемого

моделирования оценивается путём сравнения с осесимметричным моделированием, в котором кластеры задаются непосредственно, с заданными положениями и размерами, и с экспериментальными данными.

Среди прочих работ необходимо упомянуть серию исследований, выполненных Д.А. Губайдуллиным в соавторстве с Р.И. Нигматулиным и др. В работах [158] и [160] подробно изучена динамика поля давлений под действием акустического возмущения в одно- и двухфракционных смесях несущей жидкой фазы с парогазовыми включениями одного радиуса и полидисперсными газовыми пузырьками при наличии межфазного массообмена. В [158] обобщается единое дисперсионное соотношение для плоского, сферического и цилиндрического случая, которым задаётся динамика гармонических волн в двухфазных смесях жидкости с паровыми и газовыми пузырьками. Дополнительно подчёркивается немонотонность затухания амплитуды волны при изменении начального радиуса включений в парогазожидкостных средах с парогазовыми пузырьками с учётом фазовых переходов. В [160] для случая двухфракционной смеси воды с паровоздушными и гелиевыми пузырьками выявлено два локальных максимума в зависимости коэффициента затухания от частоты. Важность учитывания полидисперсности включений особо отмечена в статье [207], где исследуется распространение слабых волн в двухфракционных смесях жидкости с газовыми пузырьками различного радиуса и состава. Результаты иллюстрируют влияние сжимаемости несущей фазы в случае малого объёмного газосодержания порядка 10^{-4} . В работах [208], [152], [162], [124] авторы развивают математическую модель описания динамики волн умеренной интенсивности различной формы в газожидкостных системах с полидисперсными газовыми пузырьками разной формы и состава. В основу положена система дифференциальных уравнений динамики многофазной смеси, на её основе выписано дисперсионное соотношение. В итоге проводится верификация сформулированных тезисов данными экспериментов, включающая волновые частоты, близкие к миннаэрттовским для рассматриваемых пузырьков. В продолжение описываемого направления исследований были опубликованы статьи [163] и [164]. В них на основе интегродифференциальных соотношений построена модель динамики двухфазной смеси, позволившая получить в явном виде соотношение, определяющее равновесную скорость звука в парогазожидкостной смеси. Авторы подчёркивают, что указанная скорость снижается с ростом объёмной доли пара. Работа [161] по-

священа изучению динамики акустической волны в двух- и трехкомпонентных смесях жидкости с включениями газа и пара в присутствии межфазного массопереноса. Была выявлена значимая корреляция между показателями дисперсии и диссипации волнового возмущения и наличием нескольких фракций внутри пузырьков. Отмечен важный эффект: если заместить долю парогазовых включений в однородной смеси с фазовыми переходами на пузырьки газа иного сорта с соответствующими теплофизическими параметрами, может происходить как снижение, так и повышение коэффициента затухания в области низких частот. Далее необходимо упомянуть исследования проблемы отражения звуковой волны от неоднородной среды, включающей пузырьковую область [165] и проблемы отражении и прохождении волны по слоистой системе, имеющей в составе слой жидкости с пузырьками газа [166], [167]. В одной из последних работ [151] к рассмотрению принята система, содержащая слой многофракционной газожидкостной смеси. Более того, обнаружены вводные характеристики задачи, обеспечивающие экстремальные величины коэффициента отражения волны. К тому же исследуется воздействие пара внутри пузырьковых включений на распространение волны по парогазожидкостному слою. В статьях [168] и [159] теоретически исследовано распространение акустических волн в смеси жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой. Получены низкочастотные асимптотики фазовой скорости и коэффициента затухания. Установлена и проиллюстрирована зависимость равновесной скорости звука от частоты возмущений и размера покрытых пузырьков. Завершим обсуждение этого объёмного цикла кратким описанием последней работы [169], посвящённой проблеме распределения тонкого слоя жидкости по внутренней поверхности пузырька. Ключевым моментом работы является запись аналитической формулы равновесной скорости звука, дающей представление о её функциональной зависимости от вводных параметров частоты акустической волны, толщины жидкого и вязкоупругого слоев.

В работе Т.Ж. Ahmad и др. [9] исследуется анализ производительности акустической связи через многофазный поток в трубопроводе. Исследовано влияние различных параметров течения и связи (режимы многофазного течения, частота передачи и методы модуляции) на передачу акустических данных. Трубопровод действует как акустический волновод, в котором частотный состав и спектр передаваемого акустического сигнала влияет на битрейт и дальность

связи. Многофазный канал действует как частотно-зависимый канал с замираниями, где поверхность раздела вода-воздух действует как отражатель и рассеивает входящую акустическую волну. Также замечено, что многофазный канал имеет дисперсионную и нелинейную природу, где принимаемый сигнал может иметь временное расширение и частотный сдвиг по сравнению с формой исходного передаваемого сигнала.

Отметим две работы D. Fuster, в которых проведены теоретические исследования по определению акустических свойств пузырьковой жидкости. В [21] исследуется влияние взаимодействия пузырьков на распространение линейных акустических волн в пузырьковых жидкостях. Численное моделирование показывает, что прямое взаимодействие пузырьков оказывает заметное влияние на частотах выше собственной резонансной частоты пузырька среднего размера. Предложена модификация классической теории распространения волн. Полученные результаты хорошо согласуются с ранее опубликованными экспериментальными данными, где классическая линейная теория систематически завышает эффективное затухание и фазовую скорость. В статье [22] исследована важность эффектов массопереноса в эффективных акустических свойствах разбавленных пузырьковых жидкостей. Показано, что поток испарения важен для систем, близких к условиям насыщения и на низких частотах. Получены упрощённые выражения для различных предельных ситуаций, позволяющие лучше понять справедливость общих допущений, обычно применяемых в моделях динамики пузырьков.

Научный коллектив С.М. Фролова из отдела горения и взрыва Института химической физики им. Н.Н. Семенова РАН представил серию экспериментальных и численных работ, условно подразделяемых на публикации с инертными [69], [68], [70] и реагентными газовыми включениями [66], [240], [67]. При обсуждении задачи распространения волны в газожидкостной среде с инертными газовыми пузырьками в основу моделирования положена система двумерных уравнений двухфазного течения с учётом вязкости и сжимаемости. Был исследован процесс прохождения ударной волны через границы раздела газа и пузырьковой водовоздушной либо чистой жидкости. Анализ параметров продемонстрировал возникновение важного эффекта: при прохождении ударной волны в пузырьковую жидкость её импульс в ней может значительно превышать соответствующий в чистой жидкости в аналогичных условиях [69], [70].

При теоретическом и экспериментальном моделировании начальное объёмное газосодержание в пузырьковой жидкости варьировалось в диапазоне 0,5% – 19%, радиус газовых включений 0.001–0.00125 м, скорость ударной волны изменялась в пределах 40 – 800 м/с [68]. В дальнейших работах, основываясь на апробированных уравнениях, авторы продемонстрировали возможность возникновения стационарного сверхзвукового самоподдерживающегося фронта реакции с быстрым и полным выгоранием горючего агента в переднем фронте ударной волны [66]. Подчёркивается применимость построенной модели к построению ударно-волнового решения осциллирующей структуры и сверхзвукового солитона самоподдерживающейся детонации [240]. Более того, установлено трех-четырёхкратное превышение объёмного газосодержания за первым фронтом детонационной волны относительно этого показателя за фронтом волны в пузырьковой среде с инертными включениями [67].

В обзорах А.Ю. Вараксина [99] и [100] создана общая картина расчётно-теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению различных видов двухфазных потоков, рассмотрены проблемы и особенности их исследования. Проанализированы основные особенности двухфазных течений и применимые расчётные методы. Описаны и проанализированы результаты последних исследований двухфазных потоков с твёрдыми частицами, каплями и пузырями, а также описаны возможности их использования для решения широкого круга прикладных задач.

В работе S. Mahmood и H.-Y. Kwak [45] получен явный вид волнового уравнения в пузырьковой жидкой среде. С использованием линеаризованного волнового уравнения и уравнения Келлера–Миксиса для движения стенки пузырька получено дисперсионное уравнение для линейного распространения волны давления в пузырьковой жидкости. Установлено, что затухание волн в пузырьковой жидкости происходит за счёт вязкости и теплопередачи от/к пузырьку. В частности, в области более низких частот тепловая диффузия оказывает значительное влияние на зависящие от частоты коэффициенты затухания. Фазовая скорость и коэффициент затухания, полученные из дисперсионного соотношения, хорошо согласуются с наблюдаемыми значениями во всех диапазонах звуковых частот от 1 кГц до 1 МГц. В статье [52] рассматривалось распространение ударных волн в пузырьковых смесях. Установлено, что теплообмен между пузырьками газа и жидкостью и взаимодействие между пузырьками

оказались важными факторами, влияющими на релаксационные колебания во фронте ударной волны.

В статье М.В. Сильникова [230] представлены пути и методы использования газонаполненных релаксационных систем для обеспечения безопасного применения импульсных высокоэнергетических технологий. Рассмотрены акустические характеристики релаксационных систем, ожидаемые пределы изменения перепада давления при отражении ударных волн на жёсткой стенке в двухфазных средах. Приведена актуальность описания закономерностей эволюции ударноволновых процессов в газах, жидкостях и газожидкостных системах с единых позиций и выявления критериев подобия взаимодействия ударных волн с биологическими объектами и конструкциями.

В [65] исследовано влияние распределения пузырьков по размерам на распространение акустических волн в разбавленных полидисперсных пузырьковых жидкостях. Выявлено, что распределение пузырьков по размерам влияет как на скорость волны, так и на ее затухание. В частности, на минимальную скорость волны вместе с соответствующей частотой может существенно влиять распределение пузырьков по размерам. Кроме того, максимальное затухание волны на частотной характеристике также чувствительно к изменениям распределения пузырьков по размерам.

Профессором И.К. Гималтдиновым с учениками проведены исследования по фокусировке волн давления в пузырьковых областях различной конфигурации. В диссертации [138] представлены результаты по усилению и гашению волны давления при прохождении пузырьковой области конечных размеров, а также при прохождении через «пузырьковый шнур». В статье [139] исследуется динамика волн давления в цилиндрическом канале, содержащем слоистую пузырьковую жидкость с различным распределением включений в поперечном сечении. Негомогенная пузырьковая структура среды формирует поперечные течения и происходит более эффективное ослабление амплитуды волны, чем при равномерном распределении включений. Статья [142] посвящена моделированию процесса движения волны в плоском канале для случая проходящей под углом к горизонту границы раздела водной и пузырьковой сред. В результате обнаружено, что отражение волны от межфазной границы между пузырьковой и «чистой» жидкостью происходит тем же образом, что и от твёрдой стенки, и это вызывает явление интерференции волн. Более того, можно утверждать,

что рост начального объёмного газосодержания и сокращение диаметра включений приводят к возрастанию амплитуды волны на твёрдой стенке. В [143] дан анализ фокусировки звуковых волн в цилиндрическом канале, заполненном чистой жидкостью и пузырьковой средой с границей раздела между ними в виде сферической поверхности, в результате их преломления на этой границе. Определены условия, при которых фокусное расстояние акустической линзы принимает максимальное и минимальное значения. В работе [141] представлены результаты исследований взаимодействия ступенчатой волны давления с твёрдой стенкой, защищённой слоем пузырьковой жидкости. В связи с конечностью размеров пузырьковой завесы учитываются двумерные эффекты.

В [50] рассмотрено распространение акустических волн через тонкий экран, образованный периодическим расположением пузырьков воздуха в воде. Расчёты позволили выделить два важных эффекта. Во-первых, пузырёк внутри массива имеет гораздо больший коэффициент затухания излучения, чем изолированный пузырёк. Во-вторых, он воспринимает давление, которое отличается от акустического давления источника из-за взаимодействия пузырьков. Это приводит к поправке на массу, выведенной из функции Грина для задачи Лапласа, которая объясняет расположение пузырьков.

В работе P.R. Gordoa и A. Pickering рассмотрена задача о распространении акустических волн высокой интенсивности в пузырьковом слое, состоящем из сферических пузырьков одинакового размера с равномерным распределением [26]. Математическая модель представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений в частных производных для акустического давления и мгновенного радиуса пузырьков, состоящую из волнового уравнения, связанного с уравнением Рэлея–Плессета. Проведён аналитический анализ, основанный на изучении симметрии Ли для этой системы уравнений в случае бегущей волны. Рассмотрены отображения полученных редукций на уравнения, определяющие эллиптические функции, и их частные случаи, например, разрешимые в терминах гиперболических функций. Построены точные решения рассматриваемой системы уравнений в частных производных. Это пионерская работа по аналитическому исследованию данной математической модели.

В последние годы вышли работы Т. Kanagawa с коллегами, в которых теоретически исследовано слабонелинейное распространение плоских прогрессивных волн давления в изначально покоящейся жидкости, однородно содержащей

множество сферических микропузырьков, особенно с акцентом на начальную малую полидисперсность радиуса пузырька. В работе [64] с использованием метода множественных масштабов выведены два типа уравнений Кортевега–де Вриза–Бюргерса с поправочным членом, обусловленным силой сопротивления. Установлено, что движение пузырьков усиливает эффекты нелинейности, а сила сопротивления, действующая на пузырьки, способствует нелинейному и диссипативному эффектам. Статья [32] является продолжением [64], где методом множественных масштабов получено нелинейное уравнение типа Шредингера. Установлено, что диссипация более существенна, чем вязкость жидкости, акустическое излучение и теплопроводность. В [33] выведено нелинейное уравнение Шредингера как эффективное уравнение, в котором три типа коэффициентов диссипации (вязкость жидкости, сжимаемость жидкости и теплопроводность) объединены в линейную комбинацию. Потери из-за теплопроводности более чем в четыре раза больше, чем из-за других факторов. Установлено, что эффект диссипации в коротковолновом случае меньше, чем в длинноволновом. Статья [31] продолжает предыдущие работы, учитывая полидисперсность. В работе [28] рассмотрены вопросы медицины. Уравнение Хохлова–Заболоцкой–Кузнецова (ХЗК), которое широко использовалось в качестве упрощённой модели нелинейного распространения сфокусированного ультразвука в чистой жидкости, распространено на жидкость, содержащую множество сферических микропузырьков, путём использования метода множественных масштабов для усреднения по объёму. В результате для двумерного и трёхмерного случаев получены уравнения ХЗК, составленные из линейной комбинации нелинейных, диссипационных, дисперсионных и фокусирующих членов. В [13] исследовано слабонелинейное распространение плоских волн давления в текущей сжимаемой воде, содержащей множество сферических микропузырьков. Особое внимание уделено теплопроводности внутри пузырька и силе сопротивления, действующей на поступательные пузырьки. Из метода множественных масштабов выводится уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса и появляются два типа членов диссипации: член с частной производной второго порядка из-за сжимаемости жидкости и член без дифференцирования из-за силы сопротивления и теплопроводности. Численно обнаружено, что эффект диссипации из-за теплопроводности является самым большим, за ним следует эффект акустического излучения и силы сопротивления.

1.2 Обзор работ, посвященных экспериментальным исследованиям акустических свойств пузырьковых жидкостей

Эксперимент – это метод научного познания, предполагающий рассчитанное воздействие на объект в контролируемых условиях для наблюдения его поведения и реакции, сопровождаемое достаточно точными и достоверными измерениями заранее выделенных параметров. Проведение эксперимента предполагает возможность его устойчивой репликации *setiris paribus*. Само собой разумеется, что эксперимент должен обеспечивать приобретение новых данных об объекте исследования, и, кроме того, достоверное описание особенностей его динамики в неких эксплуатационных условиях, соответствующих таковым в природе, технике, общественной жизни и т.д. С помощью эксперимента исследователи фиксируют характеристики, дальнейшая обработка которых даёт возможность выстроить адекватную математическую модель наблюдаемого объекта, достаточно точно объясняющую его свойства и позволяющую обнаружить закономерности его динамики в изменяющихся условиях, т.е. решить задачу идентификации. Экспериментальное исследование при надлежащем его проведении имеет высокую степень доказательности.

Обратимся к комплексу работ, посвященных моделированию динамики волн различной интенсивности в двухфазных смесях К сожалению, спектр экспериментальных работ по наблюдению за волновой динамикой полидисперсных смесей ограничен. В первую очередь, обратимся к написанной в 1930-ом году монографии J. Ackeret [1], где была предпринята первопробная попытка описать газожидкостную смесь с малой объёмной долей пузырьков в терминах механики сплошной среды. Им было экспериментально исследовано образование полостей (кавитации) в соплах, на крыльях с различными профилями и на сфере.

Ф.Е. Фох с коллегами экспериментально измерял фазовую скорость и поглощение непрерывного цуга звуковых волн в воде, содержащей пузырьки воздуха в зависимости от частоты от 10 кГц/с до 1 мГц/с [20]. Данные достаточно хорошо согласуются с ранее предложенными теориями других авторов. Для исследованных пузырьков, составляющих 0.02 % объёма, фазовая скорость варьировалась от 500 м/с до 2500 м/с, а пиковое поглощение превышало 0.3 дБ/м.

В пионерской работе I.J. Campbell и A.S. Pitcher [15] рассматривалось распространение ударной волны в вертикальной трубе, заполненной пузырьками жидкости. Результаты показали разумное согласие с соотношениями стационарной ударной волны, полученными из усреднённых по смеси уравнений. Широко известная особенность структуры фронта акустической или ударной волны, а именно, его осцилляционная структура, не была обнаружена в первых исследованиях по причине ограниченных возможностей оборудования. Анализ закономерностей нелинейной динамики волн в пузырьковой среде позволил сформулировать гипотезу о вероятном существовании осцилляций. В последующих экспериментах L. Noordzij и L. van Wijngaarden [49] использовалось аналогичное устройство с тщательным контролем размеров пузырьков и были выявлены колебательные ударные структуры.

Научный коллектив Института химической физики Академии наук СССР (Б. Е. Гельфанд, С. А. Губин, Е. И. Тимофеев и др.) реализовал цикл экспериментальных исследований динамики сильных и слабых ударных волн в газожидкостной пузырьковой среде [132]. Были изучены процессы прохождения волн в газожидкостных системах с азотом и углекислым газом, отмечено усиление волны при отражении от твёрдой стенки, зависимость демпфирующих свойств среды от начального объёмного газосодержания, ускорение проходящей волны в средах с большим невозмущённым давлением. В работе использовались пузырьковые жидкости с объёмным начальным газосодержанием $\alpha_{g0} = 2, 4, 8$ и 18% при невозмущённом давлении $p_0 = 10^5$ Па. Выписано соотношение для числа Маха и получено согласование данного выражения с экспериментальными данными [130]. В [133] для измерения скорости распространения малых возмущений во взвеси пузырьков газа в жидкости с малой концентрацией газа предложена методика определения скорости волны разрежения за отражённой волной давления. Анализ полученных результатов показал, что при давлении до 47 атм и концентрации газа до 0,1 % можно пользоваться формулой для расчёта значения низкочастотных звуковых возмущений. В [125] описана простая система подавления опасных колебаний давления в массе горючего за счёт принудительного подвода в объем бака негорючих газовых пузырьков. Отмеченное при этом снижение амплитуды и характера колебаний давления соответствовало измерениям, описанным в [125] и [238]. В [131] представлены результаты исследований по пристеночным и отстранённым от стенки пузырьковым экра-

нам при подводном взрыве. В [135] рассмотрена передача импульса ударной волны жидкости, содержащей пузырьки растворимого в ней газа. Опыты проводили на примере системы «вода – углекислый газ». Было установлено, что одной из причин усиления волн давления в системе с пузырьками растворяющегося газа является полное схлопывание пузырьков за ударным фронтом. В [136] установлено уменьшение амплитуды пульсаций с ростом начального давления, возрастание крутизны переднего ударного фронта по длине участка измерения. При использовании пузырьков водорода и гелия подчёркивается более медленный рост давления на фронте волны давления и значительное замедление колебаний. Показано, что формирование отражённой от днища трубы ударной волны носит иной характер, чем предсказывает теория. В работе [134] проведены исследования ударно-волнового нагружения твёрдой преграды, закрытой демпфирующим слоем пузырьков. Проанализированы изменения параметров отражённой волны при различных значениях начального давления, объёмного содержания газа в жидкости и интенсивности волны. В [127] при моделировании двухфазной газожидкостной среды пузырьковой структуры как изотермического газа с соответствующими поправками на сжимаемость жидкости и газа решена задача об изменении параметров ударных волн в жидкости с произвольным распределением растворимого газа и задача о затухании коротко-волнового ударного импульса. В [239] и [92] проведены исследования возможности влияния эффектов конденсации пузырьков на параметры отражённых волн на примере паровых пузырьков. С этой целью изучено распространение и отражение ударных волн на жёсткой стенке в кипящей воде на установке. Выполненное экспериментальное и теоретическое исследований показало, что в слабых волнах давления с $1 < p_1/p_0 < 3$ следует ожидать и действительно наблюдается особо значительное повышение давления при отражении от жёсткой стенки, если в системе имеется достаточно большая объёмная доля паровых пузырьков. В работе [129] было показано, что наибольшей способностью к изменению параметров отражённых волн обладают растворение или конденсация газа в жидкости при умеренно сильных начальных возмущениях с перепадами давления в отражённой волне к начальному давлению менее 50 раз по фронту. Был сделан вывод, что основным методом уменьшения влияния растворимости газа может быть простое повышение среднего давления в установке. В [128] показана большая эффективность нормальных экранов для изменения параметров ударных

волн, чем обратных экранов. Это объясняется значительным уменьшением скорости звука в газожидкостной среде относительно жидкости без неоднородных включений. В [238] показано, что пузырьковый экран протяжённостью до 1 м при средней концентрации газа около 3 % является эффективным демпфером ударных волн, образованных в воде подрывом заряда ВВ до 300 г.

В работе M.J. Tan и S.G. Bankoff [56] экспериментально исследованы относительно сильные ударные волны, распространяющиеся сквозь смесь водного раствора глицерина и мелких пузырьков гелия или аргона в вертикально расположенной ударной трубе длиной 2.7 м. Секция высокого давления имела длину 0.68 м и внутренний диаметр 0.0493 м. Были уточнены результаты, касающиеся скорости и амплитуды удара. Эксперименты показали хорошее согласие с изотермической теорией.

В работе A.E. Veylich и A. Gülhan [14] рассматривались нестационарные волновые явления в двухфазных смесях, где в качестве несущей фазы брался водный раствор глицерина, а в качестве дисперсной – три вида различных газов. Генерировались пузырьки двух разных радиусов $R_0 = 1,15$ и $1,6$ мм, с разбросом по размеру менее 5 %. Объёмное содержание варьировалось в диапазоне от 0,2 до 2 %. Скорости и профили измерялись для ударных волн и волновых пакетов. Исследование волновой структуры позволило подойти к фундаментальному вопросу о том, как физика на уровне микроструктуры влияет на поведение на макроуровне. Для стационарных случаев ударных волн и солитонов получены решения для малых объёмных фракций и умеренных амплитуд, которые сравниваются с экспериментальными результатами.

Остановимся на экспериментальных исследованиях волнового воздействия на пенные структуры З.М. Оренбаха и И.Р. Шрейбера. В работах [215] и [217] были проведены экспериментальные исследования распространения возмущений давления в пене с объёмным газосодержанием более 90%. Определены коэффициенты затухания для рассмотренных сред. В статье [216] представлены результаты экспериментов в ударной трубе, которые показали, что колоколообразные возмущения давления длительностью ~ 2 мс в водогелиевой пене затухают слабее, чем в водовоздушной с теми же параметрами.

M. Kameda с коллегами в [29] представили ряд экспериментов на ударной трубе, в которой используется смесь пузырьков силиконового масла и азота с начальным радиусом пузырьков около 0.0006 м и объёмной долей газа от 0.15 до

0.4 %. Внутренний диаметр ударной трубы был выбран равным 0.018 м и 0.052 м для исследования многомерных эффектов на волновые явления. Показано, что в достаточно однородной пузырьковой смеси экспериментальные результаты хорошо согласуются с численными расчётами с использованием равномерного пространственного распределения пузырьков [47]. Также эксперименты показали, что радиальное движение пузырьков следует оценивать, решая уравнение, в котором учитывается сжимаемость жидкости. В [30] представлено экспериментальное и численное исследование нестационарных ударно-волновых явлений в жидкости, содержащей пузырьки неконденсируемого газа. Определённые в эксперименте переходные профили давления для восходящего пузырькового течения количественно хорошо согласуются с полученными численным расчётом с использованием равномерного пространственного распределения пузырьков. Отмечено, что для корректного моделирования радиального движения пузырьков не следует пренебрегать сжимаемостью жидкой фазы.

В.Е. Донцов предпринял серию экспериментальных исследований влияния ударной волны на газожидкостную смесь с пузырьками газа. В [175] и [173] описаны структурные особенности волн умеренной интенсивности в жидкости с газовыми включениями, характеристики их распространения в среде и колебаний пузырьков газа в волнах. В [174] в экспериментах проведено сравнение сред с пузырьками, кратно отличающимися в радиусе (в 2 – 3 раза), получены уединённые волны с двумя и тремя осцилляциями. Экспериментальное изучение эволюции уединённых волн умеренной интенсивности при встречном взаимодействии в жидкости с пузырьками газа проведено в [202]. Показано, что в таком случае энергия не сообщается одной волной другой, и каждая из волн сохраняет свои характеристики по завершении взаимодействия. Продемонстрированы солитонные свойства уединённых умеренно интенсивных волн, проявляемые при интерференции. Работа [170] посвящена исследованию поведения пузырьков легкорастворимого газа за фронтом волны в пузырьковой среде, влияния их растворения на структуру волны и интенсивность её отражения от преграды. Статьи [176] и [200] дают сравнительное представление об ударно-волновой динамике в жидкостях с различными по химическому составу газовыми включениями (фреон и гелий соответственно). С учётом всех факторов, утверждается, что добавление незначительной объёмной доли пузырьков гелия, обладающих высокой теплопроводностью, в газожидкостную смесь с пузырька-

ми фреона (имеющего низкую теплопроводность) приводит к скачкообразному росту демпфирующих свойств среды [176]. В эксперименте на вертикальной ударной трубе [200] изучена динамика и гашение волн давления в пузырьковой жидкости с неоднородным слоистым распределением пузырьков в сечении. В начальном состоянии пузырьковый слой создавался либо в форме столбы в центре трубы, либо в виде кольца в пристеночной области. С учётом этих обстоятельств было обнаружено более интенсивное ослабление характеристик волны давления в связи с неоднородностью распределения включений в трубе. Завершающая группа статей исследует вертикальное падение плоской ударной волны на сферический газожидкостный кластер, представленный поролинным шаром, насыщенным газожидкостной смесью [177], [201], [171], [172]. Среди важнейших результатов: выявление уединённой ударной волны, порождаемой пузырьковой структурой [171]; резкий рост осцилляционных колебаний во фронте волны ввиду возникновения резонанса с колебаниями пузырьков в кластере [172].

В продолжение вышеописанных исследований отметим экспериментальные работы профессоров Н.А. Прибатурина и В.В. Кузнецова совместно с академиком В.Е. Накоряковым с коллегами. В работе [203] экспериментально исследована эволюция волн давления различной интенсивности и длительности в смеси жидкости с пузырьками пара, находящейся на линии насыщения. Показано, что динамика волны зависит как от релаксационного процесса, обусловленного нестационарным тепломассообменом на границе пузырёк-жидкость, так и от динамических эффектов, связанных с пульсациями паровых пузырьков. В [199] рассматриваются особенности распространения ударных волн в жидкости с пузырьками пара. Экспериментально показано, что падающая ударная волна в такой среде может трансформироваться в мощный уединённый импульс давления, существенно превосходящий по своей амплитуде начальную волну. Также стоит отметить работу [225], в которой исследовано влияние ударной волны на абсорбцию газа жидкостью в пузырьковых средах, различающихся степенью растворимости газа. Показано, что ударная волна, воздействующая на газожидкостную среду, может существенно увеличить скорость массообмена между газом и жидкостью. В статье [190] в жидкости с пузырьками газа экспериментально исследовано взаимодействие двух солитонов, движущихся навстречу друг другу или один за другим. Показано, что при столкновении соли-

тоны взаимодействуют как линейные волны, а в случае обгона одного солитона другим наблюдаются различные виды их нелинейного взаимодействия.

P.S. Wilson с соавторами в [63] представили измерения по определению акустических свойств облака пузырьков. Измерения показали, что на резонансной частоте отдельного пузырька распространение звука в среде сильно затухает и рассеивается. Существующая теория, объясняющая такое поведение, считается адекватной вдали от резонанса. Однако из-за чрезмерного затухания вблизи резонанса существует мало экспериментальных данных для сравнения с предсказаниями модели. Специально для изучения этого режима была разработана импедансная трубка, позволившая фиксировать показания в моменте, а так же рассчитывать среднее по времени. Было замечено, что фазовая скорость и затухание в резонансе чувствительны к изменениям параметров облака пузырьков.

Научный коллектив, возглавляемый академиком РАН В.А. Акуличевым, на протяжении пятнадцати лет экспериментально исследовал акустические свойства морских вод. Среди основных аспектов кластера экспериментов – обнаружение закономерностей возникновения, эволюции и взаимного влияния гидроакустических и температурных полей в мелкой воде. В статье [77] рабочая зона исследования на шельфе Японского моря, в [84] исследуются Тихий, Индийский и Атлантический океан. В работе [77] авторы сопоставляют глубину проникновения акустической волны в разных слоях исследуемого волновода с температурой на этих слоях. Были предложены и развиты методы акустического мониторинга крупномасштабных неоднородностей морской среды, таких как фронтальные разделы, течения, мезомасштабные вихри и др [84]. Также в статье представлены результаты по исследованию с применением нелинейных акустических методов, проведённых на специально разработанном уникальном оборудовании [93]. В работе [83] представлены данные, позволяющие по коэффициентам рассеяния звука оценить важную характеристику биопродуктивности водных масс – массовую концентрацию включений и их суммарное количество в интервале размеров. Методом рассеяния звука выявлены особенности структуры приповерхностного слоя моря с распределёнными воздушными пузырьками при различной скорости ветра и показано, что объёмная концентрация газа в пузырьках на шельфе (аэрация воды до дна) во время шторма возрастает на 1–2 порядка. В [78] и [79] изучается возникновение нелинейных

свойств звуковой волны, её диссипации и демпфирования в содержащем газовые включения слое у океанической поверхности. Ключевой вывод работ – определяющая роль подповерхностных «пузырьковых облаков» в увеличении диссипации звука и характеристик нелинейности акустических свойств воды. В работе [81] показано, что влияние приповерхностного слоя пузырьков на структуру акустического поля в подводном звуковом канале и характер пространственного спада при распространении звука может быть значительным при достаточно типичных концентрациях пузырьков в приповерхностных слоях моря. В статье [80] представлены результаты теоретических оценок воздействия пузырьковой пелены на распространение звука в линейном приповерхностном подводном звуковом канале и в изоскоростном подводном звуковом канале. Показано, что влияние слоя пузырьков заключается в дополнительном спаде поля на умеренных дистанциях, вызванного затуханием части звуковой энергии, распространяющейся в пузырьковом слое. В [82] обсуждено распространение звука в море при наличии приповерхностного слоя пузырьков с привлечением последних экспериментальных результатов для функции распределения пузырьков по размерам, полученной при различной скорости ветра и различных состояниях поверхности моря. Показано, что наличие диссипации в приповерхностном слое пузырьков с увеличением объёмной концентрации больше 10^{-6} способно приводить к существенной перестройке структуры акустического поля. В [94] обсуждаются возможности использования метода нестационарного и нелинейного рассеяния звука для получения информации о структуре и динамике подводных газовых факелов, возникающих в местах выхода газа из морского дна. В результате установлено, что методы анализа нелинейного нестационарного рассеяния на встречных пучках дадут возможность дистанционно исследовать спектр излучения пузырьков в газовых факелах и оценивать их объёмное содержание с высокой точностью.

Для полноты картины стоит обсудить экспериментальные работы новосибирского экспериментатора А.И. Сычева. В работе [234] экспериментально изучено поведение ударной волны на границе чистой и пузырьковой жидкости, а также пузырьковых жидкостей с различными характеристиками. Проанализированы структуры падающей, отражённой и проходящей через границу раздела волн, измерены скорости их движения, давление за фронтом. В статье [235] проведено измерение проводимости пузырьковых сред в ударных и детонационных

волнах. Установлено, что изменение проводимости пузырьковых сред, содержащих проводящий жидкий компонент, обусловлено сжатием среды в ударных и детонационных волнах (при этом имеет место корреляция профилей давления волны и электропроводности и плотности среды). В работе [236] получены данные о структуре, скорости распространения и давлении падающих и отражённых от твёрдой границы ударных волн. Проведено сопоставление экспериментальных данных и результатов расчёта параметров ударных волн. В [237] исследованы процессы взаимодействия ударных волн с полидисперсными и газокапельными средами «жидкость–пузырьки газа–капли жидкости». Получены данные о динамике и свойствах таких процессов.

Большое количество исследований провёл V. Leroу со своими коллегами по определению акустических свойств пузырьковых жидкостей. Выделим некоторые из них: в работе [41] приведены измерения фазовой скорости и затухания звука в концентрированных образцах пузырьковых гелей. В качестве матричного материала для получения стабильного распределения пузырьков использовался гель для волос. Ультразвуковые измерения проводились в широком диапазоне частот, куда вошли и резонансные показатели для пузырьков. Важно подчеркнуть превосходное соответствие прогнозу Фолди [19], в особенности в однокомпонентных образцах при резонансной частоте волны и малом объёмном газосодержании до 1%. За пределами этой концентрации наблюдались эффекты многократного рассеяния высокого порядка. Анализируя экспериментальные данные, автор приходит к выводу о перспективности применения ультразвуковых технологий в изучении параметров полидисперсности слабых гелей и жидкостей. В [43] исследовано влияние связи между резонансной частотой пузырьков и коэффициентом пропускания модельной системы изотропных пузырьков. Экспериментально исследуемый образец содержит двумерный слой пузырьков с одинаковыми параметрами, созданный нагнетанием мелких пузырьков (радиусом 100 мкм) в несущую среду, которая представляет собой гелевый полимер с пределом текучести. Основным результатом работы является демонстрация эффекта значительного рассеяния ультразвука при наличии пузырьковых включений, и, более того, выраженное падение проходящей через пузырьковый слой энергии волны на определённой частоте. Подчёркивается, что вывод верен и в слоях с небольшим начальным газосодержанием (доля площади $n\pi a^2$, занимающая порядка 10–20%, где n – количество пузырьков на

единицу площади). Заслуживает внимания то, что упомянутая частота максимального рассеяния ультразвуковой волны не совпала с резонансной частотой пузырька данного радиуса, но в значительной мере определялась значением концентрации. Этот сдвиг частоты указывает на сильную связь между пузырьками. Работа [42] являлась продолжением предыдущей статьи. Эксперименты проводились с целью измерения эффективного среднего волнового числа акустических волн в образце, состоящем из пузырьков, встроенных в упругую матрицу, в диапазоне частот, включающем резонансную частоту пузырьков. Был предложен самосогласованный подход для учёта «полидисперсной корреляции» и показано, что данная модель лучше описывает экспериментальные результаты. В статье [39] проведена модельная симуляция пузырькового метаэкрана, который представляет собой слой толщиной в один пузырёк в мягком твёрдом теле, рассматриваемый как акустический резонатор. Физические свойства метаэкрана успешно описываются достаточно простым аналитическим уравнением. Результаты исследования демонстрируют, что изменение основных характеристик метаэкрана позволяет обеспечить значительное поглощение звука в широком диапазоне частот, и это доказывается как экспериментом, так и численным моделированием на основе метода конечных элементов. Таким образом, пузырьковые метаэкраны можно использовать в качестве ультратонких покрытий для превращения акустических отражателей в идеальные поглотители. В [40] предлагается расширение модели из [42] за счёт включения дипольного отклика пузырьков. Сравнение с численными и экспериментальными результатами показывает, что новое выражение даёт хорошую оценку концентрации, при которой монополярная модель больше не действует, но не может правильно предсказать передачу.

В своей PhD работе [10] К. Ando сформулированы физическая и численная модели сплошных пузырьковых течений, которые позволяют эффективно вычислять среднюю динамику смеси. Сначала выводятся осреднённые по ансамблю законы сохранения для полидисперсных пузырьковых течений. Затем разрабатывается высокоточный метод конечных объёмов для расчёта потока, уделяя особое внимание вопросам дисперсии и жёсткости волн. Далее выполнены расчёты по распространению одномерного скачка уплотнения через пузырьковые жидкости. Численные эксперименты показали, что распределение пузырьков по размерам оказывает сильное влияние на усреднённую структуру

ударной волны. Если распределение достаточно широкое, кажущееся затухание из-за фазовых компенсаций может преобладать над динамической диссипацией одиночного пузырька (из-за тепловых, вязких эффектов и эффектов сжимаемости), и усреднённая ударная динамика становится нечувствительной к динамике отдельного пузырька.

В статье К. Ando и др. [12] рассмотрено распространение ударной волны через пузырьковую жидкость, находящуюся в деформируемой трубке. Проведены эксперименты, в которых свободно падающий стальной снаряд ударяется о верхнюю часть воздушно-водяной смеси в поликарбонатной трубе. В ходе эксперимента измеряются волны напряжений в материале трубы и давление на стенку трубы. Исследования показали, что линейная теория не способна правильно предсказать скорости распространения волн конечной амплитуды в трубе, заполненной смесью. Установлено, что ударная теория более точно оценивает измеренные скорости волн. Это указывает на необходимость учёта нелинейности газовой фазы для точного прогнозирования скоростей распространения волн конечной амплитуды в деформируемой трубе, заполненной пузырьковой жидкостью.

К.М. Lee с сотрудниками исследовал подавление шума с помощью пузырьковых областей конечных размеров с помощью метода акустического резонатора. В [37] в качестве пузырей использовались привязанные латексные шары радиусом около 0.05 м. Фазовые скорости определялись по резонансам волновода длиной около 1.8 м, заполненного водой и кластерами. Результаты показывают, что для подавления низкочастотного подводного шума можно использовать большие привязанные капсулированные пузыри. В статье [38] была сделана попытка точного предсказания затухания через набор больших (радиусом порядка 0.1 м) привязанных инкапсулированных пузырьков, используемых в подводных системах шумоподавления. Измерения затухания звука под водой проводились в ходе серии экспериментов на озере, где низкочастотный компактный электромеханический источник звука был окружён различными массивами инкапсулированных пузырьков с различными размерами отдельных пузырьков и фракциями пустот. Измерения сравнивали с существующей ранее прогностической моделью дисперсионного уравнения для линейного распространения в жидкости, содержащей инкапсулированные пузырьки. Наблюдается хорошее количественное соответствие между наблюдениями и моделью.

В исследованиях С. Vanhillea и С. Campos-Pozuelo особое внимание уделялось способности пузырьковых экранов проводить ультразвуковые волны в определённых направлениях, получению некоего акустического диода. В [58] предлагается модель акустического переключателя. Теоретически демонстрируется, что устройство работает: входной сигнал полностью восстанавливается на выходе, когда переключатель включен, тогда как выходной сигнал обнуляется, когда переключатель выключен. Включение или выключение переключателя зависит от вторичного акустического поля, способного манипулировать основным акустическим полем. Модель основана на эффекте затухания множества колеблющихся пузырьков основной бегущей волны в жидкости, а также на способности вторичной акустической волны перемещать пузырьки. В [59] рассматривается нелинейное распространение ультразвуковых импульсов в однородной среде с пузырьковым слоем. Исследование направлено на два приложения: фильтрующие эффекты слоя и нелинейное определение характеристик смесей «жидкость–газ». Исследуются фильтрующие эффекты (экранный эффект) слоя для некоторых частотных диапазонов, присутствующих в исходных ультразвуковых импульсах, в линейном и нелинейном режимах, т.е. при низкой и высокой амплитуде давления. В работе [60] заложена теоретическая основа для двух новых устройств. Предложен акустический диод, блокирующий распространение ультразвуковых волн в одном направлении и пропускающий их в другом направлении. Система основана на двух смежных слоях, состоящих из двух пузырьковых жидкостей с включениями разного размера. Этот акустический диод представляет собой альтернативу устройствам, ранее предложенным другими группами и основанным на периодических структурах (звуковые кристаллы, металлические пластины). Теоретический дизайн обеих структур основан на экспериментальных наблюдениях и численном моделировании.

D.R. Rajaona с коллегами представили экспериментальные работы по изучению распространения звука через пузырьковую жидкость (воду), выполненные на большом лабораторном резервуаре [18]. Предложена оригинальная методика генерации пузырьков как акустическими, так и оптическими методами. В экспериментах пузырьки воздуха вводятся с помощью промывателя высокого давления в большой резервуар, заполненный водой, через который распространяются звуковые сигналы. Характерные частоты и размеры пузырьков определяются из измерений затухания звука и фазовой скорости звука. Эти измере-

ния дополняются одновременным сбором акустических сигналов и оптических изображений. Сравнительное исследование проводится между распределениями размеров пузырьков, полученными оптическими методами, и распределениями, полученными на основе акустических измерений.

И.И. Кочетковым и А.В. Пинаевым проведены лабораторные исследования по распространению ударных и детонационных волн в пузырьковой жидкости. В статье [186] представлены измерения параметров ударных волн при взрыве проволочек в газе, жидкости, пузырьковых инертных и реагирующих средах в вертикальной ударной трубе. Обсуждены проблемы измерения скорости ударных волн в жидкости и пузырьковой инертной среде, проведено сравнение экспериментальных данных с теоретическими расчётами. В пузырьковой химически активной среде исследовано возбуждение самоподдерживающейся детонации короткой ударной волной от взрыва проволочки. В статье [187] исследована структура нестационарных ударных волн и волн пузырьковой детонации при электрическом взрыве проволочки в воде, химически инертных и реагирующих пузырьковых средах. С помощью оптической съёмки изучено формирование и расширение плазменного пузыря после взрыва проволочки в воде и пузырьковых средах. Установлены образование кавитационных зон и характер разрушения жидкости и пузырьковой среды в коротких сильных ударных волнах.

1.3 Выводы по главе

Опираясь на представленный обзор литературы, можно заключить, что пузырьковые жидкости занимают особое место в динамике многофазных систем. В настоящее время существуют многочисленные теоретические, значительное количество экспериментальных, а в последнее время и вычислительных работ по акустическому зондированию пузырьковых сред. Несмотря на это, практически нет исследований устойчивости пузырьковых сред. Совместное движение газов и жидкостей встречается в различных биологических и инженерных системах, к примеру, на трубопроводах, в турбинах, насосах и химических реакторах, чем объясняется актуальность параметрических исследований на устойчивость паро-газожидкостных систем, представленных в данной диссертации. Определение влияния степени перегретости пузырьковой жидко-

сти на её устойчивость может стать одним из инструментов в проектировании технологических установок с целью повышения безопасности эксплуатации.

Особый интерес представляет взаимодействие акустических волн с границей раздела жидкости и пузырьковой среды. Определение углов отражения и прохождения позволит использовать акустические сигналы в качестве диагностических инструментов для мониторинга состояния газожидкостных систем, например, анализа состава толщи воды в океане или степени газонасыщенности потока. Более того, опираясь на результаты исследования, возможно конструировать акустические каналы передачи звуковых сигналов в водном слое.

Важной проблемой на сегодняшний день остаётся кавитационная эрозия. Исследование и анализ взаимодействия волн давления с пузырьковыми кластерами различной геометрии и расположения относительно поверхностей могут способствовать уменьшению вредного воздействия пузырьков на рабочие поверхности. Также при надлежащем подборе параметров пузырьковой области можно добиться генерации мощных ударно-волновых импульсов. Исследованию перечисленного круга проблем и посвящена настоящая диссертация.

Глава 2. Специфика распространения звука в воде с парогазокапельными пузырьками

Распространение акустических волн в водо-воздушной пузырьковой смеси приобретает определённые особенности, если пузырьки помимо нерастворимого в воде газа содержат водяной пар, способный превращаться в воду в процессе взаимодействия среды с волновым возмущением. При этом находящийся в пузырьках воздух будет оказывать диффузионное сопротивление и влиять на интенсивность фазовых переходов в системе «пар–вода». В настоящей главе обсуждается постановка задачи и выписана система основных уравнений для дальнейшего решения. Для описания процессов межфазного взаимодействия использован подход, включающий решение уравнений переноса типа уравнений теплопроводности и диффузии. Предложенная схема для довольно широкого класса волновых задач позволяет корректно учесть межфазные температурные неравновесности без привлечения дополнительных эмпирических параметров. Для рассматриваемых задач решение записанной системы находится в виде бегущей волны. Согласно условию существования решения данного вида, принимая во внимание эффекты акустической разгрузки пузырьков, получено дисперсионное соотношение для моделирования распространения акустических волн в жидкости, включающей пузырьковую зону. С опорой на записанное дисперсионное соотношение получены уравнения для равновесной скорости звука в рассматриваемых средах, уравнение на равновесный радиус и соотношение для определения критического объёмного содержания.

2.1 Основные уравнения для жидкости с парогазовыми пузырьками

В расчётах будем применять полную систему гидродинамических уравнений с учётом теплообменных процессов между жидкостью и газом в пузырьках. Будем полагать справедливыми основные допущения и упрощающие предположения [206]:

– размеры пузырьков намного превышают молекулярно-кинетические размеры, но значительно меньше расстояний, на которых осреднённые или макроскопические параметры смеси или фаз меняются существенно;

- пузырьки имеют сферическую форму одного и того же радиуса, а объёмное содержание пузырьков α_{g0} существенно мало ($\alpha_{g0}^2 \ll 1$);
- пренебрегается непосредственное взаимодействие пузырьков друг с другом и хаотическое движение пузырьков;
- отсутствуют процессы слипания, дробления, образования новых пузырьков;
- теплопроводность и вязкость существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и не проявляются в макроскопических процессах переноса импульса и энергии;
- для смеси в пузырьках выполняется закон Дальтона;
- давление газа внутри пузырьков считаем однородным, принимая во внимание, что линейные размеры пузырька существенно уступают длине акустической волны.

Присутствие в пузырьках «инертного» газа, не участвующего в массообмене между фазами пара и жидкости, требует привлечения уравнений неразрывности каждого компонента внутри пузырьков для учёта тепломассообменных процессов.

Для волновых процессов в пузырьковых жидкостях относительное движение фаз не существенно, поскольку основной вклад вносит возникающая за счёт тепломассообменных процессов диссипация, что показано в [244]. Принимая во внимание этот факт, положим модель односкоростной. Опираясь на все перечисленные предположения, запишем систему уравнений сохранения согласно теории динамики пузырьковых жидкостей [206], включающую в себя уравнения сохранения массы каждой фазы, импульсов для каждой составляющей скорости, числа пузырьков при отсутствии их дробления, но с учётом фазовых переходов следующим образом [243], [75]

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho_l}{dt} + \rho_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -I, & \frac{d\rho_g}{dt} + \rho_g \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= I, \\
 \frac{dn}{dt} + n \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, & & (2.1) \\
 \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} &= 0, & \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, & I &= 4\pi a^2 n j,
 \end{aligned}$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3}\pi a^3 n, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l,$$

где индексы l, g относятся к параметрам несущей жидкости и газовой смеси в пузырьках, ρ_l и ρ_g , ρ_l^0 и ρ_g^0 – средние и истинные плотности жидкой и газовой фаз, α_l, α_g – объёмное содержание жидкой и газовой фазы, u и v – составляющие вектора скорости по координатам x и y , p_l – давление в жидкости, n – число пузырьков в единице объёма, a – радиус пузырьков, I и j – интенсивности массообмена, отнесённые к единице объёма смеси и к единице площади поверхности раздела фаз.

Термодинамические параметры жидкости будем описывать в предположении её слабой сжимаемости, а газ калорически совершенным

$$p_l = p_0 + C_l^2(\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g, \quad (2.2)$$

C_l – скорость звука в жидкости, R – газовая постоянная.. Здесь и в дальнейшем индексами 0 внизу снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущённому состоянию.

Для учёта влияния процессов тепло- и массообмена в газожидкостной смеси недостаточно макропараметров, зависящих от времени и координат x, y : скорости, давления, средней по смеси и фазе плотности, радиуса пузырьков. Это приводит к необходимости ввести систему микрокоординат внутри содержащей единичный пузырёк микрочастицы с координатами (x, y) , характеризующую распределение температуры, плотности, давления внутри и около пузырьков и зависящие от времени, макро- и микрокоординаты. Свяжем начало отсчёта микросистемы с центром пузырька, за микрокоординату примем расстояние до центра пузырька r , скорость положим равной макроскорости в данной макроточке. Снабдим микропараметры штрихами сверху (рис. 2.1 на с. 54).

Субстанциональные производные в микросистеме можно представить в виде

$$\frac{d'_l}{dt} = \frac{\partial'}{\partial t} + w'_l \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{d'_g}{dt} = \frac{\partial'}{\partial t} + w'_g \frac{\partial}{\partial r},$$

где w'_l, w'_g – скорости радиального движения в жидкости и газе [206]. Для частной производной $\frac{\partial'}{\partial t}$ по параметру, зависящему явно от времени и макрокоординат, которые, в свою очередь, для фиксированного включения зависят от

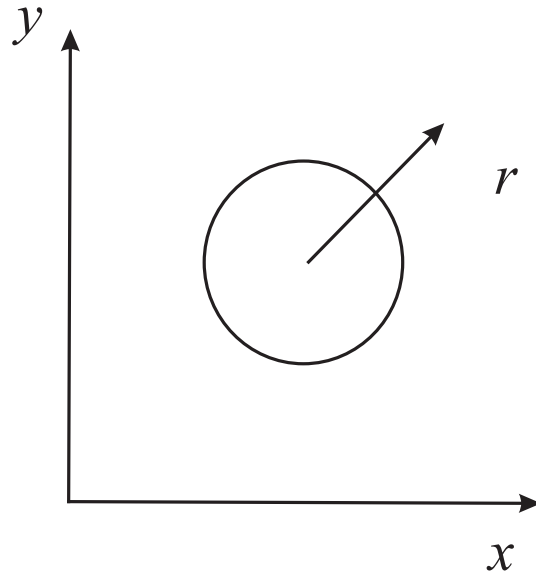


Рис. 2.1 — Схема микрочастицы.

времени, имеем:

$$\frac{\partial'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}.$$

Уравнение сохранения массы парогазовой смеси в пузырьках запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial m_g}{\partial t} + u \frac{\partial m_g}{\partial x} + v \frac{\partial m_g}{\partial y} = 4\pi a^2 j, \quad m_g = \int_0^a 4\pi r^2 \rho_g^{0'} dr. \quad (2.3)$$

Для адекватного описания теплофизических параметров системы в дальнейшем необходимо ввести концентрации компонентов парогазовой смеси k'_v и k'_{air} следующим образом:

$$k'_v = \frac{\rho'_v}{\rho_g^{0'}}, \quad k'_{air} = \frac{\rho'_{air}}{\rho_g^{0'}}, \quad \rho_g^{0'} = \rho'_v + \rho'_{air}, \quad k'_v + k'_{air} = 1. \quad (2.4)$$

Здесь нижние индексы v и air относятся к параметрам пара и газа, ρ'_{air} , ρ'_v — соответствующие плотности компонент смеси в пузырьке. В последующем будем обозначать $k'_v = k'$, а $k'_{air} = 1 - k'$. Согласно данным определениям, в каждой точке теплофизические микропараметры через концентрации компонентов

будем находить по формуле

$$B' = k'_v B'_v + k'_{air} B'_{air} = k' (B'_v - B'_{air}) + B'_{air}. \quad (2.5)$$

Вследствие основных допущений пузырьки газовой смеси гомобаричны ($\partial p_g / \partial r = 0$), а плотности и температуры воздуха и пара зависят от координат

$$\frac{\partial \rho'_v}{\partial r} \neq 0, \quad \frac{\partial T'_v}{\partial r} \neq 0, \quad \frac{\partial \rho'_{air}}{\partial r} \neq 0, \quad \frac{\partial T'_{air}}{\partial r} \neq 0.$$

В дальнейших исследованиях компоненты газовой смеси будем полагать калорически совершенными. Учитывая вышеизложенное, уравнения притока тепла и неразрывности внутри пузырьков, а также уравнения состояния компонент газовой фазы запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \rho'_v \frac{d'_g U'_v}{dt} + \rho'_{air} \frac{d'_g U'_{air}}{dt} = \\ = \frac{p_g}{\rho_g^{0'}} \frac{d'_g \rho_g^{0'}}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_g r^2 \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right) + \rho_g^{0'} D \frac{\partial k'}{\partial r} \frac{\partial (U'_v - U'_{air})}{\partial r}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho'_v}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [\rho'_v r^2 (w'_g + w'_v)] = 0,$$

$$\frac{\partial \rho'_{air}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [\rho'_{air} r^2 (w'_g + w'_{air})] = 0,$$

$$\rho'_{air} w'_{air} = -\rho'_v w'_v = \rho_g^{0'} D \frac{\partial k'}{\partial r},$$

$$p_g = p'_v + p'_{air} = (\rho'_v B'_v + \rho'_{air} B'_{air}) T'_g = \rho_g^{0'} B' T'_g,$$

$$T'_v = T'_{air} = T'_g, \quad U'_v = c_{Vv} T'_g, \quad U'_{air} = c_{Vair} T'_g.$$

Здесь U'_v и U'_{air} – удельные внутренние энергии пара и газа в пузырьках, w'_g , w'_v и w'_{air} – скорости радиального движения газов, T'_g , T'_v , T'_{air} – распределение температуры газовой смеси, пара и воздуха в пузырьке, где λ_l , λ_g – коэффициенты теплопроводности фаз, D – коэффициент взаимной диффузии, B' , B'_v , B'_{air} – газовые постоянные газовой смеси, пара и воздуха, c_{Vv} и c_{Vair} – удельные теплоёмкости пара и воздуха при постоянном объёме

Для учёта межфазного теплообмена запишем уравнение теплопроводности и диффузии внутри пузырька и уравнение теплопроводности в жид-

кости вокруг пузырька. Для достаточно широкого класса задач порождаемые радиальными колебаниями пузырьков в жидкости температурные волны имеют длину значительно меньшую, чем средние расстояния между пузырьками. Этот факт даёт возможность записать уравнения теплопроводности в сферически симметричной постановке внутри и около каждого включения.

$$\begin{aligned}\rho_{g0}^0 c_{pg} \frac{\partial T'_g}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_g r^2 \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_g}{\partial t} + \rho_{g0}^0 (B_{air} - B_v) T_0 \frac{\partial k'}{\partial t}, \\ \frac{\partial k'}{\partial t} &= \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial k'}{\partial r} \right) \quad (0 < r < a_0), \\ \rho_{l0}^0 c_l \frac{\partial T'_l}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_l r^2 \frac{\partial T'_l}{\partial r} \right) \quad (a_0 < r < a_0 \alpha_{g0}^{-1/3}),\end{aligned}\tag{2.7}$$

где $c_{pg} = c_{pv} k'_v + c_{pair}(1 - k'_v)$ – удельная теплоёмкость при постоянном давлении.

Определим соотношения на поверхности раздела фаз ($r = a_0$), опираясь на условия баланса тепла и массы:

$$\begin{aligned}T'_g &= T'_l = T_{(a)}, \quad k' = k_{(a)}, \\ \lambda_l \frac{\partial T'_l}{\partial r} - \lambda_g \frac{\partial T'_g}{\partial r} &= j \cdot L, \quad j = \frac{D}{1 - k_0} \left(\frac{\partial k'}{\partial r} \right)_{a_0}, \\ \rho_v' \left(\frac{da}{dt} - w_g - w'_v \right) &= \rho_l^0 \left(\frac{da}{dt} - w_l \right) = j, \\ \rho_{air}' \left(\frac{da}{dt} - w_g - w'_{air} \right) &= 0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где L – удельная теплота парообразования воды, $T_{(a)}$, $k_{(a)}$ – возмущения температуры и концентрации на поверхности пузырька. Учитывая, что на межфазной поверхности $r = a_0$ выполняются условия равновесия фаз пара и воды, можно записать

$$p_g = \rho_{g(a)}^0 (B_{air} + (B_v - B_{air})k_{(a)})T_{(a)}, \quad p_{v(a)} = p_{eq}(T_{(a)}) = \rho_{g(a)}^0 B_g k_{(a)} T_{(a)},\tag{2.9}$$

где $p_{g(a)}$, $p_{v(a)}$ – парциальные давления на поверхности пузырька газа и пара соответственно. Из (2.9) следует

$$\frac{p_{eq}(T_{(a)})}{p_g} = \frac{B_v k_{(a)}}{B_{air} + (B_v - B_{air})k_{(a)}}.\tag{2.10}$$

Кроме того, на поверхности раздела фаз для системы пар–вода должно выполняться условие Клапейрона – Клаузиуса:

$$\frac{dp_{v(a)}}{dT_{(a)}} = \frac{\rho_g^0 k_{(a)} L}{T_{(a)}}. \quad (2.11)$$

Для линеаризации уравнения (2.10) запишем переменные $T_{(a)}$ и $k_{(a)}$ как суммы $T_{(a)} = T_0 + T'_{(a)}$ и $k_{(a)} = k_0 + k'_{(a)}$, где $|T'_{(a)}| \ll T_0$ и $|k'_{(a)}| \ll k_0$. Тогда (2.10), учитывая (2.11), примет вид

$$\frac{\rho_{g0}^0 T_{(a)}}{T_{g0} T_0} - \frac{B_v p_g}{B_{g0} p_{g0}} = \frac{B_v B_{air} k_{(a)}}{B_{g0}^2 k_0}, \quad (B_{g0} = B_{air} + (B_v - B_{air})k_0). \quad (2.12)$$

Для полей температуры и концентрации пара на границе выполняются соотношения

$$\frac{\partial k'}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T'_g}{\partial r} = 0 \quad (r = 0). \quad (2.13)$$

В систему граничных условий (2.8) – (2.13) важно включить определяющее соотношение для T'_l . В зависимости от поставленной задачи неоднородности поля температур в жидкости могут выравниваться в слое существенно меньшем, чем средние расстояния между пузырьками. В такой постановке для жидкости можно принять условие изотермичности

$$T'_l = T_0 \quad (r = \infty). \quad (2.14)$$

Если же масштабы неоднородности поля температур в задаче сопоставимы со средними расстояниями между пузырьками, то справедливо предположить, что все пузырьки для фиксированной макрочастицы равноправны и нет потока тепла между слоями жидкости, прилегающими к отдельным включениям. В таких ситуациях применяется условие адиабатичности:

$$\frac{\partial T'_l}{\partial r} = 0 \quad (r = a_* = a_0 \alpha_{g0}^{-1/3}) \quad (2.15)$$

где a_* – радиус содержащей пузырёк микрочастицы [102].

Опираясь на уравнение (2.10), запишем соотношение, определяющее исходное равновесное состояние среды:

$$\frac{p_{\text{eq}}(T_0)}{p_{g0}} = \frac{B_v k_0}{B_{\text{air}} + (B_v - B_{\text{air}})k_0}, \quad (2.16)$$

и однозначно связывающее массовую концентрацию пара в пузырьке с температурой T_0 . Равновесное давление $p_{\text{eq}}(T)$ подчиняется формуле

$$p_{\text{eq}}(T) = p_* \exp\left(\frac{-T_*}{T}\right),$$

где p_* , $T_* = L/R_v$ – эмпирические параметры, зависящие от вида жидкости [254].

Из первого уравнения (2.6), принимая во внимание допущение о гомобаричности включений, получим

$$\frac{dp_g}{dt} = \frac{-p_g a^2 w_g + \int_0^a G' r^2 dr}{\frac{a^3}{3} + \int_0^a F' r^2 dr}, \quad (2.17)$$

где

$$F' = \frac{B'}{c'_{pg}},$$

$$G' = \left\{ \left[(B_v - B_{\text{air}}) c'_{Vg} T'_g \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D r^2 \rho_g^{0g} \frac{\partial k'}{\partial r} \right) \right] + \right. \\ \left. + B' \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_g r^2 \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right) + (c_{Vv} - c_{Va}) D \rho_2^{0g} \frac{\partial k'}{\partial r} \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right] \right\} \frac{1}{c'_{pg}}.$$

Уравнение радиальной скорости пузырьков с учётом $p_g = p_v + p_{\text{air}}$, имеет вид:

$$a \frac{dw_l}{dt} + \frac{3}{2} w_l^2 + 4\nu_l \frac{w_l}{a} = \frac{p_v + p_{\text{air}} - p_l - 2\sigma/a}{\rho_l^0}, \quad (2.18)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения воды.

Можно также получить уравнение для определения скорости радиального движения пузырька

$$w'_g = -\frac{r}{3p_g} \frac{dp_g}{dt} + \frac{1}{r^2 p_g} \int_0^r \left(G' + F' \frac{dp_g}{dt} \right) r^2 dr. \quad (2.19)$$

Построенная система уравнений с учетом граничных условий является замкнутой. Таким образом, приведённая методика позволяет исследовать течения газожидкостных смесей без использования дополнительных эмпирических постоянных из-за двухфазности. Стоит отметить, что при этом размерность задачи увеличивается на единицу из-за введения новой независимой переменной r .

Система уравнений для газожидкостной среды без фазовых переходов

В данном пункте обсудим систему расчётных уравнений для частного случая - смеси газа и жидкости без фазовых переходов. Для реализации численного решения задач на практике будем использовать уравнение для давления в газе p_g в дифференциальной форме. Принимая во внимание отсутствие пара и фазовых переходов, условие гомобаричности и граничные условия изотермичности (2.14) либо адиабатичности (2.15), после некоторых преобразований уравнения притока тепла (2.6) можем записать

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = -3\gamma p_g \frac{w_g}{a} + 3(\gamma - 1) \frac{\lambda_g}{a_0} \left(\frac{\partial T'_g}{\partial r} \right)_a. \quad (2.20)$$

Преобразуем закон сохранения масс (2.1) с использованием кинематических соотношений и уравнения состояния жидкости (2.2). Проведём упрощения и линеаризацию, пренебрегая слагаемыми порядка $(\rho_{v0}^0 + \rho_{a0}^0) / \rho_{l0}^0$. Отметим, что в начальный момент времени объёмное содержание газовой фазы α_{g0} , радиус пузырьков a_0 и число пузырьков в единице объёма пузырьковой смеси n_0 связаны соотношением $\alpha_{g0} = \frac{4}{3} \pi a_0^3 n_0$. Отсюда имеем уравнение, описывающее возмущение давления p_l в жидкости с учётом скорости распространения акустической волны и радиуса пузырьков:

$$\frac{1 - \alpha_{g0}}{C_l^2} \frac{\partial p_l}{\partial t} + \rho_{l0}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 3\rho_{l0}^0 \frac{\alpha_{g0}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} = 0. \quad (2.21)$$

В исследуемой газожидкостной системе как правило верно неравенство $\rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}) \gg (\rho_{v0}^0 + \rho_{a0}^0) \alpha_{g0}$ и уравнения импульсов для неё принимают следующую форму:

$$\begin{aligned} \rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p_l}{\partial x} &= 0, \\ \rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p_l}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Возмущения давления в жидкости p_l и газовых пузырьках p_g будем связывать уравнением Рэлея–Ламба. Линеаризуя это соотношение и принимая во внимание капиллярные силы, получим

$$\rho_{l0}^0 a_0 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 4 \frac{\rho_{l0}^0 \nu_l^{(u)}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} = p_g - p_l + \frac{2\sigma}{a_0^2} a. \quad (2.23)$$

Уравнения неразрывности (2.6), теплопроводности (2.7) и граничные условия на поверхности раздела фаз (2.8) для случая без фазовых переходов приводятся к виду

$$\frac{d'_g \rho_g^{0'}}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_g^{0'} r^2 w'_g \right) = 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \rho_{g0}^0 c_{pg} \frac{\partial T'_g}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_g r^2 \frac{\partial T'_g}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_g}{\partial t} \quad (0 < r < a_0), \\ \rho_{l0}^0 c_l \frac{\partial T'_l}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_l r^2 \frac{\partial T'_l}{\partial r} \right) \quad (a_0 < r < a_0 \alpha_{g0}^{-1/3}), \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$T'_g = T'_l = T_{(a)}, \quad \lambda_l \frac{\partial T'_l}{\partial r} = \lambda_g \frac{\partial T'_g}{\partial r}, \quad \frac{da}{dt} = w_l = w_g. \quad (2.26)$$

Дифференцируя (2.21) по времени и используя уравнение импульсов смеси (2.22), а также уравнение Рэлея–Ламба (2.23) с учётом последних соотношений (2.26), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha_{g0}}{C_l^2} \frac{\partial^2 p_l}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 p_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_l}{\partial y^2} \right) - 3 \rho_{l0}^0 \frac{\alpha_{l0} \alpha_{g0}}{a_0} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} &= 0, \\ \rho_{l0}^0 a_0 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} &= p_g - p_l + \frac{2\sigma}{a_0} \frac{a}{a_0} - 4 \frac{\rho_{l0}^0 \nu_l}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Отметим, что первое уравнение (2.27) при отсутствии пузырьков ($\alpha_{g0} = 0$) совпадает с обычным волновым уравнением.

Из уравнения неразрывности (2.6), учитывая граничное условие $w'_g(t, 0) = 0$, можно получить соотношение для определения скорости радиального движения стенки пузырька

$$w'_g = -\frac{r}{3\gamma p_g} \frac{dp_g}{dt} + \frac{(1 - \gamma^{-1})}{p_2} \lambda_g \frac{\partial T'_g}{\partial r}. \quad (2.28)$$

Система (2.27) с учётом уравнений (2.25) и (2.20) наряду с граничными условиями (2.13), (2.14), (2.15), (2.26) замкнута и позволяет решать волновые задачи в газожидкостной среде без фазовых переходов.

2.2 Постановка задачи

В продолжение обсуждения особенностей прохождения звука в парогазовой смеси с фазовыми переходами сформулируем задачу, основываясь на уравнениях из пункта 2.1 в плоско-одномерном и односкоростном приближении. Дополним приведённую выше постановку некоторыми уточнениями. При условии механического и теплового равновесия системы «жидкость–парогазовые пузырьки», находящейся в состоянии, далёком от критического, имеют место соотношения

$$p_{g0} = p_{v0} + p_{air0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad (2.29)$$

где p_{i0} ($i = v, air$) – парциальные давления пара и газа в пузырьках, нижний индекс (0) соответствует состоянию равновесия. Когда состояние жидкой фазы в необходимой степени далеко от критического, парциальное давление пара p_{v0} строго соответствует равновесному давлению для заданной температуры жидкости T_0 при условии плоской межфазной поверхности [206]:

$$p_{v0} = p_e(T_0). \quad (2.30)$$

Когда в зародышах не содержится нерастворимый в жидкой фазе газ, из (2.29) можно получить оценку радиуса

$$a_0^{(M)} = \frac{2\sigma}{p_{v0} - p_0}, \quad (2.31)$$

соответствующую критическому значению, которое следует из теории Гиббса [137].

Для описания волновых процессов в жидкости из (2.1) с учётом уравнений состояния (2.2), (2.6) после линеаризации запишем соотношение, где учитываются скорость распространения фронта акустической волны и радиус включений:

$$\frac{1 - \alpha_{g0}}{C_l^2} \frac{\partial p_l}{\partial t} + \rho_{l0}^0 \frac{\partial u}{\partial x} - 3\rho_{l0}^0 \frac{\alpha_{g0}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} = 0. \quad (2.32)$$

Запишем также уравнение для изменения массы пара в пузырьке, полагая, что интенсивность испарения жидкости (или конденсации пара) определяется из условия теплового баланса (2.8):

$$\frac{\partial m_v}{\partial t} = 4\pi a^2 \frac{\lambda_l}{L} \left(\frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_a, \quad m_v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v^0. \quad (2.33)$$

В силу принятых допущений температура пара в пузырьке однородна и равна её значению на поверхности пузырька. Так как температура на поверхности раздела фаз подчиняется условию Клапейрона – Клаузиуса (2.11), для возмущений температуры и давления пара можем записать:

$$T_v = \frac{T_0}{\rho_{v0}^0 L} p_v. \quad (2.34)$$

Поскольку газ в зародыше калорически совершенный (2.6) и $T_{air} = T_v$, для возмущения парциального давления газа можем получить в линеаризованном виде следующую зависимость:

$$p_{air} = p_{air0} \left(3 \frac{a}{a_0} + \frac{T_v}{T_0} \right). \quad (2.35)$$

Для слабых акустических возмущений уравнение Рэлея–Ламба (2.18) в линеаризованном приближении с учётом капиллярных сил имеет вид:

$$\rho_{l0}^0 a_0 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 4 \frac{\rho_{l0}^0 \nu_l^{(\mu)}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} = p_{air} + p_v - p_l + \frac{2\sigma}{a_0^2} a, \quad (2.36)$$

где $p_v = \rho_v R_v T$.

Подставляя сюда выражение (2.35), можем вывести следующее:

$$\rho_{l0}^0 a_0 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 4 \frac{\rho_{l0}^0 \nu_l^{(\mu)}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} = \left(1 + \frac{p_{air0}}{\rho_{v0}^0 L}\right) p_v + \left(\frac{2\sigma}{a_0} - 3p_{air0}\right) \frac{a}{a_0} - p_l. \quad (2.37)$$

Принимая во внимание уравнение (2.33) тот факт, что в большинстве случаев выполняется условие $L/R_v \gg T_0$, можем записать последнее уравнение в виде

$$-\frac{3}{a_0} \frac{da}{dt} + \frac{1}{p_{v0}} \frac{dp_v}{dt} = \frac{3\gamma_l}{\rho_{l0}^0 L a_0} \left(\frac{\partial T_l}{\partial r}\right)_{a_0}, \quad p_{v0} = \rho_{v0}^0 R_v T_0. \quad (2.38)$$

Обращаясь к уравнениям концентраций (2.4) и интегральному соотношению из (2.3), после линеаризации (2.38) получим

$$\frac{1}{\rho_{g0}} \frac{\partial p_g}{\partial t} + \frac{3}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{3}{a_0^3} \int_0^a r^2 \left(\frac{B_v - B_{air}}{B_{g0}} \frac{\partial k'}{\partial t} + \frac{1}{T_0} \frac{\partial T'}{\partial t} \right) dr = \frac{3j}{\rho_{g0} a_0}. \quad (2.39)$$

Из уравнения (2.39) с учётом (2.7), (2.12) и системы граничных условий (2.13) получаем

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = -3\gamma \frac{p_{g0}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} + 3(\gamma - 1) \frac{\lambda_g}{a_0} \left(\frac{\partial T'_g}{\partial r}\right)_a + 3 \frac{\gamma p_{g0}}{a_0} \frac{DB_v}{(1 - k_0) B_{g0}} \left(\frac{\partial k'}{\partial r}\right)_a. \quad (2.40)$$

На поверхности раздела фаз зададим граничные условия (2.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} T'_g = T'_l = T_{(a)}, \quad \lambda_l \frac{\partial T'_l}{\partial r} - \lambda_g \frac{\partial T'_g}{\partial r} &= j \cdot L, \\ \rho_{g0}^0 \left[k_0 \left(\frac{\partial a}{\partial t} - w_g \right) + D \frac{\partial k'}{\partial r} \right] &= \rho_{l0}^0 \left(\frac{\partial a}{\partial t} - w_l \right) = j, \\ \rho_{g0}^0 \left[(1 - k_0) \left(\frac{\partial a}{\partial t} - w_g \right) - D \frac{\partial k'}{\partial r} \right] &= 0, \quad r = a_0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Последнее условие из (2.41) эквивалентно утверждению о том, что газовый компонент не участвует в процессе массообмена между фазами.

Вышеприведенные уравнения формируют замкнутую систему при заданных параметрах p_{g0} , T_0 , a_0 и α_{g0} и теплофизических константах, определяемых свойствами парогазожидкостной смеси.

2.3 Дисперсионный анализ

Текущий раздел будет посвящён выводу дисперсионного уравнения, соотношения для равновесной скорости в точке кипения и некоторым обсуждениям равновесного радиуса и критического объёмного содержания.

Вывод дисперсионного уравнения

Решение приведённой выше системы уравнений ищется в виде бегущей волны с затухающей амплитудой:

$$p_l, p_g, v, a \sim e^{i(Kx-\omega t)}, \quad T_l' = T_l(r)e^{i(Kx-\omega t)}, \quad T_g' = T_g(r)e^{i(Kx-\omega t)},$$

$$k' = k(r)e^{i(Kx-\omega t)}, \quad (K = k + i\delta, \quad C_p = \omega/k, \quad i = \sqrt{-1}).$$

Поля концентраций и температур внутри пузырьков описываются соотношениями

$$k' = \frac{\text{sh}(zR)}{R\text{sh}(z)} \frac{A_k p_g}{A p_{g0}},$$

$$\frac{T_g(R)}{T_0} = -(1 - \gamma^{-1}) \frac{kH}{1 - \text{Le}_2} + \left[(1 - \gamma^{-1}) + \left(\frac{A_T}{A} - (1 - \gamma^{-1}) \left(\frac{H}{1 - \text{Le}_2} \frac{A_k}{A} - 1 \right) \right) \frac{\text{kh}(y_g R)}{R\text{kh}(y_g)} \right] \frac{p_g}{p_{g0}}, \quad (2.42)$$

где

$$A = H_v H_{air} (\eta \text{shv}(y_g) + \text{kh}(y_g)) + \frac{k_0 H (\text{kx}(y_g) - \text{Le}_g \text{kx}(z))}{\chi (1 - \text{Le}_g)} + \frac{k_0 \text{kh}(z)}{(1 - k_0) \chi^2 (1 - \gamma^{-1})},$$

$$A_k = k_0 [H_v (\eta \text{shv}(y_l) + \text{kh}(y_g))] - k_0 \chi^{-1} \text{kh}(y_g),$$

$$A_T = k_0 H_v \left[\frac{\text{kh}(z)}{(1 - k_0)\chi} + \frac{(1 - \gamma^{-1}) H (\text{kx}(y_g) - \text{Le}_g \text{kx}(z))}{1 - \text{Le}_g} \right] + (1 - \gamma^{-1}) H_v H_{air} \text{kh}(y_g),$$

$$\text{shv}(x) = \frac{3}{x^2} \left(1 + \frac{x(A_0 x \text{th}(x(A_0 - 1)) - 1)}{(A_0 x - \text{th}(x(A_0 - 1)))} \right) \quad \text{или} \quad \text{shv}(x) = \frac{3}{x^2} (1 + x),$$

$$\text{kh}(x) = \frac{3}{x^2} (x \text{cthx} - 1), \quad R = r/a_0, \quad A_0 = \alpha_{g_0}^{-1/3}, \quad \text{Le}_i = \alpha_i D^{-1}$$

$$y_l = \sqrt{-\frac{i\omega a_0^2}{\alpha_l}}, \quad y_g = \sqrt{-\frac{i\omega a_0^2}{\alpha_g}}, \quad z = \sqrt{-\frac{i\omega a_0^2}{D}}, \quad \alpha_l = \frac{\lambda_l}{\rho_{l_0}^0 c_{Pl}}, \quad \alpha_g = \frac{\lambda_g}{\rho_{g_0}^0 c_{Pg}},$$

$$\eta = \frac{\rho_{l_0}^0 c_{Pl}}{\rho_{g_0}^0 c_{Pg}}, \quad \chi = \frac{c_{Pg} T_0}{L}, \quad H_v = \frac{B_v}{B_0}, \quad H_{air} = \frac{B_{air}}{B_0}, \quad H = H_v - H_{air}.$$

Поле температур жидкости при условии адиабатичности либо изотермичности микрочастиц представлены следующим образом:

$$\frac{T_l(R)}{T_0} = \frac{(A_0 y_l + 1) e^{y_g(R - A_0)} + (A_0 y_l - 1) e^{y_g(A_0 - R)} A_T p_g}{R [(A_0 y_l + 1) e^{y_l(1 - A_0)} (A_0 y_l - 1) e^{y_l(A_0 - 1)}] A p_{g_0}} \quad (2.43)$$

или

$$\frac{T_l(r)}{T_0} = \frac{e^{y_l(1 - R)} A_T p_g}{R A p_{g_0}}. \quad (2.44)$$

Из последних двух уравнений (2.41) можно получить:

$$j = \frac{\rho_{g_0}^0 D}{1 - r_0} \left(\frac{\partial k'}{\partial r} \right)_a \quad (2.45)$$

Уравнение (2.40) для p_g с учётом второго условия из (2.41), а также (2.45) можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = -3\gamma \frac{p_{g_0}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} + 3(\gamma - 1) \frac{\lambda_l}{a_0} \left(\frac{\partial T'_l}{\partial r} \right)_a + 3\gamma p_{g_0} \frac{D}{a_0} \left(\frac{1 - \chi^{-1}}{1 - k_0} + \frac{H}{\gamma} \right) \left(\frac{\partial k'}{\partial r} \right)_a. \quad (2.46)$$

Отсюда с учётом решений (2.42) и (2.43) (или (2.44)) получим связь между давлением в пузырьках и амплитудой их радиуса

$$\frac{p_g}{p_{g_0}} = -\frac{3\gamma a}{O a_0}, \quad O = 1 - \gamma \left(\eta \text{shx}(y_l) \frac{A_T}{A} + \left(\frac{1 - \chi^{-1}}{1 - k_0} + \frac{H}{\gamma} \right) \text{kx}(z) \frac{A_k}{A} \right). \quad (2.47)$$

Из уравнения на динамику радиальной скорости движения стенки пузырька с учётом (2.47) и эффектов акустической разгрузки [210] имеем

$$\frac{a}{a_0} = -\frac{p_l}{\psi_1}, \quad \psi_1 = \psi \left(1 + \frac{\gamma s}{1 - k_0} \frac{\text{kh}(z_g) A_k}{O A} \right), \quad (2.48)$$

здесь

$$\psi = \frac{3\gamma p_{g0}}{Q} - \frac{\rho_{l0}^0 \omega^2 a_0^2}{\xi} - 4i\rho_{l0}^0 \nu_l^{(\mu)} \omega - \frac{2\sigma}{a_0}, \quad (2.49)$$

в свою очередь

$$Q = \frac{1 - \gamma \left(\eta \text{shv}(y_l) \frac{A_T}{A} + \left(\frac{1 - \chi^{-1} - s}{1 - k_0} + \frac{H}{\gamma} \right) \text{kh}(z) \frac{A_k}{A} \right)}{1 + \frac{s}{1 - k_0} \frac{2\sigma}{3a_0 p_{g0}} \text{kh}(z) \frac{A_k}{A}}. \quad (2.50)$$

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \xi = 1 - i\omega t_A, \quad t_A = \frac{a_0}{\sqrt[3]{\alpha_{g0}} C_l}, \quad s = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0}.$$

Для большинства веществ в широком диапазоне варьируемых параметров справедливы оценки

$$s \ll 1, \quad \eta \gg 1, \quad \text{Le}_g \sim 1, \quad \eta |\text{shv}(y_l)| \gg |\text{kh}(y_g)|,$$

$$\frac{\chi^{-1} H |\text{kh}(y_g) - \text{Le}_g \text{kh}(z)|}{1 - \text{Le}_g} \ll 1,$$

$$(1 - \gamma^{-1}) H \left| 1 - \frac{1 - \text{Le}_g \text{kh}(z) \text{kh}(y_g)^{-1}}{1 - \text{Le}_g^{-1}} \right| \ll 1.$$

Последнее соотношение означает, что в уравнении теплопроводности (2.7) слагаемым за счет диффузии можно пренебречь. Тогда выражение (2.42) переписется в виде

$$\frac{T_g(R)}{T_0} = \left[(1 - \gamma^{-1}) + \left(\frac{A_T}{A} - 1 + \gamma^{-1} \right) \frac{\text{kh}(y_g R)}{R \text{kh}(y_g)} \right] \frac{p_g}{p_{g0}}, \quad (2.51)$$

где

$$A = H_v H_{air} (\eta \text{shv}(y_g) + \text{kh}(y_g)) + \frac{k_0 \text{kh}(z)}{(1 - k_0) \chi^2 (1 - \gamma^{-1})},$$

$$A_k = k_0 [H_v (\eta \text{shv}(y_l) + \text{kh}(y_g))] - k_0 \chi^{-1} \text{kh}(y_g),$$

$$A_T = k_0 H_v \frac{\text{kh}(z)}{(1 - k_0)\chi} + (1 - \gamma^{-1}) H_v H_{air} \text{kh}(y_g),$$

а выражение (2.50), ответственное в дисперсионном уравнении за тепломассообменные процессы, можно упростить и привести к виду

$$Q = 1 + \frac{\frac{\gamma - 1}{k_0} H_{air} \text{kh}(y_g) + \frac{\gamma}{1 - k_0} H_v \text{kh}(z)}{\frac{H_{air}}{k_0} + \frac{\gamma \text{kh}(z)}{(1 - k_0)\beta \text{shv}(y_l)}}, \quad (2.52)$$

где $\beta = (\gamma - 1)\eta H_v \chi^2$.

Подставляя (2.49) в уравнение, следующее из (2.32) и используя уравнение импульсов, получим дисперсионное уравнение

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{(1 - \alpha_{g0})^2}{C_l^2} + 3 \frac{\rho_{l0}^0 \alpha_{g0} (1 - \alpha_{g0})}{\psi}. \quad (2.53)$$

О равновесной скорости

Пренебрегая сжимаемостью жидкости ($C_p \rightarrow \infty$) и слагаемым $k_0 \alpha_{g0} / \beta \alpha_{l0}$ вследствие их малости по сравнению с единицей, запишем (2.52) в виде

$$Q = \frac{1 - M_{air} y_l^2}{\frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} + \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}}}, \quad (2.54)$$

где

$$M_{air} = \frac{M}{1 + \frac{(1 - k_0) H_{air} \beta \alpha_{l0}}{\gamma k_0 \alpha_{g0}}} + (1 - k_0) H_{air} Le_l \left[\frac{1 - \gamma^{-1}}{Le_g} - \frac{1 - \frac{H_v \beta \alpha_{l0}}{\gamma \alpha_{g0}}}{1 + \frac{(1 - k_0) H_{air} \beta \alpha_{l0}}{\gamma k_0 \alpha_{g0}}} \right].$$

$$M = \frac{(A_0 - 1)^3 (5A_0^3 + 6A_0^2 + 3A_0 + 1)}{A_0^3 - 1}.$$

Используя (2.54) и пренебрегая вязкостью жидкости для фазовой скорости и коэффициента затухания для случая, когда

$$\frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} + \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} > \frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{g0}}$$

получим:

$$C_p = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{l0}^0 \alpha_{l0} \alpha_{g0}}} \sqrt{\frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} + \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} - \frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{g0}}},$$

$$\delta = \frac{1}{30} \frac{M_{air}}{\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{l0}^0 \alpha_{l0} \alpha_{g0}}}} \frac{(1 - k_0) H_{air} + \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} \omega^2}{\left(\frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} + \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} - \frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{g0}} \right)^{3/2} \omega_{Tl}}. \quad (2.55)$$

Равновесная скорость звука для данного случая равна

$$C_e = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{l0}^0 \alpha_{l0} \alpha_{g0}} \left(\frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} + \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} - \frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{g0}} \right)}, \quad (2.56)$$

которая обобщает известные формулы Мэллока [206] и Ландау [193].

Для случая, когда выполняется

$$\frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} + \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} < \frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{g0}}$$

уравнения переписутся в следующем виде:

$$C_p = 30 \frac{\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{l0}^0 \alpha_{l0} \alpha_{g0}}}}{M_{air}} \frac{\left(\frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{g0}} - \frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} - \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} \right)^{3/2}}{(1 - k_0) H_{air} + \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} \omega^2} \frac{\omega_{Tl}}{\omega^2}, \quad (2.57)$$

$$\delta = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{l0}^0 \alpha_{l0} \alpha_{g0}}}} \frac{1}{\left(\frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{g0}} - \frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} - \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} \right)}.$$

Равновесная скорость звука здесь равна $C_e = \infty$.

Равновесная скорость будет конечной, а решение - устойчивым при выполнении следующего условия:

$$\frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} + \frac{k_0 \alpha_{g0}}{\beta \alpha_{l0}} > \frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{g0}}. \quad (2.58)$$

Полученные выше соотношения (2.54) – (2.58) соответствуют условию адиабатичности ячейки. Если применить условие изотермичности, вместо (2.58) будем иметь

$$\frac{(1 - k_0) H_{air}}{\gamma} > \frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{g0}}. \quad (2.59)$$

Поскольку $p_{g0} = p_{l0} + \frac{2\sigma}{a_0}$ и $p_{g0} = p_{air0} + p_{v0}$, из (2.59) следует неравенство, разделяющее значения паросодержания на две области:

$$k_0 < k_*, \quad k_* = \varphi(1 + \varphi), \quad \varphi = 2 + 3\frac{3a_0 p_{l0}}{2\sigma}. \quad (2.60)$$

Для парциального давления пара (или газа p_{g0}) соотношение запишется в виде

$$p_{v0} < p_{l0} + \frac{4\sigma}{3a_0}, \quad \left(p_{air0} > \frac{2\sigma}{3a_0} \right). \quad (2.61)$$

Полученная формула (2.61) совпадает с выражением для критической концентрации из [198]. В области $0 \leq k_0 \leq k_*$ вынужденные колебания парогазового пузырька на низких частотах сходны с колебаниями газовых пузырьков, а в области $k_* < k_0 \leq 1$ – лучше соответствуют колебаниям паровых пузырьков. Следует подчеркнуть, что для малых частот вынужденные колебания паровых и газовых пузырьков имеют различия: паровые колеблются в одной фазе с колебаниями давления в жидкости, а газовые – со сдвигом по фазе на полпериода ($\varphi - \pi$).

В точке кипения жидкой фазы $T_0 = T_e(p_0)$ соотношение (2.56) с учётом выражений (2.53) примет вид

$$C_e = \sqrt{k_0 \left(\frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0} \right)^2 \left(\frac{B_0}{B_v} \right)^2 \frac{L^2}{c_l T_0} + \frac{4}{3} \frac{\sigma}{a_0 \rho_{l0}^0 \alpha_{g0}}.}$$

Для частного случая ($2\sigma/a_0p_0 \ll 1$) при $k_0 = 0$ и $k_0 = 1$ (2.56) справедливы формулы Мэллока [206] и Ландау [193]:

$$C_M = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_{l0}^0 \alpha_{g0}}} \quad \text{и} \quad C_L = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0} \frac{L}{\sqrt{c_l T_0}}.$$

О равновесном радиусе

Осуществим переход к пределу при $\omega \rightarrow 0$ дисперсионного соотношения (2.53). Функция $\text{shv}(x)$ при $\omega \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) имеет следующую асимптотику:

$$\text{shv}(y_l) = \frac{\alpha_{l0}}{\alpha_{v0}} (1 - My_l), \quad M = \frac{(A_0 - 1)^3 (5A_0^3 + 6A_0^2 + 3A_0 + 1)}{15(A_0^3 - 1)}. \quad (2.62)$$

Используя (2.62), и предполагая верным, что α_{v0} , C_l^2/C_e^2 , $(\rho_{g0}^0/\rho_{l0}^0)(L/c_l T_0) \ll 1$, из дисперсионного уравнения запишем формулу равновесной скорости звука:

$$C_e = \sqrt{C_L^2 + \frac{p_{g0} - 2\sigma/3a_0}{\rho_{l0}^0 \alpha_{g0}}}. \quad (2.63)$$

Откуда следует, что смесь жидкости с парогазовыми пузырьками будет термодинамически устойчива ($C_L^2 > 0$) [88] в том случае, когда

$$p_{g0} \geq \frac{2\sigma}{3a_0} - \rho_e^0 \alpha_{g0} C_L^2. \quad (2.64)$$

Подчеркнём, что устойчивость отдельного парогазового пузырька в бесконечном объёме жидкости будет обеспечена при условии [257]

$$p_{g0} \geq \frac{2\sigma}{3a_0}. \quad (2.65)$$

Как видно, если в объёме жидкости содержатся множественные зародыши, парциальное давление газа p_{g0} расширяет область своих значений. Основываясь на этом, можно утверждать, что условие (2.65) является достаточным для поддержания термодинамической устойчивости жидкости с зародышами нерастворимого газа.

Если парциальное давление газа из формулы (2.63)

$$p_{g0} \rightarrow \frac{2\sigma}{3a_0},$$

то согласно формуле (2.63), равновесная скорость звука стремится к скорости Ландау $C_e \rightarrow C_L$ [193].

Рассматривая условие исходного равновесного состояние среды (2.16) вкупе с условием устойчивости одиночного парогазового зародыша (2.65), следует ограничить радиус газовых зародышей следующим образом:

$$a_0 \leq a_{0*} = \frac{4\sigma}{3(p_e(T_0) - p_0)}. \quad (2.66)$$

Реализация данного условия гарантирует устойчивость перегретой жидкости с зародышами парогазовых включений.

Применяя (2.3), (2.6), (2.36) к p_{g0} , получим

$$p_{g0} = m_{g0} R_g T_0 / (4\pi a_0^3 / 3).$$

На этом основании в сочетании с условием механического равновесия (2.29), можем заключить, что

$$m_{g0} = \frac{(2\sigma/a_0 + p_0 - p_{v0}) (4\pi a_0^3 / 3)}{R_g T_0}.$$

Представим последнее равенство как функцию, определяющую равновесный радиус a_0 на основе массы m_{g0} зародыша

$$f(a_0) = (p_0 - p_e(T_0))a_0^3 + 2\sigma a_0^2 - \frac{3}{4\pi} m_{g0} R_g T_0 = 0. \quad (2.67)$$

Очевидно, если жидкость недогрета ($p_0 > p_e(T_0)$), то для всякой массы зародыша m_{g0} функция (2.67) имеет единственный нуль на положительном направлении оси радиусов a_0 . Это обусловлено с тем, что на положительной полуоси $0 < a_0 < +\infty$ зависимость $f(a_0)$ монотонно растёт от $f(0) = -3/4\pi m_{g0} R_g T_0$ до $+\infty$ (см. рис. 2.2).

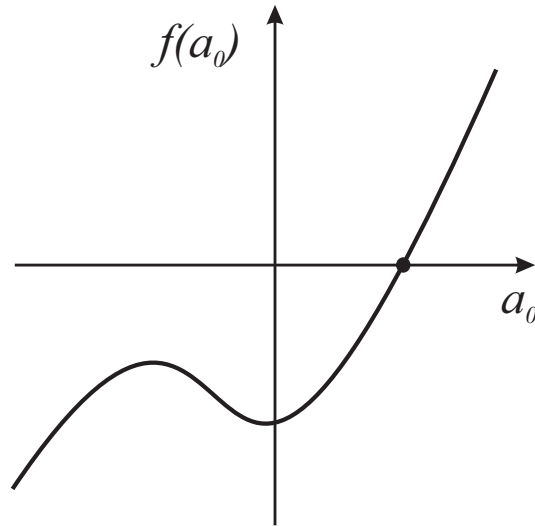


Рис. 2.2 — В случае недогретой жидкости ($p_0 > p_e(T_0)$) существует единственный равновесный радиус.

Когда давление смеси достигает давления насыщения $p_0 = p_e(T_0)$, функция (2.67) опять же имеет только один положительный корень

$$a_0 = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \frac{m_{g0} R_g T_0}{\sigma}}. \quad (2.68)$$

Если же жидкость находится в перегретом состоянии $p_e(T_0) > p_0$, функция (2.68) имеет нули на положительной полуоси радиусов тогда и только тогда, когда массы зародышей удовлетворяют условию

$$m_{g0} \leq m_{g*} = \frac{128\pi\sigma^3}{81R_g T_0 (p_e(T_0) - p_0)^2}.$$

Рис. 2.3 иллюстрирует различные варианты зависимости $f(a_0)$. Наглядно показано, что при различных значениях массы газовых зародышей количество равновесных радиусов может отличаться. Линия **1** детализирует случай отсутствия газа в зародышах $m_{g0} = 0$: равновесные радиусы соответствуют значениям $a_0 = a_0^{(M)}$ (см. (2.31)) и $a_0 = 0$. Если масса зародышей находится в пределах $0 < m_{g0} < m_{g*}$, график функции отражает линия **2**, и существуют два строго положительных равновесных радиуса. Случаю $m_{g0} = m_{g*}$ соответствует линия **3** и один равновесный радиус. При бóльших массах газовых зародышей $m_{g0} > m_{g*}$, согласно линии **4**, положительных равновесных радиусов быть не может.

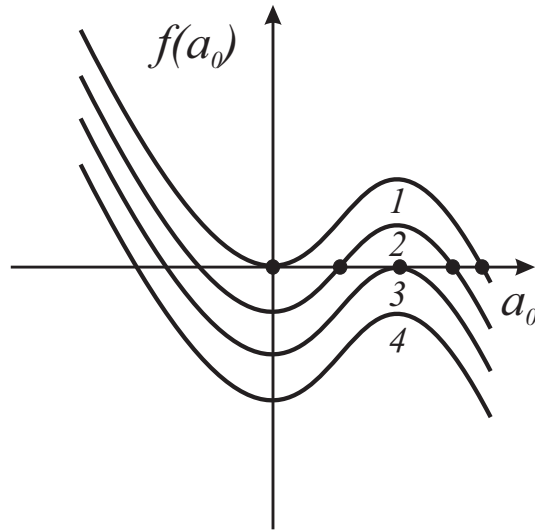


Рис. 2.3 — Графики зависимостей равновесных радиусов от массы газовых зародышей в перегретой жидкости ($p_e(T_0) > p_0$) для различных

начальных m_{g0}

$$1 : m_{g0} = 0, \quad 2 : 0 < m_{g0} < m_{g*},$$

$$3 : m_{g0} = m_{g*}, \quad 4 : m_{g0} > m_{g*}.$$

Как было сказано, когда масса газовых зародышей m_{g0} меньше критического радиуса m_{g*} , функция (2.67) имеет два корня a_{01} и a_{02} , и при таких значениях радиусов газовых зародышей система находится в равновесном состоянии. Из графика линии 2, очевидно, следует, что

$$0 < a_{01} < a_{0*} \quad \text{и} \quad a_{0*} < a_{02} < a_0^{(M)}.$$

Первый радиус a_{01} удовлетворяет условию (2.66), следовательно, для него состояние равновесия системы будет устойчиво. Для бóльшего равновесного радиуса a_{02} устойчивое равновесие возможно только при выполнении условия (2.64) для парциального давления газа, в противном случае вся система будет неустойчива. Следует добавить, что увеличение начального объёмного газосодержания зародышей α_{g0} , или, другими словами, их количества n_0 в единичном объёме, тренд устойчивости укрепляется.

Рис. 2.4 демонстрирует график зависимости величины равновесного радиуса от массы газового зародыша, исходя из соотношения

$$\alpha_{g0} = \frac{4}{3} \pi a_0^3 n_0.$$

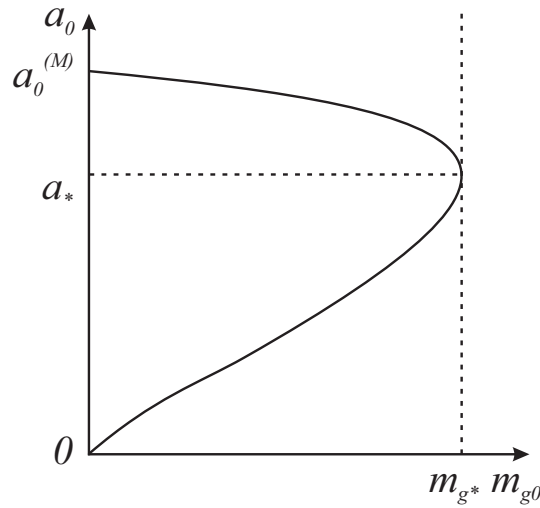


Рис. 2.4 — Кривая, отражающая зависимость равновесного радиуса a_0 от массы газового зародыша m_{g0} в перегретой жидкости.

Когда радиусы зародышей лежат на кривой ниже штриховой линии $a_0 = a_*$, перегретая жидкость неизменно находится в устойчивом состоянии. Для радиусов выше этой линии, находящихся в промежутке $(a_* \leq a_0 \leq a_0^{(M)})$, состояния системы могут быть устойчивыми или нет. Отметим, что, исходя из (2.64), система при таких радиусах зародышей будет устойчива, если объёмное содержание парогазовых включений подчиняется условию

$$\alpha_{g0} \geq \alpha_{g0}^{(M)} = \frac{2\sigma}{3a_0^{(M)} \rho_{l0}^0 C_l^2}.$$

При условии, что строго удовлетворяется соотношение $p_0 = p_e(T_0)$, из первого равенства (2.29) следует

$$p_{g0} = \frac{2\sigma}{a_0}.$$

Следует заметить, что при таком p_{g0} всегда верно условие устойчивости единичного зародыша (2.65), а значит, будет устойчива и исследуемая система.

Необходимо пояснить возникновение упомянутой выше неустойчивости одиночного зародыша в том случае, если условие (2.65) не удовлетворяется. Следующее условие связывает значение давления в жидкости p_{la} вблизи поверхности раздела фаз с давлением в газе внутри пузырька p_g :

$$p_{la} = p_g - \frac{2\sigma}{a}. \quad (2.69)$$

Давление жидкости удовлетворяет условию гомобаричности $p_l = p_{l0} = p_0$. Придадим малое приращение $a' > 0$ радиусу газового включения относительно его равновесного значения a_0 . Газ будем считать политропным:

$$p_g = p_{g0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma}. \quad (2.70)$$

В таком случае, вследствие (2.69) и (2.70), для приращения давления жидкой фазы $p_{la} = p_0 + p'_{la}$ запишем

$$p'_{la} = - \left(3\gamma p_{g0} - \frac{2\sigma}{a_0} \right) \frac{a'}{a_0}. \quad (2.71)$$

В дополнение к чему,

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} \quad \text{и} \quad \gamma \geq 1.$$

Согласно уравнению (2.71), с увеличением радиуса зародыша ($a' > 0$) давление жидкости на поверхности пузырька снижается ($p'_{la} < 0$). Это означает, что возникает сила, действующая со стороны жидкости и стремящаяся вернуть радиус пузырька к его исходному равновесному значению a_0 . Однако в случае парового пузырька ситуация может складываться иначе. Адаптируя выражения (2.69) для случая парового пузырька, опишем возмущения давления жидкости на поверхности раздела следующим образом

$$p'_{la} = -p'_v + \frac{2\sigma a'}{a_0 a_0}.$$

В конечном итоге, параметры единичного парового пузырька в бесконечном объёме жидкости всегда удовлетворяют неравенству

$$|p'_v| < \frac{2\sigma}{a_0^2} |a'|.$$

В том числе, рассматривая предельный случай, когда коэффициент теплопроводности жидкости стремится к бесконечности ($\lambda_l \rightarrow \infty$), легко видеть, что изменение давления p'_v будет равно нулю.

Поведение парового пузырька схоже с перевёрнутым маятником, чья неустойчивость порождается «скатывающей силой», возникающей при малом отклонении от основной вертикали. Для парового пузырька подобием «скатывающей силы» является перепад давления ($p'_{la} > 0$) при увеличении радиуса

пузырька. Однако, если пузырёк содержит не растворимый в жидкой фазе газ, то действие «скатывающей силы» уменьшается или полностью исчезает при выполнении (2.65). Сходное состояние возникает, если жидкость содержит равномерно распределённые по объёму пузырьки. Тогда паровые пузырьки увеличиваются только за счёт отбора тепла у жидкости, находящейся в содержащей пузырёк микрочастице. Таким образом, «скатывающая сила» может отсутствовать при определённом значении объёмного газосодержания, удовлетворяющего условию (2.64) при $p_{g0} = 0$.

О критическом объёмном содержании

Когда второе слагаемое в выражении (2.56), отвечающее с капиллярные силы на межфазной поверхности, превышает первое, значение равновесной скорости C_e является мнимым, что свидетельствует [102] о неустойчивости системы при удовлетворении её параметров указанному условию. В обратном случае, когда капиллярные силы не превосходят по величине первое слагаемое формулы, термодинамическое состояние системы является устойчивым. Условие, определяющее границу между устойчивыми и неустойчивыми состояниями, может быть получено путём приравнивания выражения для C_e к нулю:

$$p_{g0}((1 - k_0)H_{air} + k_0\alpha_{g0}\gamma/\beta) = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{a_0}. \quad (2.72)$$

Подчеркнём, что это условие тождественно тому, которое было получено в рамках равновесной модели для системы жидкости с парогазовыми включениями [255].

Для упрощения схемы численного моделирования, уравнение (2.72) может быть разрешено относительно объёмного содержания пузырьков. В первую очередь, запишем

$$\alpha_{g0} = \alpha_*, \quad \alpha_* = \left(\frac{2}{3} \frac{\sigma}{p_{g0}a_0} - (1 - k_0)H_{air} \right) \beta / k_0\gamma. \quad (2.73)$$

Если в пузырьках отсутствует нерастворимый газ ($k_0 = 1$), то

$$\alpha_* = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\rho_{l0}^0 a_0 C_l^2}, \quad C_L = \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{l0}^0} \frac{L}{\sqrt{c_l T_0}}. \quad (2.74)$$

Приняв во внимание соотношения (2.29) и условие $(1 - k_0)H_{air}p_{g0} = p_{a0}$ выражение (2.73) можно привести к виду:

$$\alpha_* = \left(\Delta p_v - \frac{4\sigma}{3a_0} \right) \frac{\beta}{k_0 \gamma p_{g0}}, \quad \Delta p_v = p_e(T_0) - p_0. \quad (2.75)$$

Учитывая уравнение Клапейрона–Клаузиуса (2.11) в линейном приближении, изменение давления Δp_v может быть записано через величину перегрева жидкости ΔT_0 как:

$$\Delta p_v = \frac{\rho_{v0}^0 L}{T_0} \Delta T_0. \quad (2.76)$$

Подставляя Δp_v из (2.76) в (2.75) получим:

$$\alpha_* = \left(\frac{\rho_{v0}^0 L}{T_0} \Delta T_0 - \frac{4\sigma}{3a_0} \right) \frac{\beta}{k_0 \gamma p_{g0}}. \quad (2.77)$$

Производя расчёты по уравнению (2.73) (либо (2.77)), в системе координат (α_{g0}, a_0) можно построить линии, разделяющие состояния системы на устойчивые и неустойчивые при фиксированных давлении p_0 и температуре T_0 . Значения параметров p_{g0} и k_0 , входящих в правую часть (2.73), вычисляются по следующим формулам:

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad k_0 = \frac{\rho_{v0}^0}{\rho_{v0}^0 + \rho_{a0}^0}, \quad \rho_{v0}^0 = \frac{p_e(T_0)}{B_v T_0}, \quad \rho_{a0}^0 = \frac{p_{g0} - p_e(T_0)}{B_g T_0}. \quad (2.78)$$

При этом масса газового зародыша определяется как

$$m_{g0} = \frac{4}{3} \pi a_0^3 \rho_{g0}^0.$$

2.4 Сравнение с экспериментальными данными

Произведём сравнение с экспериментальными данными, приведёнными в работе Е. Silberman [53]. Акустические измерения проводились в вертикальной трубе круглого сечения. Труба заполнялась водой до различного уровня, а воздушно-водяная смесь создавалась путём добавления пузырьков воздуха из отверстий на дне трубы. Звукогенераторы диафрагменного типа располагались заподлицо с дном трубы. Верхняя поверхность трубы была открыта и имелся

контакт с атмосферой, так что звуковые волны почти полностью отражались, а воздух свободно курсировал. Измерения звукового давления проводились с помощью небольших гидрофонов, установленных вертикально внутри трубы.

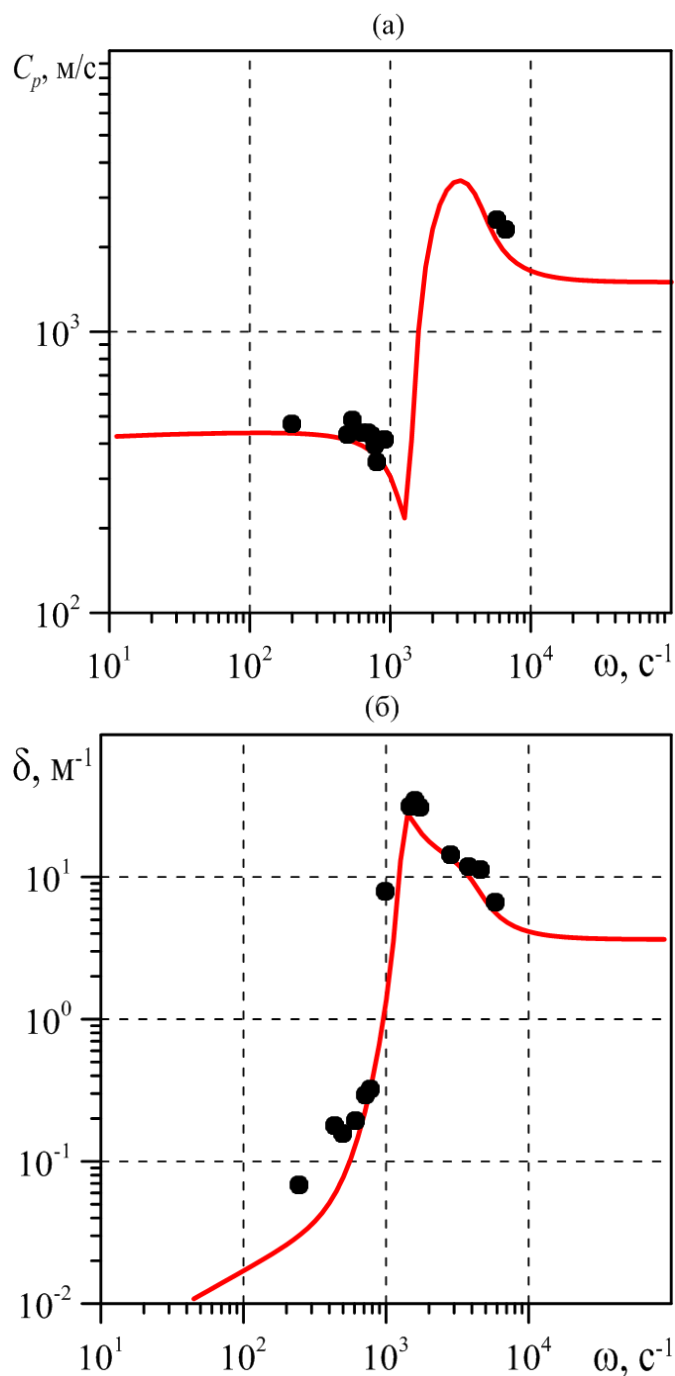


Рис. 2.5 — Сопоставление результатов теоретических исследований (сплошная линия) с экспериментальными данными (символы \bullet) работы [53]. На фрагменте (а) зависимость фазовой скорости, на фрагменте (б) — коэффициента затухания от частоты возмущений ω при $a_0 = 3.1 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 5.8 \cdot 10^{-4}$.

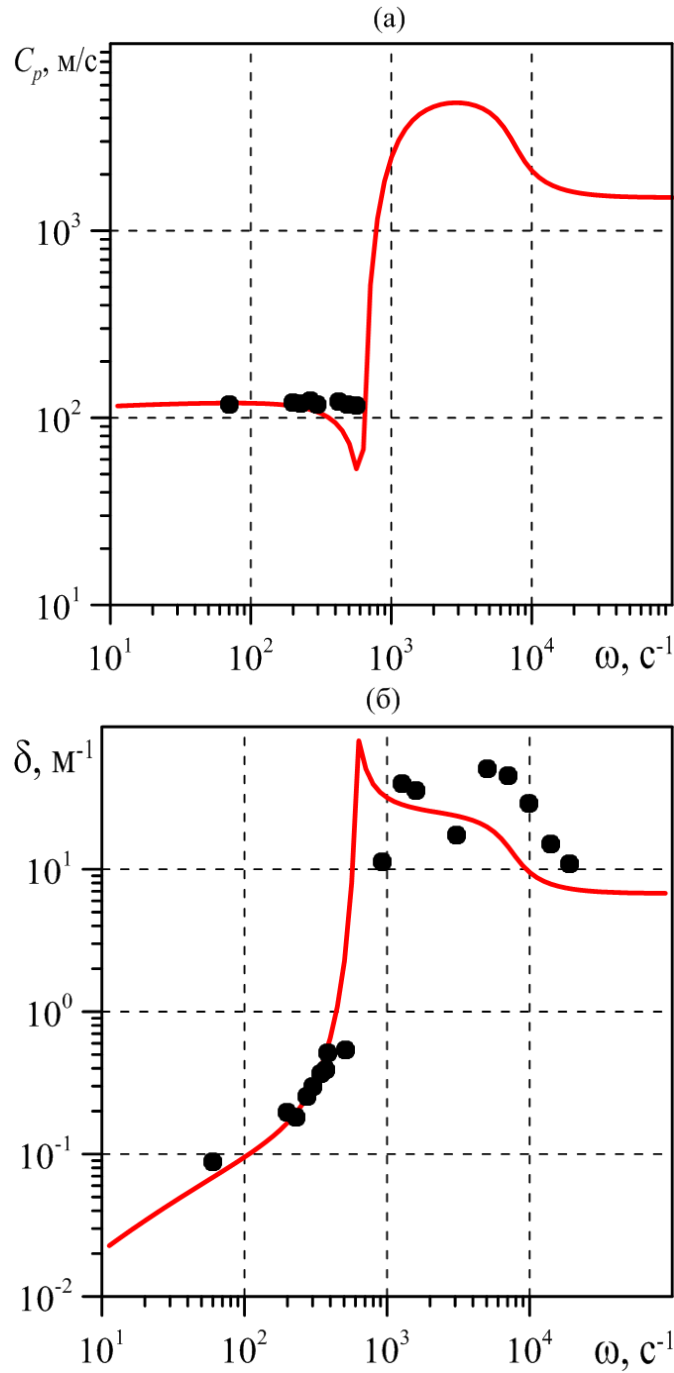


Рис. 2.6 — Сопоставление результатов теоретических исследований (сплошная линия) с экспериментальными данными (символы \bullet) работы [53]. На фрагменте (а) зависимость фазовой скорости, на фрагменте (б) — коэффициента затухания от частоты возмущений ω при $a_0 = 2.3 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 1.1 \cdot 10^{-2}$.

При численных расчётах использовались следующие общие данные: $\rho_{l0}^0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{g0}^0 = 1.31 \text{ кг/м}^3$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Пар в пузырьках отсутствовал. Рис. 2.5 и 2.6 демонстрируют сравнительные данные численных расчётов и экспериментов из работы [53] для фазовой скорости и коэффициента затухания, зависящих

от частоты возмущений. Экспериментальные точки, приведённые на рис. 2.5, соответствуют значениям параметров $a_0 = 1.9 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 5.8 \cdot 10^{-4}$. Численные расчёты были сделаны при $a_0 = 3.1 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 5.8 \cdot 10^{-4}$. Из представленных графиков видно, что имеется хорошее согласование результатов расчётов с экспериментальными данными.

На для рис. 2.6 представлено сравнение с экспериментальными данными, которые были получены при $a_0 = 2.74 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 1.0 \cdot 10^{-2}$. Для численных расчётов были приняты значения параметров $a_0 = 2.3 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 1.1 \cdot 10^{-2}$. Рисунок демонстрирует удовлетворительное согласование с экспериментальными данными, однако наличие двух пиков на фрагменте б говорит в пользу полидисперсности смеси [207], которым возможно объяснить некоторое несовпадение.

В заключении следует подчеркнуть достаточную согласованность теоретических расчётов по дисперсионному соотношению (2.53) с данными эксперимента [53]. Сравнение с результатами, полученными ранее другими авторами для данного эксперимента ([17], [57], [207]), позволяет нам с уверенностью считать проверенной разработанную модель и проводить с её помощью дальнейшие численные исследования.

2.5 Параметрический анализ акустических возмущений в пузырьковой жидкости

2.5.1 Влияние диффузии

Для проведения расчётов с использованием выведенного дисперсионного уравнения (2.53) и его следствия (2.56), значения констант и теплофизических параметров зададим согласно справочным данным [101] и приведём ниже: $\rho_{i0}^0 = 10^3$ кг/м³, $\rho_{g0}^0 = 0.6$ кг/м³, $c_l = 4.2 \cdot 10^2$ Дж/(кг·К), $L = 2.256 \cdot 10^6$ Дж/кг, $\lambda_l = 0.6$ Вт/(м·К), $\mathbf{v}_l^{(\mu)} = 10^{-6}$ м²/с, $\sigma = 6 \cdot 10^2$ Н/м.

Рис. 2.7 демонстрирует несколько дисперсионных кривых на плоскостях (C_p, T) и (δ, T) в условиях $n_0 = 10^9$ м⁻³, $a_0 = 2.2 \cdot 10^{-5}$ м и $\alpha_{g0} = 4.7 \cdot 10^{-5}$, масса единичного зародыша положена равной $m_{g0} = 8 \cdot 10^{-16}$ кг. Расчётные данные позволяют заключить, что с ростом волновой частоты ω в заданных пределах

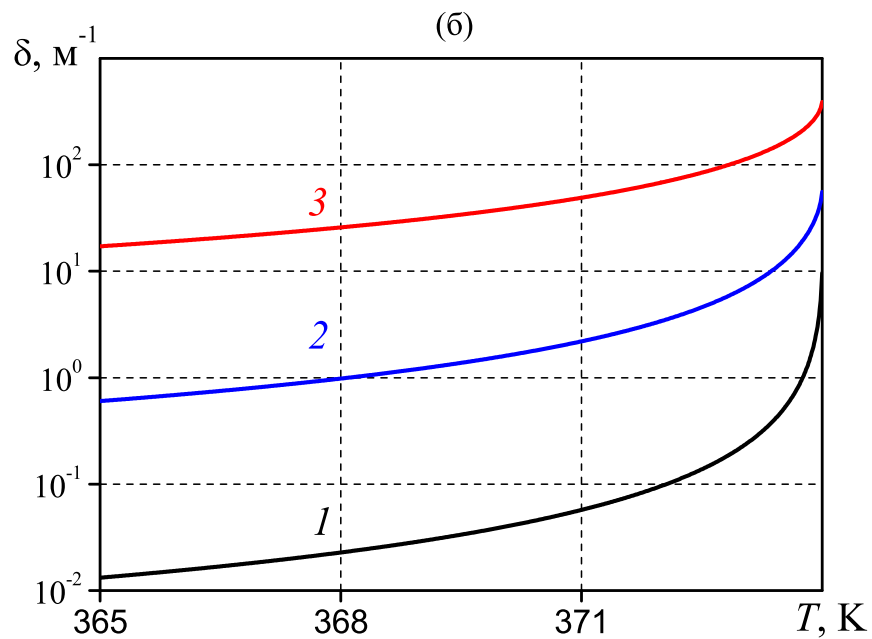
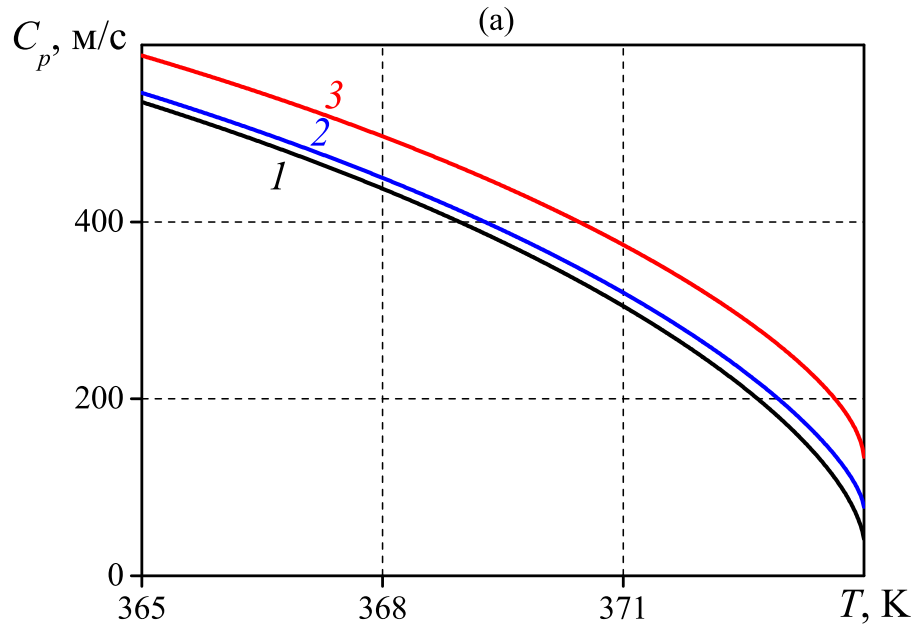


Рис. 2.7 — Группы кривых, демонстрирующих зависимости фазовых скоростей (а) и коэффициентов затухания (б) от равновесной температуры смеси для различных частот волновых возмущений: 1 — $\omega = 10^3 \text{ с}^{-1}$, 2 — 10^4 с^{-1} , 3 — 10^5 с^{-1}

температур и начальных параметров смеси, значения фазовой скорости и коэффициента затухания растут. К тому же, увеличение фазовой скорости можно

считать незначительным, а коэффициент затухания, напротив, изменяется до нескольких порядков (рис. 2.7, фрагмент б).

Согласно выводам работы [244], для жидкости с парогазовыми пузырьками можно ввести несколько характерных частот, а именно ω_v , ω_{T_g} , ω_R и ω_C . Каждой из них можно придать определённый физический смысл: ω_v – частота, при которой за период поступательного колебания пузырька относительно жидкости глубина проникания поперечной волны, инициируемой межфазным скольжением, имеет такой же порядок, что и радиус; ω_{T_g} – частота при которой толщины температурных пограничных слоев, обусловленных радиальными движениями пузырьков, сравнимы с размерами пузырьков; ω_R – частота собственных колебаний. Эти частоты для достаточно крупнодисперсных смесей ($a_0 \geq 10^{-5}$ м) соотносятся следующим образом:

$$\omega_v \leq \omega_{T_g} < \omega_R < \omega_C.$$

Если частота возмущений, удовлетворяет условию $\omega \leq \omega_{T_g}$, то в зависимости от объёмного содержания пузырьков может преобладать вязкостная или тепловая диссипация. Причём с ростом объёмного содержания газовой фазы доля вязкостной диссипации растёт. При $\omega \geq \omega_{T_g}$ преобладающую роль играет тепловая диссипация. В диапазоне $\omega_R \div \omega_C$ происходит аномально сильное затухание, поэтому этот диапазон частот является полосой непропускания (или «непрозрачности»). При достаточно больших частотах ($\omega \geq \omega_C$) радиальное движение пузырьков «замораживается» и, согласно используемой в [244] модели, в затухании возмущений доминирующую роль приобретают двухскоростные эффекты. Но, при $\omega_R > \omega_C$ затухание возмущений определяется акустической разгрузкой пузырьков.

Рассмотрим асимптотику дисперсионного соотношения при условиях

$$|y_l| \gg 1, \quad |y_g| \gg 1, \quad |z| \gg 1, \quad (2.79)$$

которые означают, что температурные и диффузионные неравновесности между фазами реализуются в тонких слоях вблизи поверхности раздела фаз. При этом $|y_l|$, $|y_g|$ и $|z|$ можно интерпретировать как отношения, радиуса пузырьков к толщине температурных и диффузионных пограничных слоев. В (2.79) второе и третье условия более сильные и, поскольку обычно $Le_g \sim 1$, то из них

следует

$$\sqrt{\omega} \gg \sqrt{\omega_{T_g}}, \quad \omega_{T_g} = \frac{\alpha_g}{a_0^2}. \quad (2.80)$$

При выполнении (2.80) можно записать следующие асимптотические соотношения

$$\text{shv}(x) = \text{kh}(x) = \frac{3}{x}, \quad \frac{\text{shv}(y_l)}{\text{kh}(z)} = \frac{1}{\sqrt{\text{Le}_l}}, \quad \frac{\text{kh}(y_g)}{\text{kh}(z)} = \frac{1}{\sqrt{\text{Le}_g}} \quad (2.81)$$

и тогда выражение для Q можно представить в виде

$$Q = 1 + 3\frac{\beta_a}{y_g}, \quad \beta_a = \frac{\gamma - 1 + \frac{\gamma k_0 E}{(1 - k_0)\sqrt{\text{Le}_g}}}{1 + \frac{\gamma k_0}{(1 - k_0)H_{air}\beta\sqrt{\text{Le}_l}}}, \quad E = \frac{B_v}{B_{air}}. \quad (2.82)$$

Рассмотрим частоты, которые, кроме (2.80), удовлетворяют также условию

$$\frac{|y_g|}{3\beta_a} \gg 1. \quad (2.83)$$

Отсюда можно получить

$$\sqrt{\omega} \gg \sqrt{\omega_{T_f}}, \quad \omega_{T_f} = 3\beta_a\sqrt{\omega_{T_g}}.$$

Если рассматривать отдельно газовые и паровые пузырьки, то выражение для ω_{T_f} переписется в следующем виде

$$\omega_{T_f} = 3(\gamma - 1)\sqrt{\omega_{T_g}} \quad (k = 0) \quad \text{и} \quad \omega_{T_f} = 3\beta\sqrt{\omega_{T_g}} \quad (k = 1). \quad (2.84)$$

Легко видеть, что коэффициент $\frac{\beta_a}{(\gamma - 1)}$ при переходе от газовых пузырьков ($k = 0$) к паровым ($k = 1$) непрерывно меняется от единицы до $\frac{\beta_a}{(\gamma - 1)}\sqrt{\frac{\alpha_l}{\alpha_g}}$.

Для большинства веществ обычно $\beta_a\sqrt{\frac{\alpha_l}{\alpha_g}} \gg 1$, поэтому условие (2.84) более сильное, чем (2.80). Тогда для частот, удовлетворяющих (2.84) и в то же время значительно меньших, чем резонансная частота

$$\omega^2 \ll \omega_R^2, \quad \omega_R = \frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{3\gamma p_{l0}}{\rho_{l0}^0}},$$

для фазовой скорости и коэффициента затухания, пренебрегая влиянием вязкости и поверхностным натяжением, имеем

$$C_p = \sqrt{\left(\frac{1 - \alpha_{g0}}{C_l}\right)^2 + \frac{\rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}) \alpha_{g0}}{\gamma p_0}}, \quad (2.85)$$

$$\delta = \frac{3}{2} \beta_a C_p \sqrt{\frac{\rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}) \alpha_{g0}}{\gamma p_0}} \sqrt{\frac{\omega_{Tg} \omega}{2}},$$

где $p_0 = p_{l0} \simeq p_{g0}$. Отсюда, если пренебречь сжимаемостью жидкости получим

$$C_p = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}) \alpha_{g0}}}, \quad \delta = \frac{3}{2} \beta_a \sqrt{\frac{\rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}) \alpha_{g0}}{\gamma p_0}} \sqrt{\frac{\omega_{Tg} \omega}{2}}. \quad (2.86)$$

Таким образом, в диапазоне частот

$$\omega_{Tf} \ll \omega \ll \omega_R$$

теплообмен и фазовые переходы в плане определения скорости распространения малых возмущений «замораживаются», т.е. они мало сказываются на её значении. Если для достижения скоростей, определяемых по (2.85) и (2.86), в случае газовых пузырьков необходимо только, чтобы частота возмущений была настолько большой, чтобы радиус пузырьков был значительно больше, чем толщина температурного пограничного слоя в газовой сфере, то в случае парогазовых и чисто паровых пузырьков этого недостаточно. И здесь отношение этих величин должно быть намного больше, чем параметр, который, в свою очередь, может принимать значения, гораздо превышающие единицу. Из-за его сильного изменения при переходе от газовых пузырьков к паровым коэффициент затухания также меняется в значительных пределах.

Вблизи резонансной частоты (т.е. $\omega \simeq \omega_R$) имеем

$$C_p = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}) \alpha_{g0}}} \sqrt{\frac{2\varepsilon_T}{\sqrt{2} - 1}}, \quad (2.87)$$

$$\delta = \omega_R \sqrt{\frac{\rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}) \alpha_{g0}}{\gamma p_0}} \sqrt{2\varepsilon_T (\sqrt{2} - 1)},$$

где $\varepsilon_T = 3\beta_a \sqrt{2 \frac{\omega_{T_g}}{\omega_R}}$.

Для частот, превышающих верхнюю часть полосы непропускания

$$\omega > \omega_C = \omega_R \sqrt{1 + \frac{\alpha_{g0}}{\alpha_{g*}}}, \quad \alpha_{g*} = \frac{\gamma p_0}{\rho_{l0}^0 C_l^2} \quad (2.88)$$

для фазовой скорости и коэффициента затухания можно записать следующие асимптотические выражения

$$C_p = C_l, \quad \delta = \frac{9\beta_a \alpha_{g0} C_l}{2 \alpha_{l0} a^2} \frac{\omega_R^2}{(\omega_R^2 - \omega^2)^2} \sqrt{\frac{\omega_{T_g} \omega}{2}}. \quad (2.89)$$

Опираясь на полученные соотношения, проиллюстрируем (рис. 2.8) как изменяются вблизи точки кипения фазовая скорость и коэффициент затухания с ростом волновых частот при равновесных температурах $T_0 = 372$ К, 373 К и 374 К в следующих условиях: $p_0 = 10^5$ Па ($T_e(p_0) = 373$ К). Сплошные линии соответствуют наличию диффузии в расчётах, штриховые - отсутствию, число зародышей $n_0 = 10^9$ м⁻³, их массы $m_{g0} = 8 \times 10^{-16}$ кг. Указанное значение m_{g0} есть критическая масса зародыша при температуре $T_0 = 374$ К, найденная из уравнения (2.67). Соответственно каждому температурному значению, равновесный радиус и объёмная концентрация пузырьков полагались равными: $a_0 = 1.1 \cdot 10^{-5}$, $1.3 \cdot 10^{-5}$ и $2.2 \cdot 10^{-5}$ м и $\alpha_{g0} = 6 \cdot 10^{-6}$, $9.3 \cdot 10^{-6}$ и $4.7 \cdot 10^{-5}$. Массовая доля пара в каждом отдельном случае равнялась $k_0 = 0.816$ (372 К), 0.874 (373 К) и 0.971 (374 К). Подытожив результаты вычислений, отметим, что влияние диффузии наиболее значимо в низкочастотной области, где температура среды приближается к значению, для которого масса зародышей m_{g0} является критической (2.67). В диапазоне высоких частот ($\omega \geq \omega_R$, где ω_R – частота Миннаэрта [137]) включение диффузии в расчёты не вносит значимых поправок в изменение фазовых скоростей и коэффициентов затухания. Также из рис. 2.8, фрагмент **б** видно, что с увеличением паросодержания коэффициент затухания растёт, что в конечном счёте приводит к сглаживанию дисперсионных кривых в области частот, где сказывается радиальная инерция пузырьков.

Далее обратимся к расчёту зависимостей фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущения ω при различных концентрациях $n_0 = 10^{10}$ м⁻³, 10^{11} м⁻³, 10^{12} м⁻³, начальной температуре 374 К, соответствующей

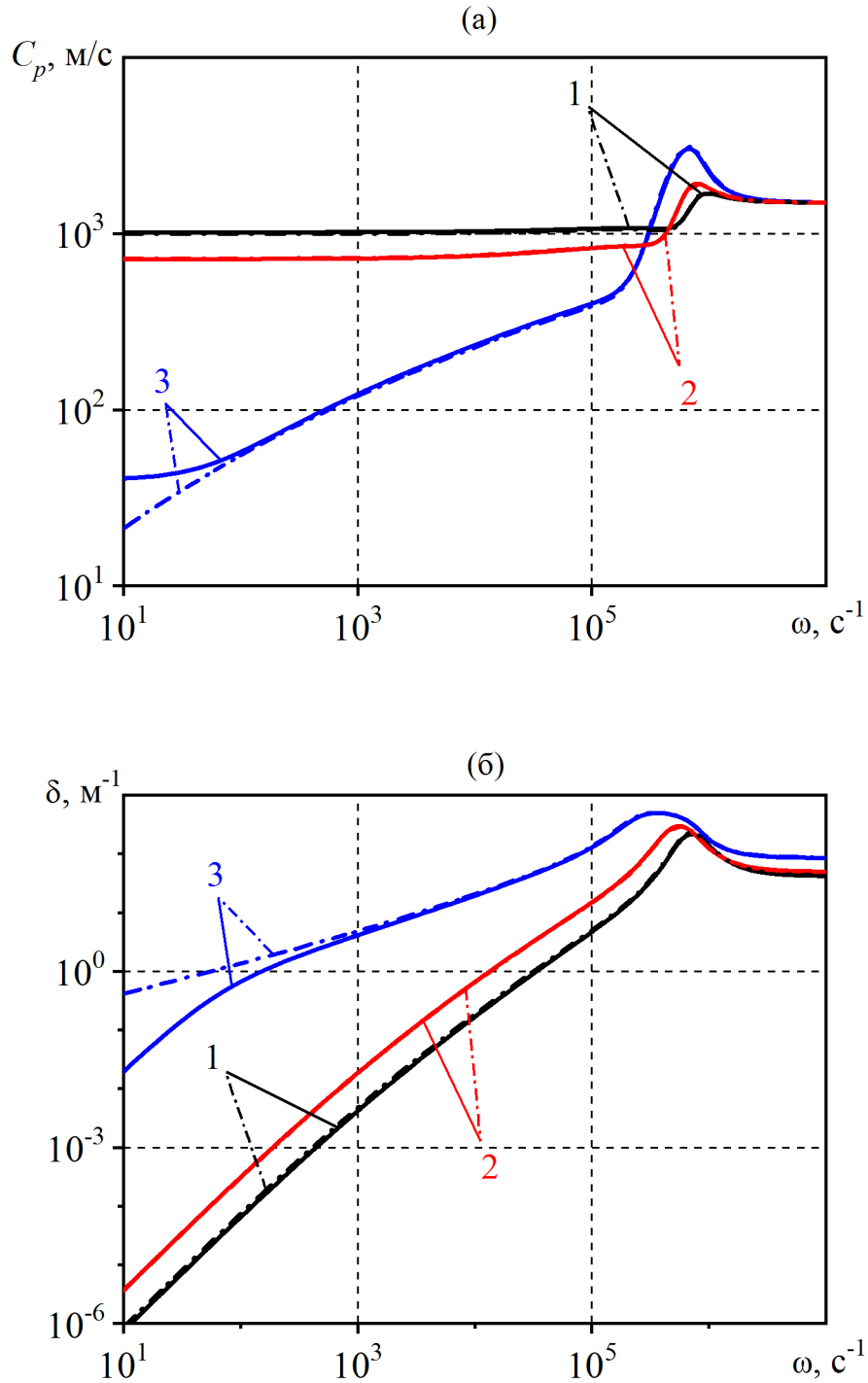


Рис. 2.8 — Зависимость фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущений вблизи точки кипения для различных значений равновесной температуры: 1 — $T_0 = 372$ К, 2 — 373 К, 3 — 374 К

щем равновесном радиусе 2.24×10^{-5} м и массе зародышей $m_{g0} = 8 \times 10^{-16}$ кг. Рис. 2.9 демонстрирует сходства и различия дисперсионных кривых с учётом диффузии (сплошные линии) и без неё (штрих-пунктирные линии). Отметим,

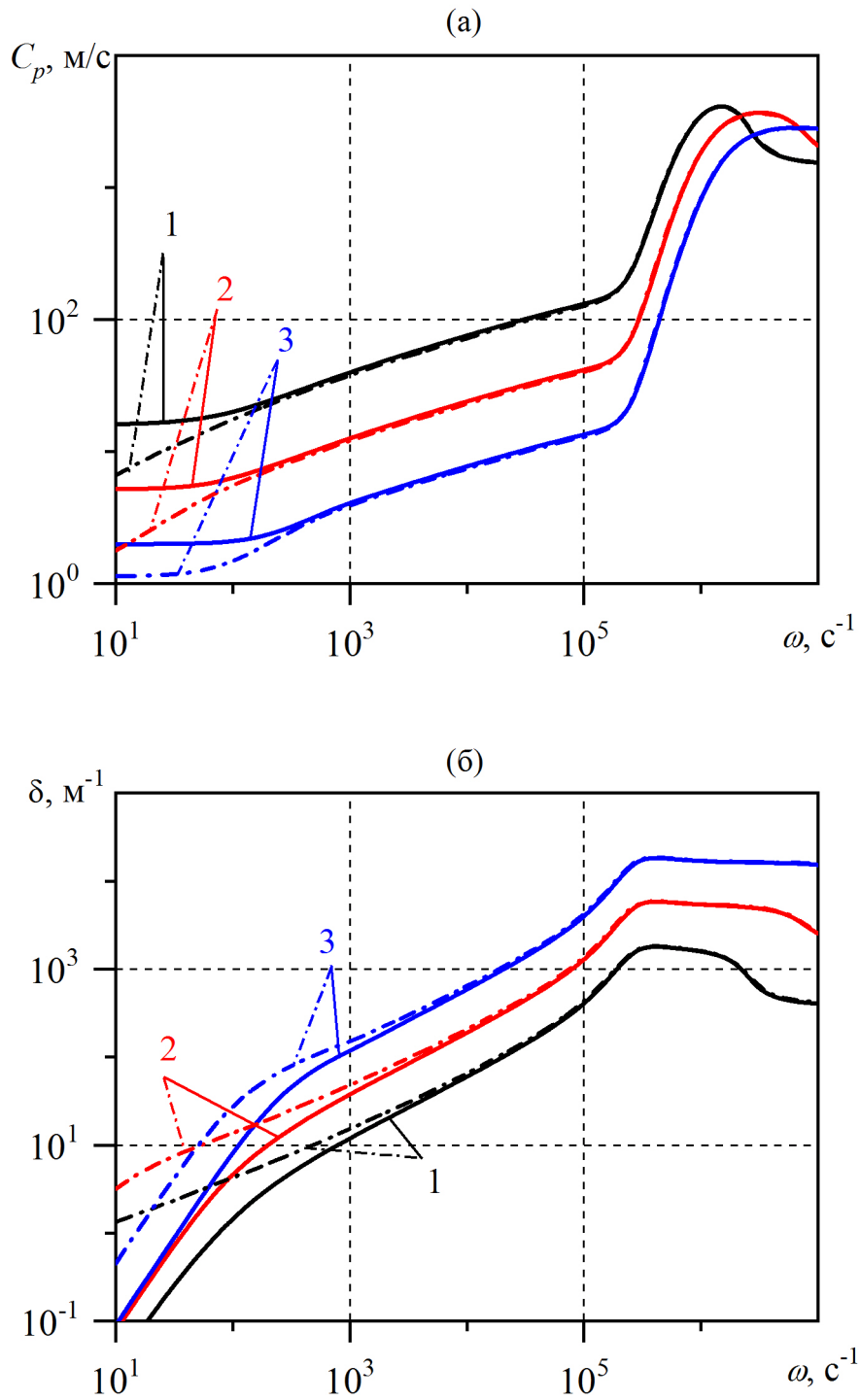


Рис. 2.9 — Влияние числа зародышей на значения фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) для трёх значений n_0 : 1 — $10^{10} m^{-3}$, 2 — $10^{11} m^{-3}$, 3 — $10^{12} m^{-3}$ при температуре 374 К с учётом диффузии (сплошные линии) и без её учёта (штрих-пунктирные)

что в низкочастотной области ($\omega \leq 10^3 s^{-1}$), когда частота возмущений ниже собственной частоты колебаний пузырьков данного радиуса, процесс диффу-

зии, как и на рис. 2.8, снижает фазовую скорость и коэффициент затухания. Из рисунка видно, что происходит снижение фазовой скорости и увеличение величины коэффициента затухания при повышении концентрации газовых зародышей вне зависимости от учёта диффузии. Однако, учёт диффузии вносит существенную поправку, которая больше сказывается для меньшего числа пузырьков (рис. 2.9, фрагмент б). Это связано с тем, что при низких частотах ($\omega \leq \omega_M$), когда температурные возмущения в жидкости охватывают весь объём жидкости в ячейке вокруг пузырька, степень температурной неравновесности в жидкости вокруг пузырьков снижается не только за счёт уменьшения радиуса ячеек, но и за счёт диффузионных эффектов. Аналогичный эффект имеет место для парогазокапельной системы [155], [245] (в частности, тумана). При низких частотах ($\omega \leq \omega_M$) изменения температуры охватывают весь объём жидкости в микроячейке, и степень неравновесности поля её температур снижается с уменьшением радиуса ячеек. В свою очередь, учёт диффузии в этой области приводит к уменьшению коэффициента затухания с увеличением числа зародышей, что можно объяснить дополнительным снижением температурной неравновесности за счёт процессов массопереноса.

2.5.2 Влияние начального радиуса и объёмного содержания пузырьков

Произведём расчёты равновесной скорости звука в среде, пользуясь формулой (2.56), в условиях $\omega \leq \omega_l^{(T)}$ ($\omega_l^{(T)} = \mathbf{v}_l^{(T)} \alpha_{g0}^{2/3} / a_0$). Рис. 2.10 представляет зависимости от температуры воды T_0 для $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (вверху) и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (внизу). Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют начальным радиусам $a_0 = 10^3, 10^4, 10^5$ и 10^6 м, начальное давление в смеси $p_0 = 0.1$ МПа, остальные параметры аналогичны пункту 2.5.1.

Результаты расчётов демонстрируют рост равновесной скорости при сокращении размера пузырьков в обоих случаях, поскольку капиллярные силы, действующие на межфазной поверхности, и фазовые переходы делают мелкие пузырьки «жестче». Также стоит отметить, что для обоих случаев расположение линий на графике соответствует характеру изменения радиуса пузырьков. Линия 4 располагается выше остальных и, в целом, выбивается из общей карти-

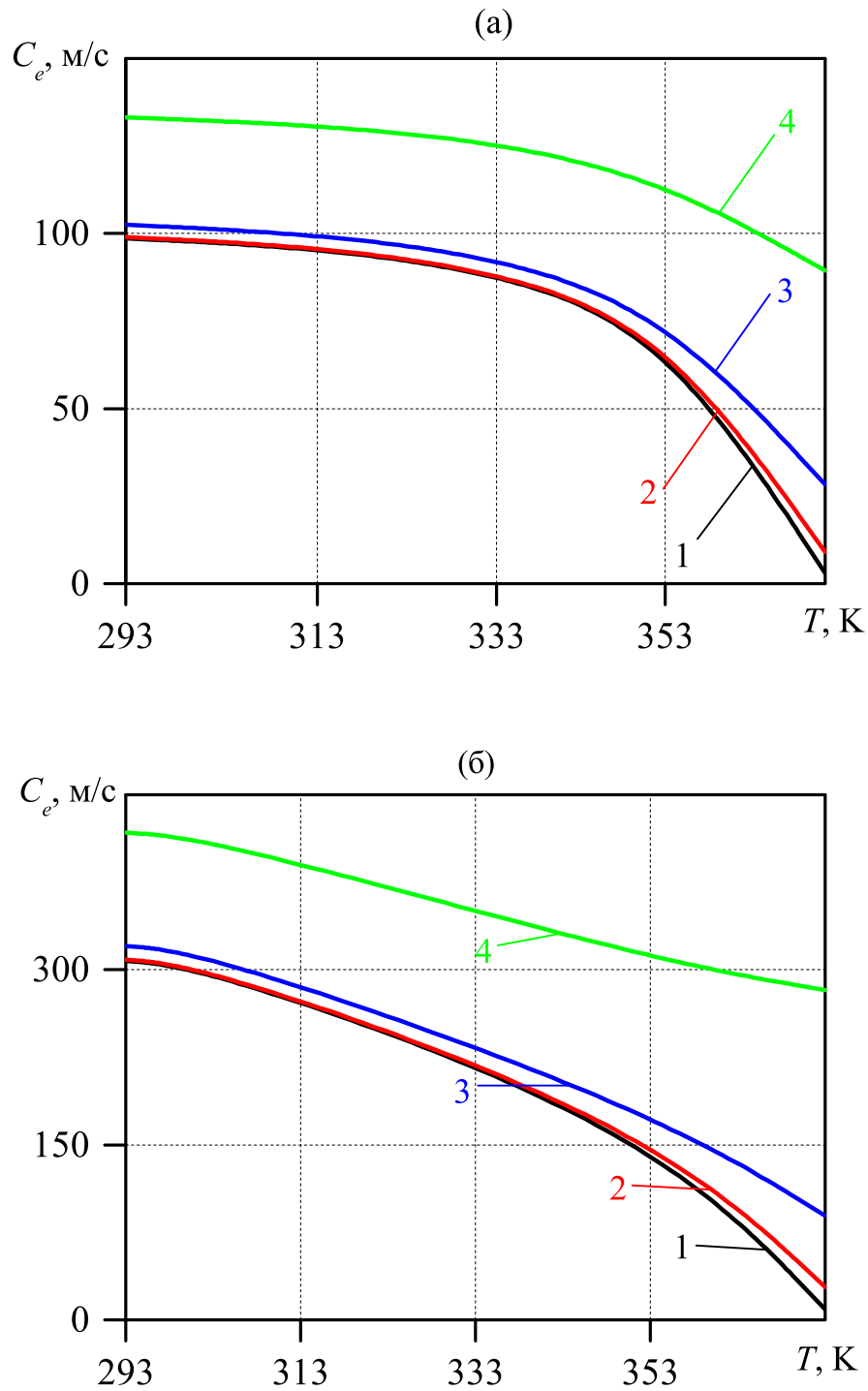


Рис. 2.10 — Изменение равновесной скорости звука с ростом температуры при различных значениях начального радиуса ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$ вверху и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ внизу): 1 — $a_0 = 10^{-3}$ м, 2 — 10^{-4} м, 3 — 10^{-5} м, 4 — 10^{-6} м.

ны, так как радиус $a_0 = 10^{-6}$ м далёк от равновесного при выбранном давлении и температуре (его значение 2.18×10^{-5} м).

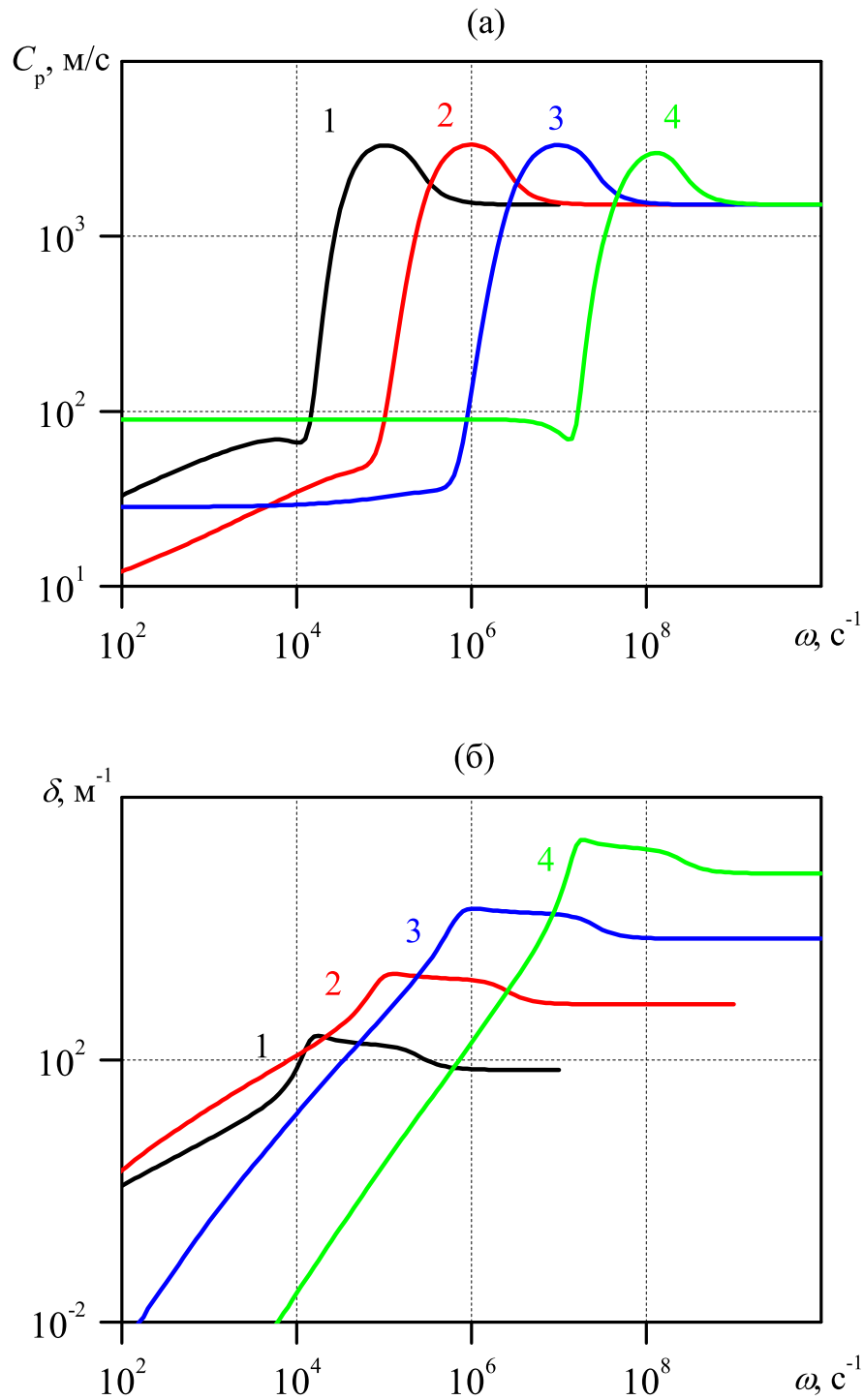


Рис. 2.11 — Влияние начального радиуса включений на фазовую скорость (а) и коэффициент затухания (б) волны: 1 — $a_0 = 10^{-3}$ м, 2 — 10^{-4} м, 3 — 10^{-5} м, 4 — 10^{-6} м.

По рис. 2.11 можно сравнить дисперсионные кривые для тех же начальных радиусов a_0 при $T_0 = 373$ К. Необходимо дополнить имеющиеся данные значениями равновесных концентраций пара в пузырьках $k_0 = 0.998, 0.982,$

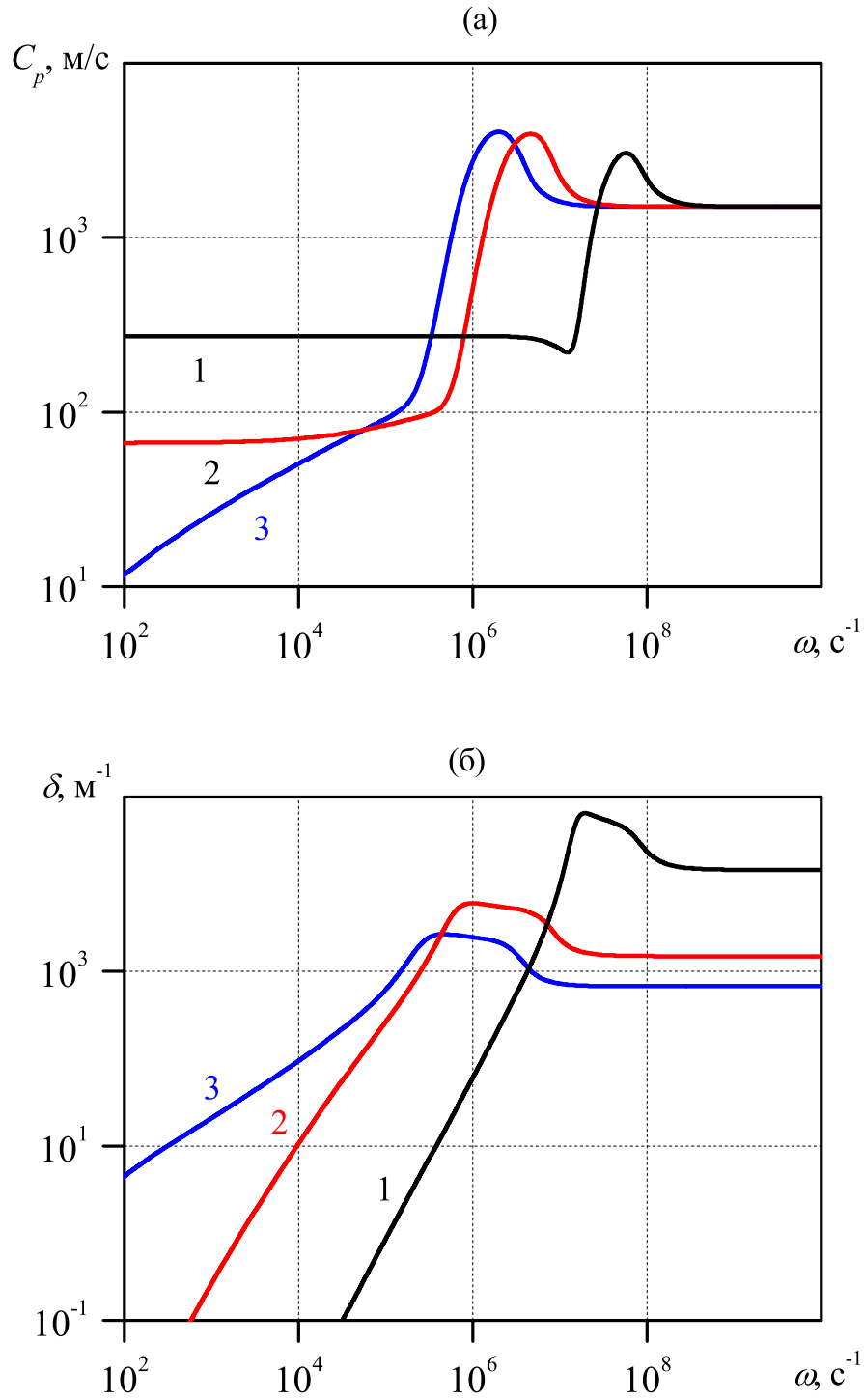


Рис. 2.12 — Воздействие начального радиуса парогазовых пузырьков на фазовую скорость (а) и коэффициент затухания (б) при перегреве $\Delta T_0 = 1$ К:

$$1 - a_0 = 10^{-6} \text{ м}, 2 - 10^{-5} \text{ м}, 3 - 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

0.842 и 0.347 для каждого радиуса соответственно. Согласно вычислениям, в низкочастотной области $\omega \ll \omega_R$ фазовая скорость для радиуса $a_0 = 10^{-6}$ м составляет $C_p \approx 90.73$ м/с. При столь малом радиусе пузырьков парциальное

давление газа существенно влияет на упругость включений, в то же время роль фазовых переходов значительно снижается. Исходя из полученных зависимостей (рис. 2.11, б) в диапазоне частот $\omega \leq 10^4 \text{ с}^{-1}$ коэффициент затухания акустического возмущения немонотонно изменяется в соответствии с радиусом пузырьков.

Рис. 2.12 даёт представление о характере дисперсионных зависимостей для нескольких значений начального радиуса включений a_0 при перегреве в $\Delta T_0 = 1 \text{ К}$. Наибольшее среди выбранных значений совпадает с равновесным радиусом a_0^* , находящимся на границе зоны устойчивости. Данные позволяют сделать вывод, что коэффициент затухания резко возрастает при значениях начального радиуса a_0 , близких к a_0^* . В диапазоне низких частот двукратный рост радиуса пузырьков ведёт к повышению коэффициента затухания на 2–3 порядка и уменьшению фазовой скорости в несколько раз.

Рис. 2.13 и 2.14 дают наглядное представление об изложенном выше результате в форме зависимостей фазовой скорости (фрагменты **а**) и коэффициента затухания (фрагменты **б**) волнового возмущения в смеси от радиуса включений при $T_0 = 373 \text{ К}$ и $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (рис. 2.13) и от температуры при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и $a_0 = 10^{-3} \text{ м}$ (рис. 2.14). Представленные графики подчёркивают отличие в развитии процесса в среде с достаточно мелкими пузырьками. Для фиксированного значения частоты возмущений ω на начальном участке кривой коэффициент затухания увеличивается при росте радиуса пузырьков. Иными словами, это указывает на малый вклад неравновесности за счёт межфазного теплообмена и фазовых переходов в более мелких пузырьках. По мере увеличения радиуса пузырька приобретают влияние перепады температуры и концентрации пара в тонком слое вблизи его межфазной поверхности. Следовательно, с ростом радиуса пузырьков уменьшается удельный объём двухфазной системы, в котором имеет место межфазная неравновесность. Это влечёт за собой определённую фиксацию коэффициента затухания и даже его снижение с увеличением пузырьков при постоянном объёмном содержании. Кроме того, линии зависимостей рис. 2.14 отражают тенденцию к немонотонности с ростом частоты волнового возмущения.

Рис. 2.15 и 2.16 иллюстрируют расчёты зависимостей фазовой скорости (фрагменты **а**) и коэффициента затухания (фрагменты **б**) от частоты возмущений при различных значениях начального объёмного содержания α_{g0} для

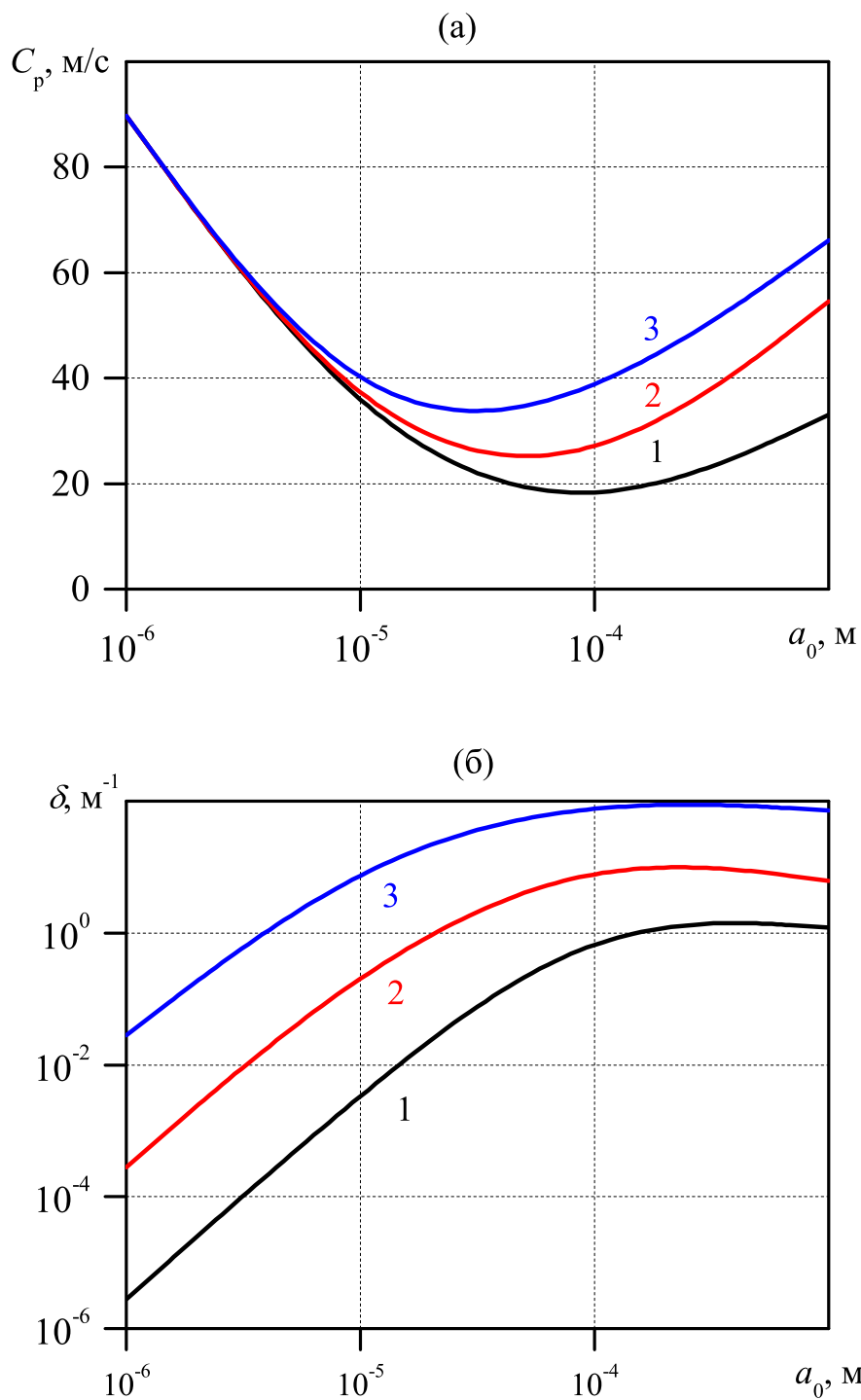


Рис. 2.13 — Дисперсионные кривые фазовой скорости акустического возмущения в смеси (а) и коэффициента его затухания (б) в зависимости от радиуса пузырьков для $T_0 = 373$ К и начального объёмного газосодержания $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ при различных значениях частоты возмущения: 1 — $\omega = 10^{-2}$ с $^{-1}$, 2 — 10^{-3} с $^{-1}$, 3 — 10^{-4} с $^{-1}$.

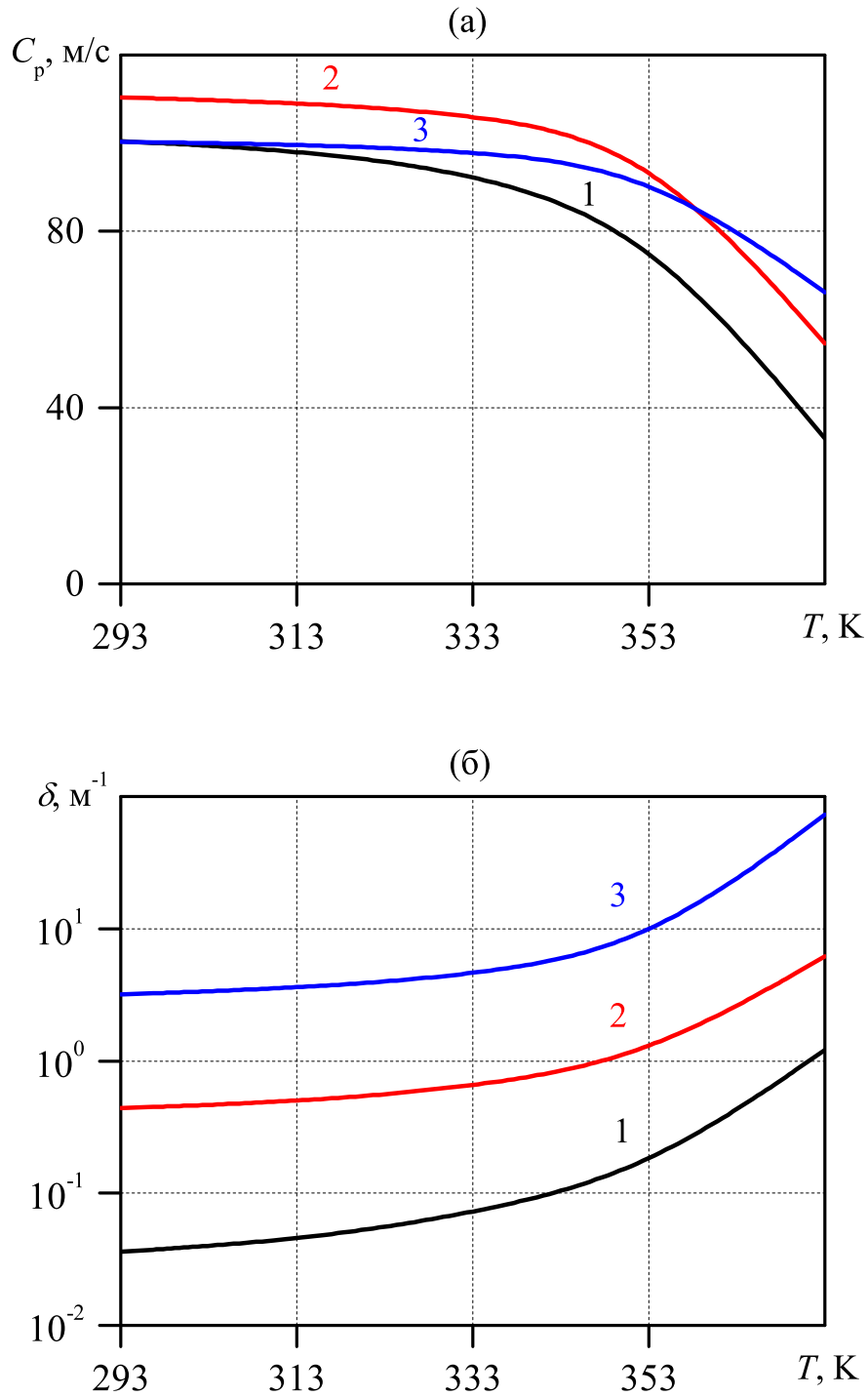


Рис. 2.14 — Зависимости фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) акустической волны смеси от равновесной температуры для $a_0 = 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ при различных частотах: 1 — $\omega = 10^{-2}$ с $^{-1}$, 2 — 10^{-3} с $^{-1}$, 3 — 10^{-4} с $^{-1}$.

крупно- ($a_0 = 10^{-3}$ м) (рис. 2.15) и мелкодисперсной смеси ($a_0 = 10^{-6}$ м) (рис. 2.16). Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям $\alpha_{g0} = 10^{-1}$, 10^{-2} , 10^{-3} и 10^{-4} . Взглянув на графики, можно отметить, что, с уменьшением объёмного со-

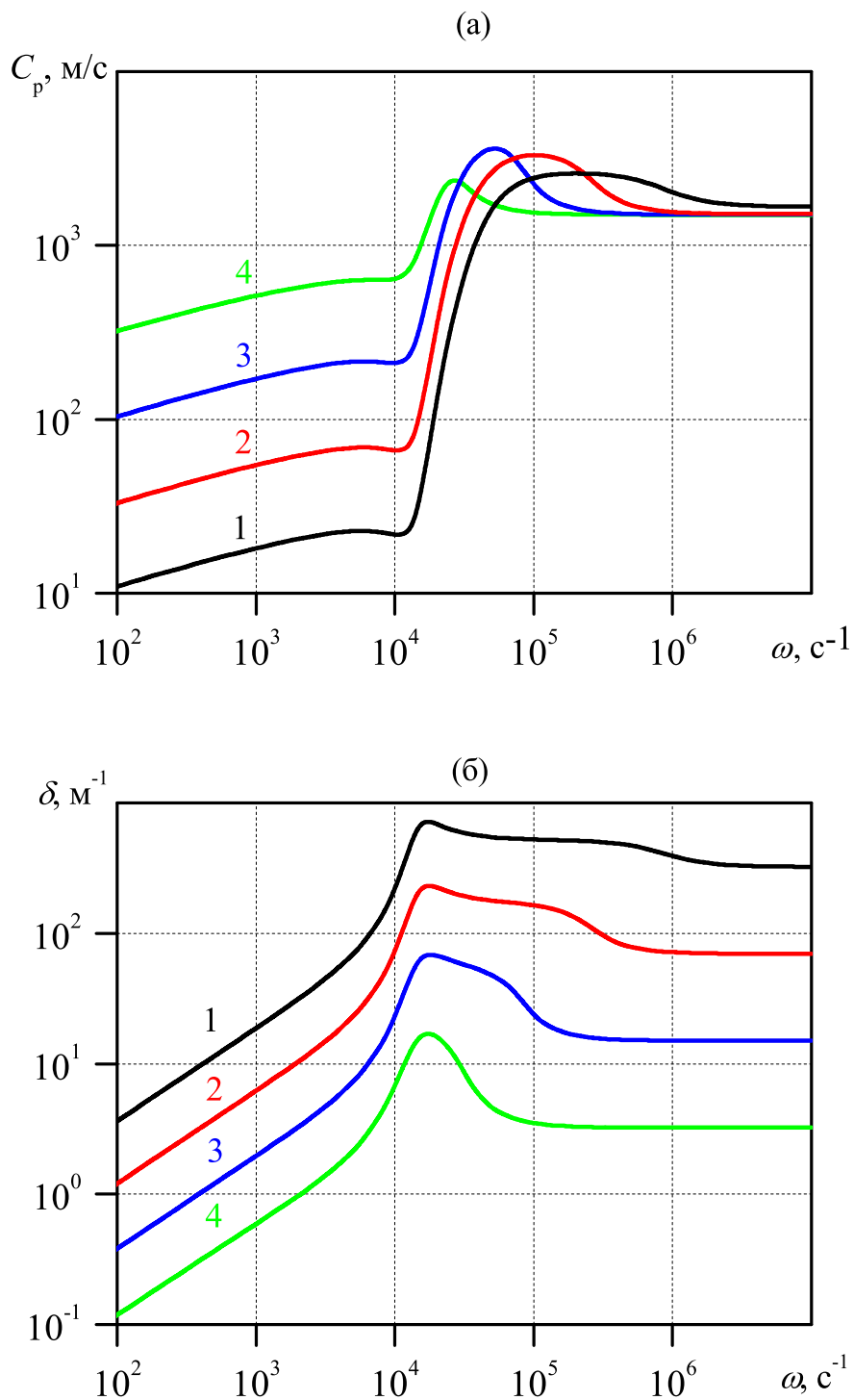


Рис. 2.15 — Влияние начального объёмного газосодержания α_{g0} на скорость возмущения (а) и коэффициент его затухания (б) при $a_0 = 10^{-3}$ м. Линии 1, 2, 3 и 4 на рисунке соответствуют значениям $\alpha_{g0} = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ и 10^{-4} .

держания пузырьков, фазовая скорость возрастает примерно в 10 раз в области низких частот ($\omega \ll \omega_R$). Для крупнодисперсной смеси (рис. 2.15) также характерно определённое увеличение фазовой скорости с ростом частоты возмуще-

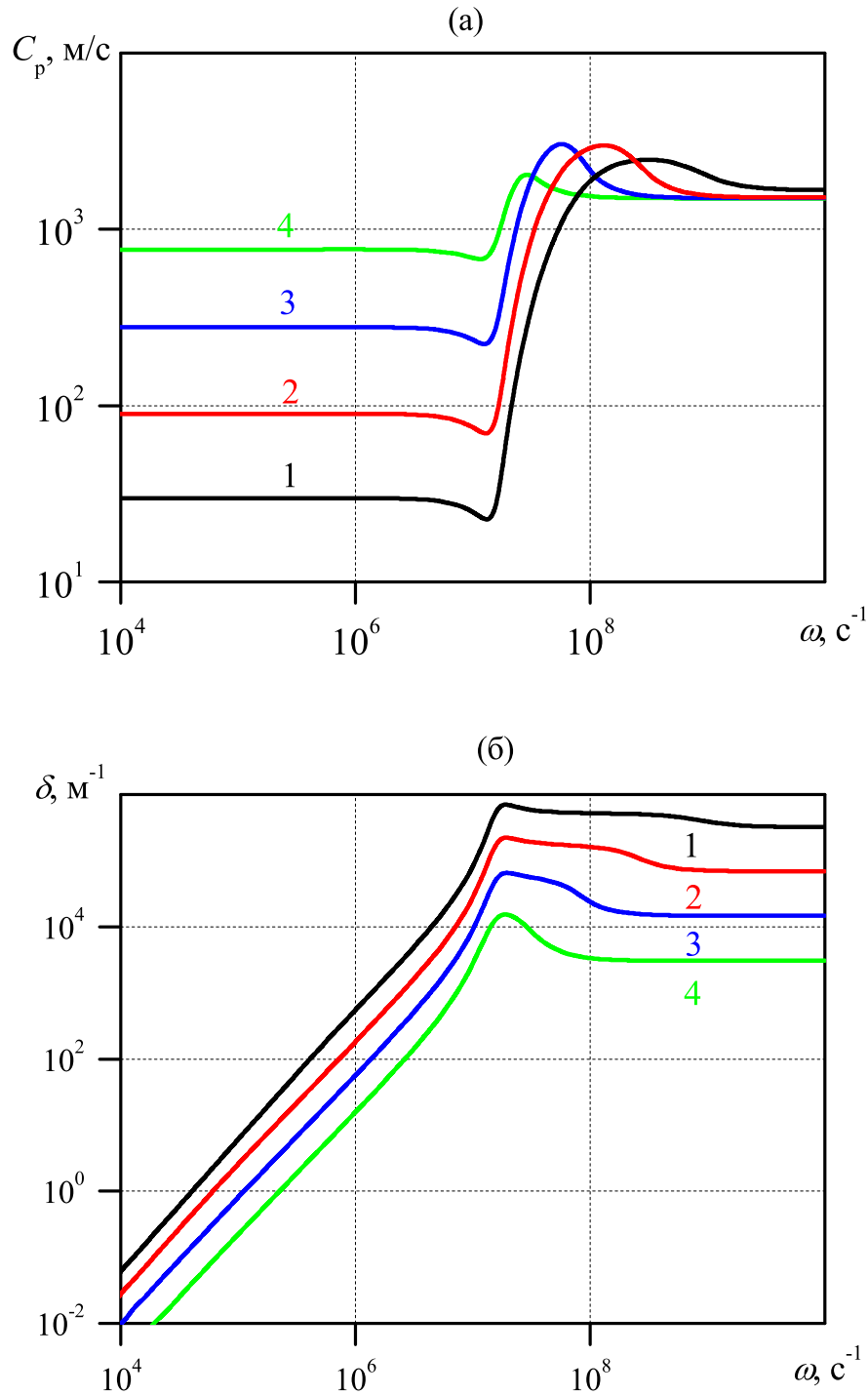


Рис. 2.16 — Влияние начального объёмного газосодержания α_{g0} на скорость возмущения (а) и коэффициент его затухания (б) при $a_0 = 10^{-6}$ м. Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют обозначениям на рис. 2.15.

ний. В частности, для частоты $\omega = 10^3$ s^{-1} значение фазовой скорости растёт с $C_p = 19.464$ м/с до $C_p = 200.261$ м/с. В мелкодисперсных смесях (рис. 2.16) наблюдается постоянство фазовой скорости. Очевидно, в низкочастотной области

растёт вклад фазовых переходов в снижение упругости парогазовых пузырьков с незначительной массовой долей инертного газа. В исследуемом случае упругость пузырьков определяется преимущественно массовой долей газа. В зоне, когда частота внешнего возмущения сопоставима с частотой собственных колебаний пузырьков ($\omega \sim \omega_R$), происходит аномальное увеличение фазовой скорости. Причём, чем больше начальное объёмное содержание пузырьков α_{g0} , тем больше изменение фазовой скорости. Аналогичные картины наблюдаются и для коэффициента затухания.

2.5.3 Влияние равновесной температуры

Роль равновесной температуры T_0 и, соответственно, равновесной концентрации пара в пузырьках k_0 , определяемой из соотношения (2.16), в формировании дисперсионных кривых фазовой скорости акустической волны и коэффициента её затухания можно оценить на рис. 2.17 в крупнодисперсной смеси ($a_0 = 10^{-3}$ м) и рис. 2.18 в мелкодисперсной ($a_0 = 10^{-6}$ м). В качестве начальных данных брались: давление $p_0 = 0.1$ МПа и объёмное газосодержание $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Кривые 1–3 рассчитывались при равновесных температурах $T_0 = 300, 353, 373$ К, соответственно, массовая концентрация пара в пузырьках составила для крупнодисперсной смеси $k_0 = 0.023, 0.361, 0.996$, а для мелкодисперсной $k_0 = 0.001, 0.147, 0.347$.

Необходимо подчеркнуть, что при низких частотах акустических возмущений ($\omega \leq \omega_R$, где $\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{l0}^0} = 1.97 \cdot 10^4$ с⁻¹ – миннаэрттовская частота собственных колебаний пузырьков) в смеси с достаточно крупными пузырьками температура оказывает существенное воздействие на фазовую скорость (возможно отличие на два порядка).

Исходя из данных на рис. 2.17, фрагмент **б**, интересно отметить резкий рост коэффициента затухания δ . А именно, для частоты возмущения $\omega = 10^3$ с⁻¹ коэффициент δ возрастает с $\delta = 10^{-1}$ м⁻¹ до $\delta \simeq 5$ м⁻¹, а для $\omega = 10^4$ с⁻¹ с $\delta = 1$ м⁻¹ до $\delta = 10$ м⁻¹. Расчётные кривые на графиках рис. 2.17 позволяют обнаружить тенденцию к более чем десятикратному усилению интенсивности затухания слабых акустических волн при повышении температуры от комнатной до точки кипения. Что касается высоких частот ($\omega \gg \omega_R$), затухание волн в большей степени определяется акустической разгрузкой пу-

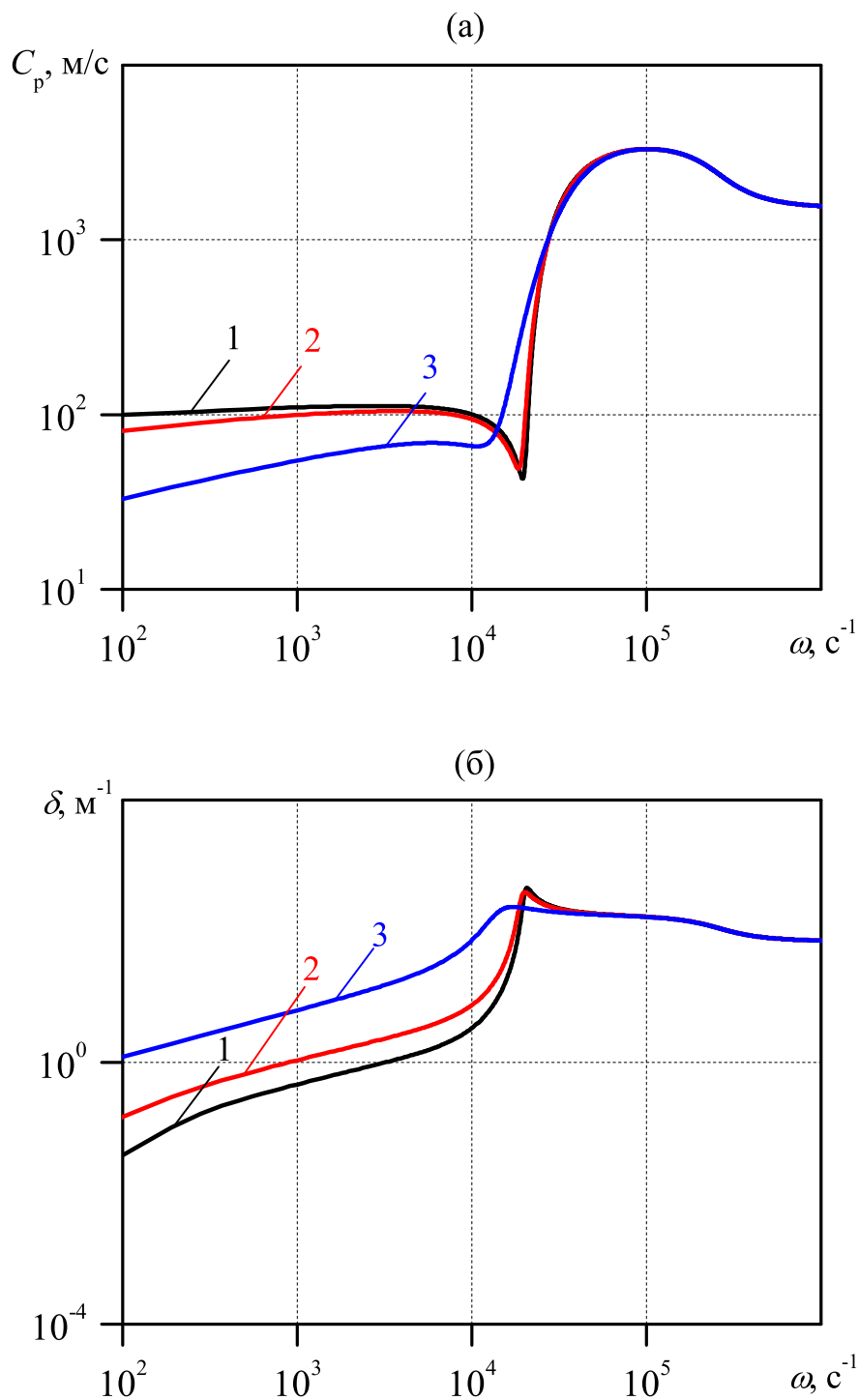


Рис. 2.17 — Влияние начальной равновесной температуры на дисперсионные кривые в смеси с крупнодисперсными парогазовыми включениями: 1 — $T_0 = 300$ К, 2 — 353 К, 3 — 373 К ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м).

зырьков [210] и, таким образом, изменение температуры системы мало влияет на коэффициент затухания. Подчеркнём, что дисперсионные свойства газо-

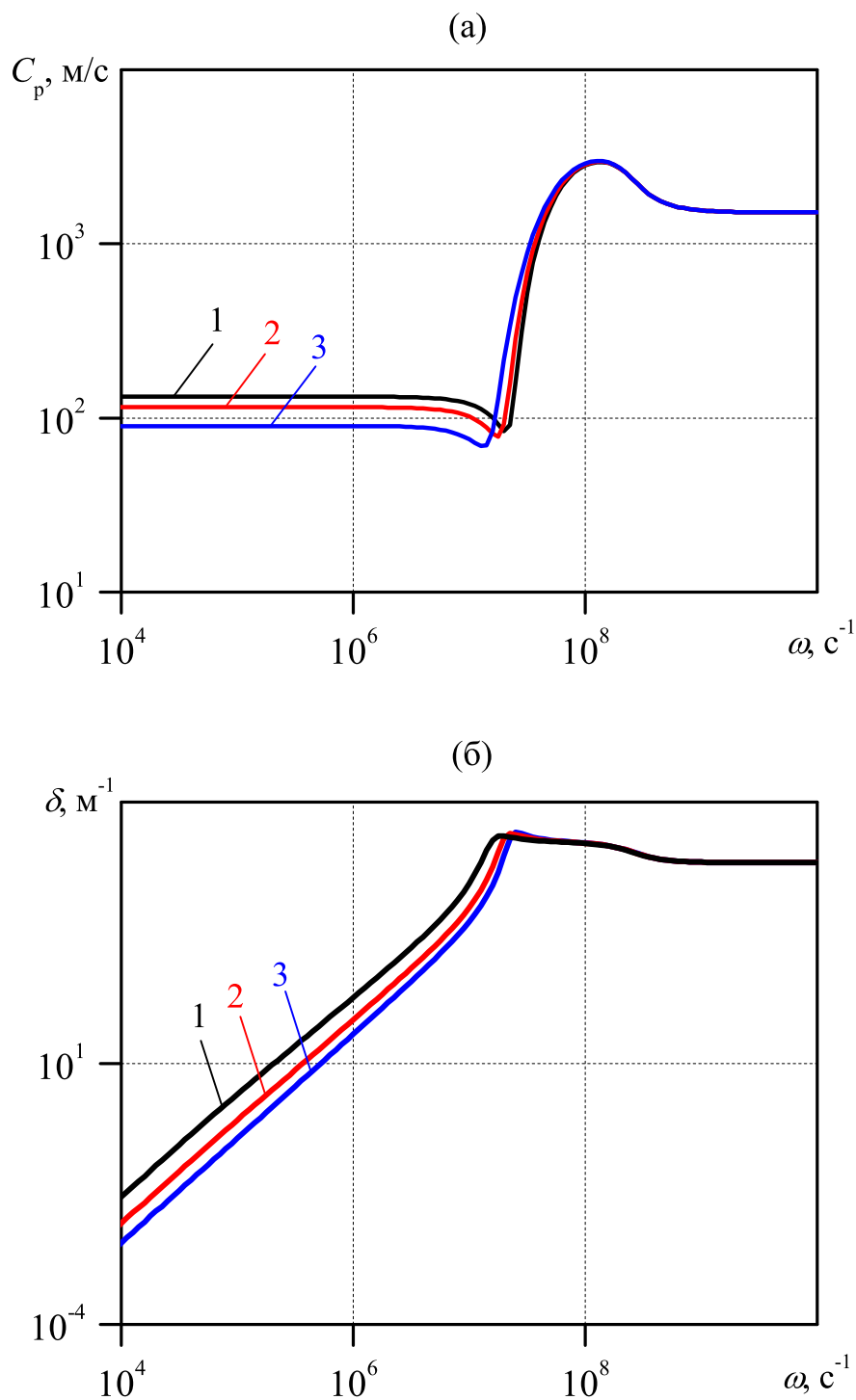


Рис. 2.18 — Влияние начальной равновесной температуры на дисперсионные кривые в смеси с мелкодисперсными парогазовыми включениями: 1 — $T_0 = 300$ К, 2 — 353 К, 3 — 373 К ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-6}$ м).

жидкостной смеси колеблются минимально при температурах ниже комнатной ($273 \leq T_0 \leq 300$ К).

Особенности дисперсионных кривых в мелкодисперсных смесях ($a_0 = 10^{-6}$ м) наглядно отражены на рис. 2.18. Нумерация линий согласуется с теми же значениями равновесной температуры, что и на рис. 2.17. Поскольку в мелких пузырьках влияние силы поверхностного натяжения выше, равновесная концентрация пара в пузырьках уменьшится относительно данных к рис. 2.17, и примет значения $k_0 = 0.001, 0.147$ и 0.347 соответственно. Отметим, что при частоте возмущения $\omega = 10^3$ с $^{-1}$, коэффициенты затухания для выбранных равновесных температур могут варьироваться в 1.3 раза (рис. 2.18, фрагмент б).

2.6 Выводы по главе

Сформулирована постановка задачи и записаны основные уравнения для дальнейшего решения. Для описания межфазных тепломассообменных процессов в жидкости с газовыми и парогазовыми пузырьками выписаны основные уравнения и предложена схема, основанная на использовании уравнений переноса типа уравнений теплопроводности и диффузии. Предложенный подход для достаточно широкого класса волновых задач позволяет корректно учесть межфазные температурные неравновесности без привлечения дополнительных эмпирических параметров, связанных с двухфазностью.

Решение полученной системы искалось в виде бегущей волны. Из условия существования решения такого вида с учётом эффектов акустической разгрузки пузырьков было получено дисперсионное уравнение, описывающее динамику акустических волн в жидкости, содержащей пузырьковую зону. На основе полученного дисперсионного уравнения получены уравнения для равновесной скорости звука в рассматриваемых средах, уравнение на равновесный радиус и соотношение на критическое объёмное содержание.

Исследование гармонических волн в жидкости с паровоздушными пузырьками с размерами $a_0 = 10^{-3}$ м показало, что при изменении равновесной температуры от T_0 К до точки кипения $T_0 = 373$ К вблизи низких частот ($\omega \leq \omega_R$, $\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{l0}^0}$ – собственная частота пузырьков) коэффициент затухания меняется в десятки и сотни раз в зависимости от частоты возмущений. В случае же мелкодисперсных смесей ($a_0 = 10^{-6}$ м) изменение фазовой скорости и коэффициента затухания гораздо слабее (не более двух раз). Это связано со

снижением роли фазовых переходов для мелкодисперсных систем из-за роста массовой концентрации газа в пузырьках, связанного с действием капиллярных сил на межфазной поверхности. Из результатов расчёта также видно, что в диапазоне частот $\omega_R < \omega < \omega_C$ ($\omega_C = \omega_R \sqrt{1 + \rho_{l0}^0 \alpha_{g0} C_l^2 / \gamma p_0}$) величины коэффициента затухания и фазовой скорости принимают аномально высокие значения, поэтому эта зона частот соответствует полосе непропускания.

Исследование гармонических волн в жидкости с паровоздушными пузырьками с размерами $a_0 = 10^{-6}$ м показало, что при изменении начального объёмного газосодержания от $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ до $\alpha_{g0} = 10^{-1}$ при равновесной температуре $T_0 = 373$ К, вблизи низких частот ($\omega \leq \omega_{(R)}$), коэффициент затухания меняется незначительно (в зависимости от частоты возмущений).

Установлено, что с уменьшением равновесного радиуса пузырьков a_0 имеет место небольшое увеличение фазовой скорости в низкочастотной области ($\omega \ll \omega_R$), а коэффициент затухания δ при этом может изменяться на несколько порядков. Роль фазовых переходов значительно снижается.

Глава 3. Акустические свойства и устойчивость жидкости с парогазовыми пузырьками

В данной главе рассмотрены особенности отражения и преломления гармонических волн при прямом и наклонном падении на границу между «чистой» жидкостью и жидкостью, содержащей пузырьки с парогазовой смесью. Исследовано воздействие частоты колебаний на коэффициенты отражения и преломления звука при прямом падении. Показано, что при падении волны из пузырьковой жидкости на границу может произойти полное внутреннее отражение. Выведено дисперсионное уравнение, на его основе выполнен численный анализ влияния частот возмущений в диапазоне от 10^2 с^{-1} до 10^7 с^{-1} на зависимость угла преломления от угла падения. Рассмотрено три значения равновесной температуры T_0 . Изучена зависимость критического угла падения, при котором происходит аналогичное отражение, от характеристик двухфазной системы и частот воздействия.

Изучена динамика слабых гармонических возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде. Проанализированы карты зон устойчивости рассмотренных систем в зависимости от степени перегрева жидкости на плоскости объёмное содержание — радиус пузырьков с повышением равновесного давления от 0.1 до 10 МПа. Исследовано влияние начального перегрева (от сотых долей до одного градуса) и повышения давления на дисперсию гармонических волн, а также зависимость инкремента от радиуса пузырьков для неустойчивых систем.

3.1 Постановка задачи и дисперсионный анализ

Рассмотрим двумерные акустические волны. Вертикальную ось Ox направим перпендикулярно к плоскости раздела между однофазной и двухфазной средами в сторону «чистой» жидкости, а начало координат ($x = 0$) положим на границе раздела. Следовательно, горизонтальная ось Oy направлена вдоль границы раздела (рис. 3.1).

Пусть в жидкость в зоне $x > 0$ находится при температуре T_0 и давлении p_0 , а в жидкости в зоне $x < 0$, находящейся при той же температуре и давлении,

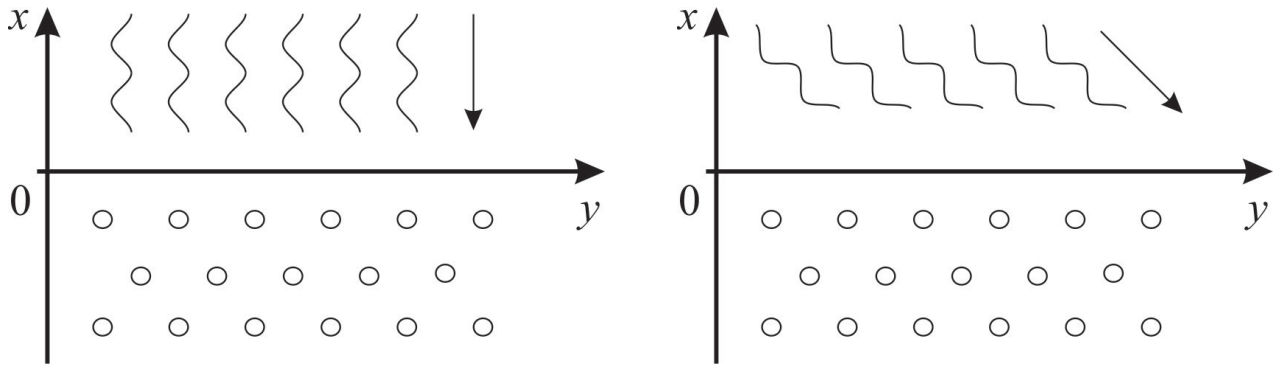


Рис. 3.1 — Схематическое изображение расчётной области при прямом (слева) и «косом» (справа) падении волны на границу раздела.

имеются сферические пузырьки радиусом a_0 , которые содержат пар и не растворимый в жидкой фазе газ. Данная система описывается уравнениями (2.1)–(2.16) из Главы 2. Стоит отметить, что если состояние жидкости достаточно далеко от критического, то выполняются условия $p_{v0} = p_s(T_0)$ согласно [206].

Пусть на плоскую границу раздела между жидкостью и газонасыщенной жидкостью под некоторым углом падает плоская гармоническая волна (рис. 3.1). Схема прямого падения представлена на рис. 3.1, (слева), «косого» – на рис. 3.1, (справа). Будем полагать, что, как и в случае обычных однофазных сред, преломлённая и отражённая от границы волны представляют собой плоские гармонические волны [179]. Тогда в зоне воды малые возмущения представляют сумму из двух гармонических волн, а в зоне пузырьковой жидкости – одну гармоническую волну. Возмущения, соответствующие падающей, отражённой и преломлённой волнам, снабдим верхними значками (0) , (r) и (s) . В рамках принятой модели пузырьковой жидкости вязкостные и теплообменные процессы учитываются лишь при межфазных взаимодействиях, смесь односкоростная, тензор напряжений – шаровой, поведение жидкости изотермическое, поэтому на границе $x = 0$, как и в случае однофазных сред, можно ограничиться лишь двумя граничными условиями: непрерывности давления и нормальной компоненты скорости

$$p^{(0)} + p^{(r)} = p^{(s)}, \quad v^{(0)} \cos \Theta^{(0)} - v^{(r)} \cos \Theta^{(r)} = v^{(s)} \cos \Theta^{(s)}. \quad (3.1)$$

Здесь $\Theta^{(0)}$, $\Theta^{(r)}$ и $\Theta^{(s)}$ – углы падения; $v^{(0)}$, $v^{(r)}$ и $v^{(s)}$ – возмущения скорости, соответствующие плоским падающим, отражённым и преломлённым волнам. Тогда для падающей, отражённой и преломлённой волн можем записать

$$\begin{aligned}
p^{(0)} &= A_p^{(0)} \exp \left[i \left(K^{(0)} \left(n_x^{(0)} x + n_y^{(0)} y \right) - \omega t \right) \right], \\
p^{(r)} &= A_p^{(r)} \exp \left[i \left(K^{(r)} \left(n_x^{(r)} x + n_y^{(r)} y \right) - \omega t \right) \right], \\
p^{(s)} &= A_p^{(s)} \exp \left[i \left(K^{(s)} \left(n_x^{(s)} x + n_y^{(s)} y \right) - \omega t \right) \right],
\end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
n_x^{(0)} &= \cos \Theta^{(0)}, & n_y^{(0)} &= \sin \Theta^{(0)}, & n_x^{(r)} &= \cos \Theta^{(r)}, \\
n_y^{(r)} &= \sin \Theta^{(r)}, & n_x^{(s)} &= \cos \Theta^{(s)}, & n_y^{(s)} &= \sin \Theta^{(s)}.
\end{aligned}$$

Для волновых чисел $K^{(0)}$ и $K^{(r)}$ имеет место $K^{(0)} = K^{(r)} = \omega / C_l$.

При дальнейших рассуждениях будем полагать, что $\alpha_{g0} \ll 1$ и $1 - \alpha_{g0} \sim 1$. С учётом этого волновое число $K^{(s)}$ определяется из дисперсионного уравнения

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_l^2} + 3 \frac{\rho_{l0}^0 \alpha_{g0}}{\psi}, \quad (3.2)$$

в котором

$$\psi = \frac{3\gamma p_{g0}}{Q} - \frac{\rho_{l0}^0 \omega^2 a_0^2}{\xi} - 4i \rho_{l0}^0 \mathbf{v}_l^{(\mu)} \omega - \frac{2\sigma}{a_0},$$

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \xi = 1 - i\omega t_A, \quad t_A = \frac{a_0}{\sqrt[3]{\alpha_{g0}} C_l},$$

$$Q = 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{k_0} H_a \operatorname{kh}(y_g) + \frac{\gamma}{1 - k_0} H_v \operatorname{kh}(z) \right) \left(\frac{H_a}{k_0} + \frac{\gamma \operatorname{kh}(z)}{(1 - k_0) \beta \sinh v(y_l)} \right)^{-1},$$

$$\operatorname{kh}(x) = 3(x \coth x - 1)x^{-2},$$

$$\sinh v(x) = 3(1 + x(A_0 x \tanh x(A_0 - 1) - 1)(A_0 x - \tanh x(A_0 - 1))^{-1})x^{-2}$$

$$\text{иди } \sinh v(x) = 3(1 + x)x^{-2},$$

$$A_0 = \alpha_{g0}^{-1/3}, \quad y_l = \sqrt{-i\omega a_0^2 / \mathbf{v}_l^{(T)}}, \quad z = \sqrt{-i\omega a_0^2 / D}, \quad \beta = (\gamma - 1)\eta H_v \chi^2,$$

$$\eta = \frac{\rho_{l0}^0 c_l}{\rho_{g0}^0 c_g}, \quad \chi = \frac{c_g T_0}{L}, \quad H_v = \frac{B_v}{B_0}, \quad H_a = \frac{B_a}{B_0}, \quad H = H_v - H_a.$$

Данное дисперсионное соотношение следует из условия существования нетривиального решения вышеприведённой системы в виде плоской затухаю-

щей бегущей волны:

$$\begin{aligned}(p, v, a, n) &= A_{(p)}, A_{(v)}, A_{(a)}, A_{(n)} \exp [i (Kx - \omega t)], \\ (T, k) &= A_{(T)}(r), A_{(k)}(r) \exp [i (Kx - \omega t)], \\ (K = k + i\delta, \quad C_p &= \omega / k).\end{aligned}\tag{3.3}$$

где ω – частота возмущений, K – волновой вектор, действительная часть которого отвечает за фазовую скорость C_p , а мнимая – за коэффициент затухания δ .

Амплитуды возмущений скоростей с амплитудами давления связаны следующим образом

$$A_{(v)}^{(0)} = \frac{A_{(p)}^{(0)}}{\rho_{l0} C_l}, \quad A_{(v)}^{(r)} = -\frac{A_{(p)}^{(r)}}{\rho_{l0} C_l}, \quad A_{(v)}^{(s)} = \frac{K^{(s)} A_{(p)}^{(s)}}{\omega \rho_{l0}^0}.\tag{3.4}$$

При этом для распределения концентраций и температуры внутри пузырьков будем иметь

$$\begin{aligned}k_{(R)} &= \frac{\text{sh}(zR)}{R \text{sh}(z)} \frac{A^{(k)}}{A} \frac{p_g}{p_{g0}}, \\ \frac{T_g(R)}{T_0} &= \left[(1 - \gamma^{-1}) + \left(\frac{A^{(T)}}{A} - 1 + \gamma^{-1} \right) \frac{\text{kh}(y_g R)}{R \text{kh}(y_g)} \right] \frac{p_g}{p_{g0}}, \\ A &= H_v H_a (\eta \text{shv}(y_g) + \text{kh}(y_g)) + \frac{k_0 \text{kh}(z)}{(1 - k_0) \chi^2 (1 - \gamma^{-1})}, \\ A^{(k)} &= k_0 [H_v (\eta \text{shv}(y_l) + \text{kh}(y_g))] - k_0 \chi^{-1} \text{kh}(y_g), \\ A^{(T)} &= k_0 H_v \frac{\text{kh}(z)}{(1 - k_0) \chi} + (1 - \gamma^{-1}) H_v H_a \text{kh}(y_g), \quad R = r/a_0.\end{aligned}$$

Для распределения температуры в жидкости при условиях адиабатичности либо изотермичности ячеек имеем

$$\frac{T_l(R)}{T_0} = \frac{(A_0 y_l + 1) e^{y_g(R-A_0)} + (A_0 y_l - 1) e^{y_0(A_0-R)}}{R [(A_0 y_l + 1) e^{y_l(1-A_0)} + (A_0 y_l - 1) e^{y_l(A_0-1)}]} \frac{A_T p_g}{A p_{g0}}$$

либо

$$\frac{T_l(r)}{T_0} = \frac{e^{y_l(1-R)} A_T p_g}{R A p_{g0}}.$$

На основе условий (3.1) для решений вида (3.3) с учётом (3.4) при $x = 0$ получим

$$\begin{aligned} A_{(p)}^{(0)} \exp\left(iK^{(0)}n_y^{(0)}y\right) + A_{(p)}^{(r)} \exp\left(iK^{(r)}n_y^{(r)}y\right) &= A_{(p)}^{(s)} \exp\left(iK^{(s)}n_y^{(s)}y\right), \\ A_{(p)}^{(0)} \cos \Theta^{(0)} \exp\left(iK^{(0)}n_y^{(0)}y\right) - A_{(p)}^{(r)} \cos \Theta^{(r)} \exp\left(iK^{(r)}n_y^{(r)}y\right) &= \\ &= A_{(p)}^{(s)} \cos \Theta^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\omega} C_l \exp\left(iK^{(s)}n_y^{(s)}y\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Чтобы эти уравнения удовлетворялись для любых значений y , должны выполняться равенства

$$K^{(0)}n_y^{(0)} = K^{(r)}n_y^{(r)} = K^{(s)}n_y^{(s)}. \quad (3.6)$$

Отсюда имеем

$$\sin \Theta^{(0)} = \sin \Theta^{(r)}, \quad \sin \Theta^{(0)} = \left(K^{(s)}/\omega\right) C_l \sin \Theta^{(s)}. \quad (3.7)$$

Поскольку определяемое из (3.2) волновое число $K^{(s)}$ – комплексное, то, как это следует из второго равенства (3.6), угол преломления также имеет мнимую часть.

Для коэффициентов отражения и преломления, определённых как $R = A_{(p)}^{(r)}/A_{(p)}^{(0)}$ и $S = A_{(p)}^{(s)}/A_{(p)}^{(0)}$, на основе (3.5) с учётом (3.6) получим

$$S = 2 \left/ \left(1 + \frac{C_l K^{(s)} \cos \Theta^{(s)}}{\omega \cos \Theta^{(0)}} \right) \right., \quad R = S - 1.$$

В случае, когда волна падает со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела, вместо второго равенства (3.7) получим

$$\sin \Theta^{(s)} = \left(C_l K^{(0)} / \omega\right) \sin \Theta^{(0)}.$$

Волновое число $K^{(0)}$ определяется из дисперсионного уравнения (3.2). Для коэффициентов преломления и отражения в этом случае будем иметь

$$S = 2 \left/ \left(1 + \frac{C_l K^{(0)} \cos \Theta^{(s)}}{\omega \cos \Theta^{(0)}} \right) \right., \quad R = S - 1.$$

3.2 Особенности отражения и прохождения акустических волн через границу раздела

Результаты этого пункта являются продолжением исследований предыдущей главы. Для полноты картины отдельно рассмотрим случаи падения акустической волны под прямым и «косым» углами на границу раздела между фазами.

3.2.1 Прямое падение плоской акустической волны на границу раздела между фазами

Рассмотрим случай, когда воздействие акустическим сигналом на границу раздела между средами происходит под прямым углом. Все допущения и начальные условия для рассматриваемых сред упомянуты выше. Серия графиков (рис. 3.2–3.5) даёт представление о зависимостях модулей и аргументов φ и ψ коэффициентов отражения и преломления от круговой частоты гармонических волн, падающей на границу раздела. Начальное давление бралось равным $p_0 = 0.1$ МПа и начальное объёмное содержание пузырьков в смеси $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Линии 1–3 соответствуют значениям равновесной температуры $T_0 = 300, 353, 373$ К. Массовое паросодержание в пузырьках при указанных значениях температуры составляет соответственно для крупнодисперсной смеси $k_0 = 0.023, 0.361, 0.996$ и для мелкодисперсной смеси $k_0 = 0.001, 0.147, 0.347$. На данных рисунках штриховые линии отражают изменения угла.

На рис. 3.2 описан случай воздействия гармонической волны на границу раздела между «чистой» жидкостью и пузырьковой смесью со стороны «чистой» жидкости при $a_0 = 10^{-3}$ м для трёх значений температуры. Из представленных графиков следует, что для низкочастотного диапазона ($\omega < \omega_R$) $\varphi \approx -180^\circ$ градусов, следовательно $R = -|R|$, а значит, отражённая волна имеет отрицательную амплитуду. Причём, наибольшая амплитуда отражённой волны ($R = 1$) реализуется для случая когда система находится в точке кипения ($T_0 = 373$ К). Что касается проходящей волны, её амплитуда для всех трёх температур составляет 20% ($|S| \leq 0.2$) от амплитуды падающей волны. Наименьшая амплитуда для падающей волны реализуется так же в точке кипения.

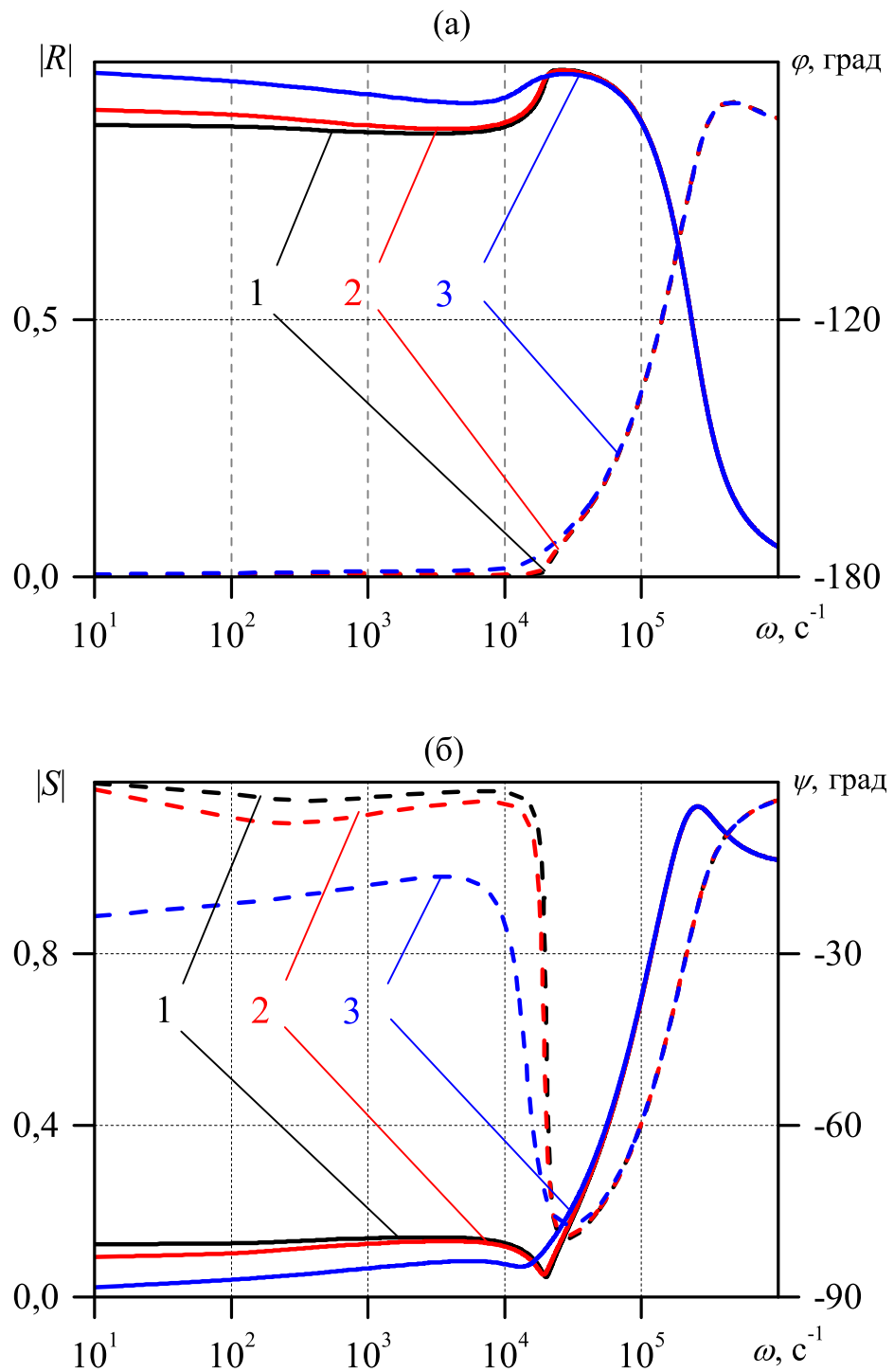


Рис. 3.2 — Влияние равновесной температуры T_0 на коэффициенты отражения (а) и преломления (б) при прямом падении волны со стороны «чистой» жидкости ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м).

Отметим, что высокочастотные ветви кривых ($\omega > 10^4 \text{ c}^{-1}$) для всех расчётных значений температуры сливаются. Это объясняется тем, что при высоких частотах из-за инерции радиальное движение пузырьков затормаживается. По-

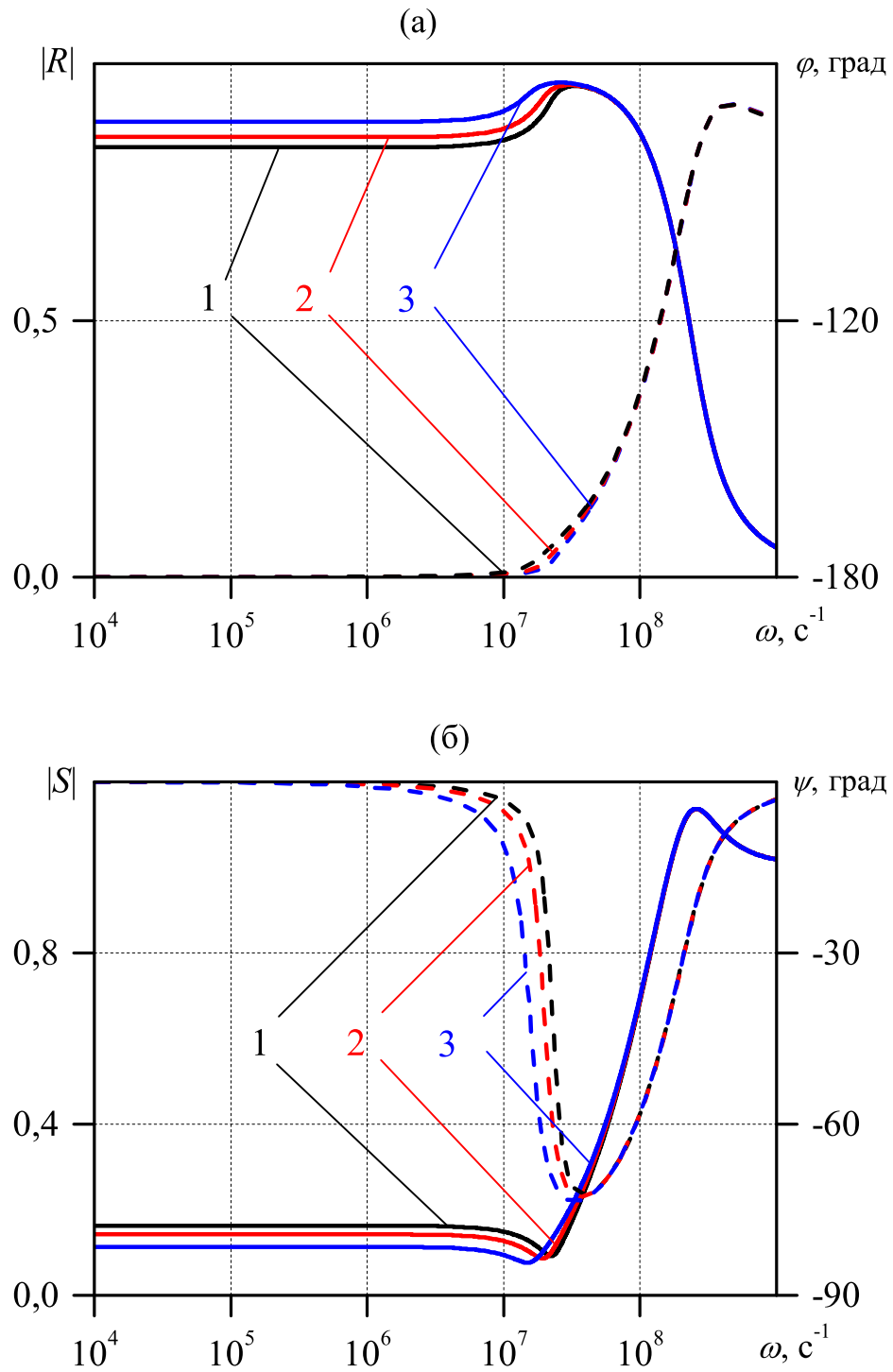


Рис. 3.3 — Влияние равновесной температуры T_0 на коэффициенты отражения (а) и преломления (б) при прямом падении волны со стороны «чистой» жидкости ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-6}$ м).

этому акустический импеданс пузырьковой жидкости определяется скоростью звука в «чистой» жидкости.

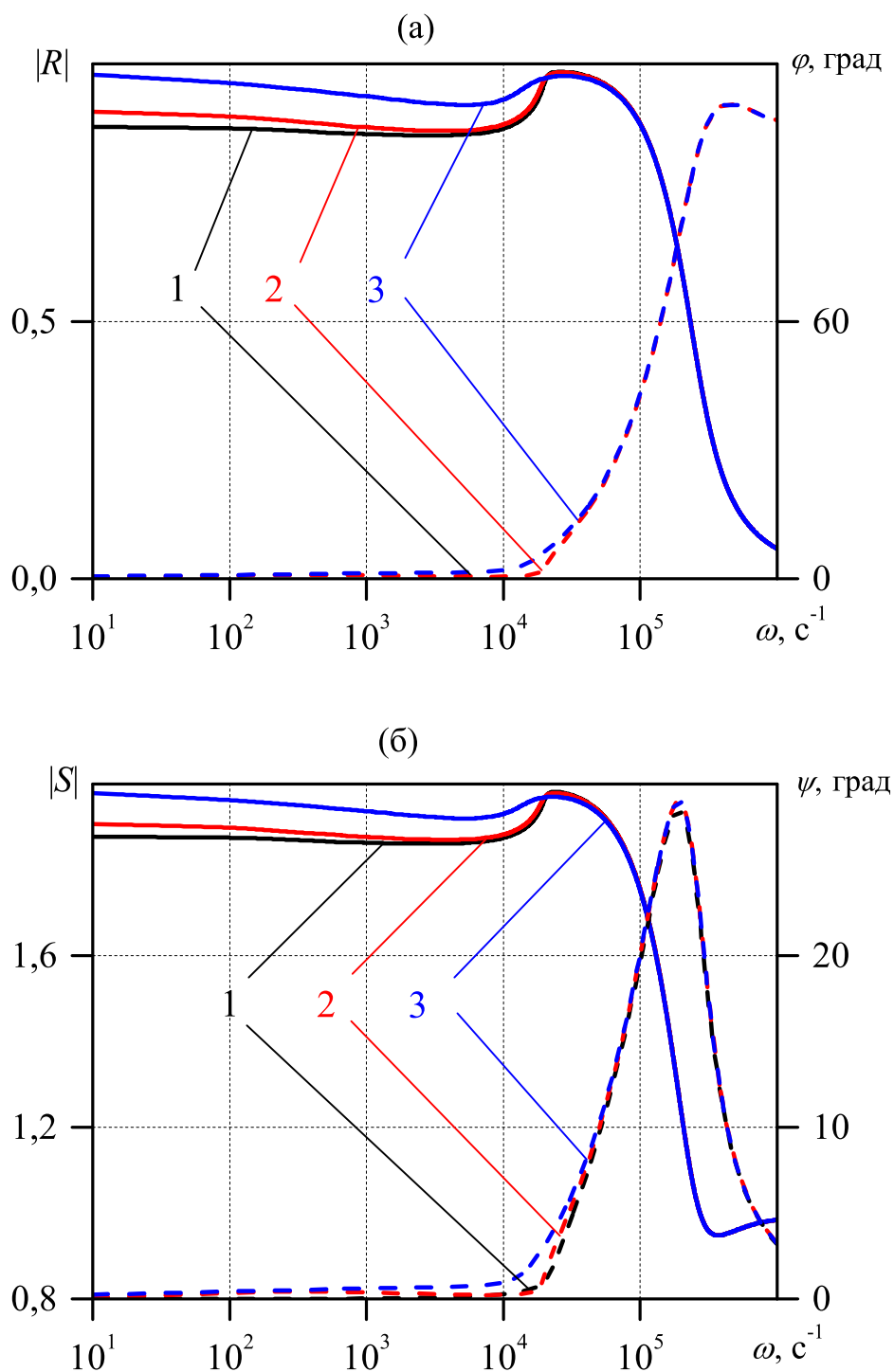


Рис. 3.4 — Зависимость коэффициентов отражения (а) и преломления (б) при прямом падении волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м.

Для случая мелкодисперсной пузырьковой жидкости ($a_0 = 10^{-6}$ м) зависимость коэффициентов отражения и преломления отражены на рис. 3.3. Согласно расчётам, кривые для трёх значений температур отличаются и для низ-

кочастотного диапазона ($\omega < \omega_R$). Отмеченные отличия коэффициентов отражения и преломления в жидкости с мелкими пузырьками значительно меньше.

На рис. 3.4 и 3.5 сравниваются зависимости коэффициентов отражения и преломления (их модули и аргументы) для крупнодисперсной ($a_0 = 10^{-3}$ м, рис. 3.4) и мелкодисперсной ($a_0 = 10^{-6}$ м, рис. 3.5) системы соответственно при прямом падении волны со стороны пузырьковой жидкости в «чистую» жидкость. Данные указывают на то, что, аналогично случаю падения волны со стороны «чистой» жидкости в пузырьковую жидкость, в низкочастотной области ($\omega < \omega_R$) $\varphi = 0^\circ$, следовательно $R = |R|$. Амплитуда же проходящей волны при всех трёх температурных режимах увеличивается почти вдвое ($|S| \sim 1.9$), поскольку по отношению к «чистой» жидкости пузырьковая является акустически более мягкой средой. Наибольшая амплитуда отражённой волны реализуется в точке кипения, подобно описанному выше.

Анализируя результаты расчётов, отметим, что в диапазоне частот $\omega_R < \omega < \omega_C$ ($\omega_C = \omega_R \sqrt{1 + \rho_{i0}^0 \alpha_{g0} C_l^2 / \gamma p_0}$) величина фазовой скорости достигает своего максимального значения, при этом коэффициента затухания возрастает аномально высоко, поэтому эта зона частот соответствует полосе непропускания. Вне этого диапазона ($\omega > \omega_C$) скорость звука и коэффициент затухания стремятся к значениям

$$C_f = C_l, \quad \delta_f = \frac{3\alpha_{g0}^{2/3}}{2a_0}.$$

Следует подчеркнуть, что проведение экспериментальных работ по рассматриваемой тематике представляется крайне сложным на текущем этапе, поэтому для верификации полученных результатов проводилось сравнение с результатами из [253]. В предельном случае, для параметров среды и волны, использованных в [253], а именно, отсутствие механизма диффузии, результаты, полученные по описанной выше модели, хорошо согласуются с приведёнными в [253]. Использование фундаментальных законов механики и хорошее совпадение с результатами других авторов позволяет говорить о достоверности результатов, изложенных в настоящем подпункте.

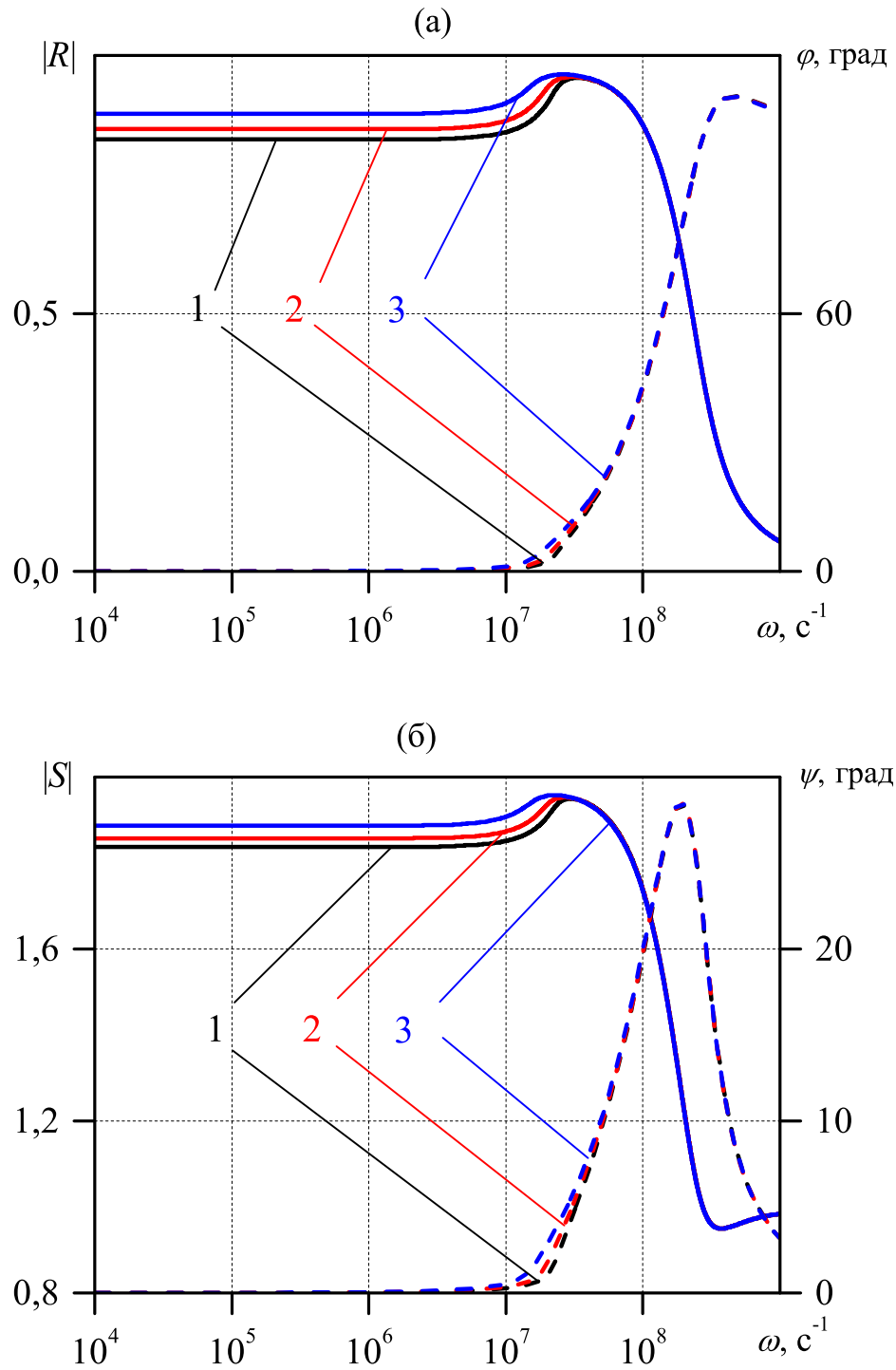


Рис. 3.5 — Зависимость коэффициентов отражения (а) и преломления (б) при прямом падении волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-6}$ м.

3.2.2 Падение плоской акустической волны на границу раздела под косым углом

Проведём сравнительный анализ результатов, полученных по описанным выше уравнения в предельном случае (отсутствие пара в пузырьках), с данны-

ми из работы [256]. На рис. 3.6–3.8 представлено сравнение результатов, полученных в рамках расчётной задачи настоящей диссертации с использованием начальных данных из [256], и расчётных данных, непосредственно полученных в указанной работе. Начальный радиус пузырьков в расчётах $a_0 = 10^{-3}$ м. Штриховые линии на перечисленных рисунках соответствуют данным [256], а сплошные линии – результаты, полученные автором по описанной выше модели.

На рис. 3.6 линия 1 соответствует начальному объёмному содержанию пузырьков $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, а линия 2 – $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. На рис. 3.6, фрагмент **б** заметно некоторое отличие в результатах, что связано с отсутствием в пузырьках паровой компоненты [256]. Стоит отметить, что такое различие наблюдается для низкочастотного диапазона ($\omega \leq \omega_R$, $\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{l0}^0}$ – миннаэрттовская частота собственных колебаний пузырьков). Здесь мы говорим об общей тенденции к повышению роли фазовых переходов при низких частотах, и за их счёт парогазовые пузырьки с небольшим массовым содержанием инертного газа становятся менее упругими.

Приведённые ниже рис. 3.7 и 3.8 предоставляют возможность сравнить зависимости модулей (линии 1 и 2) и аргументов (линии 3 и 4) φ и ψ коэффициентов отражения и преломления от круговой частоты гармонических волн, падающих со стороны «чистой» жидкости на пузырьковую смесь (рис. 3.7) и со стороны пузырьковой жидкости в «чистую» жидкость (рис. 3.8). Как и в случае «прямого» падения волнового сигнала на границу раздела сред, здесь в случае падения со стороны «чистой» жидкости наблюдается отрицательная амплитуда отражения. Амплитуда проходящего возмущения составляет порядка 30% от первоначального значения для $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ и порядка 20% для $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Эту разницу можно объяснить большей жёсткостью пузырьковой жидкости в случае $\alpha_{g0} = 10^{-3}$, в связи с чем через границу раздела проходит больше энергии волны, чем при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Для случая падения волны со стороны пузырьковой жидкости наблюдается практически полное отражение от границы раздела при $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ ($|S| \sim 1.8$) и несколько меньшее, но все же значимое отражение для $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ ($|S| \sim 1.55$). Как можно отметить, φ и ψ принимают положительные значения, и можно заключить, что волновой сигнал не меняет своей ориентации. Как было отмечено выше, диапазон часто от 10^4 до 10^6 является полосой непропускания для радиуса пузырьков $a_0 = 10^{-3}$ м. Вне указанного диапазона картина динамики имеет существенные отличия. Отметим удовлетворительное

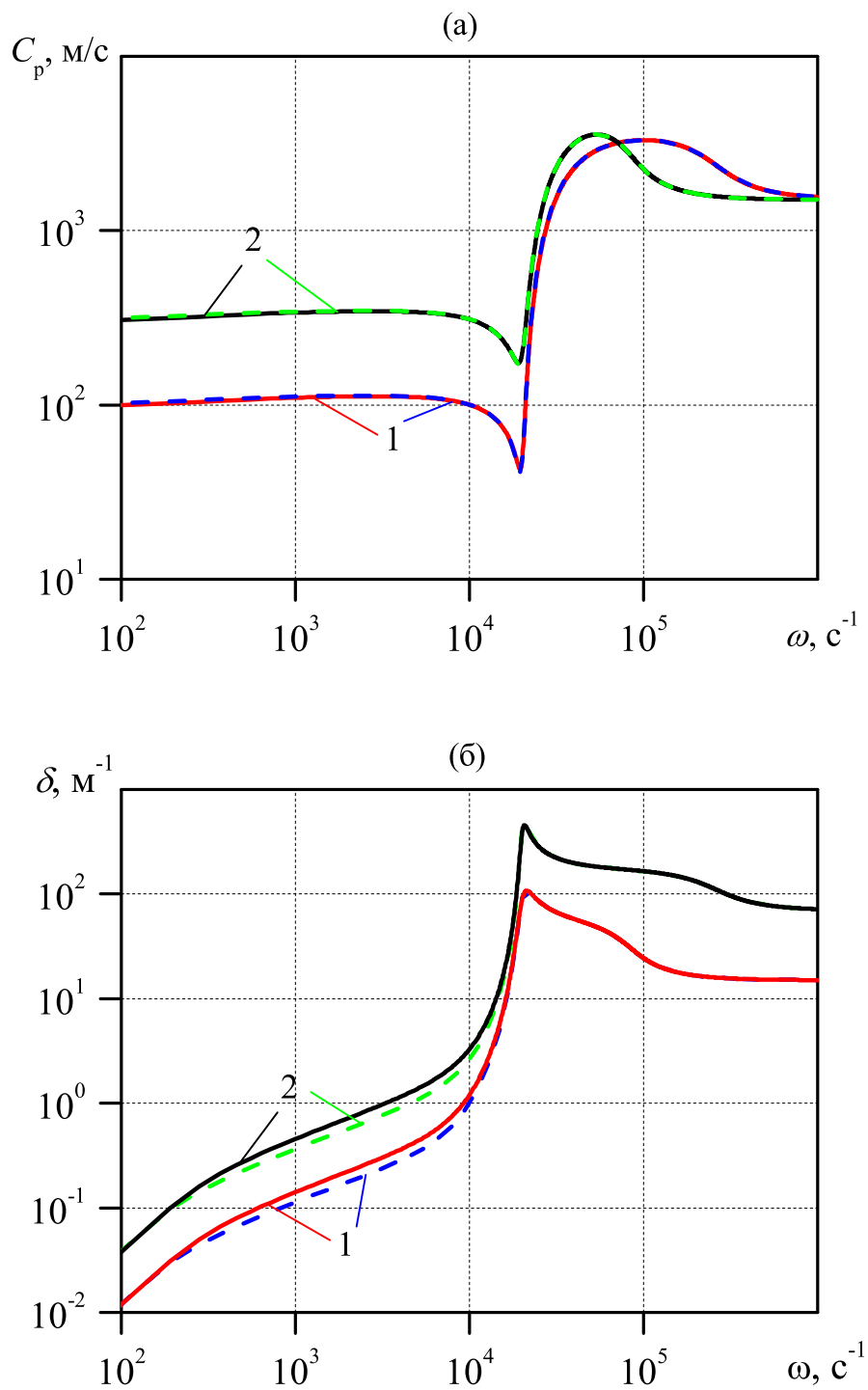


Рис. 3.6 — Дисперсионные кривые при различных значениях начального объёмного содержания пузырьков. Штриховые линии соответствуют результатам [256], сплошные линии — результаты настоящего исследования

совпадение с результатами, полученными ранее. Это даёт возможность говорить о достоверности представленных к защите результатов раздела.

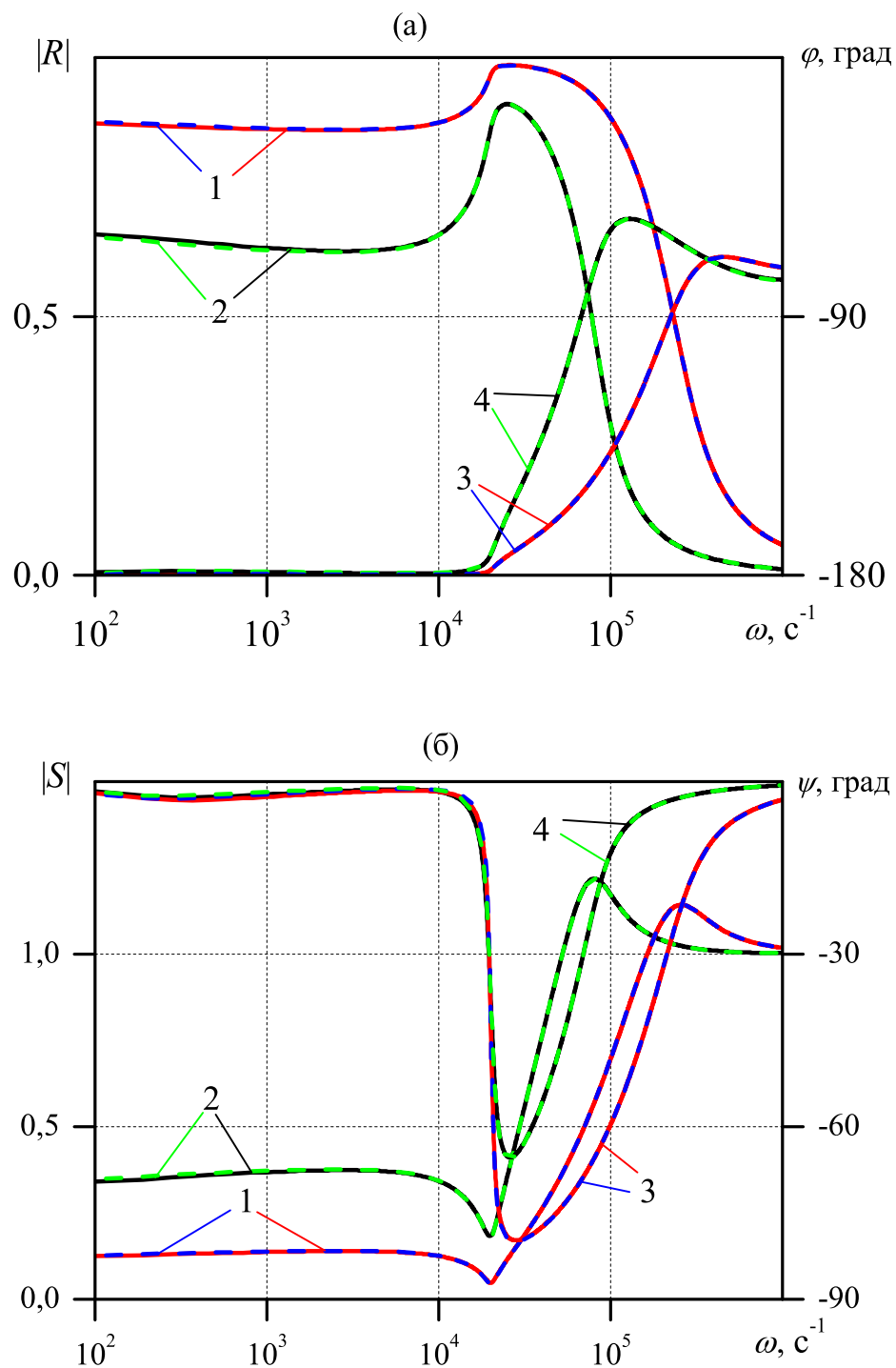


Рис. 3.7 — Влияние начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} на модули (1, 2) и аргументы (3, 4) φ и ψ коэффициентов отражения (а) и преломления (б) при «косом» падении волны со стороны «чистой» жидкости на границу раздела: 1, 3 — $\alpha_{g0} = 10^{-2}$; 2, 4 — $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Штриховые линии — [256], сплошные — расчёты.

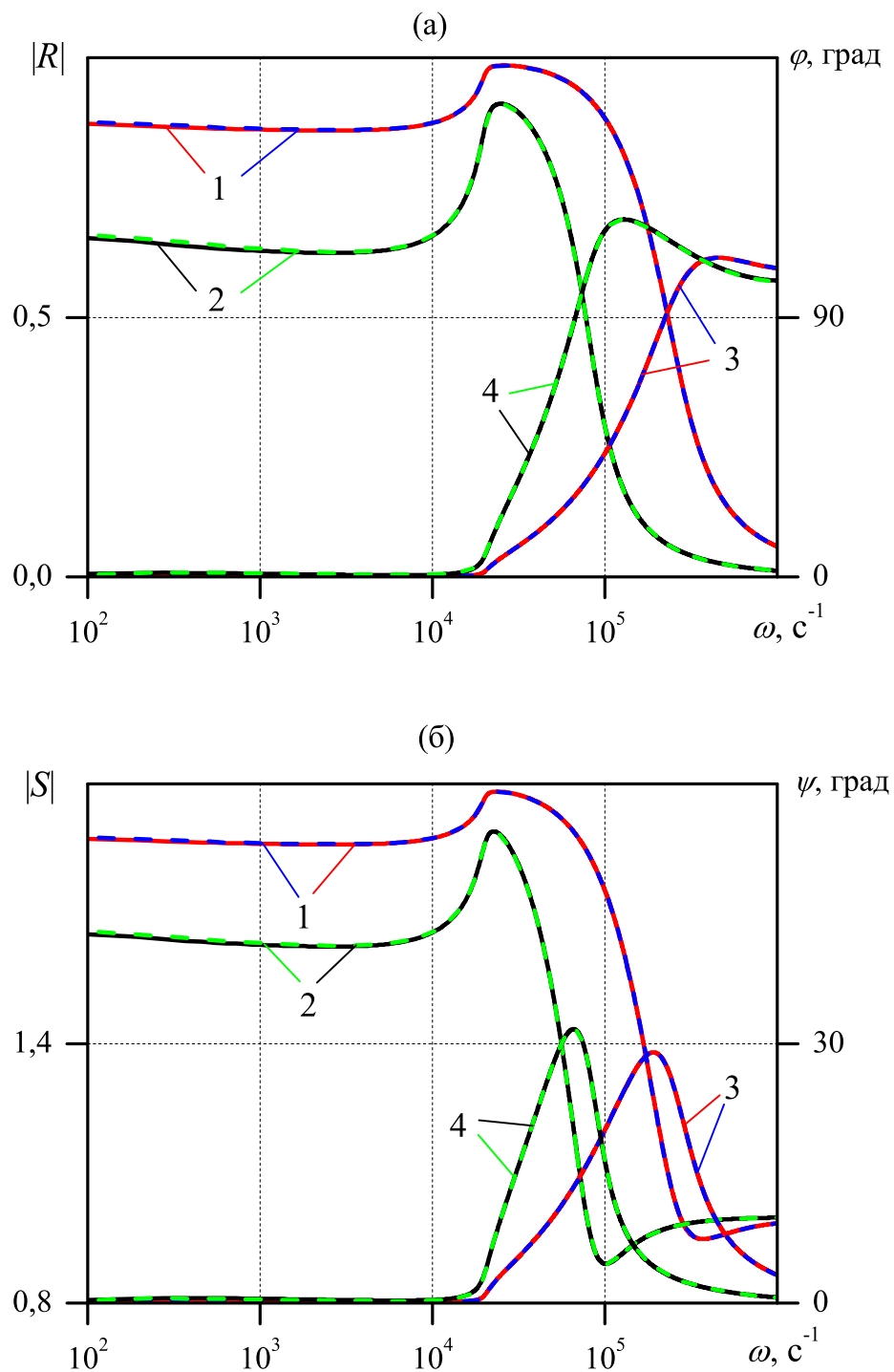


Рис. 3.8 — Влияние начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} на модули (1, 2) и аргументы (3, 4) φ и ψ коэффициентов отражения (а) и преломления (б) при «косом» падении волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела: 1, 3 – $\alpha_{g0} = 10^{-2}$; 2, 4 – $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Штриховые линии – [256], сплошные – расчёты.

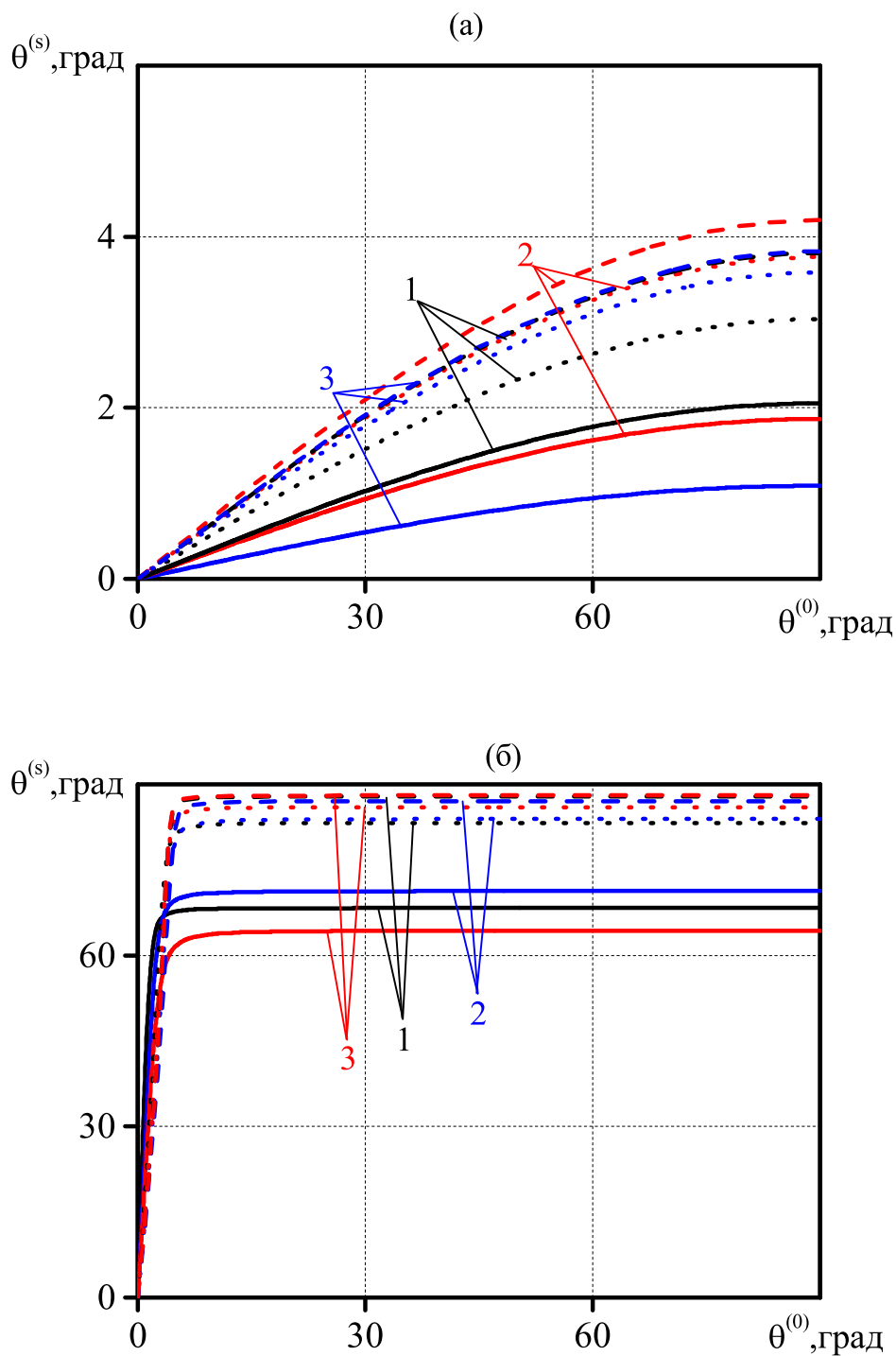


Рис. 3.9 — Зависимость угла преломления от угла падения со стороны «чистой» жидкости (а) и со стороны пузырьковой жидкости (б) при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и $a_0 = 10^{-3}$ м: 1 — $\omega = 10^2$ с $^{-1}$, 2 — 10^3 с $^{-1}$, 3 — 10^4 с $^{-1}$.

Рис. 3.9 ($a_0 = 10^{-3}$ м) и 3.10 ($a_0 = 10^{-6}$ м) содержат расчётные графики зависимостей угла преломления от угла падения при трёх значениях температуры среды: $T_0 = 300$ (штриховая линия), 353 (пунктирная линия) и 373 К (сплошная

линия). Следует отметить, что, согласно формуле (3.7), угол преломления $\Theta^{(s)}$ является комплексным числом, поскольку волновое число $K^{(s)}$ для пузырьковой системы комплексное. Чтобы формально избавиться от комплексности $\Theta^{(s)}$, в формуле (3.7) вместо $K^{(s)}$ достаточно использовать действительную часть волнового числа, т.е. $\text{Re}(K^{(s)})$. Такое допущение означает пренебрежение диссипативными процессами в плане определения акустической жёсткости среды. Как показывают расчёты [124], действительная часть комплексной величины, определённой из формулы (3.7), практически идентична значению, когда за волновое число принимается только его действительная часть. Поэтому в дальнейшем под углом преломления будем понимать действительную часть $\Theta^{(s)}$. Здесь надо отметить, что для $T_0 = 373$ К диссипация за счёт фазовых переходов сильно влияет на значение угла преломления.

Для случая падения волны на границу раздела из «чистой» жидкости в пузырьковую, угол преломления всегда не превышает 5° (рис. 3.9, фрагмент **а** и 3.10, фрагмент **а**). Что объясняется низким значением фазовой скорости, особенно при $T_0 = 373$ К. Здесь угол преломления не превышает 3° . Волна в «чистой» жидкости для всех углов падения $\Theta^{(0)}$ в пузырьковую жидкость проникает практически перпендикулярно к поверхности раздела. Из рис. 3.9, **а** и 3.10, **а** также видно, что во всем диапазоне изменения угла падения ($0 \leq \Theta^{(0)} \leq 90^\circ$) для рассматриваемых частот, угол преломления меньше прямого угла ($\Theta^{(s)} < 90^\circ$). Следовательно, при любом угле падения акустическая волна всегда проникает из «чистой» жидкости в зону пузырьковой жидкости.

Для случая набегания волны на границу раздела со стороны пузырьковой жидкости (рис. 3.9, фрагмент **б**), линии, соответствующие начальным температурам среды $T_0 = 300$ и 353 К, уже на малых углах падения ($\Theta^{(0)} \leq 5^\circ$) достигают значения $\Theta^{(s)} \sim 90^\circ$. Следовательно, и в данном случае акустическая волна не проникнет через границу раздела, поэтому пузырьковый слой в «чистой» жидкости обладает свойствами звукового канала. Наряду с этими особенностями для начальной температуры среды $T_0 = 373$ К видим иную картину: угол отражения достигает максимального значения $\Theta^{(s)} \approx 70^\circ$. Таким образом, для системы, находящейся при температуре 373 К, формально не происходит полного внутреннего отражения. Однако необходимо добавить, что в этом случае проникающая в «чистую» жидкость волна полностью затухает вблизи границы раздела сред из-за большого коэффициента затухания и малой

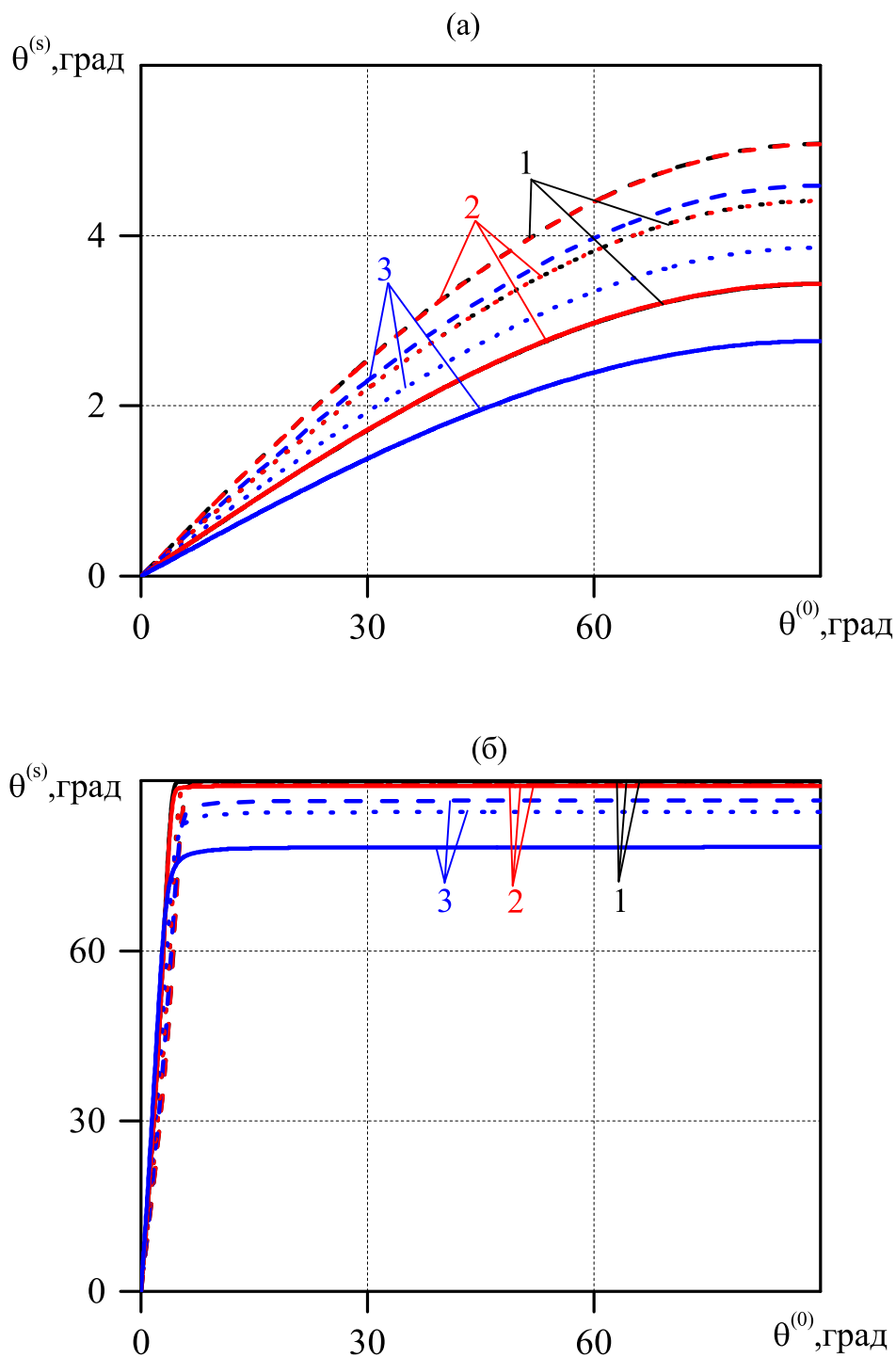


Рис. 3.10 — Зависимость угла преломления от угла падения со стороны «чистой» жидкости (а) и со стороны пузырьковой жидкости (б) при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и $a_0 = 10^{-6}$ м: 1 — $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$, 2 — 10^6 с^{-1} , 3 — 10^7 с^{-1} . $T_0 = 300 \text{ К}$ (штрих), 353 К (пунктир) и 373 К (сплошная линия)

фазовой скорости (такой вывод можно сделать, оценив значения мнимой части

$n_y^{(s)}$ (или $\cos \Theta^{(s)}$). Таким образом, и в этом случае фактически реализуется полное внутреннее отражение.

В пузырьковой жидкости с начальным размером пузырьков $a_0 = 10^{-6}$ м (рис. 3.10, фрагмент **б**) величина угла преломления зависит не только от начальной температурой, но и от частоты возмущений. При температуре 373 К для частот, близких к частоте собственных колебаний пузырьков, угол отражения в максимальном своём значении достигает величины $\Theta^{(s)} \approx 70^\circ$. Аналогично случаю $a_0 = 10^{-3}$ м, для системы, находящейся при температуре 373 К, формально не происходит полного внутреннего отражения. Однако и в этом случае из-за большого коэффициента затухания и малой фазовой скорости (что отражается в значении мнимой части $n_y^{(s)}$ (или $\cos \Theta^{(s)}$)), проникающая в «чистую» жидкость волна полностью затухает вблизи границы раздела сред. Таким образом, и здесь реализуется полное внутреннее отражение.

3.3 Акустическая устойчивость перегретой жидкости с газовыми зародышами

Для неустойчивых состояний, когда значения a_0 и α_0 на рис. 3.11 для соответствующего перегрева ΔT_0 расположены между левыми вертикальными и правыми наклонными линиями, дисперсионное уравнение (2.53) относительно ω при заданных $K > 0$, как и в случае пузырьковой парожидкостной среды, имеет решение вида $\omega = \omega' i$, причём $\omega' > 0$ [102]. Зависимость $\omega' = \omega'(K)$ монотонно возрастает и имеет асимптоту $\omega' = \omega'_\infty$ при $K \rightarrow \infty$. Для анализа темпа роста неустойчивости наибольший интерес представляет это предельное значение инкремента. Пренебрегая сжимаемостью жидкости ($C_{\text{eq}} \rightarrow \infty$), для определения инкремента получим следующее уравнение:

$$\psi(\omega'_\infty) = 0.$$

Здесь выражение для $\psi(\omega'_\infty)$ определяется из (2.53) соответствующей заменой $-i\omega$ на ω'_∞ .

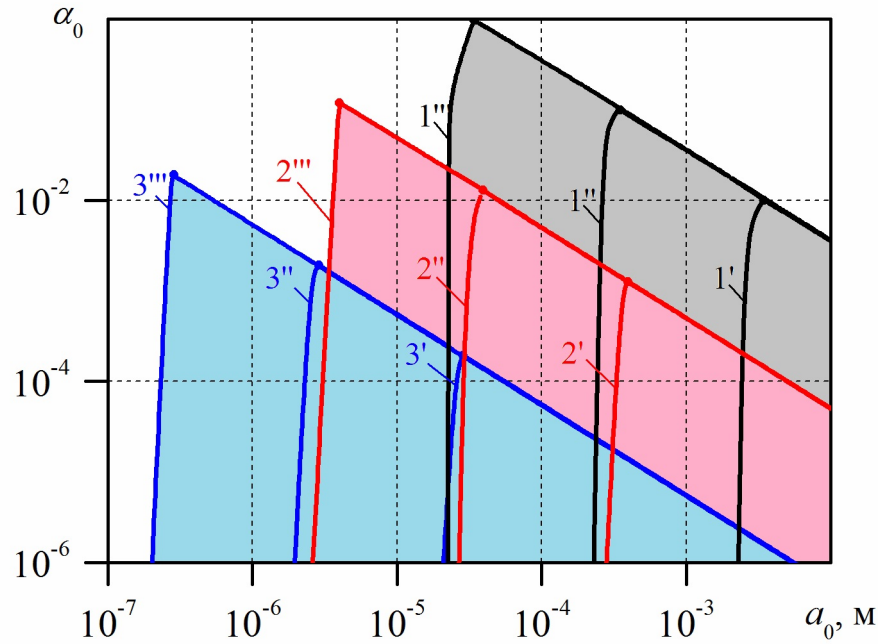


Рис. 3.11 — Линии, определяющие на плоскости (α_0, a_0) границу раздела устойчивых и неустойчивых состояний перегретой воды с паровоздушными пузырьками.

В случае чисто паровых пузырьков ($p_{g0} = p_{v0}$, $p_{v0} = p_{\text{eq}}(T_0)$, $k_0 = 1$) выражение для Q из (2.53) записывается как

$$Q = \beta \text{sh}v(y_l),$$

где $\beta = (\gamma - 1) \frac{\rho_{l0}^0 c_l}{\rho_{v0}^0 c_v} \left(\frac{c_v T_0}{L} \right)^2$, $\rho_{v0}^0 = \frac{p_{v0}}{B_v T_0}$, $p_{v0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}$, $T_0 = T_{\text{eq}}(p_{v0})$.

На основе полученного выше дисперсионного уравнения (2.53) и его следствия (2.56) были проведены численные расчёты для воды с паровоздушными пузырьками. В качестве значений физических и теплофизических параметров были использованы данные из справочника [101]. Линии 1, 2 и 3 на рисунках соответствуют значениям статического давления $p_0 = 0.1, 1$ и 10 МПа. Один, два и три штриха соответствуют значениям величины перегрева $\Delta T_0 = 10^{-2}, 10^{-1}$ и 1 К.

Расчёты на основе (2.73)(или (2.77)) отражены на рис. 3.11 в виде линий на плоскости (a_0, α_0) , определяющих границу раздела устойчивых и неустойчивых состояний перегретой воды с паровоздушными пузырьками, находящимися

при отмеченных выше трёх значениях давления p_0 ($T_{\text{eq}}(p_0) = 373, 453, 584$ К). График демонстрирует, что эти линии в левой части резко растут, справа постепенно снижаются. На участке роста соответствующая массовая концентрация k_0 пара также увеличивается, причём для давлений $p_0 = 1$ и 10 МПа при всех трёх значениях перегрева достигает значения $k_0 = 1$ (на графиках эти положения отмечены жирными точками). Для начального давления $p_0 = 0.1$ МПа и перегрева $\Delta T_0 = 1$ К при объёмной доле пузырьков в смеси $\alpha_0 \leq 0.1$ концентрация $k_0 = 1$ не достигается. На нисходящем участке массовая концентрация пара сохраняет своё постоянное значение $k_0 = 1$, то есть эти участки кривых соответствуют пароводяной пузырьковой системе. Отметим, что этот участок описывается формулой (2.74). Зоны, расположенные вне кривых, соответствуют устойчивым, а внутри – неустойчивым состояниям. В случае чисто паровых пузырьков линии, описываемые формулой (2.74), полностью определяют границу между устойчивыми и неустойчивыми состояниями. Причём зоны, расположенные правее этих линий соответствуют устойчивым, а левее – неустойчивым состояниям. Этот случай был исследован в работе [102]. Из представленных на рисунке данных можно сделать вывод, что величина объёмного содержания парогазовых пузырьков слабо влияет на характер кривых, определяющих границу устойчивости. Левые границы для всех значений перегревов – крутые, почти вертикальные линии. Необходимо добавить, что зоны левее нисходящих линий (правая граница) полностью принадлежат неустойчивым состояниям чисто парожидкостных пузырьковых систем. Вследствие чего наличие газа в пузырьках расширяет зону устойчивости перегретой жидкости. При этом, чем меньше перегрев, тем правее смещается линия, слева определяющая границу между устойчивыми и неустойчивыми состояниями. Поэтому чем меньше перегрев, тем более просторной становится зона устойчивости.

Линии рис. 3.12 демонстрируют связи фазовой скорости (сплошные линии) и коэффициента затухания (штриховые линии) с частотой возмущения для устойчивых пузырьковых систем с парогазовыми и паровыми пузырьками и позволяют оценить влияние статического давления. Равновесный радиус пузырьков положим равным $a_0 = 10^{-6}$ м, величину перегрева $\Delta T_0 = 10^{-1}$ К. При таком показателе перегретости массовое содержание пара составляет $k_0 = 0,349; 0,891, 0,998$ для давлений $p_0 = 0.1, 1$ и 10 МПа соответственно. Для низкочастотного диапазона ($\omega \leq \omega_R$, $\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{l0}^0}$ – миннаэрттовская частота

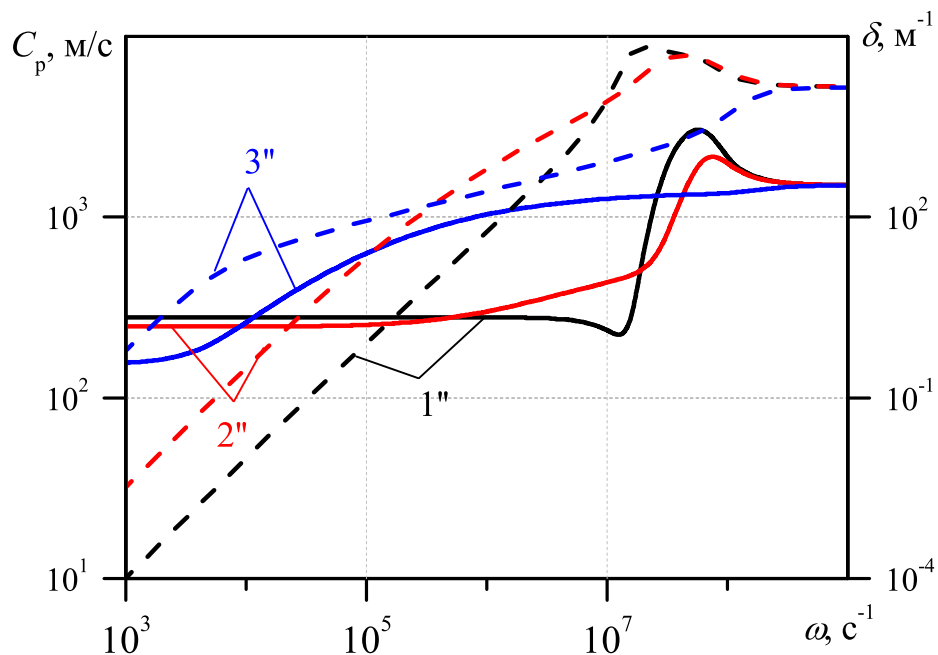


Рис. 3.12 — Дисперсионные кривые при различных значениях давления ($\alpha_0 = 10^{-3}$, $a_0 = 10^{-6}$ м, $\Delta T_0 = 10^{-1}$ К). Линии 1, 2 и 3 соответствуют значениям, как на рис. 3.11. Сплошные линии — фазовая скорость C_p , штриховые — коэффициент затухания δ .

собственных колебаний пузырьков) наблюдается сравнительно слабое влияние изменения давления в диапазоне 0.1 – 1 МПа на величину фазовой скорости, но величина коэффициента затухания при этом возрастает примерно в десять раз. Что касается кривых давления $p_0 = 10$ МПа, когда пузырьки становятся почти полностью паровыми, наблюдается резкое снижение фазовой скорости в области низких частот. В этом диапазоне скорость звука приближается к значению, определяемому формулой Ландау. Кроме того, происходит anomальное повышение коэффициента затухания более чем на два порядка.

Рис. 3.13 даёт представление о зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущения для устойчивых парогазовых и паровых систем и позволяет оценить влияние перегретости системы сравнением трёх вариантов $\Delta T_0 = 10^{-2}$, 10^{-1} и 1 К. Значение равновесного радиуса пузырьков принято $a_0 = 10^{-6}$ м при статическом давлении $p_0 = 1$ МПа. Для вышеупомянутых значений перегретости массовые содержания пара составляют $k_0 = 0,889$; $0,891$; $0,916$. Очевидно, дисперсионные кривые практически совпадают для зна-

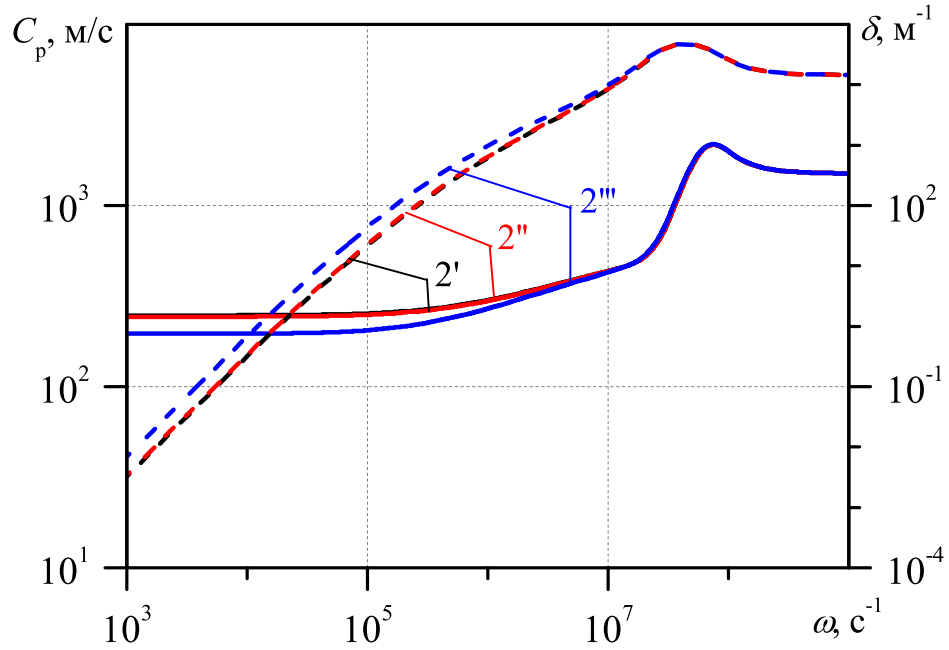


Рис. 3.13 — Зависимость фазовой скорости C_p (сплошные линии) и коэффициента затухания δ (штриховые линии) от волновой частоты ω для трёх показателей перегретости ($\alpha_0 = 10^{-3}$, $a_0 = 10^{-6}$ м, $p_0 = 1$ МПа).

Обозначения на линиях соответствуют рис. 3.11.

чений перегрева $\Delta T_0 = 10^{-2}$ и 10^{-1} К. С ростом ΔT_0 до 1 К, на низких частотах ($\omega \leq \omega_R$) фазовая скорость несколько снижается, а коэффициент затухания, напротив, принимает большее значение. Это связано с ростом влияния фазовых переходов при росте массового содержания пара в пузырьках.

На рис. 3.14 представлены расчёты дисперсионных зависимостей при дискретном изменении равновесного радиуса a_0 для величины перегрева $\Delta T_0 = 1$ К. В рассматриваемом случае статическое давление $p_0 = 1$ МПа, объёмное содержание пузырьков $\alpha_0 = 10^{-3}$. Линии 1 – 4 соответствуют значениям радиуса пузырьков $a_0 = 10^{-6}$, $2.62 \cdot 10^{-6}$, $5.04 \cdot 10^{-4}$ и 10^{-3} м. Далее, промежуточные значения радиуса соответствуют равновесным радиусам $a_0^{(m)}$ и $a_0^{(M)}$, расположенным на левой и правой границах области устойчивости. Сравнение полученных данных указывает на значительное увеличение коэффициента затухания с приближением значения равновесного радиуса a_0 к значениям $a_0^{(m)}$. Для низкочастотной области увеличение радиуса в два раза приводит к росту коэффициента затухания на 2–3 порядка. Фазовая скорость при этом снижается

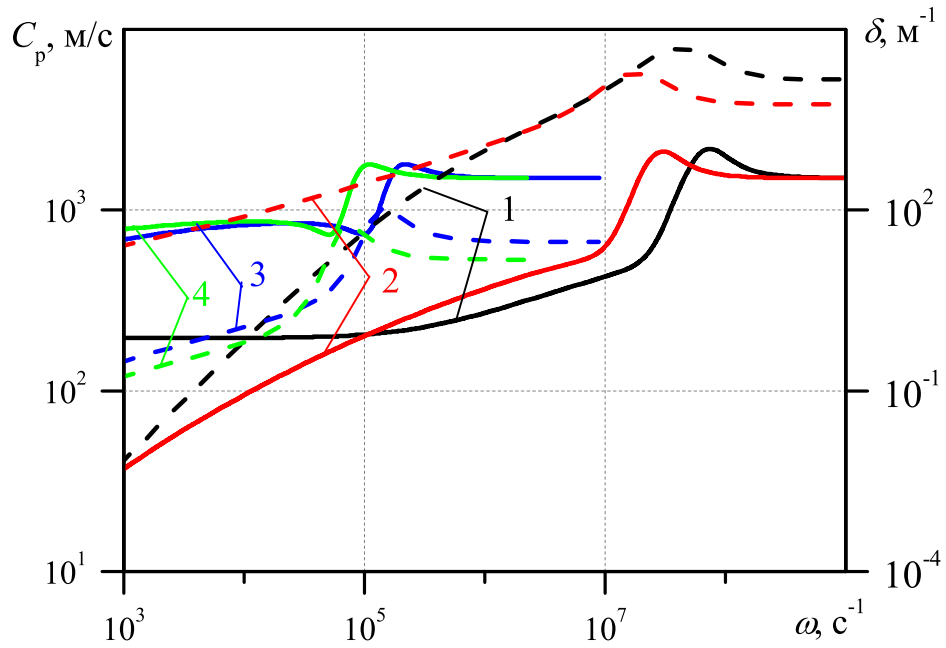


Рис. 3.14 — Зависимость фазовой скорости C_p (сплошные линии) и коэффициента затухания δ (штриховые линии) от частоты возмущения ω при различных значениях радиуса пузырьков: 1 — $a_0 = 10^{-6}$ м, 2 — $2.62 \cdot 10^{-6}$ м, 3 — $5.04 \cdot 10^{-4}$ м и 4 — 10^{-3} м. ($\alpha_0 = 10^{-3}$, $\Delta T_0 = 1$ К, $p_0 = 1$ МПа).

в несколько раз. Что касается кривых 3 и 4, соответствующих парожидкостным системам, то при низких частотах $\omega \leq \omega_R$ фазовые скорости относительно невелики. Здесь уточним, что для данного диапазона частот температурные перепады внутри пузырьков реализуются в тонких слоях вблизи межфазной поверхности, тогда как в основном объёме пузырьков пар в пузырьках ведёт себя как адиабатический газ. Поэтому в плане определения фазовой скорости массообмен между пузырьком и жидкостью не играет особой роли. Но коэффициент затухания, как видно из рисунков, отличается около двух раз.

На рис. 3.15 показаны линейный графики зависимости равновесной скорости звука от радиуса пузырьков a_0 для различных значений перегрева ΔT_0 для $p_0 = 1$ МПа и $\alpha_0 = 10^{-3}$. В рассматриваемых задачах радиус пузырьков изменяется с 10^{-6} м до значения 10^{-2} . Отметим, что каждая расчётная кривая состоит из двух фрагментов. Соответствующие парогАЗОЖИДКОСТНОЙ смеси левые ветви кривых демонстрируют монотонное снижение равновесной скорости до нулевого значения, в то время как радиус пузырьков постепенно увеличивается и

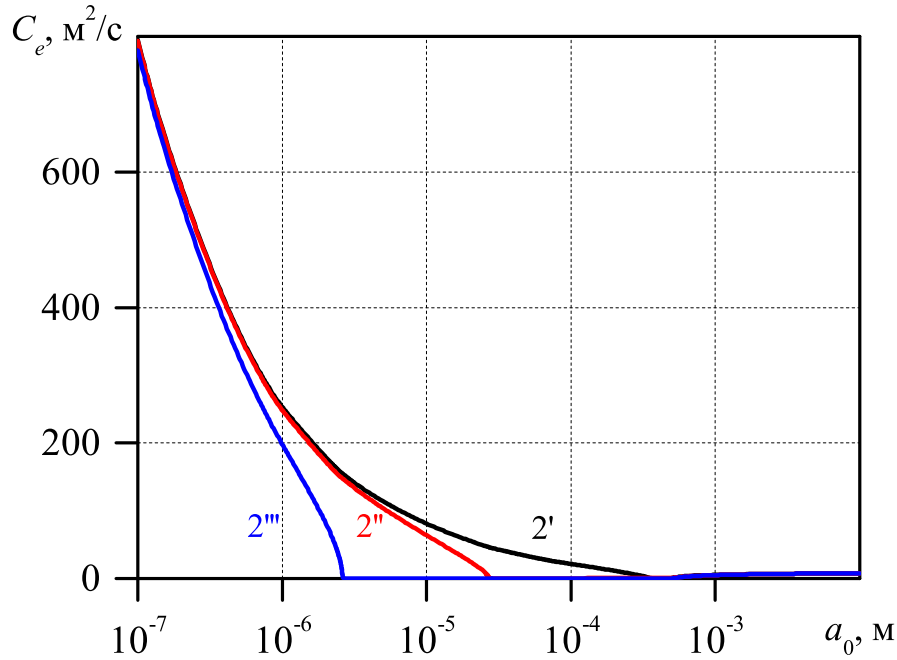


Рис. 3.15 — Зависимость равновесной скорости звука от радиуса пузырьков a_0 при различных значениях перегрева ΔT_0 для $p_0 = 1$ МПа и $\alpha_0 = 10^{-3}$.

Обозначения на линиях соответствуют рис. 3.11.

достигает границы между устойчивым и неустойчивым состояниями системы при соответствующем показателе перегрева ΔT_0 . Значения равновесных радиусов для фиксированных величин перегрева равны соответственно $a_0 = 3.6 \cdot 10^{-4}$, $2.8 \cdot 10^{-5}$ и $2.7 \cdot 10^{-6}$ м. Следовательно, чем больше величина перегрева ΔT_0 , тем уже становится зона устойчивости и раньше (с ростом радиуса a_0) достигается нулевое значение равновесной скорости. Достигнув значения радиуса $a_0 = a_0^{(m)}$, равновесная скорость формально становится чисто мнимой, и следовательно, для значений радиусов a_0 из этого промежутка смесь неустойчива. Но достигая некоторого значения $a_0 = a_0^{(M)}$, находящегося на правой границе зоны устойчивости, равновесная скорость начинает увеличиваться. На этом участке не содержит газовой компоненты в пузырьках и является парожидкостной системой. Значения радиуса $a_0^{(M)}$ для всех трёх значений перегревов очень близки, и его величину можно определить, разрешая относительно радиуса a_0 выражение

$$a_0^{(M)} \simeq \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\rho_{l0}^0 \alpha_{g0} C_L^2}.$$

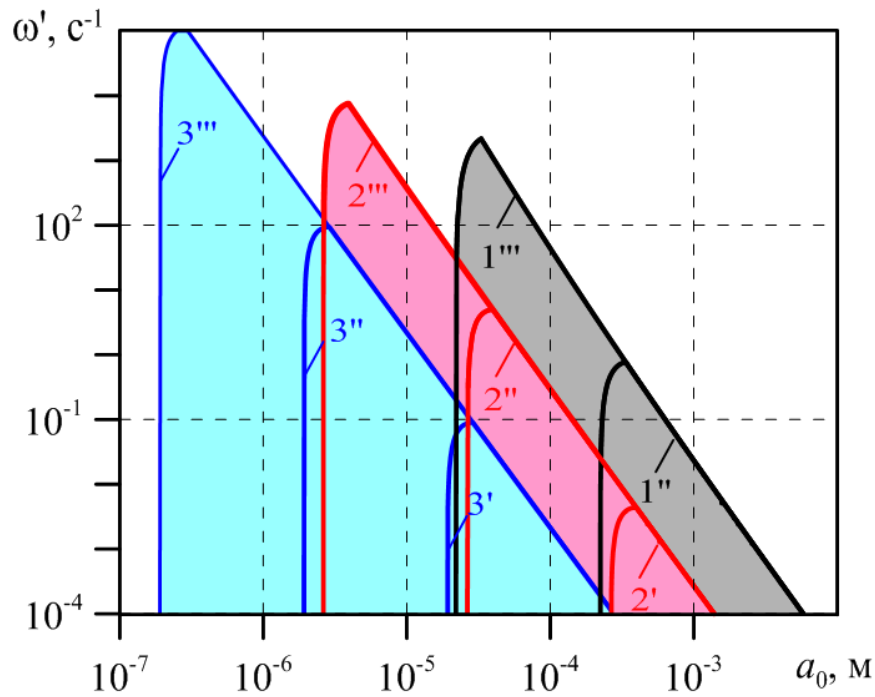


Рис. 3.16 — Зависимость величины инкремента ω' от радиуса a_0 при различных значениях перегрева ΔT_0 . Обозначения на линиях соответствуют рис. 3.11.

При дальнейшем росте начального радиуса a_0 равновесные скорости для всех трёх вариантов перегрева очень близки и аналогично растут, приближаясь к значению, фиксируемому формулой Ландау [193]. А значит, значения равновесной скорости звука на этом участке сливаются в одну кривую.

Кроме этого, чем более перегрета жидкость с парогазовыми пузырьками, тем ниже расположен левый фрагмент кривой равновесной скорости на рис. 3.15. Дадим объяснение этому эффекту: с ростом массовой доли пара в пузырьках, упругость парогазовой смеси в них и равновесная скорость попадают под определяющее влияние фазовых переходов; за счёт испарения и конденсации парциальное давление пара в пузырьках меняется слабо, следовательно, общая упругость парогазовой смеси в пузырьках в основном зависит от парциального давления газа, и пузырьки в целом становятся более «мягкими», легче сжимаются и расширяются.

Рис. 3.16 отражает изменение величины инкремента ω'_∞ в зависимости от изменения радиуса a_0 . Объёмное содержание пузырьков принято $\alpha_{g0} = 10^{-4}$. Радиус пузырьков меняется в диапазоне $(a_0^{(m)}, a_0^{(M)})$. Выделим основной тренд в проведённых расчётах: при постепенном увеличении радиуса пузырьков от

значения $a_0^{(m)}$ до максимального радиуса $a_0^{(M)}$, лежащих на левой и правой границах зон устойчивости, величина инкремента скачкообразно растёт от нуля до максимального значения, затем монотонно и постепенно снижается до нуля. Подчеркнём, что максимальное значение инкремента достигается при максимально возможном радиусе парогазовых пузырьков (отмечен жирными точками на кривых рис. 3.16), который, согласно (2.53), реализуется при $p_{g0} = 0$ ($k_0 = 1$) и определяется как

$$a_0^{(*)} \simeq \frac{2\sigma}{\Delta p_v}, \quad \Delta p_v = p_{\text{eq}}(T_0) - p_0. \quad (3.8)$$

При небольших перегревах ($\Delta T_0 \ll T_0$) из (3.8) с учётом (2.76) можем получить

$$a_0^{(*)} \simeq \frac{2\sigma}{\rho_{v0}^0 L} \frac{T_0}{\Delta T_0}. \quad (3.9)$$

Необходимо добавить, что при $a_0 \geq a_0^{(*)}$ величина инкремента ω'_∞ монотонно снижается до нуля. В этом промежутке изменения равновесного радиуса пузырьков чисто паровые, и поэтому соответствующий текущему значению радиуса пузырьков перегрев жидкости должен отвечать уравнению (3.8) (или (3.9)). Кроме того, из рис. 3.16 видно, что зависимость инкремента от радиуса для всех значений перегрева ложится на одну кривую. Для радиусов менее $a_0^{(*)}$ в отсутствие газа в пузырьках соответствующие инкременты также лежат на правых фрагментах линий в местах, выше отмеченных жирными точками.

На рис. 3.17 построены расчётные зависимости фазовой скорости (фрагмент **а**) и коэффициента затухания (фрагмент **б**) от частоты возмущения для устойчивых систем, иллюстрирующие влияние перегретости ΔT_0 . Равновесный радиус пузырьков равен 10^{-6} м. Для рассмотренных значений величин перегретости ΔT_0 массовое содержание пара и масса воздушного зародыша составляют $k_0 = 0.348; 0.351; 0.355; 0.430; 0.533$ и $m_{g0} = 7.2 \cdot 10^{-18}; 7.1 \cdot 10^{-18}; 7.0 \cdot 10^{-18}; 6.8 \cdot 10^{-18}; 6.5 \cdot 10^{-18}$ кг. В низкочастотном диапазоне ($\omega \leq \omega_R$, $\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{l0}^0}$ – миннаэрттовская частота собственных колебаний пузырьков) наблюдается сравнительно заметное влияние перегрева на значение фазовой скорости. Для частот выше 10^7 с $^{-1}$ влияние перегретости практически исчезает. Наблюдаемый эффект связан с достаточно высокой массовой концентрацией инертного газа в пузырьках, из-за чего упругость пузырьков в основ-

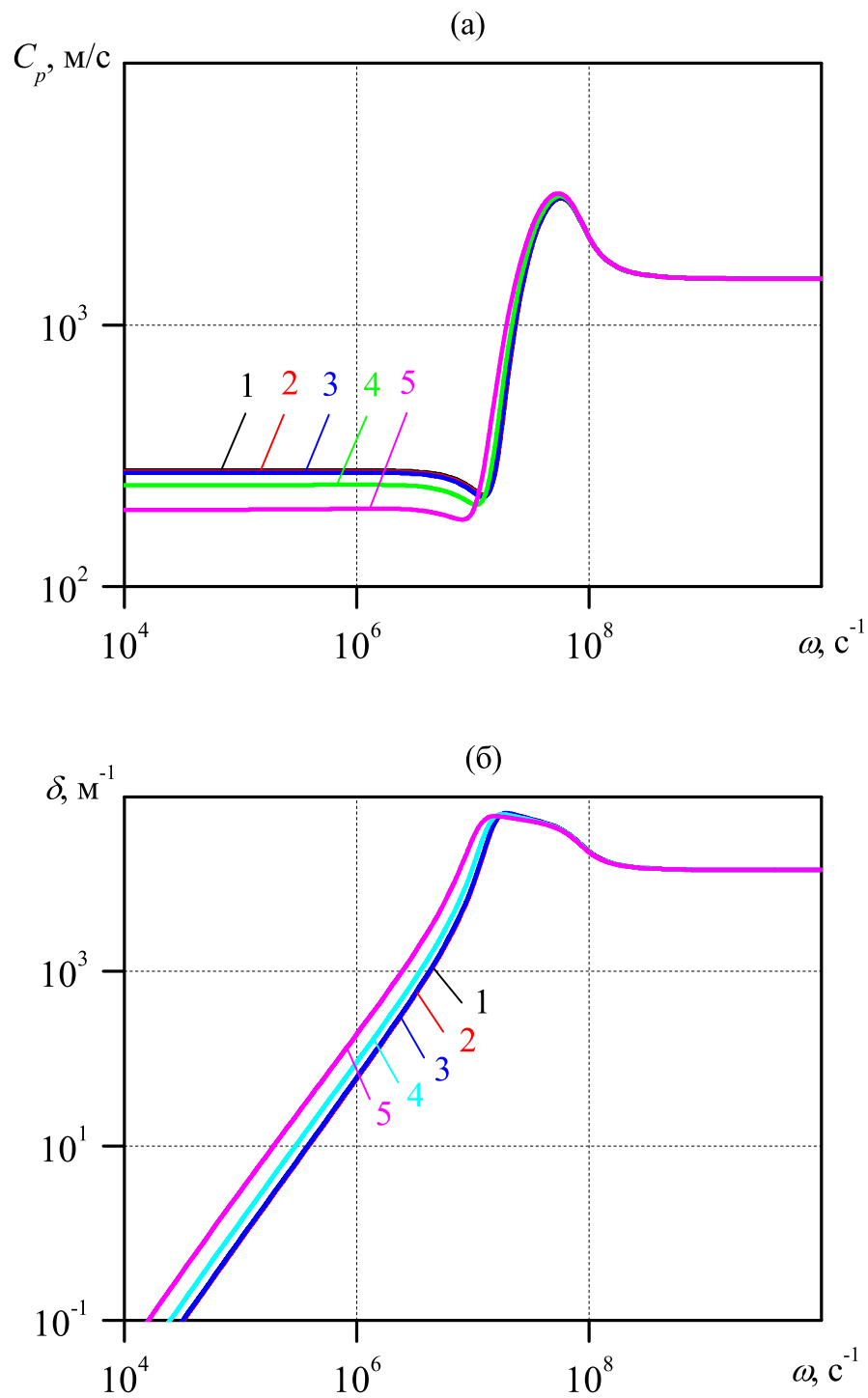


Рис. 3.17 — Зависимость фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущения при различных значениях перегрева: 1 – $\Delta T_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ К, 2 – $5 \cdot 10^{-1}$ К, 3 – 1 К, 4 – 5 К, 5 – 10 К.

ном определяется массовым содержанием газа. Декремента затухания в области устойчивости системы варьирует не более чем вдвое.

3.4 Выводы по главе

Для рассмотренных начальных температур $T_0 = 300$ и 353 К показано, что при падении акустической волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела для низкочастотных волн ($\omega < \omega_R$) под углом больше критического угла падения, волна полностью отражается от границы раздела. Например, при углах падения, превышающих значение $\Theta^{(0)} = 10^\circ$, угол преломления асимптотически приближается к значению $\Theta^{(s)} = 90^\circ$. Установлено, что в данном случае пузырьковый слой в «чистой» жидкости обладает свойствами звукового канала.

При начальной температуре среды $T_0 = 373$ К наблюдается иная картина: угол отражения достигает максимального значения $\Theta^{(s)} = 70^\circ$, следовательно, формально не происходит полного внутреннего отражения. Однако из-за большого значения величины коэффициента затухания и малого значения фазовой скорости (что отражается в значении мнимой части $n_y^{(s)}$ (или $\cos \Theta^{(s)}$)), проникающая в «чистую» жидкость волна полностью затухает вблизи границы раздела сред. Таким образом, фактически реализуется полное внутреннее отражение.

Показано, что при падении волны со стороны «чистой» жидкости на границу раздела, она при любом угле падения проходит в пузырьковую жидкость.

На основе аналитических и численных расчётов построены карты зон устойчивости пузырьковой парогазожидкостной смеси в области (a_0, α_0) в зависимости от величины перегретости жидкости ΔT_0 . Установлено, что наличие нерастворимого газа в пузырьках существенно расширяет зону значений объёмного содержания α_{g0} и радиуса a_0 пузырьков на плоскости (a_0, α_0) . С ростом статического давления p_0 зона устойчивости для чисто парожидкостных систем расширяется, а для системы с газовой компонентой в пузырьках при одних и тех же значениях перегрева ΔT_0 сужается.

Рассмотрено влияние перегретости жидкости ΔT_0 на величину фазовой скорости и коэффициента затухания, когда система находится в устойчивом состоянии. Установлено, что для мелкодисперсной смеси (при $a_0 = 10^{-6}$ м) в зоне устойчивости перегрев несущественно влияет на изменение фазовой скорости и коэффициента затухания, что связано с достаточно высокой концентрацией инертного газа в пузырьках. Декремент затухания в устойчивой области меняется не более чем в два раза.

Глава 4. Волны давления в заполненной жидкостью трубе, содержащей сферическую пузырьковую область

Новая глава диссертации посвящена анализу эволюции волн давления в заполненной чистой жидкостью цилиндрической трубе, при наличии в ней пузырьковой области сферической формы. Будем рассматривать два случая:

1. Пузырьковый кластер на оси трубы.
2. Сферический кластер, примыкающий к торцевой поверхности трубы.

Исследуется влияние объёмного содержания пузырьков и геометрии пузырьковой области на динамику волновой картины течения. Построены карты максимальных давлений, достигаемых в трубе, в зависимости от значений указанных параметров.

4.1 Общая постановка задачи и система уравнений

В работе [171] исследуется взаимодействие плоской ударной волны с сферическим пузырьковым кластером в жидкости. В результате было показано, что это взаимодействие порождает уединённую волну давления с амплитудой, превышающей амплитуду начального возмущения. Важно отметить, что структура этой уединённой волны зависит от параметров кластера, амплитуды ударной волны и соотношения диаметров кластера и рабочего участка. В следующей работе того же автора [172] было проведено экспериментальное исследование эволюции и структуры ударной волны умеренной амплитуды в жидкости с пузырьковыми кластерами, полученные данные о скорости и структуре таких ударных волн сопоставлены с теоретическими моделями. Экспериментально показано, что для волн небольшой амплитуды уравнение Буссинеска хорошо описывает структуру переднего фронта осциллирующей ударной волны. Кроме того, было обнаружено, что резонансное взаимодействие пузырьковых кластеров в ударной волне может привести к увеличению амплитуды осцилляций в ней.

Задача о создании гидроакустических аналогов лазерных систем, способных фокусировать энергию волн в жидкости, является перспективной с точки зрения практических приложений. Эти системы могут поглощать и увеличи-

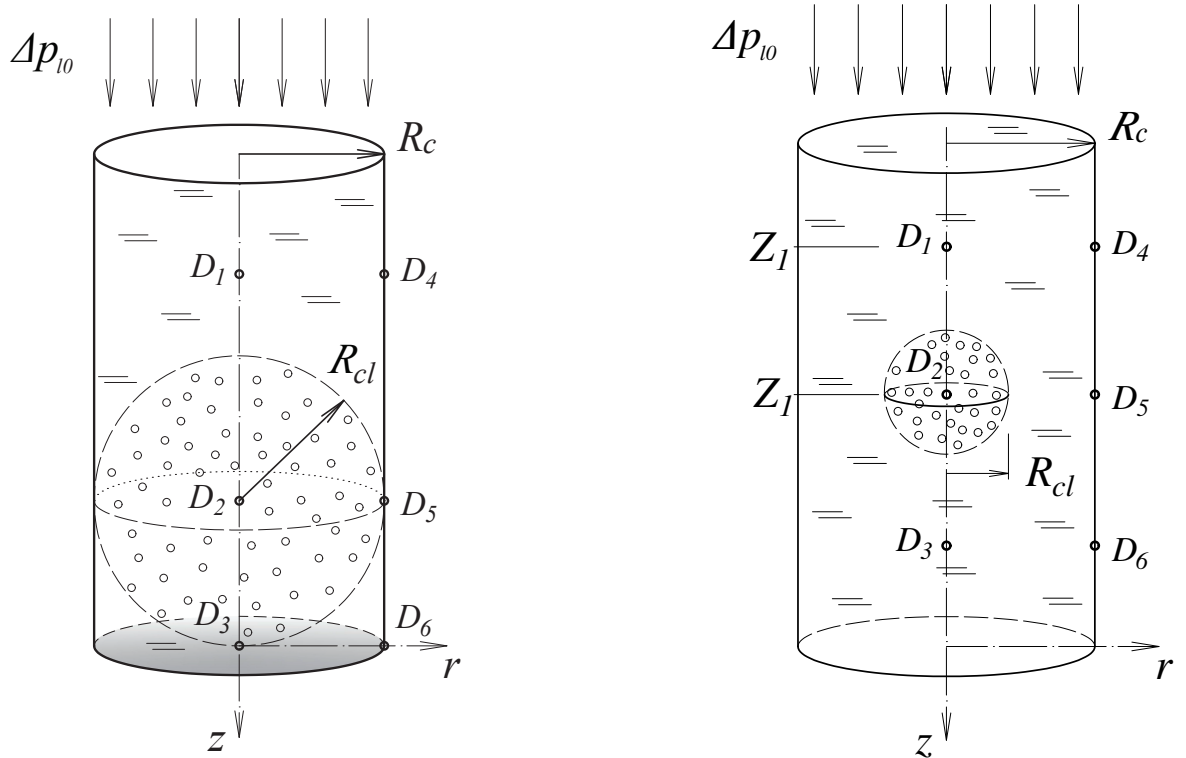
вать амплитуду внешнего воздействия, затем излучая его с возможной концентрацией энергии в определённом направлении [181]. Исследования также охватывают анализ фокусировки энергии волн в пузырьковых средах. Например, авторы работы [115] изучают динамику распространения волновых возмущений в жидкости с пузырьковой завесой конечных размеров, демонстрируя увеличение амплитуды давления в зависимости от временной протяжённости начального импульса внутри завесы. В других исследованиях [184] проводятся численные расчёты процесса «накачки» сферического пузырькового кластера и формирования в нем башнеобразного импульса давления. Экспериментально показано, что изменение объёмной концентрации газовой фазы позволяет регулировать координату фокусировки волны, причём амплитуда излучаемой кластером в жидкость волны может превышать амплитуду начального возмущения, вызывающего возбуждение кластера, на 1–2 порядка. Результаты численного моделирования падения ударной волны на пузырьковый кластер в форме полого цилиндра в жидкости и возникновения обратного излучения содержатся в работе [182].

Далее сформулируем ключевую задачу настоящей главы диссертации. Пусть имеется заполненная водой труба. На её оси располагается область сферической формы, содержащая пузырьковую жидкость (рис. 4.1 на с. 133). В начальный момент времени система находится в состоянии покоя при равновесном давлении p_0 . В некоторый момент времени, который в дальнейшем будем полагать началом расчёта, на границе $z = 0$ возникает мгновенный скачок давления Δp_{l0} и далее поддерживается постоянным. Исследуется эволюция волнового процесса в трубе при $t > 0$.

Запишем систему макроскопических уравнений, которая используется для решения подобных задач, в приближении цилиндрической симметрии. Уравнения соответствуют записанным в главе 2 настоящей диссертации, все описанные выше допущения достоверны и здесь. В систему входят уравнения сохранения масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках [206]:

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{v_r}{r} + \rho_i \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (i = l, g),$$

$$\frac{dn}{dt} + n \frac{v_r}{r} + n \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0,$$



а) сферический кластер на торцевой стенке

б) сферический кластер на оси трубы

Рис. 4.1 — Схема задачи. R_C и R_{cl} — радиусы трубы и сферического кластера.

Z_1 — координата центра кластера. $D_1 - D_6$ — датчики давления.

$$\rho \frac{dv_r}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial r} = 0, \quad \rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial z} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \quad w = \frac{da}{dt},$$

$$\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l.$$

Здесь использованы следующие обозначения: α_i — объёмные содержания фаз, v_r и v_z — радиальная и осевая составляющая скорости, a — радиус пузырьков, p_i — давления фаз, ρ_{i0} — истинные плотности фаз, γ — показатель адиабаты для газа, q — интенсивность теплообмена, n — число пузырьков в единице объёма, w — их радиальная скорость. Нижними индексами $i = l, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

Согласно исследованию В.Ш. Шагапова [246], скорость движения границы пузырька w может быть представлена как сумма двух составляющих $w = w_R + w_A$, где w_R определяется из уравнения Релея–Ламба, а w_A находится из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}},$$

где ν_l – вязкость жидкости, C_l – скорость звука в «чистой» жидкости.

Тепловой поток q для расчёта нелинейных волн принято задавать приближённым конечным соотношением [206]

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3,$$

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe} < 100, \end{cases}$$

$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0},$$

где $T_0 = \text{const}$ – температура жидкости, c_g и λ_g – теплоёмкость и теплопроводность газа, Nu и Pe – числа Нуссельта и Пекле.

Здесь стоит добавить, что из записанной математической модели в частном случае при $\alpha_{g0} = 0$ следует волновое уравнение для линейно сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой средой это обстоятельство в свою очередь позволяет использовать сквозные методы расчёта.

4.2 Методика численного расчёта

При решении задач гидродинамики и смежных областей, связанных с численными расчётами, основным фактором выбора метода является баланс между точностью, эффективностью и экономичностью. Для моделирования задач, связанных с нелинейными волнами и резкими изменениями большой амплитуды, предпочтительны методы, основанные на физических принципах процес-

сов. В данной работе для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных была выбрана конечно-разностная схема с использованием метода Рунге-Кутты. Этот метод подходит для задач газовой динамики и не требует применения специальных разностных схем на границах расчётной области.

4.2.1 Уравнения в переменных Лагранжа

Для численной реализации задачи об эволюции волн давления в цилиндрической трубе с пузырьковым кластером в виде полого либо сплошного цилиндра удобно записать систему уравнений из разд. 4.1 в лагранжевых координатах. Такой выбор обусловлен тем, что в лагранжевых координатах исходные границы неоднородностей остаются неподвижными [227]. После определённых преобразований из уравнений, приведённых ранее, можно получить следующую систему в лагранжевых переменных [138]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_l}{\partial t} &= \frac{C_l^2 \rho_l^0}{1 - \alpha_g} \left[\frac{3\alpha_g}{a} w - \left(\frac{\alpha_g}{J} + \frac{\rho_{l0}}{J^2 \rho_l^0} \right) \frac{\partial J}{\partial t} \right], \\ \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g}{a} w - \frac{\alpha_g}{J} \frac{\partial J}{\partial t}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{r}{r_0} \frac{1}{J\rho} \left(\frac{\partial p_l}{\partial r_0} \frac{\partial r}{\partial z_0} - \frac{\partial p_l}{\partial z_0} \frac{\partial r}{\partial r_0} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = v_z, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{r}{r_0} \frac{1}{J\rho} \left(\frac{\partial p_l}{\partial r_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial p_l}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial r_0} \right), \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v_r, \\ \frac{\partial p_g}{\partial t} &= -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \quad \frac{\partial a}{\partial t} = w = w_R + w_A, \\ \frac{\partial w_R}{\partial t} &= \left[\frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2} w_R^2 - 4\nu_l \frac{w_R}{a} \right] \frac{1}{a}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}, \\ q &= \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100 \\ 10, & \text{Pe} < 100 \end{cases}, \\ \text{Pe} &= 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad k_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3, \end{aligned}$$

$$J = \frac{r}{r_0} \left(\frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial r_0} \right),$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\mathbf{v}_r J}{r} + \frac{r}{r_0} \left(\frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial v_z}{\partial z_0} - \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial v_z}{\partial r_0} + \frac{\partial v_r}{\partial r_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial v_r}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial r_0} \right),$$

где z_0 и r_0 – лагранжевы переменные, в качестве которых берутся начальные эйлеровы координаты, J – якобиан перехода от лагранжевых к эйлеровым переменным [227].

Приведённая выше система решалась численно по явной схеме. Поскольку здесь учтены процессы межфазного теплообмена и акустической разгрузки пузырьков, системе свойственна достаточно сильная естественная диссипация, поэтому не требуется вводить искусственную вязкость.

4.2.2 Принцип построения разностной схемы

Кратко опишем принцип построения разностной схемы, которая принята для решения данной задачи. Решение ищется в прямоугольной пространственной области Q : $Q = \{0 \leq z \leq L_z, 0 \leq r \leq R_c\}$ при $t > 0$, где L_z – длина расчётной области по координате z . Для аппроксимации дифференциальных уравнений используем равномерную шахматную сетку

$$(z_i, r_j, t_k), \quad \left(z_{i+\frac{1}{2}}, r_{j+\frac{1}{2}}, t_k \right),$$

узлы которой рассчитываются следующим образом:

$$z_{i+\frac{1}{2}} = z_i + \frac{1}{2} \cdot h_{z0}, \quad z_{i+1} = z_i + h_{z0}, \quad i = 0, 1, \dots, M_z - 1,$$

$$r_{j+\frac{1}{2}} = r_j + \frac{1}{2} \cdot h_{r0}, \quad r_{j+1} = r_j + h_{r0}, \quad j = 0, 1, \dots, M_r - 1,$$

$$z_0 = 0, \quad z_{0M_z} = L_z, \quad r_0 = 0, \quad r_{0M_r} = R_c, \quad t_k = k \cdot \tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где h_{z0} , h_{r0} и τ – соответственно шаги по координатам z , r и времени. К узлам сетки (z_i, r_j, t_k) будем относить сеточные функции скоростей $\mathbf{v}_{z_{ij}}^k$, $\mathbf{v}_{r_{ij}}^k$ и эйлеровых переменных z_{ij}^k и r_{ij}^k , к «полуцелым» точкам $\left(z_{i+\frac{1}{2}}, r_{j+\frac{1}{2}}, t_k \right)$ – сеточные функции всех остальных параметров. Такая аппроксимация обеспечивает

устойчивость решения волновых задач в однофазных системах (жидкостях и газах) конечно-разностным методом [227].

4.2.3 Начальные и граничные условия

Для проведения численных экспериментов используются следующие условия:

- **Начальные условия** при $t = 0$ и $z > 0$, соответствующие состоянию покоя неоднородной пузырьковой смеси в трубе, запишутся в виде:

$$p = p_0, \quad v_r = v_z = 0, \quad \rho = \rho_0,$$

Уравнения для задания сферы ($0 < R_{cl} \leq R_c$):

$$\begin{cases} (z - z_{cl})^2 + r^2 \leq R_{cl}^2 : & \alpha_g = \alpha_{g0}, \quad \rho = \rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}), \\ & p_g = p_0, \quad a = a_0, \quad w = 0, \\ (z - z_{cl})^2 + r^2 > R_{cl}^2 : & \rho = \rho_{l0}^0, \end{cases}$$

где z_{cl} – координата центра кластера по оси z , а R_{cl} – его радиус. Расположение сферы определяется координатой z_{cl} .

- **Граничные условия:** на оси симметрии ($r_0 = 0$) и на стенке трубы ($r_0 = R_c$) зададим условие непротекания жидкости $v_r = 0$, а на торцевой границе $z_0 = 0$ – давление в виде «ступеньки»

$$z_0 = 0 : \quad p_l(r_0, t) = p_0 + \Delta p_{l0}, \quad 0 < r_0 < R_c.$$

Отметим, что случай задания давления на границе соответствует разрыву мембраны между камерой высокого давления, заполненной газом, и рабочей камерой, в которой находится исследуемая система.

На другой торцевой границе ($z_0 = L_z$) в зависимости от условий конкретной задачи можно поставить следующие условия:

- а) условие как на жёсткой стенке – $v_z = 0$,
- б) условие, аналогичное свободной поверхности – $p_l = p_0$,

в) условие «протекания», чтобы возмущения «уходили» из области расчётов, не отражаясь от этой границы используется импедансное соотношение, связывающее амплитуды давления и скорости $\Delta p_{l0} = \Delta v_z \rho_l^0 C_l$.

4.3 Тестовые расчёты и сравнение с экспериментальными данными

В статье [171] описаны эксперименты, проведённые в ударной трубе длиной 1 м с внутренним диаметром 0.053 м. На оси вдоль рабочего участка располагалась проволока из нержавеющей стали диаметром 0.001 м. Рабочий участок заполнялся жидкостью и насыщался пузырьками газа через генератор, расположенный в нижней части трубы. В качестве рабочей жидкости использовалась дистиллированная вода. На проволоку в центре трубы надевался пузырьковый кластер – поролоновый шарик, заполненный жидкостью с пузырьками. Кластер размещался вблизи дна рабочего участка (рис. 4.2 на с. 139). Верхний край кластера находился на расстоянии 0.01 м от поверхности жидкости. В опытах использовались поролоновые шарики диаметром 0.03 и 0.045 м, а также пластины диаметром 0.053 м и высотой 0.02 м.

Пузырьковый кластер готовился на вспомогательной установке следующим образом. Поролоновый шарик помещался в рабочий объём этой установки и насыщался дистиллированной водой в условиях вакуума. Далее через жидкость в рабочем объёме прокачивались воздушные пузырьки при повышенном (по сравнению с атмосферным) статическом давлении. При этом жидкость насыщалась воздухом до равновесного состояния при данном статическом давлении, и вследствие диффузии газ растворялся внутри поролонового шарика. Время выравнивания концентрации растворенного в жидкости газа на поверхности и в центре шарика τ составляло несколько десятков часов ($\tau \approx R^2 / (2 \cdot D)$ [197], где R – радиус кластера; D – коэффициент диффузии). После сброса статического давления до атмосферного происходило выделение из жидкости газовых пузырьков, которые прилипали к поролоновому скелету и формировали газожидкостный кластер.

Волны давления ступенчатой формы образовывались в воздухе при разрыве диафрагмы, разделяющей камеру высокого давления и рабочий участок, и далее распространялись в жидкость. Профили волн давления регистрировались пьезоэлектрическими датчиками давления, расположенными на боковой

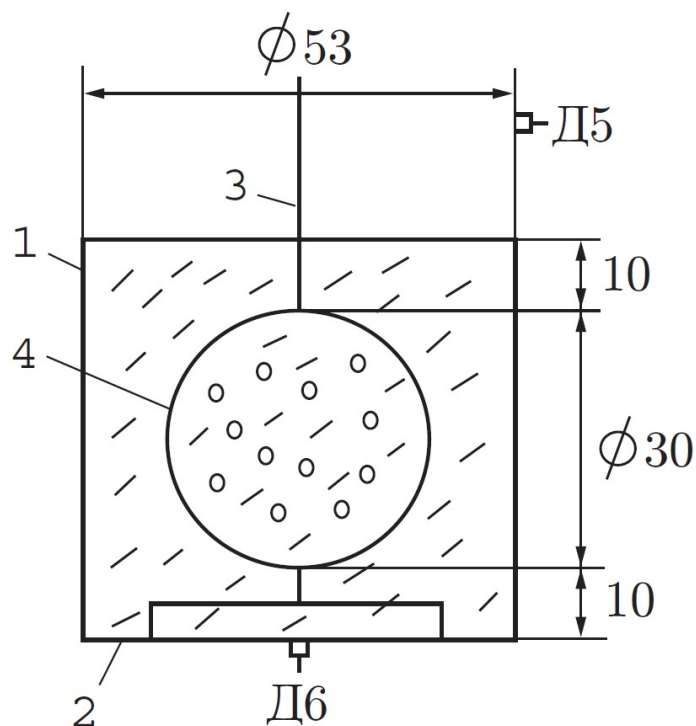


Рис. 4.2 — Схема расположения пузырькового кластера в ударной трубе в эксперименте [171]: 1 – рабочий участок; 2 – дно рабочего участка; 3 – стальная проволока; 4 – газожидкостный кластер; Д5 и Д6 – датчики давления.

поверхности (Д1–Д5) и на дне рабочего участка (Д6). Сигналы с датчиков подавались на аналого-цифровой преобразователь и обрабатывались на компьютере.

На рис. 4.3 на с. 140 приведены профили волны давления в жидкости (Δp_l). В расчётах волна создавалась заданием граничного давления типа «ступенька» ($p_l = p_0 + \Delta p_{l0}$, при $z = 0$), амплитудой $\Delta p_{l0} = 0.3$ МПа. Сравнение расчётных и экспериментальных эпюр давления демонстрирует удовлетворительное согласование данных. Видно, что падающая на газожидкостный кластер ударная волна ступенчатой формы формирует солитоноподобный профиль давления в жидкости под его влиянием. Амплитуда волны в жидкости значительно превышает заданную граничным условием $\Delta p_{l0} = 0.3$ МПа. Формирование уединённого профиля волны обусловлено поглощением кластером энергии преломлённой ударной волны и ее последующим переизлучением [184], [115]. Высокочастотные осцилляции на переднем фронте волны связаны с прохождением по жидкости высокочастотных пульсаций и их отражением от дна и

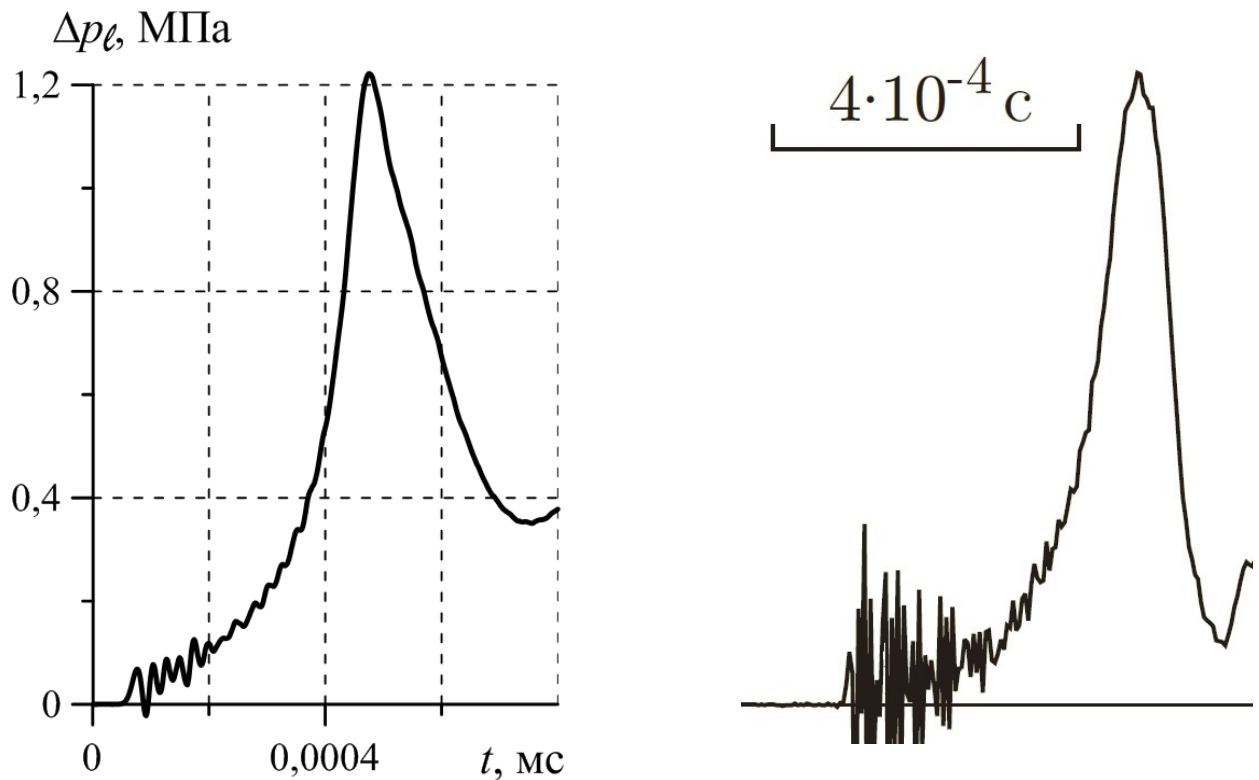


Рис. 4.3 — Осциллограмма датчика Д6. Слева представлен результат расчёта, а справа — эксперимент [171]. В расчётах и в эксперименте: $a_0 = 0.248$ мм, $\alpha_{g0} = 0.128$, $c_g = 1003$ Дж/кг·К, $\lambda_g = 0.0259$ м·кг/К·с³, $\Delta p_l = 1.28$ МПа.

свободной поверхности жидкости, а также с колебаниями пузырьков в кластере.

Далее обратимся к результатам исследований взаимодействия ударной волны ступенчатого профиля со сферическим газожидкостным кластером вблизи поверхности жидкости и формирования бегущей по жидкости уединённой волны давления, описанным в эксперименте [171]. Верхний край кластера находился на расстоянии 10 мм от поверхности жидкости, а её уровень в рабочем участке составлял 0.5 м. В расчётах использовались следующие параметры среды: $a_0 = 0.221$ мм, $\alpha_{g0} = 0.12$, $R_c = 0.0265$ м, $R_{cl} = 0.015$ м, $\Delta p_{l0} = 0.36$ МПа. Остальные параметры такие же, как на рис. 4.3. На рис. 4.4 на с. 141 очерчены расчётные и экспериментальные профили давления, соответствующие показаниям датчиков на стенке ударной трубы. В расчётах волна давления инициировалась заданием волны типа «ступенька» на границе $z = 0$. Отметим, что за пузырьковым кластером образуется солитоноподобный профиль давления, формирование которого объясняется аналогично предыдущему случаю. Сравнение кривых даёт все основания говорить о хорошем согласовании расчётных

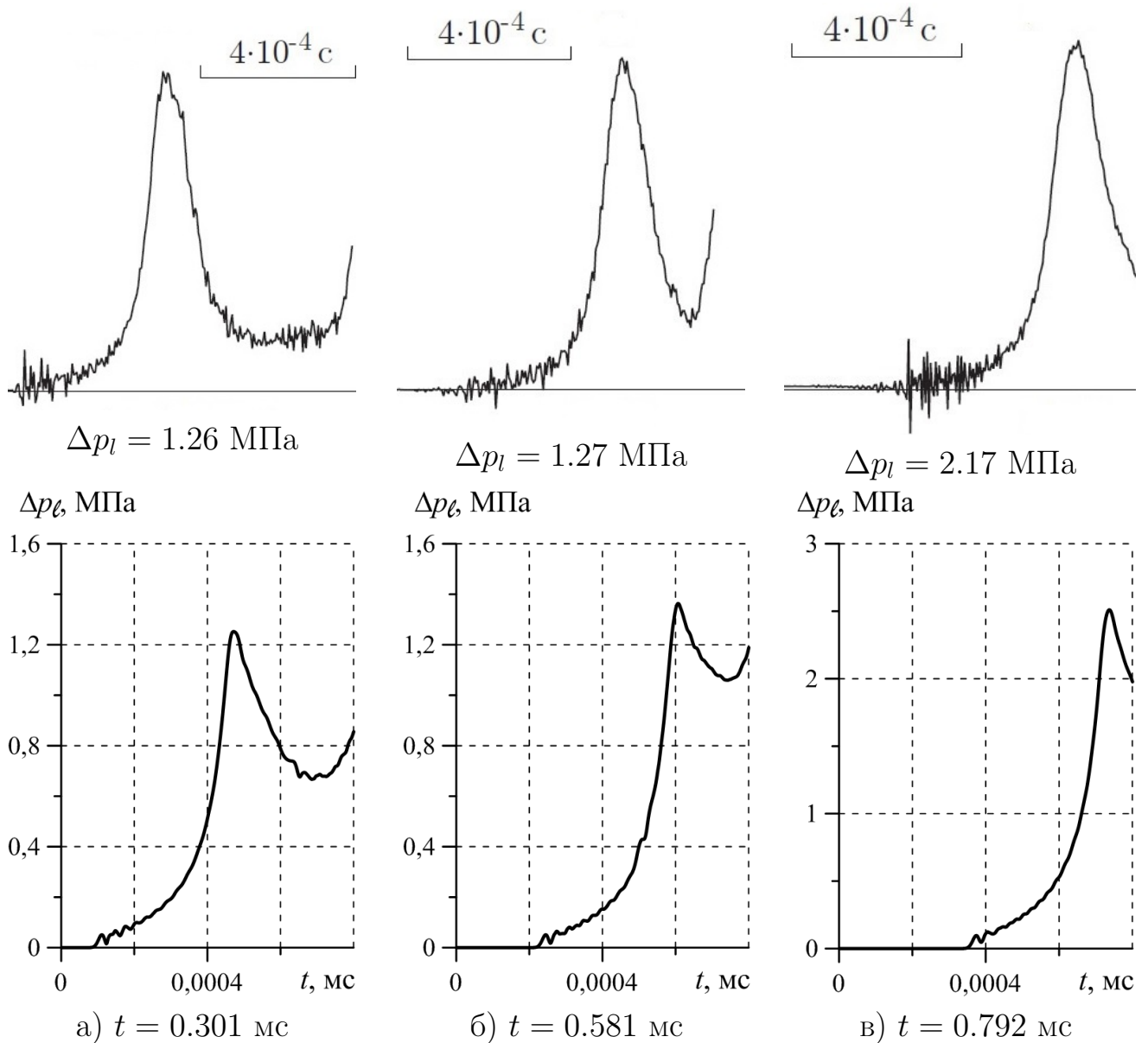


Рис. 4.4 — Профили волн давления в жидкости за пузырьковым кластером (экспериментальные [171] — сверху, расчётные — снизу). Фрагменты **а**, **б** и **в** соответствуют показаниям датчиков расположенных на расстояниях 0.105, 0.305 и 0.495 от границы $z = 0$.

и экспериментальных осциллограмм по амплитуде и длительности солитоноподобного профиля давления в жидкости.

Выполненные тестовые расчёты и их наглядное сравнение с экспериментальными данными из работ других авторов служит верификацией применимости записанной в начале главы модели к обозначенному классу задач.

4.4 Фокусировка волны давления в сферическом пузырьковом кластере

Дальнейшие численные расчёты были проведены при следующих теплофизических параметрах: $c_g = 1006$ Дж/кг·К, $\rho_{g0} = 1.29$ кг/м³, $\lambda_g = 0.026$ м·кг/К·с³, $\gamma = 1.14$ ($\kappa_g = 2.003 \cdot 10^{-5}$ м²/с) (для воздуха); $C_l = 1500$ м/с, $\rho_{l0} = 10^3$ кг/м³, $\nu_l = 6 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $T_0 = 293$ К, $p_0 = 0.1$ МПа (для воды). При расчётах для h_{z_0} , h_{r_0} и τ применялись следующие значения: $h_{z_0} = h_{r_0} = 10^{-3}$ м, $\tau = 10^{-7}$ с.

4.4.1 Случай сферического кластера у торцевой стенки

Рассмотрим следующую физическую задачу: в заполненной жидкостью (водой) трубе цилиндрической формы находится сферический пузырьковый кластер, примыкающий непосредственно к торцевой твёрдой стенке (см. рис. 4.1, фрагмент **а** на с. 133). В определённый момент система нагружается волной давления по направлению образующей трубы. Исследуем, каким образом наличие кластера у поверхности изменит интенсивность волнового импульса.

Параметры трубы и пузырьковой области определим так: радиус пузырькового кластера R_{cl} изменяется от 25 до 100 % радиуса трубы с шагом 25 %, длина расчётной области составляет $L_z = 0.5$ м, радиус трубы $R_c = 0.1$ м, начальное содержание газовой фазы $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, начальный радиус пузырьков $a_0 = 10^{-3}$ м, амплитуда скачка давления на границе $\Delta p_{l0} = 0.5$ МПа.

На рис. 4.5 на с. 143 представлены эпюры давления датчиков, расположенных на оси (D_1, D_2, D_3) и стенке трубы (D_4, D_5, D_6). Здесь D_1 и D_4 располагаются на расстоянии 0.25 м от плоскости $z = 0$; D_3 и D_6 – на расстоянии 0.5 м; D_2 и D_5 – на расстоянии радиуса кластера от правой торцевой границы (см. рис. 4.1, фрагмент **а**). Линии чёрного цвета соответствуют сферическому кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.025$ м, красного – 0.05 м, и синего – 0.075 м. Анализируя полученные данные, отметим, что максимальное давление фиксируется на датчике, который расположен на торцевой «твёрдой» стенке на оси трубы (см. датчик D_3). Из его показаний можно заключить, что для класте-

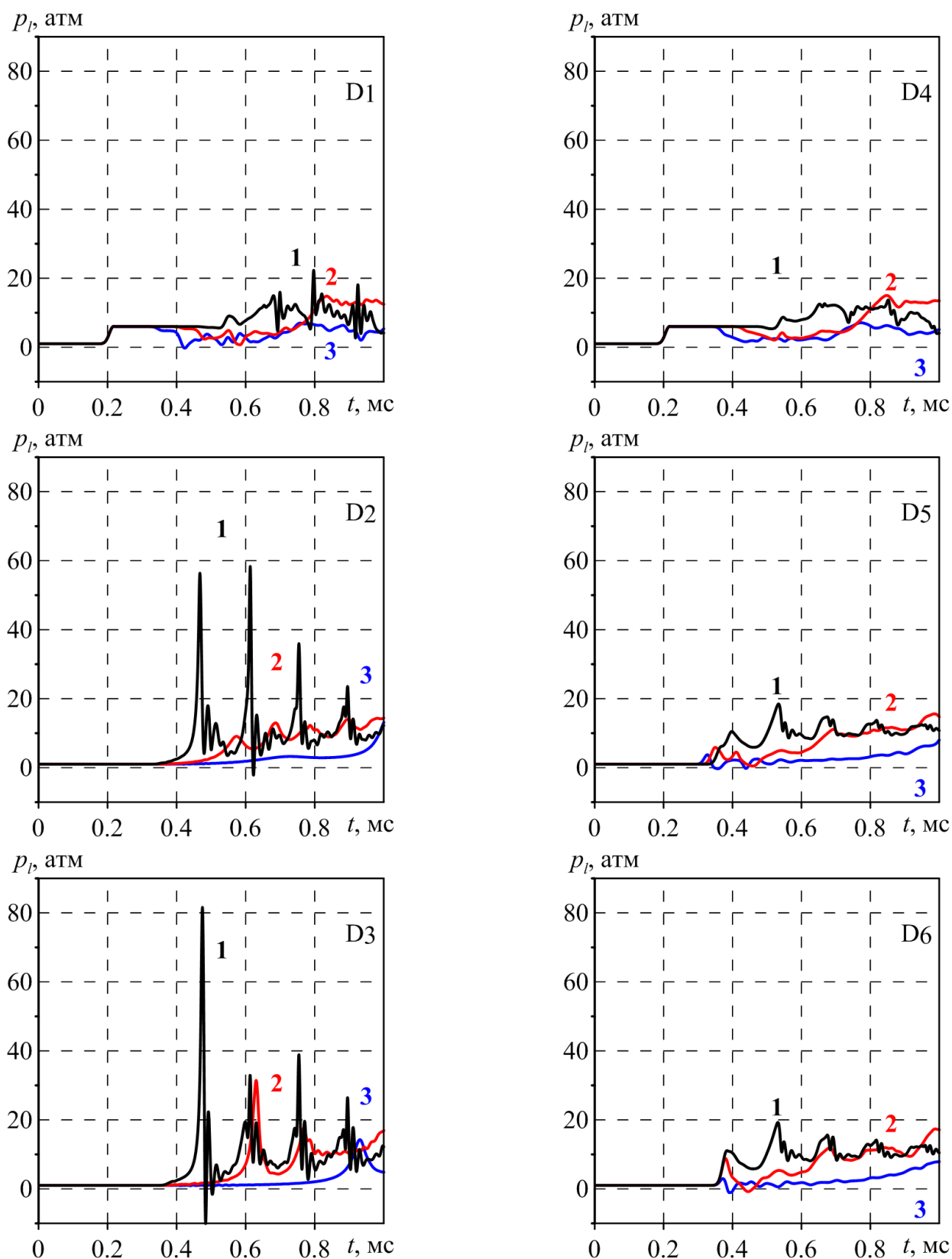
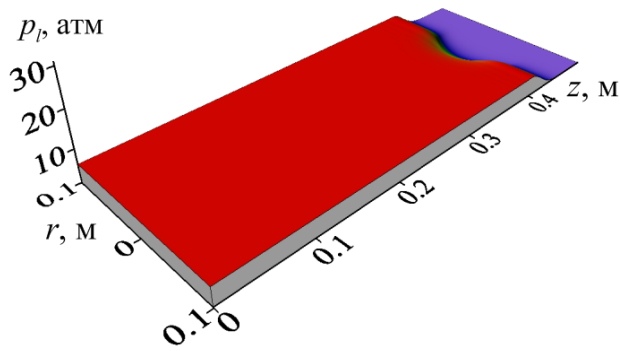


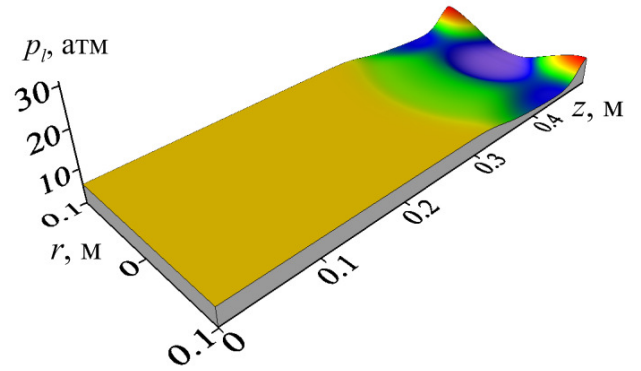
Рис. 4.5 — Показания датчиков D_1 – D_6 при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Линии чёрного цвета соответствуют сферическому кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.025$ м, красного – 0.05 м и синего – 0.075 м.

ров радиусом $R_{cl} = 0.025$ м и $R_{cl} = 0.075$ м реализуются близкие значения пикового давления на стенке, а значит, они порождают схожее воздействие на твёрдую стенку, единственным отличием является время воздействия. Здесь стоит напомнить, что скорость распространения волн в пузырьковой жидкости с объёмным содержанием $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ более чем на порядок уступает скорости распространения сигнала в «чистой жидкости». В связи с этим, для случая $R_{cl} = 0.025$ м время фокусировки падающего сигнала в середине кластера в 3 раза меньше по сравнению с кластером радиуса $R_{cl} = 0.075$ м (см. датчик D_3). Отдельного рассмотрения заслуживают линии на графике датчика D_2 , расположенного внутри пузырьковой сферы. Как видно, для наименьшего кластера ($R_{cl} = 0.025$ м) фиксируются скачки до 8 МПа, и максимальное значение достигается при 2-ом скачке. Это означает, что первый пик достигается при «падении» первоначальной волны, а второй – при воздействии волны, отражённой от твёрдой стенки. Из-за цилиндрической симметрии возмущение «распадается» при распространении в сторону входного торца и теряет амплитуду, что фиксирует датчик D_1 . Стоит отметить сильную волну разгрузки, которая может привести в откольным эффектам (см. D_3). Для случая $R_{cl} = 0.1$ м видим, что сферический кластер полностью «погасил» падающую волну как внутри кластера (см. D_2), так и на стенке (см. D_3). Геометрия кластера определила небольшую волну разгрузки (см. D_1). Если радиус кластера составляет меньше половины радиуса трубы, то датчики, расположенные на стенке, также чувствуют воздействие усиленного возмущения давления от сферического кластера (см. D_4 – D_6). В двух других вариантах из-за геометрии и диссипативных свойств кластера волновая нагрузка на стенки трубы меняется несущественно.

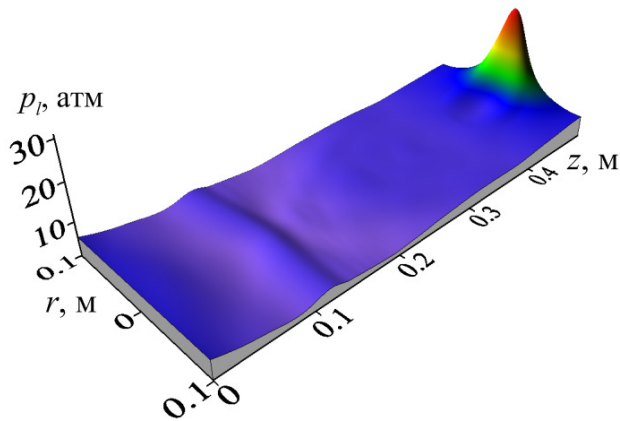
Для понимания объёмной картины эволюции течения на рис. 4.6 на с. 145 построены поля давлений для кластера радиуса $R_{cl} = 0.05$ м. Моменты времени определяются пиковыми значениями давления, зафиксированными датчиком D_3 на рис. 4.5 на с. 143. На рис. 4.6, **а** показано начало взаимодействия импульсного сигнала с пузырьковой областью. Далее, за счёт фокусировки сигнала на стенке за кластером и отражения от твёрдой стенки, происходит увеличение амплитуды падающего сигнала и образуются башнеобразные картины на внешней границе канала (рис. 4.6, фрагмент **б**). В дальнейшем, сигнал, сфокусированный внутри сферического кластера, «падает» на стенку за ним. Образовавшиеся на внешней границе канала башнеобразные всплески давления



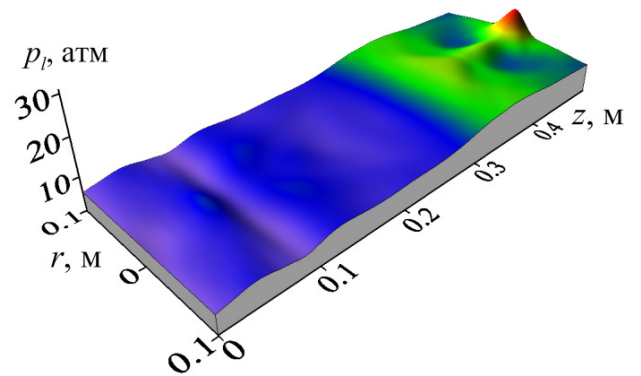
а) момент времени 0.320 мс



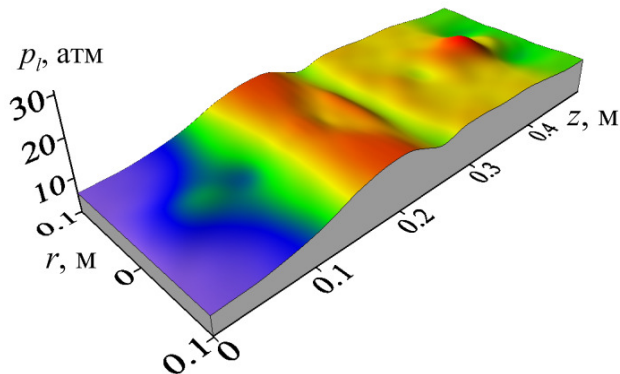
б) момент времени 0.382 мс



в) момент времени 0.632 мс



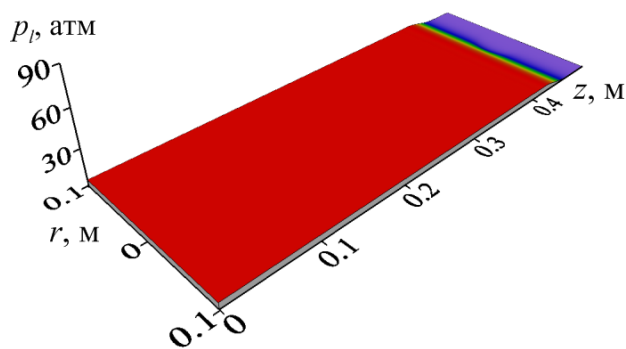
г) момент времени 0.768 мс



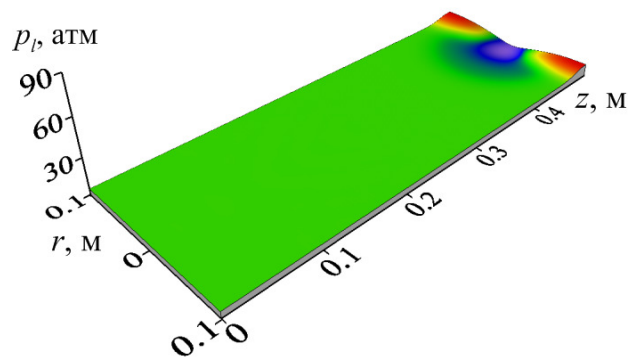
д) момент времени 0.881 мс

Рис. 4.6 — Динамика поля давлений в трубе, содержащей сферический пузырьковый кластер $R_{cl} = 0.05$ м, в различные моменты времени.

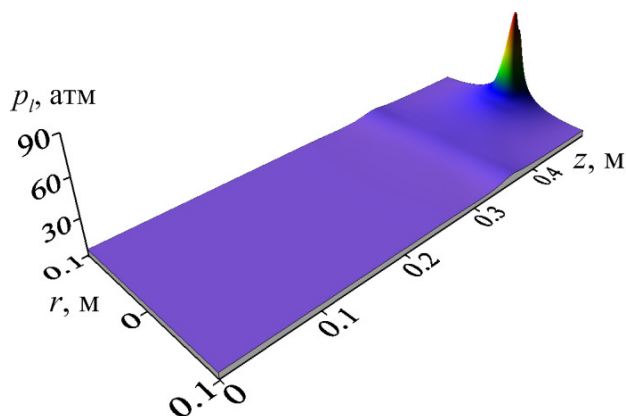
сходятся к центру канала увеличивая свою амплитуду из-за геометрии канала и «сталкиваются» на оси канала (фрагмент в). Суммарное взаимодействие волны, «сгенерированной» пузырьковой областью, с волной, которая обогнула кластер, даёт увеличение амплитуды до 30 атм. Здесь отличие от показания датчика D_3 объясняется несовпадением среза по времени расчётной области с моментом пикового значения на стенке. В дальнейшем сформировавшийся пик



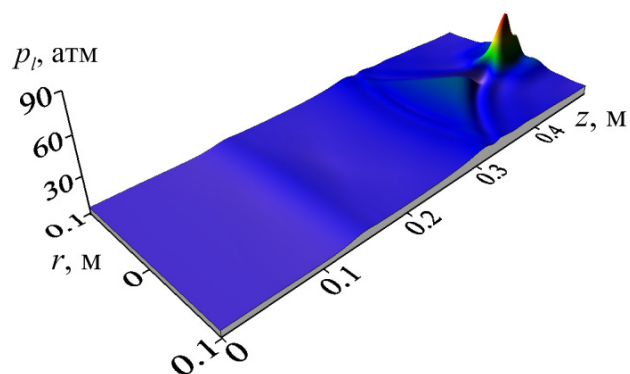
а) момент времени 0.322 мс



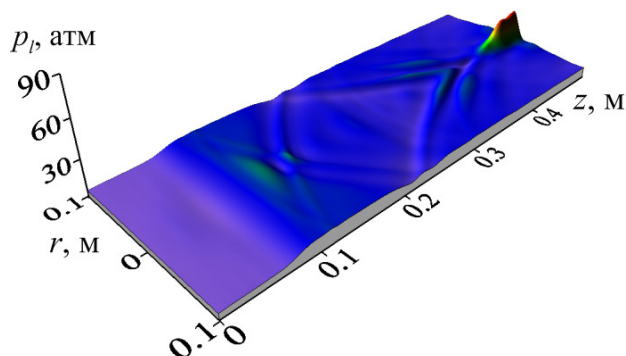
б) момент времени 0.385 мс



в) момент времени 0.472 мс



г) момент времени 0.613 мс



д) момент времени 0.754 мс

Рис. 4.7 — Поля давлений для случая сферического пузырькового кластера в различные моменты времени при $R_{cl} = 0.025$ м.

распространяется вдоль оси канала уменьшаясь по амплитуде (фрагменты г и д) за счёт расхождения в сторону стенок канала.

Построим поля давлений для случая когда радиус кластера $R_{cl} = 0.025$ м, когда радиус кластера два раза меньше предыдущего случая (рис. 4.7 на с. 146). Времена для представления выбраны для пиковых значений давления, показанных для датчика D_2 на рис. 4.5 (на с. 143). В этом случае также, как и для случая представленного на рис. 4.6 на с. 145 первоначальный импульс пре-

ломляется в область пузырькового кластера (фрагмент **а**), далее образуется сходящиеся за кластером башнеобразный всплеск давления, амплитуда которого превышает начальную амплитуду более чем в два раза. Давление на боковой поверхности канала в районе торцевой стенки повышается до 10 атм. После отражение от торцевой границы башнеобразный всплеск давления распространяется в направлении боковых стенок канала $r = R_c$ и в момент времени 0.385 мс (фрагмент **б**) фиксируется всплеск давления воздействует на торцевую границу вблизи внешней стенки канала ($z = L_z$) амплитудой около 20 атм. После отражение от боковой границы канала башнеобразный всплеск давления распространяется в направлении оси канала, где формируется новая волна состоящая из части, прошедшей пузырьковый кластер и части, которая вернулась от боковой поверхности (фрагмент **в**). В этом случае вблизи торцевой стенки канала фиксируется значение давление в системе порядка 80 атм. В дальнейшем происходит многократное переотражение волн от оси и боковой поверхности канала, что приводит к формированию новых всплесков на оси (фрагменты **г** и **д**). Стоит отметить, что дальнейшие всплески давления по амплитуде не превышают значение, зафиксированное при первой кумуляции.

Для сравнения и анализа влияния начального объёмного содержания пузырьков на динамику волны в канале на рис. 4.8 (на с. 148) представлены показания датчиков D_2 и D_3 для двух значений α_{g0} : 10^{-2} (слева) и 10^{-3} (справа). Напомним, что датчик D_2 расположен в середине пузырьковой области (для всех рассмотренных значений радиуса, см. рис. 4.1 фрагменты **а** на с. 133) и фиксирует значение амплитуды волны давления, дошедший до середины кластера, а датчик D_3 расположен за кластером на торцевой стенке. Из представленных графиков можно сделать следующие выводы. Во-первых, для случая $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ для рассмотренных начальных данных в задаче можно получить большие значения амплитуды давления, чем для случая $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Это ярко демонстрируют линии для радиуса кластера равного $R_{cl} = 0.025$ м. Однако, если рассмотреть радиус пузырьковой области равный $R_{cl} = 0.05$ м, то в данном случае большие давления фиксируются для случая $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Эта разница обусловлена разностью скоростей распространения волны в пузырьковой области и её геометрическими размерами. Действительно, для $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ скорость распространения возмущений порядка 100–110 м/с, тогда как для $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ данная величина порядка 400–440 м/с. Следовательно, волна взаимодействуя с пузырь-

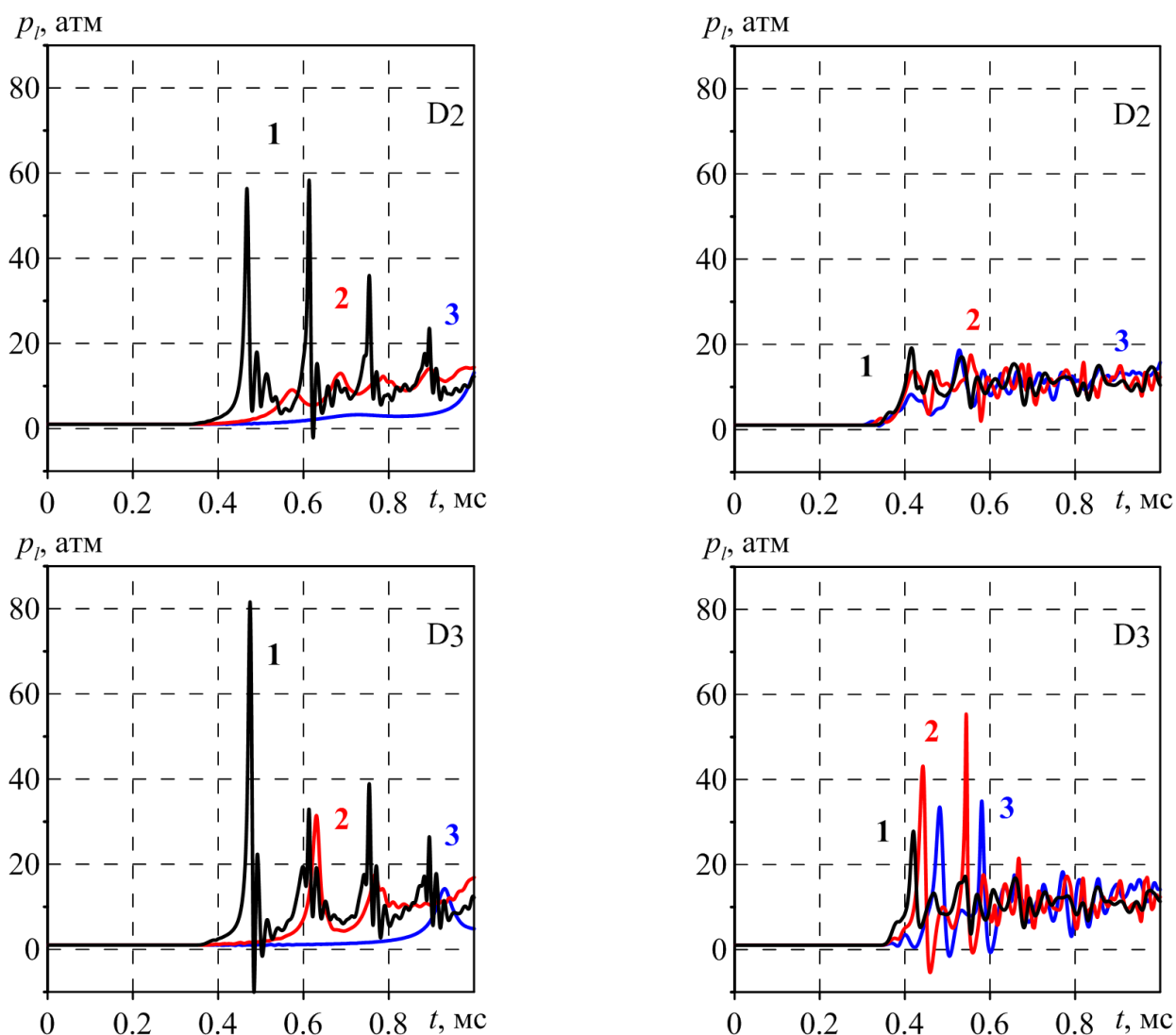


Рис. 4.8 — Показания датчиков D_2 и D_3 при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (слева) и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (справа). Линии **чёрного цвета** соответствуют сферическому кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.025 \text{ м}$, **красного** – 0.05 м и **синего** – 0.075 м .

ковой областью во втором случае быстрее достигает её центра. Однако, за счёт уменьшения времени прохождения волнового сигнала до середины пузырьковой области, уменьшается и «аккумулированная» областью энергия волны, а значит и «отдача» от пузырьковой области будет меньше. Данное уменьшение скажется на амплитуде результирующей волны, которая будет взаимодействовать с торцевой стенкой. С другой стороны, увеличение радиуса пузырьковой области, увеличивает время необходимое для достижения волны середины области, что приводит к увеличению «аккумулирования» областью энергии от взаимодействия кластера с падающей волной давления. Во-вторых, для радиуса кластера $R_{cl} = 0.075 \text{ м}$ и случая $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ пузырьковая область существенно уменьшает возможное воздействие волны давления как на предмет,

помещённый внутрь области, так и на торцевую стенку, в сравнении с другими случаями. Можем заключить, что правильный подбор размеров области и начального объёмного содержания может позволить как усилить волну давления перед взаимодействием с торцевой стенкой, так и существенно его ослабить.

На следующих двух рисунках (рис. 4.9 на с. 150 и рис. 4.10 на с. 152) представлены распределения давления на оси трубы (слева) и внутри трубы (справа) при двух различных значениях начального объёмного газосодержания: $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (рис. 4.9) и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (рис. 4.10). Результаты представлены для рассматриваемых трёх различных радиусов пузырьковой области: $R_{cl} = 0.025$ м, 0.05 м и 0.075 м. Времена для объёмных картинок выбирались из соображения максимально-близкого значения к значению, когда на оси трубы фиксируется максимум значения давления в расчётной области, соответствующий выбранному радиусу кластера.

Из рис. 4.9 (фрагмент **а**) (на с. 150) видим, что для начального объёмного содержания $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ для выбранных данных максимальное значение давления фиксируется для случая $R_{cl} = 0.025$ м и оно достигает значения порядка 89 атм. Данный пик зарегистрирован на оси вблизи торцевой границе канала на некотором отдалении от него. Сравнивая данную картину с результатами на рис. 4.8 (на с. 148) для аналогичных начальных данных можем заключить, что происходит небольшое снижение амплитуды давления при воздействии на твёрдую торцевую стенку за счёт геометрии пузырьковой области, которая приводит к формированию волны подковообразной формы (применительно к воздействию на твёрдую стенку). Рассматривая рис. 4.9 (фрагмент **в**) и сравнивая с рис. 4.8 (на с. 148) можно сделать, что для данного радиуса сфокусированная волна полностью сформировалась внутри пузырьковой области и максимальное значение давления фиксируется на торцевой стенке, что является и максимумом воздействия на эту стенку. Амплитуда воздействия в этом случае порядка 30 атм. Для радиуса $R_{cl} = 0.075$ м видим (рис. 4.9 фрагмент **д**) воздействие на торцевую стенку волны с амплитудой порядка 13 атм. Здесь можно заключить, что пузырьковая область «приняла» на себя основную нагрузку от волны давления и воздействие на торцевую стенку оказалось незначительным по сравнению с предыдущими случаями. Также, рассматривая фрагмент **а**, можно заметить отрицательные значения давления, что говорит о том, что для данного размера пузырьковой области $R_{cl} = 0.025$ м возможно возникновение откольных эф-

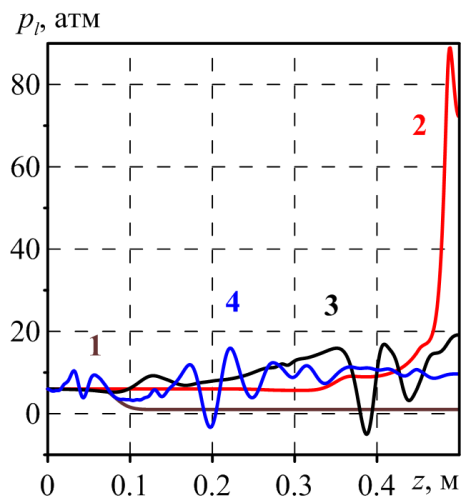
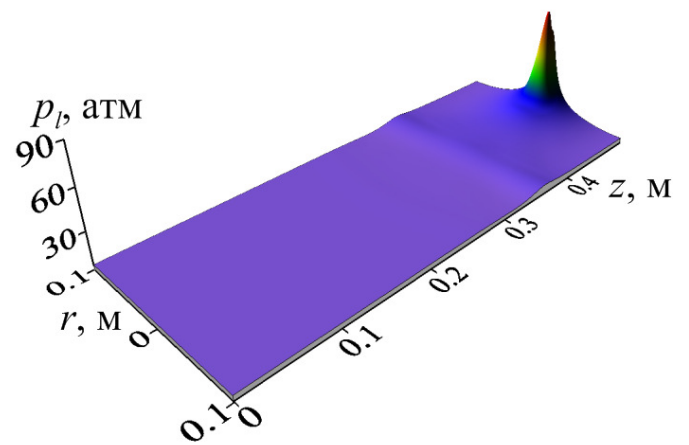
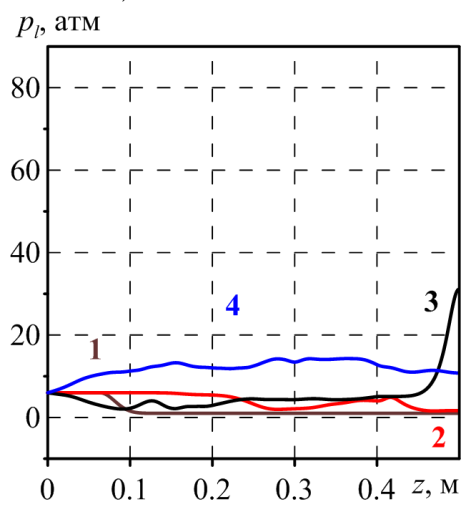
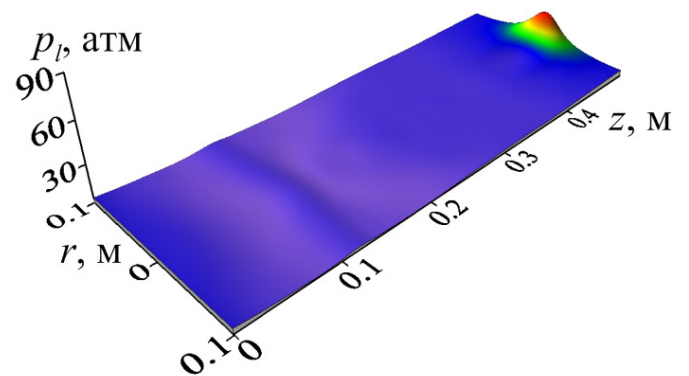
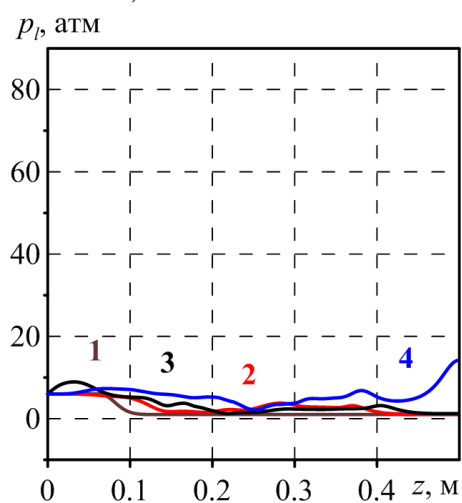
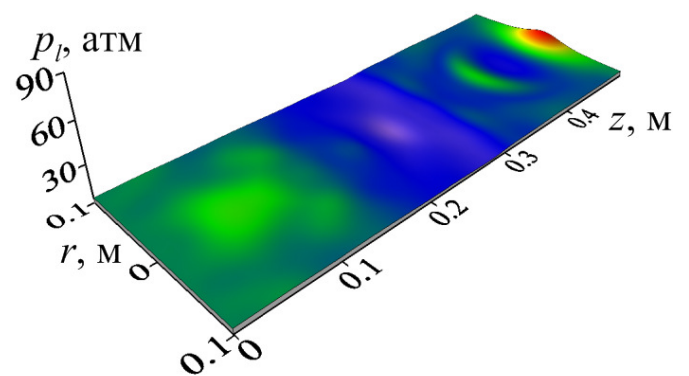
а) $R_{cl} = 0.025$ мб) $t = 0.472$ мсв) $R_{cl} = 0.05$ мг) $t = 0.631$ мсд) $R_{cl} = 0.075$ ме) $t = 0.933$ мс

Рис. 4.9 — Распределение давления на оси трубы (слева) и внутри трубы (справа) при начальном объёмном газосодержании $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.092, 0.472, 0.631$ и 0.933 мс.

фектов, что может привести к непоправимым последствиям на производстве. Для более наглядного понимания справа представлены объёмные картины в соответствующие моменты времени.

Для сравнения на рис. 4.10 (на с. 152) представлены результаты расчётов для начального объёмного содержания $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Для данного объёмного содержания скорость распространения волны в пузырьковой области порядка 400–440 м/с, что в четыре раза превышает по значению рассмотренный ранее случай (рис. 4.9 на с. 150). Для выбранных параметров максимальное значение давления в расчётной области фиксируется для радиуса кластера $R_{cl} = 0.05$ м. В этом случае, для данного радиуса, максимальное давления достигает значений более 55 атм. Если вернуться к рассмотрению радиуса кластера $R_{cl} = 0.025$ м, то стоит отметить, что и для начального объёмного содержания $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ на оси трубы фиксируется повышение давления и значение достигает 30 атм, что значительно меньше предыдущего рассмотренного случая. В отличие от предыдущего случая и для $R_{cl} = 0.075$ м мы видим существенное увеличение амплитуды давления на оси трубы. Это связано с тем, что для начального объёмного содержания пузырьков $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ время «прохождения» основного фронта волны давления сопоставимо со временем, которое затрачивается волной для огибания пузырьковой области с несколькими переотражениями от внешней границы канала. Следовательно, в определённый момент происходит кумуляция энергии основного фронта и огибающей волн, что приводит к увеличению амплитуды результирующей волны. В данном случае амплитуда может достигать значений 33 атм. В отличие от предыдущего случая здесь не наблюдается отрицательных значений давления, что говорит о том, что для выбранных параметров возникновение откольных эффектов не предполагается. Справа представлены объёмные картины в соответствующие моменты времени для более наглядного понимания задачи.

На рис. 4.11 (на с. 154) представлены зависимости максимального значения давления в расчётной области от начальной амплитуды волны давления при двух различных значениях начального объёмного газосодержания: $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (фрагмент **а**) и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (фрагмент **б**). Результаты представлены для рассматриваемых трёх различных радиусов пузырьковой области: $R_{cl} = 0.025$ м (цифра 1), 0.05 м (цифра 2) и 0.075 м (цифра 3). Были рассмотрены случаи, когда амплитуда начальной волны давления менялась от 5 до 15 атм. Осталь-

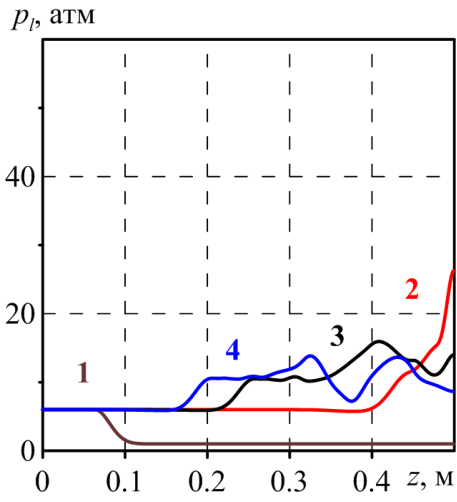
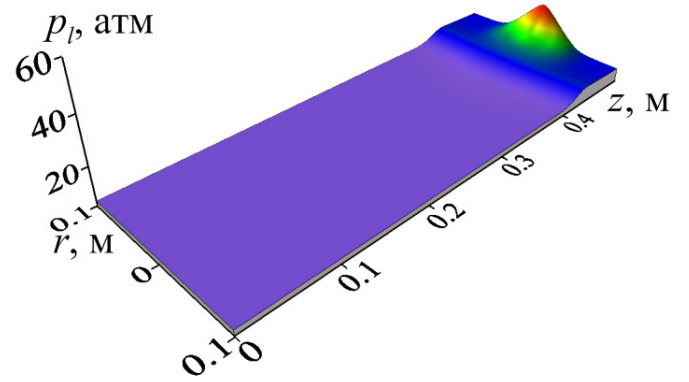
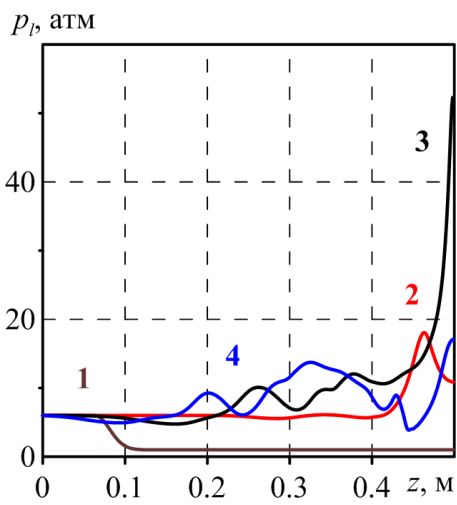
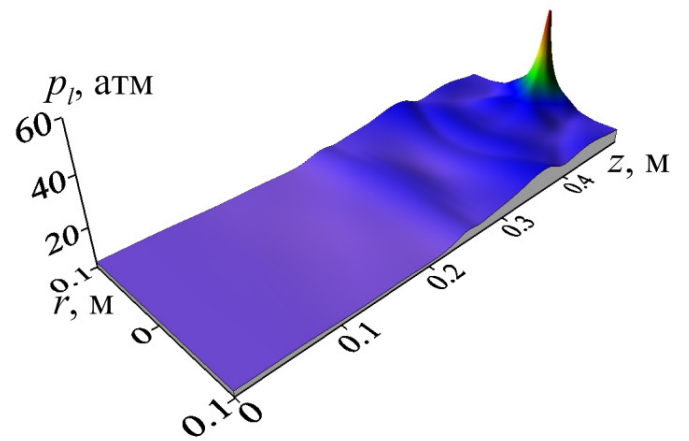
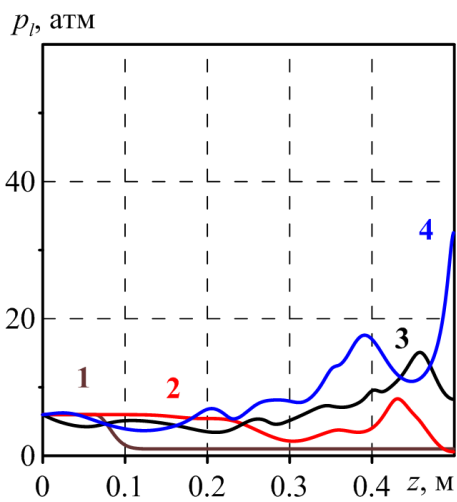
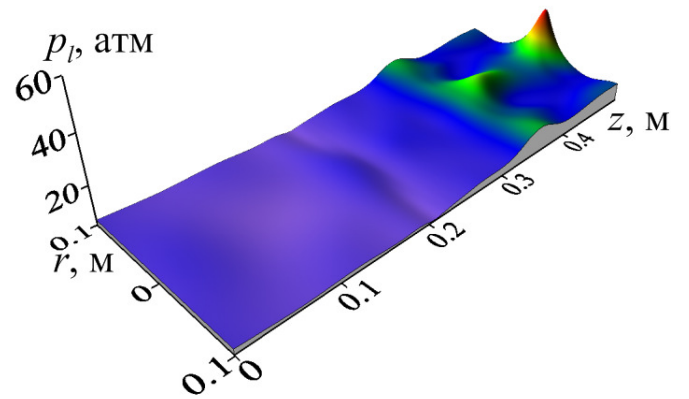
а) $R_{cl} = 0.025$ мб) $t = 0.422$ мсв) $R_{cl} = 0.05$ мг) $t = 0.545$ мсд) $R_{cl} = 0.075$ ме) $t = 0.582$ мс

Рис. 4.10 — Распределение давления на оси трубы (слева) и внутри трубы (справа) при начальном объёмном газосодержании $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.092, 0.422, 0.545$ и 0.582 мс.

ные параметры соответствуют начальным, принятым для данного раздела. В данном рассмотрении, более интересным является случай, когда объёмное содержание равно $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (фрагмент **а**), потому что для случая $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (фрагмент **б**), вспоминая формулу для равновесной скорости,

$$C = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\alpha_{g0} \rho_{l0}^0}}$$

для больших амплитуд скорость распространения волны в пузырьковой области становится сопоставимой со скоростью распространения волны в «чистой» жидкости. Поэтому, графики для данного случая ведут себя линейно. Однако, стоит отметить, что график для $R_{cl} = 0.05$ м (цифра 2) расположен выше двух остальных случаев. Это объясняется тем, что для случая малого радиуса ($R_{cl} = 0.025$ м (цифра 1)) протяжённости области не достаточно для яркого кумулятивного эффекта, а для случая большого радиуса ($R_{cl} = 0.075$ м (цифра 3)) – здесь протяжённость достаточно большая, что за время прохождения волны успевают «отработать» диссипативные механизмы пузырьковой жидкости. Для объёмного содержания $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ оптимальным для получения высоких давлений, для рассмотренных параметров, является радиус пузырьковой области $R_{cl} = 0.05$ м (цифра 2). В случае $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ наблюдается иная картина. Здесь, для начальной амплитуды волны до 9 атм диссипативные механизмы пузырьковой области превалируют над остальными эффектами. Основная часть в амплитуде результирующей волны состоит из волны, огибающей пузырьковую область. В следствии малой скорости распространения волны в пузырьковой области, часть основной волны выходит к торцевой стенке с некоторым запаздыванием. Начиная с амплитуды в 10 атм видим, что пузырьковая область начинает больше «накапливать» энергии за счёт более интенсивной волны, и начинает существенную роль играть геометрия задачи. Увеличение амплитуды приводит к возрастанию скорости распространения и пузырьковая область «проходится» волной за меньшее время. Совокупность этих двух механизмов определяют величину максимального значения давления в расчётной области. Причём, для амплитуд до 9 атм размеры области играют негативную роль (о чем свидетельствует расположение линий на рисунке от 1 до 3), а выше 10 атм – позитивную в вопросе получения высоких давлений в расчётной области (опять смотрим расположение линий от 1 до 3).

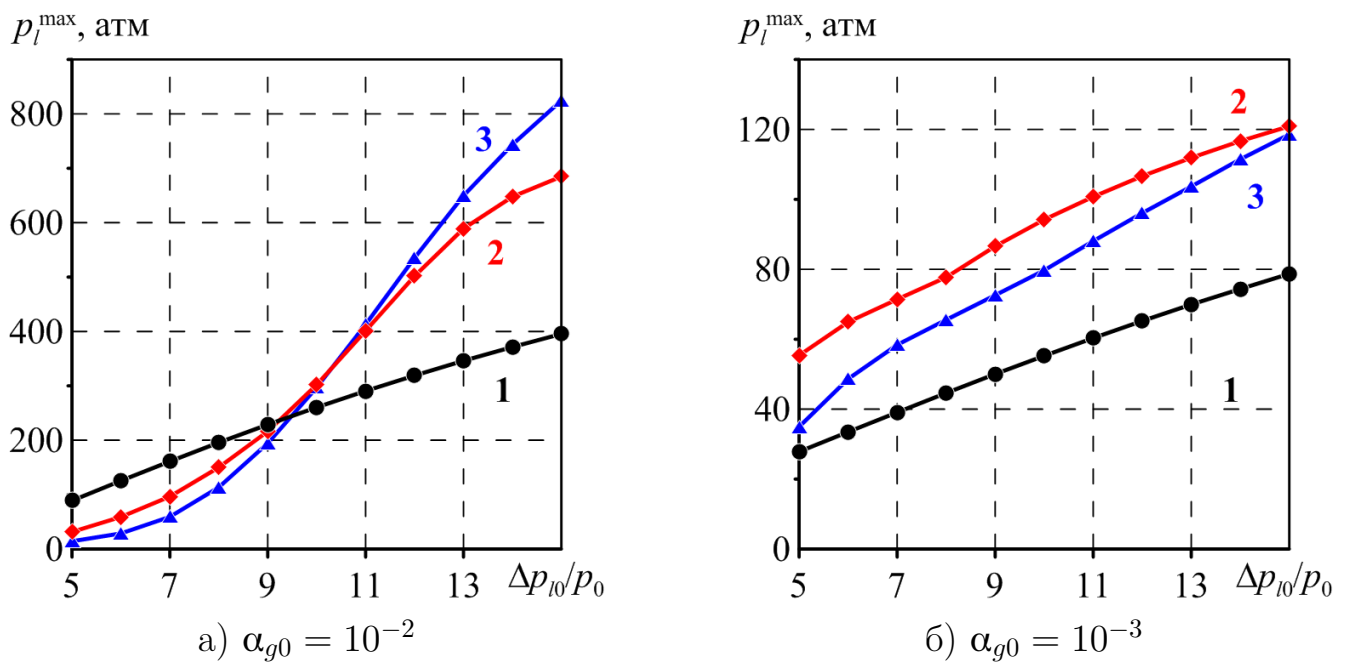


Рис. 4.11 — Зависимость максимального значения давления p_l^{\max} от величины амплитуды начального давления Δp_{l0} . Линии **чёрного цвета** соответствуют кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.025$ м (цифра 1), **красного** — 0.05 м (цифра 2) и **синего** — 0.075 м (цифра 3).

На рис. 4.12 (на с. 155) представлена карта зон реализации максимального давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания и протяжённости завесы. В данных расчётах радиус пузырькового кластера пробегал диапазон значений от 0 до радиуса канала, равного 0.1 м. Из представленного рисунка видно, что существует три основные зоны. Это правая верхняя часть, которая отвечает для пузырьковые завесы максимального размера (для рассмотренного случая) и наибольшего объёмного содержания. Так называемая «нижняя» зона, где рассматриваются кластеры минимального размера (для рассмотренного случая). И средняя зона, которая располагается на диагонали (из левого верхнего угла в правый нижний угол) и чуть ниже её. В первой области геометрические размеры и большое объёмного содержания практически полностью «гасят» падающий волновой сигнал на рассматриваемых промежутках времён (это порядка 1 мс) и увеличение волнового сигнала не существенно. Во второй области же наоборот, из-за маленьких размеров пузырьковой области волновой сигнал практически «не чувствует» наличия на своём пути пузырьковой области и также увеличение амплитуды волны давления не существенно. Самым интересным является так называемая «диагональная» область, где возможны реализации высоких давлений. Для малень-

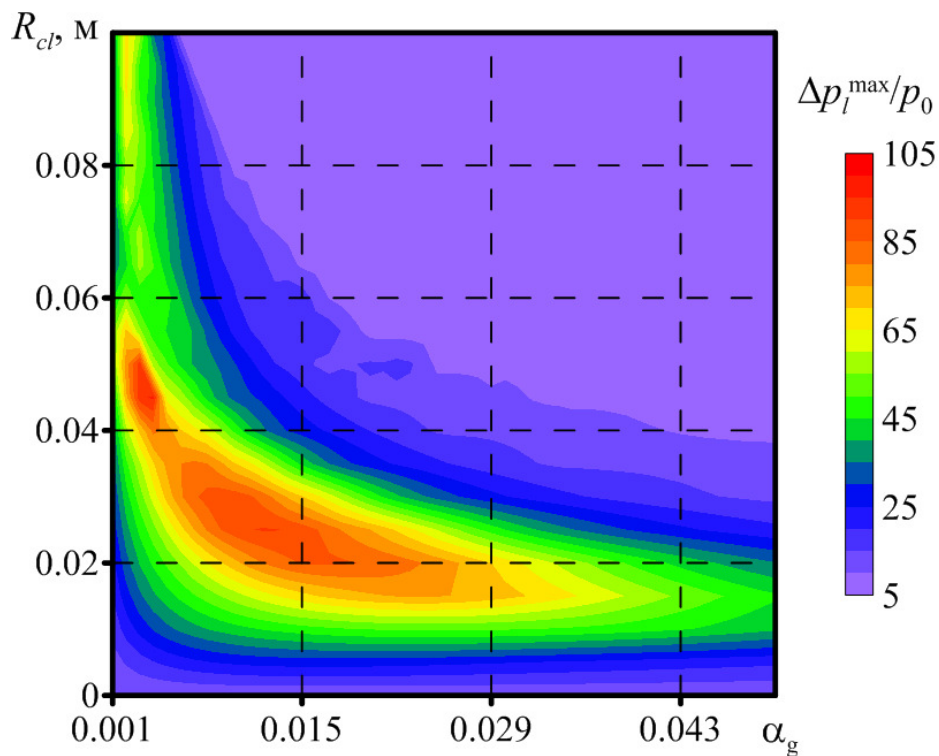


Рис. 4.12 — Зависимость максимального давления ($\Delta p_l^{\max}/p_0$) от радиуса кластера R_{cl} и объёмного содержания пузырьков α_{g0} для случая, когда сферический кластер расположен на торцевой стенке канала.

ких объёмных содержаний, разброс по геометрическим размерам пузырьковой области большой. Видно, что он начинается с 0.03 м до 0.1 м. Это говорит о том, что для данного диапазона размеров определяющим является объёмного содержание, которое регулирует скорость распространения волны в области. Но так как при таких содержаниях скорость порядка 400 м/с, расстояние 0.03 м и 0.1 м преодолеваются волной за короткое время. Далее, с увеличением объёмного содержания, уменьшается скорость распространения волны (для $\alpha_{g0} = 0.02$ она порядка 100 м/с) и сокращается диапазон геометрических размеров. Из-за падения скорости внутри пузырьковой области, увеличивается влияние протяжённости области. В итоге, отметим, что для получения высоких давлений необходимо подбирать комбинацию «объёмное содержание–протяжённость завесы». Правильно подобранная комбинация может как увеличить амплитуду начального волнового сигнала, так и существенно его ослабить.

4.4.2 Случай сферического кластера на оси канала

Рассмотрим следующую физическую задачу. В канале цилиндрической формы, заполненном жидкостью (в данном случае водой), находится пузырьковый кластер сферической формы, расположенной на оси канала в середине (по координате z) расчётной области (см. рис. 4.1, фрагмент **б**) (на с. 133). В некоторый момент времени на нашу систему воздействуют импульсным давлением по направлению образующей канала. Интересно, насколько наличие кластера у поверхности ослабит или усилит волновой импульс.

Примем следующие параметры для канала и пузырьковой области: радиус пузырькового кластера R_{cl} менялся от 0.005 до 0.05 м с шагом 0.005 м, длина расчётной области $L_z = 1.0$ м, радиус канала $R_c = 0.1$ м, $a_0 = 10^{-3}$ м. Начальное объёмное содержание пузырьков α_{g0} варьировалось от 0.0005 до 0.02. Амплитуда волнового импульса $\Delta p_{l0} = 0.5$ МПа.

На рис. 4.13 на с. 157 представлены эпюры давления для датчиков, расположенных на оси (D_1, D_2, D_3) и на стенке канала (D_4, D_5, D_6). Расположение датчиков следующее: D_1 и D_4 располагаются на расстоянии 0.3 м от плоскости $z = 0$; D_2 и D_5 – на расстоянии 0.5 м (на этом же расстоянии располагается центр сферического кластера); D_3 и D_6 на расстоянии 0.7 м (см. рис. 4.1, фрагмент **б**). Линии чёрного цвета соответствуют сферическому кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.01$ м, красного – 0.03 м и синего – 0.05 м. Из представленных графиков следует, что максимальное давление в выбранных точках фиксируется датчиком, который расположен в центре сферического кластера (см. датчик D_2). Из показаний датчика D_2 видно, что для радиусов кластера $R_{cl} = 0.01$ м и $R_{cl} = 0.05$ м наблюдается примерно одинаковое значение пикового давления в центре. Это говорит о том, что данные два кластера «генерируют» одинаковый суммарный импульс, единственным отличием при этом является время возникновения данного импульса. Здесь стоит напомнить, что скорость распространения волн в пузырьковой жидкости с объёмным содержанием $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$ близка к скорости в «чистой» жидкости, но чуть меньше. Этой небольшой разницы в скоростях достаточно для того, чтобы основной фронт волны давления обогнул пузырьковый кластер и «произвёл» всестороннее сжатия пузырьковой области. При одинаковых значениях пикового давления в центре пузырьковой области для вышеуказанных радиусов разница их возникновения по времени

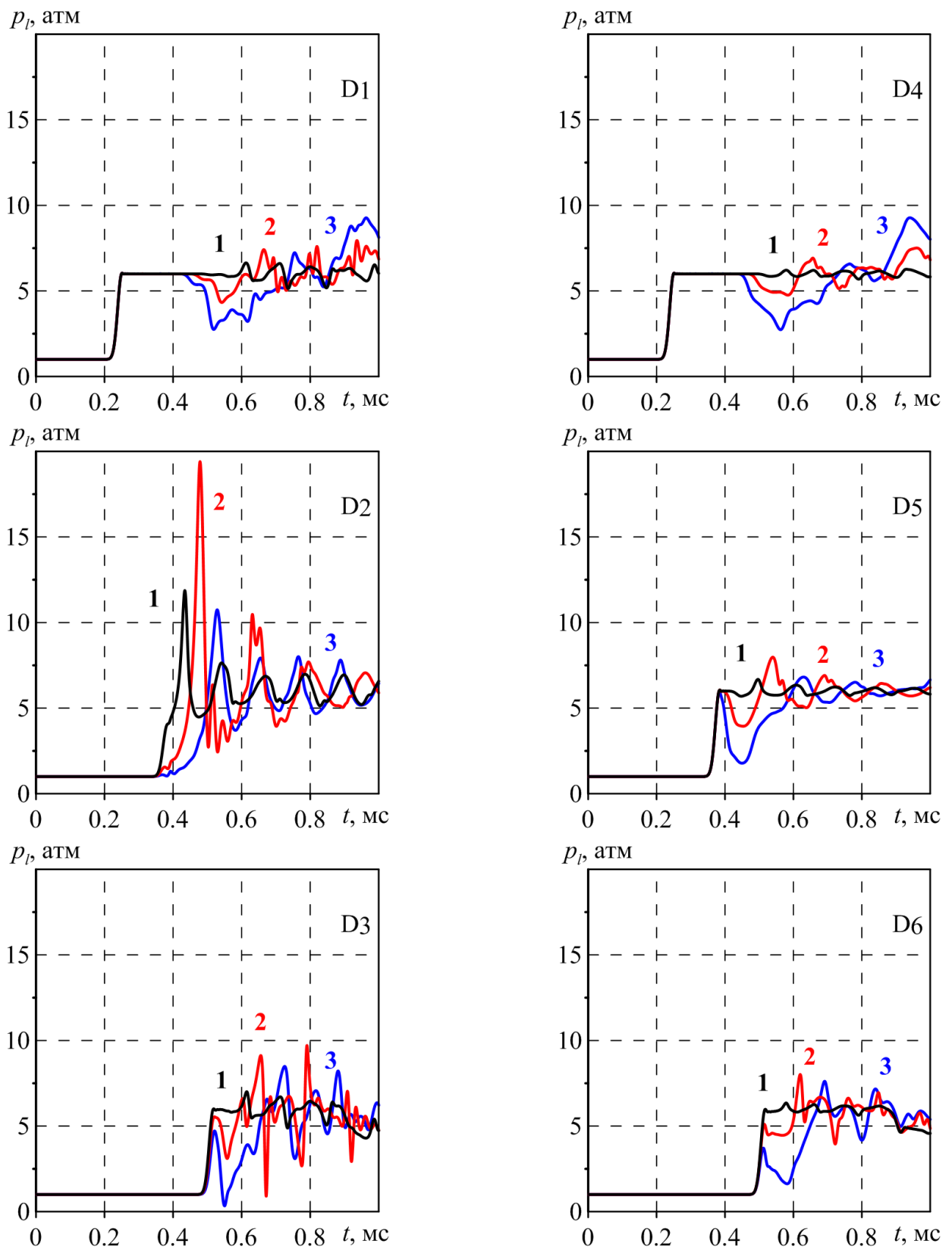
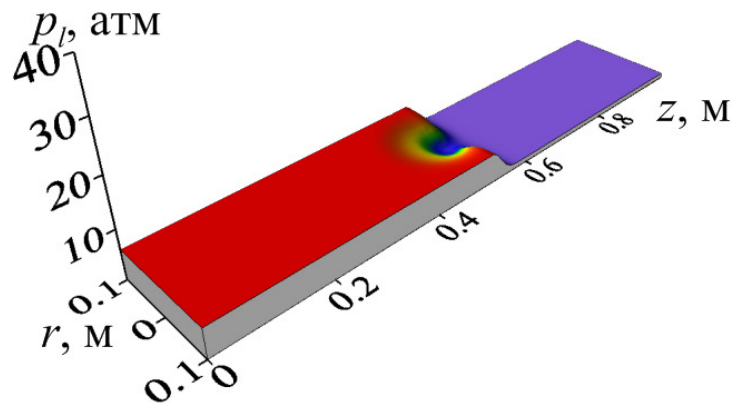


Рис. 4.13 — Показания датчиков D_1 – D_6 при $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$. Линии чёрного цвета соответствуют сферическому кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.01$ м, красного – 0.03 м и синего – 0.05 м.

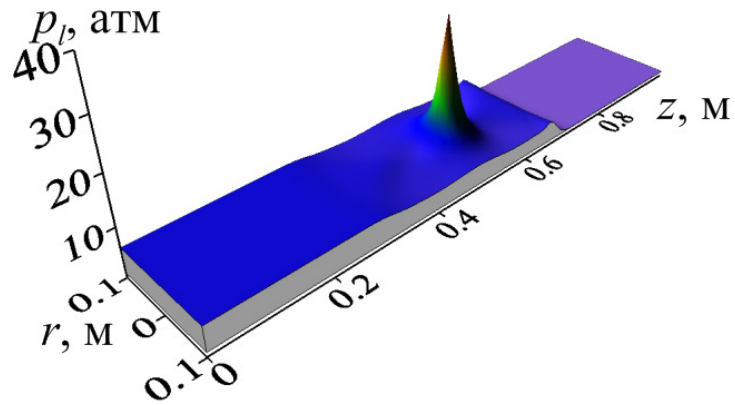
как раз объясняется геометрическими размерами. Для радиуса $R_{cl} = 0.05$ м путь до центра в 5 раз больше, чем для $R_{cl} = 0.01$ м. Как раз на преодоление этой разницы тратится время, составляющее разницу между пиками для рассмотренных двух случаев. Данные графики позволяют заключить, что даже наличие сравнительно небольших пузырьковых образований в форме сферы с достаточно малым содержанием пузырьков могут привести к увеличению амплитуды волны давления до 4 раз (применительно к выбранным параметрам расчётов). Из графиков для датчика D_3 видим, что волновой импульс после взаимодействия с пузырьковой областью распространяется далее по направлению движения волны с постепенным уменьшением амплитуды за счёт геометрии канала. Датчики, расположенные на стенке канала, также чувствуют небольшое увеличение амплитуды волны давления, но за счёт геометрии канала, оно существенно ниже, чем на оси.

Для более наглядного представления взаимодействия волны давления с пузырьковым кластером, построим поля давлений для случая когда радиус кластера $R_{cl} = 0.03$ м (рис. 4.14 на с. 159). Времена для представления выбраны для показа начала взаимодействия волны давления с пузырьковой областью (фрагмент **а**), время наиболее близкое к пиковому значению давления в расчётной области (фрагмент **б**) и время дальнейшего распространения волны вдоль канала (фрагмент **в**). В этом случае также, как и для случая представленного на рис. 4.6 на с. 145 первоначальный импульс преломляется в область пузырькового кластера (фрагмент **а**), далее образуется сходящиеся к центру кластера башнеобразный всплеск давления, который сносится по ходу движения волны и максимальное значение давление фиксируется внутри кластера, но не в центре, а ближе к его границе. Давление в расчётной области может достигать значений в 32 атмосфер, что более чем в 6 раз больше начальной амплитуды (фрагмент **б**). В дальнейшем пузырьковый кластер начинает «переизлучать» вторичные волны, которые распространяются от оси к границе канала и в направлениях к началу и концу канала (фрагмент **в**). Повторное схождение волны сжатия к центру пузырьковой области приводит к формированию ещё одного пика, который уже по своей амплитуде в 2 раза уступает первому пику (датчик D_2 для линии 2 на рис. 4.13 на с. 157).

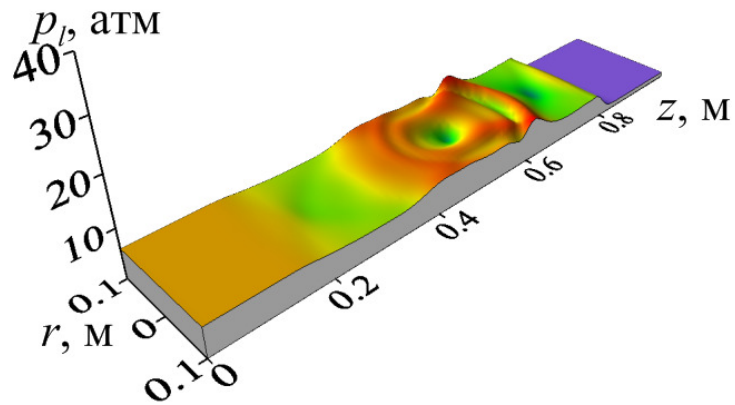
На следующих двух рисунках (рис. 4.15 на с. 161 и рис. 4.16 на с. 163) представлены распределения давления на оси трубы (слева) и внутри трубы



а) момент времени 0.312 мс



а) момент времени 0.488 мс



а) момент времени 0.573 мс

Рис. 4.14 — Поля давлений для случая сферического пузырькового кластера в различные моменты времени при $R_{cl} = 0.03$ м.

(справа) при двух различных случаях: на рис. 4.15 при фиксированном значении начального объёмного газосодержания: $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$ варьируется радиус кластера, а на рис. 4.16 при фиксированном значении радиус кластера $R_{cl} = 0.03$ м варьируется начальное объёмное содержание. Времена для объёмных картинок выбирались из соображения максимально-близкого значения к значению, когда на оси трубы фиксируется максимум значения давления в расчётной области, соответствующий выбранному параметру расчёта.

Из рис. 4.15 (фрагмент **а**) (на с. 161) видим, что для начального объёмного содержания $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$ для выбранных данных максимальное значение давления фиксируется для случая $R_{cl} = 0.03$ м и оно достигает значения порядка 32 атм. Данный пик зарегистрирован внутри кластера вблизи его границы на некотором отдалении от неё. На фрагментах **а** ($R_{cl} = 0.01$ м) и **д** ($R_{cl} = 0.05$ м) также видим пиковые значения для волны давления, однако данные значения значительно меньше, чем для случая $R_{cl} = 0.03$ м (фрагмент **в**). Это связываем с тем, что в случае $R_{cl} = 0.01$ м (фрагмент **а**) протяжённости пузырьковой области не достаточно для того, чтобы «накопить» энергию для максимального усиления в центре завесы. Волна слишком быстро проходит от границы до её центра. Для случая $R_{cl} = 0.05$ м (фрагмент **д**) наоборот. Из-за более протяжённого пути от границы к центру, пока волна сжатия её проходит, основной фронт уже преодолевает зону пузырьковой области и не вносит дополнительного воздействия на неё. Несмотря на это, в данном случае в расчётной области фиксируется значение амплитуды давления равное 18 атм, что более 3 раз превышает амплитуду первоначального сигнала. Здесь также стоит отметить наличие протяжённой волны разгрузки, о чем свидетельствует линия 4 на фрагмент **д**. Сравнивая данные графики с показанием датчика D_2 (смотрим линии 1 и 3) на рис. 4.13 (на с. 157) можем заметить, что даже при более менее равных значениях давления в центре пузырьковой области, в последствии они сильно различаются. А именно, в случае более протяжённой пузырьковой области ($R_{cl} = 0.05$ м), пиковое значение давления формируется не в центре, а ближе к боковой границе. Если рассматривать объёмные картины (правая колонка на рис. 4.15), то можно заметить, что чем длиннее радиус кластера, тем более протяжённое формируется результирующая волна. Это связано с временем взаимодействия волны давления с пузырьковой областью. Происходит

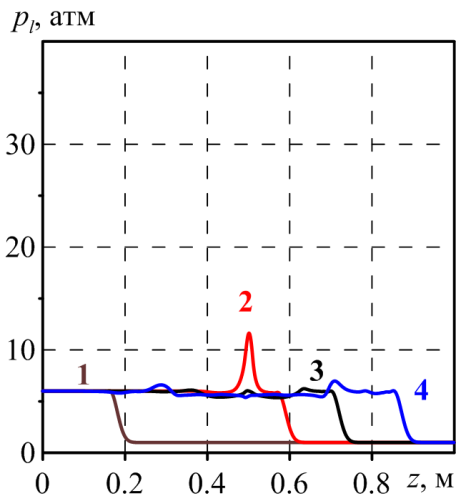
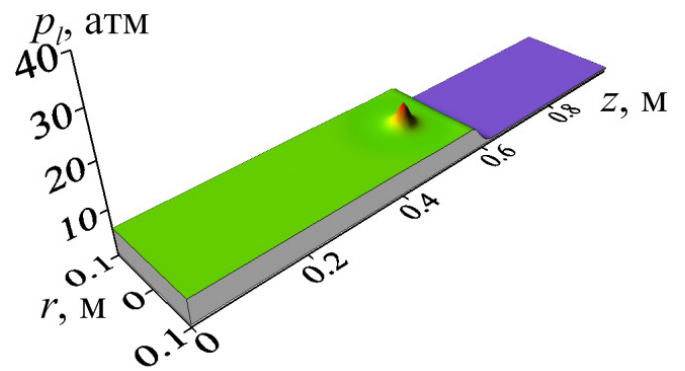
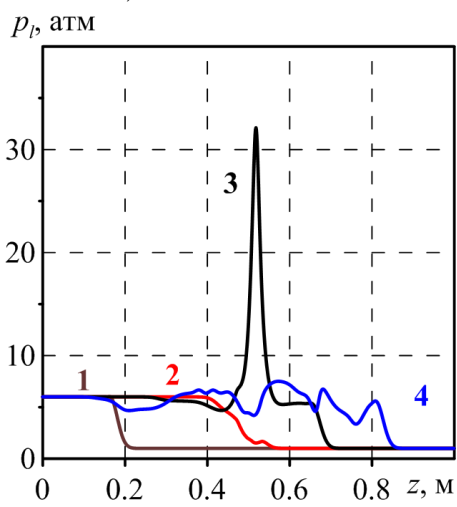
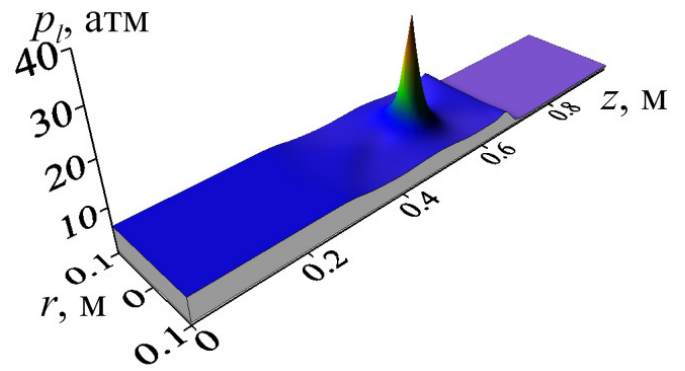
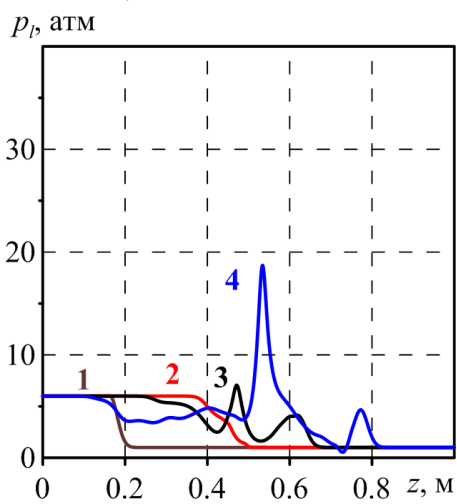
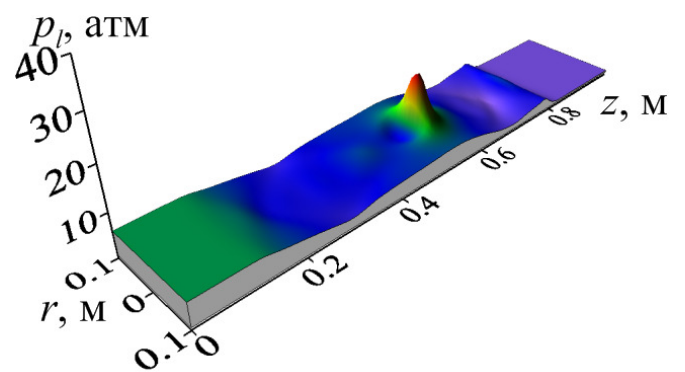
а) $R_{cl} = 0.01$ мб) $t = 0.432$ мсв) $R_{cl} = 0.03$ мг) $t = 0.488$ мсд) $R_{cl} = 0.05$ ме) $t = 0.566$ мс

Рис. 4.15 — Распределение давления на оси трубы (слева) и внутри трубы (справа) при начальном объёмном газосодержании $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.159, 0.432, 0.488$ и 0.566 мс.

более длительная «нагрузка» кластера внешним давлением, что влечёт к более длительному «возврату» накопленной энергии.

На рис. 4.16 (на с. 163) представлены результаты расчётов для радиуса пузырькового кластера $R_{cl} = 0.03$ м. Данный радиус был выбран из соображения достижения максимального значения амплитуды волны давления в расчётной области. Оценим влияние начального объёмного содержания пузырьков в засе-ве на возможность получения высоких значений давления. Как уже отмечалось выше, для начального объёмного содержания $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$ на оси трубы фиксируется повышение давления и значение достигает 32 атм. На фрагменте **а** представлены линии, демонстрирующие распределение давления на оси в указанные временные значения при начальном объёмном содержании $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-4}$. Видим, что основная волна практически не чувствует наличие пузырьковой области. Об этом можно заключить и линий 3 и 4. Есть небольшое (по сравнению с другими случаями) увеличение амплитуды давления, порядка 5 атм. Если рассмотреть фрагменте **д**, то здесь наблюдается немного иная картина. Видим, что при взаимодействии со сферическим кластером амплитуда основного фронта снижается (см. линию 2). В последствии, за счёт огибания фронтом пузырьковой области, амплитуда волны восстанавливается практически до исходных параметров (см. линию 3). И уже в дальнейшем, происходит кумуляция волны внутри пузырьковой области, что приводит к увеличению величины давления до 15 атм. Из фрагментов **а** и **д** можно сделать вывод, что в первом случае протяжённость пузырьковой области оказалась не достаточной для формирования критических значений давления, а во втором – слишком большой, что позволило основному фронту, пройдя зону пузырьковой области, ослабить своё воздействие на неё. Для данных расчётных параметров начальное объёмное содержания $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$ позволило получить максимальное значение амплитуды давления с помощью пузырьковой области. Справа представлены объёмные картины полей давления в расчётной области для наглядного представления.

На рис. 4.17 (на с. 164) представлены зависимости максимального значения давления в расчётной области от начальной амплитуды волны давления при двух различных значениях радиуса пузырьковой области: $R_{cl} = 0.01$ м (фрагмент **а**) и $R_{cl} = 0.03$ м (фрагмент **б**). Результаты представлены для рассматриваемых четырёх различных значений начального объёмного содержания пузырьков в кластере: $\alpha_{g0} = 0,005$ (цифра 1), красного – 0.01 (цифра 2), синего

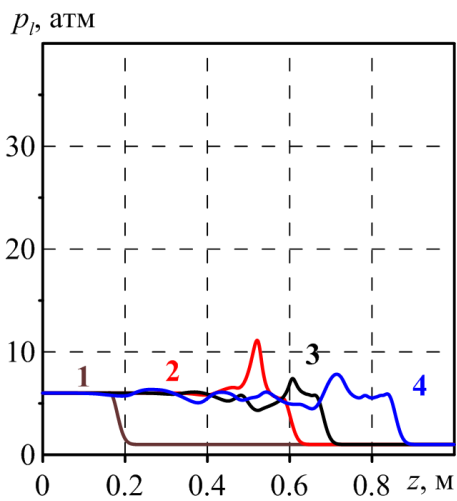
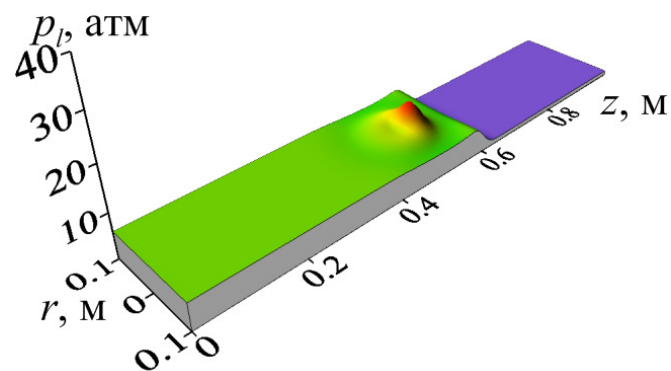
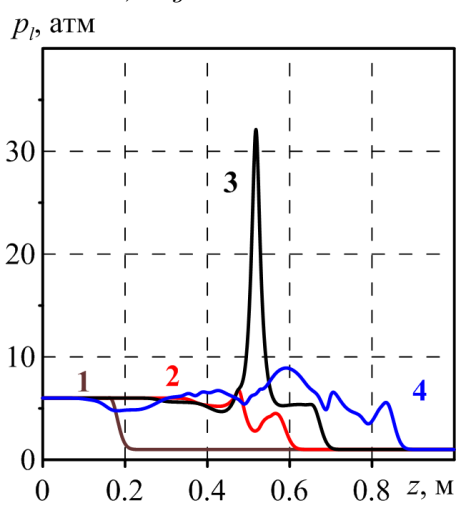
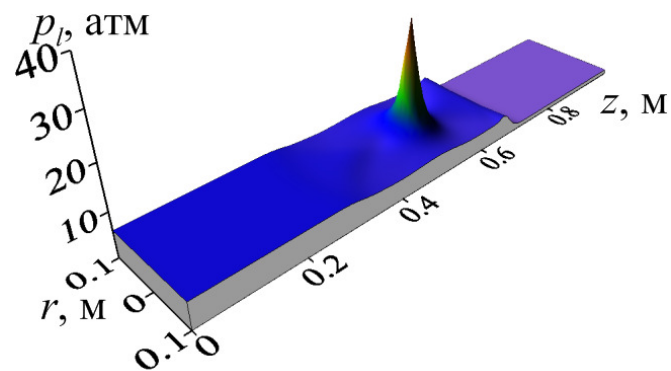
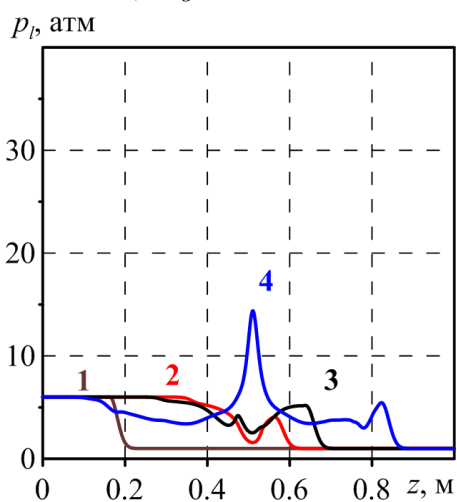
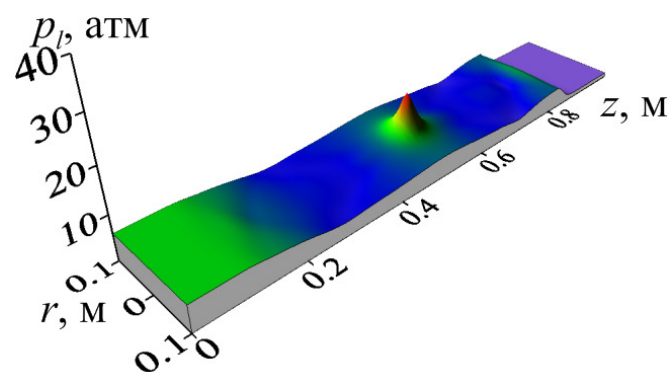
а) $\alpha_{g0} = 0.0005$ б) $t = 0.439$ мсв) $\alpha_{g0} = 0.005$ г) $t = 0.488$ мсд) $\alpha_{g0} = 0.02$ е) $t = 0.599$ мс

Рис. 4.16 — Распределение давления на оси трубы (слева) и внутри трубы (справа) при радиусе пузырькового кластера $R_{cl} = 0.03$ м. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.159, 0.439, 0.488$ и 0.599 мс.

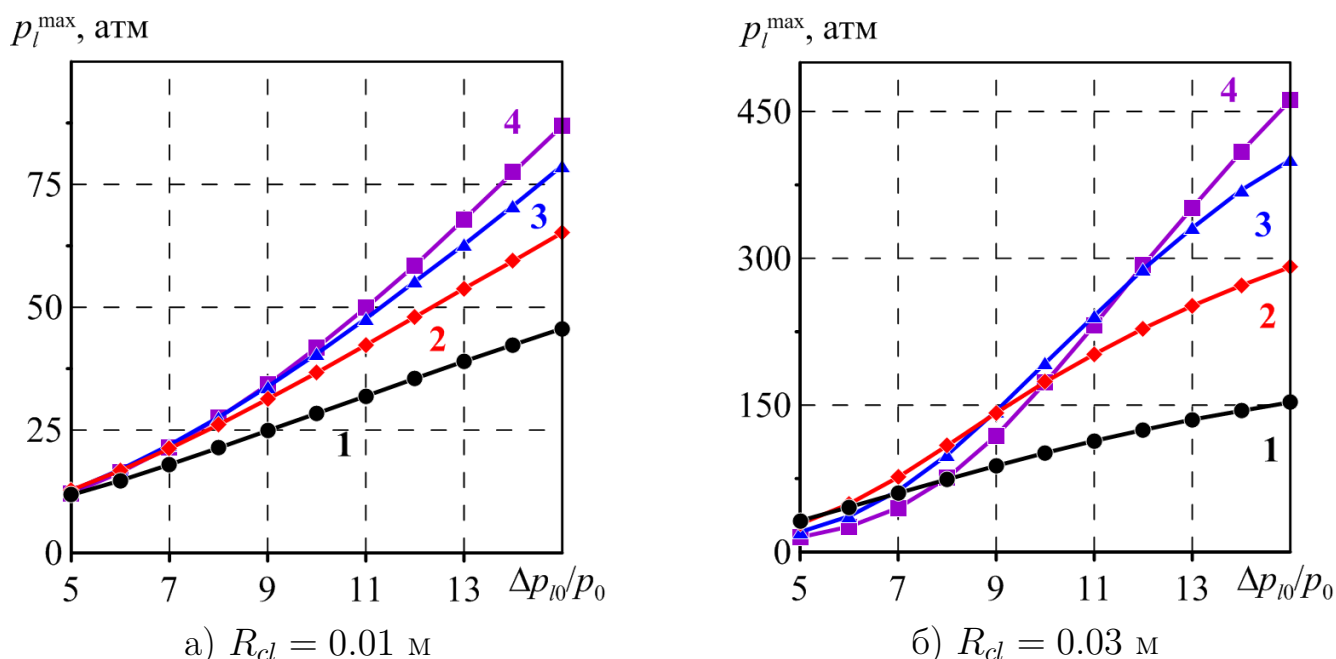


Рис. 4.17 — Зависимость максимального значения давления p_l^{\max} от величины амплитуды начального давления Δp_{l0} . Линии чёрного цвета соответствуют начальному объёмному содержанию пузырьков $\alpha_{g0} = 0.005$ (цифра 1), **красного** — 0.01 (цифра 2), **синего** — 0.015 (цифра 3) и **фиолетового** — 0.02 (цифра 4).

– 0.015 (цифра 3) и фиолетового – 0.02 (цифра 4). Были рассмотрены случаи, когда амплитуда начальной волны давления менялась от 5 до 15 атм. Остальные параметры соответствуют начальным, принятым для данного раздела. Как видим из фрагмента **а** для $R_{cl} = 0.01$ м графики представляют собой гладкие линии с монотонным ростом. Из-за разности скоростей распространения волны при различных начальных объёмных содержаниях наблюдается несовпадение графиков, но из-за небольших геометрических размеров пузырьковой области эти отличия не так ярко выражены. Напротив, для $R_{cl} = 0.03$ м (фрагмента **б**), видим не столь простую зависимость максимального значения величины давления от амплитуды начальной волны. График чёрного цвета, как и в предыдущем случае, здесь стоит особняком, так как для данного объёмного содержания скорость распространения волны значительно больше оставшихся трёх случаев. Рассматривая три оставшихся графика можно заметить, что где-то до величины амплитуды волны 10 атм. основной процесс формирования максимального давления «контролируется» объёмным содержанием (фиолетовая линия лежит ниже остальных), а начиная с 11 атм. «на первый план выходит» скорость распространения волны в пузырьковой области. Как указывалось выше,

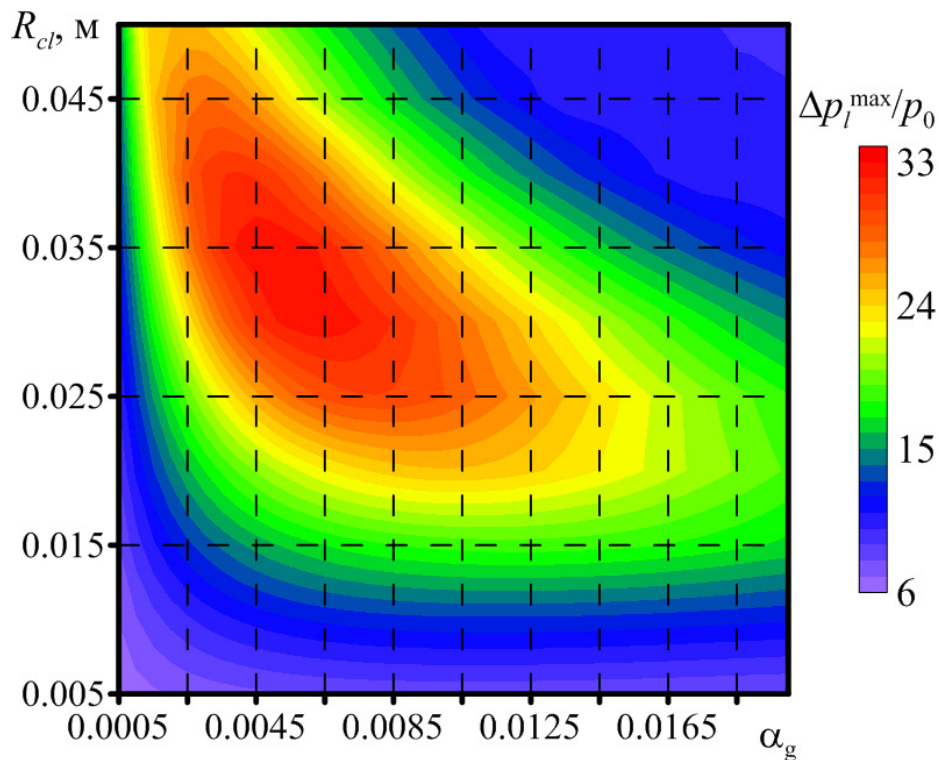


Рис. 4.18 — Зависимость максимального давления ($\Delta p_l^{\max}/p_0$) от радиуса кластера R_{cl} и объёмного содержания пузырьков α_{g0} для случая, когда сферический кластер расположен на оси канала.

чем больше амплитуда волны, тем быстрее она движется по среде. Как видно из рисунка (фрагмента **б**) происходит перераспределение последовательностей линий и на верх выходит линия для наибольшего начального объёмного содержания. В этом случае, наличие большего количества пузырьков способствует «генерации» большего значения давления.

На рис. 4.18 (на с. 165) представлена карта зон реализации максимального давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания и протяжённости завесы. В данных расчётах радиус пузырькового кластера пробегал диапазон значений от 0.005 до радиуса канала, равного 0.05 м. Из представленного рисунка видно, что, как и в случае торцевого расположения пузырьковой области, существует три основные зоны. Это правая верхняя часть, которая отвечает для пузырьковые завесы максимального размера (для рассмотренного случая) и наибольшего объёмного содержания. Так называемая «нижняя» зона, где рассматриваются кластеры минимального размера (для рассмотренного случая). И средняя зона, которая располагается на диагонали (из левого верхнего угла в правый нижний угол) и чуть ниже её.

В первой области геометрические размеры и большое объёмного содержание практически полностью «гасят» падающий волновой сигнал на рассматриваемых промежутках времени (это порядка 1 мс) и увеличение волнового сигнала не существенно. Во второй области же наоборот, из-за маленьких размеров пузырьковой области волновой сигнал практически «не чувствует» наличия на своём пути пузырьковой области и также увеличение амплитуды волны давления не существенно. Самым интересным является так называемая «диагональная» область, где возможны реализации высоких давлений. Для маленьких объёмных содержаний, разброс по геометрическим размерам пузырьковой области большой. Видно, что он начинается с 0.025 м до 0.05 м. Это говорит о том, что для данного диапазона размеров определяющим является объёмного содержание, которое регулирует скорость распространения волны в области. Но так как при таких содержаниях скорость порядка 400 м/с, расстояние 0.025 м и 0.05 м преодолеваются волной за короткое время. Далее, с увеличением объёмного содержания, уменьшается скорость распространения волны (для $\alpha_{g0} = 0.01$ она порядка 110 м/с) и сокращается диапазон геометрических размеров. Из-за падения скорости внутри пузырьковой области, увеличивается влияние протяжённости области. В итоге, отметим, что для получения высоких давлений необходимо подбирать комбинацию «объёмное содержание–протяжённость завесы». Правильно подобранная комбинация может как увеличить амплитуду начального волнового сигнала, так и существенно его ослабить.

4.5 Выводы по главе

Представлены результаты исследований распространения волны давления в форме «ступеньки» в цилиндрическом канале с водой, содержащей пузырьковый кластер в виде сферы. В представленных расчётах пузырьковый кластер в виде сферы располагался на оси канала в двух случаях: расположенный в центре канала и на торцевой стенке канала. В результате численных расчётов и их анализа были сделаны следующие выводы и установлены закономерности.

Приведена система уравнений для расчёта динамики волн давления в канале с жидкостью с добавочным членом для радиального движения пузырьков. Для удобства расчётов данная система **записана** в переменных Лагран-

жа. **Произведена** верификация результатов численных расчётов с экспериментальными данными.

Для обоих случаев расположения пузырькового сферического кластера **построены** карты областей реализации максимального значения давления в расчётной области от начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} и протяжённости области по координате z .

Было **обнаружено**, что при воздействии волны вида «ступенька» на сферический пузырьковый кластер в жидкости образуется уединённая волна давления, чья амплитуда значительно превышает амплитуду первоначальной волны.

Установлено, что сферический кластер у торцевой стенки «генерирует» уединённую волну, амплитуда которой превышает амплитуду аналогичной волны для случая кластера в середине канала. Данный эффект обусловлен наличием торцевой стенки, которая способствует дополнительной фокусировки волны давления в пузырьковом кластере.

Для случая сферического кластера на торцевой стенке канала:

Установлено, что при воздействии волны давления на торцевую стенку канала, когда сферический кластер прилегает к этой поверхности, наибольшая амплитуда волны возникает, когда радиус кластера составляет половину радиуса канала. Это воздействие может быть десятки раз сильнее, чем в случае отсутствия пузырькового кластера.

Численные расчёты **показали**, что кластеры диаметром в четверть и три четверти диаметра канала «генерируют» волну с примерно одинаковой амплитудой, воздействующую на торцевую стенку. Данное воздействие происходит в разные моменты времени из-за геометрии задачи и различия скоростей распространения волн в жидкости и внутри кластера.

Для рассматриваемых параметров **установлено**, что взаимодействие волны давления со сферическим кластером с начальным объёмным содержанием пузырьков $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ приводит к возникновению уединённой волны, амплитуда которой больше, чем для $\alpha_{g0} = 10^{-3}$.

Для рассматриваемых параметров **показано**, что увеличение амплитуды первоначальной волны давления приводит к нелинейному увеличению максимального значения давления в расчётной области в случае $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и к линейному увеличению в случае $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Причём, для случая $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ до значений начальной амплитуды равной 10 атм основную роль в получении вы-

соких давлений играет объёмное содержание, тогда как в последствии (при увеличении начальной амплитуды волны) решающую роль начинает играть протяжённость пузырьковой области.

Для случая сферического кластера в центре на оси канала:

Численные расчёты **показали**, что для $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$ кластеры диаметром в 10 % и 50 % диаметра канала имеют одинаковые показатели по гашению волны в середине кластера. Данное равенство можно объяснить тем, что для «маленького» кластера недостаточно времени (в связи с малым расстоянием от границ до центра) для «генерации» более интенсивной волны, а для «большого» кластера на расстояниях от границы до центра кластера пузырьковая область успевает частично демпфировать внешний волновой сигнал.

Для рассматриваемых параметров **установлено**, что взаимодействие волны давления со сферическим кластером с радиусом $R_{cl} = 0.03$ м приводит к возникновению уединённой волны, амплитуда которой больше, чем для других рассмотренных радиусов в диапазоне от 0.005 м до 0.05 м.

Для рассматриваемых параметров **показано**, что увеличение амплитуды первоначальной волны давления приводит к нелинейному увеличению максимального значения давления в расчётной области в случае $R_{cl} = 0.03$ м и к линейному увеличению в случае $R_{cl} = 0.01$ м.

Глава 5. Волны давления в заполненной жидкостью трубе, содержащей цилиндрическую пузырьковую область

В последней главе настоящей диссертации будет исследована эволюция волновой картины заполненной чистой жидкостью трубе, содержащей пузырьковый кластер в виде полого или сплошного цилиндра. Пузырьковые кластеры будут расположены вдоль оси трубы, с примыканием к её боковой поверхности и без него. Представляют интерес критерии усиления и ослабления волны пузырьковыми экранами, и зависимость пикового давления от начального объёмного содержания пузырьков и протяжённости пузырьковой области.

5.1 Постановка задачи

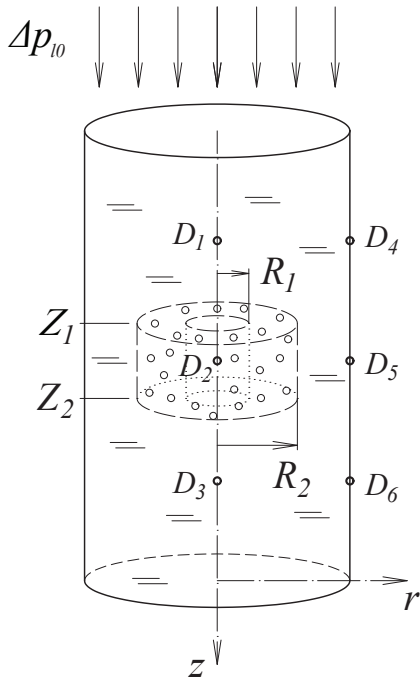
Рассмотрим двумерные осесимметричные волновые возмущения в трубе с водой, содержащей цилиндрический коаксиальный кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью (рис. 5.1 на с. 170). Нагружение в трубе инициируется мгновенным повышением давления на границе $z = 0$ от равновесного p_0 до некоторого амплитудного значения Δp_{l0} и поддерживается все время расчёта. Исследуется эволюция волнового процесса в трубе при $t > 0$.

Для описания волнового движения, с учётом уже сформулированных допущений, используется система макроскопических уравнений масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в приближении цилиндрической симметрии, описанная в предыдущей главе.

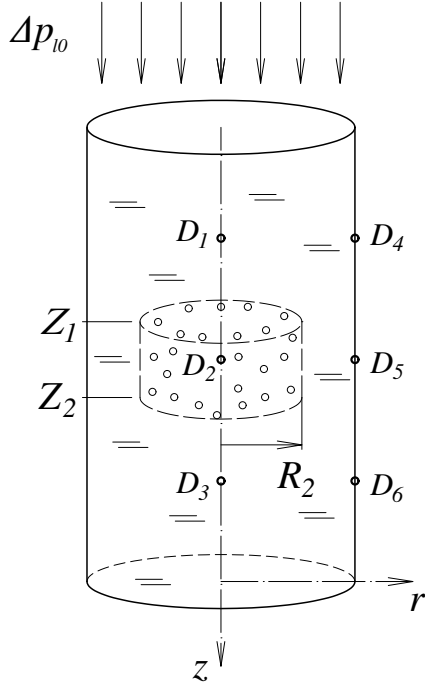
5.1.1 Начальные и граничные условия

Для проведения численных расчётов запишем необходимые условия. **Начальные условия** при $t = 0$ и $z > 0$, соответствующие состоянию покоя неоднородной пузырьковой смеси в трубе, запишутся в виде:

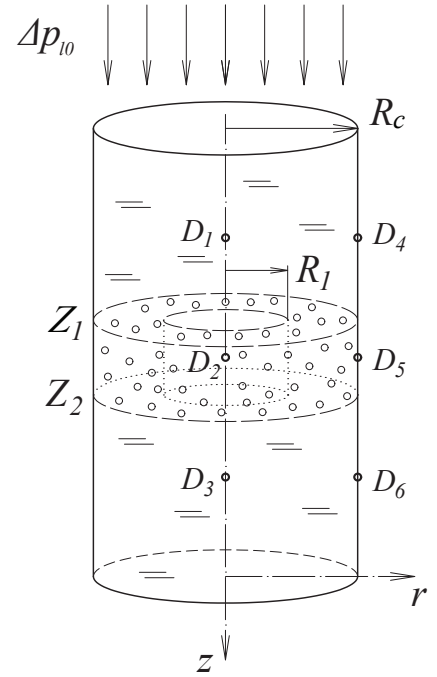
$$p = p_0, \quad v_r = v_z = 0, \quad \rho = \rho_0,$$



а) кластер – полый цилиндр
внутри трубы



б) кластер – сплошной цилиндр



б) кластер – полый цилиндр,
примыкающий к стенкам трубы

Рис. 5.1 – Схема задачи. R_c , R_1 и R_2 – радиус трубы, внутренний и внешний радиусы цилиндрического кластера. Z_1 и Z_2 – координаты кластера. $D_1 - D_6$ – датчики давления.

а) кластер в форме полого цилиндра, не соприкасающийся с боковой поверхностью трубы (рис. 5.1 на с. 170, фрагмент а):

$$\begin{cases} Z_1 \leq z_0 \leq Z_2 \cap R_1 \leq r_0 \leq R_2 : & \alpha_g = \alpha_{g0}, \quad \rho = \rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}), \\ & p_g = p_0, \quad a = a_0, \quad w = 0, \\ 0 \leq z_0 < Z_1 \cap z_0 > Z_2 \cap 0 < r_0 < R_1 \cap r_0 > R_2 : & \rho = \rho_{l0}^0, \end{cases}$$

б) кластер в форме полого цилиндра, примыкающий к стенке трубы (рис. 5.1 на с. 170, фрагмент б):

$$\begin{cases} Z_1 \leq z_0 \leq Z_2 \cap r_0 \geq R_1 : & \alpha_g = \alpha_{g0}, \quad \rho = \rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}), \\ & p_g = p_0, \quad a = a_0, \quad w = 0, \\ 0 \leq z_0 < Z_1 \cap z_0 > Z_2 \cap 0 < r_0 < R_1 : & \rho = \rho_{l0}^0, \end{cases}$$

в) кластер в виде сплошного цилиндра (рис. 5.1 на с. 170, фрагмент в):

$$\begin{cases} Z_1 \leq z_0 \leq Z_2 \cap r_0 \leq R_2 : & \alpha_g = \alpha_{g0}, \quad \rho = \rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}), \\ & p_g = p_0, \quad a = a_0, \quad w = 0, \\ 0 \leq z_0 < Z_1 \cap z_0 > Z_2 \cap r_0 > R_2 : & \rho = \rho_{l0}^0, \end{cases}$$

Граничные условия: на оси симметрии ($r_0 = 0$) и на стенке трубы ($r_0 = R_c$) задаётся условие непротекания жидкости $v_r = 0$, на торце $z_0 = 0$ – граничное давление в форме «ступенька»

$$z_0 = 0 : \quad p_l(r_0, t) = p_0 + \Delta p_{l0}, \quad 0 < r_0 < R_c.$$

Отметим, что оно соответствует разрыву мембраны между камерой высокого давления, заполненной газом, и рабочей камерой, содержащей исследуемую систему.

На второй торцевой границе $z_0 = L_z$ в зависимости от условий конкретной задачи можно поставить следующие условия:

- а) условие жёсткой стенки – $v_z = 0$,
- б) условие свободной поверхности – $p_l = p_0$,
- в) условие «протекания», когда возмущения проходят через торцевую границу, не отражаясь от неё, для чего используется импедансное соотношение, связывающее амплитуды давления и скорости $\Delta p_{l0} = \Delta v_z \rho_l^0 C_l$.

5.2 Фокусировка волны давления в пузырьковом кластере в виде полого цилиндра

Дальнейшие численные расчёты были проведены при следующих теплофизических параметрах: $c_g = 1006$ Дж/кг·К, $\rho_{g0} = 1.29$ кг/м³, $\lambda_g =$

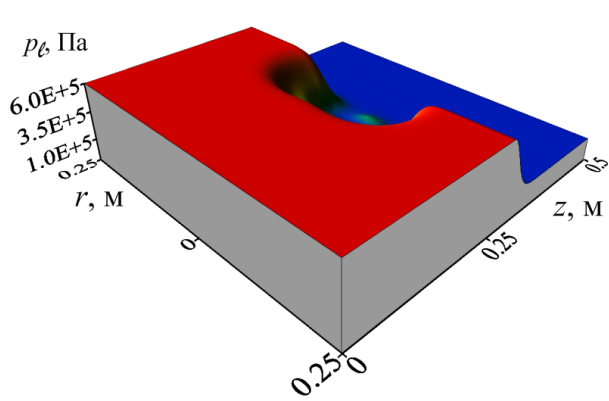
$0.026 \text{ м} \cdot \text{кг} / \text{К} \cdot \text{с}^3$, $\gamma = 1.14$ ($\kappa_g = 2.003 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$) (для воздуха); $C_l = 1500 \text{ м} / \text{с}$, $\rho_{l0} = 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$, $\nu_l = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$, $T_0 = 293 \text{ К}$, $p_0 = 0.1 \text{ МПа}$ (для воды). При расчётах для h_{z_0} , h_{r_0} и τ применялись следующие значения: $h_{z_0} = h_{r_0} = 10^{-3} \text{ м}$, $\tau = 10^{-7} \text{ с}$.

5.2.1 Пузырьковый кластер, не соприкасающийся с боковой поверхностью трубы

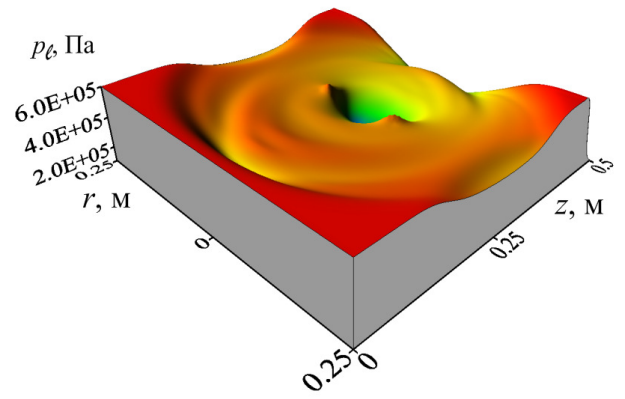
Рассмотрим следующую физическую задачу: в заполненной водой трубе находится пузырьковый кластер в форме полого цилиндра (см. рис. 5.1 на с. 170, фрагмент **а**); в определённый момент времени система начинает испытывать давление по направлению образующей трубы. Исследуем эволюцию волны давления при прохождении через пузырьковую завесу цилиндрической формы и проанализируем влияние параметров области и начального возмущения давления. Для сравнения проведём расчёты также для сплошного цилиндрического кластера.

Примем следующие параметры для пузырьковой области: $Z_1 = 0.25 \text{ м}$, $Z_2 = 0.3 \text{ м}$, $R_1 = 0.025 \text{ м}$, $R_2 = 0.075 \text{ м}$, $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3} \text{ м}$. Амплитуда волнового импульса $\Delta p_{l0} = 0.5 \text{ МПа}$.

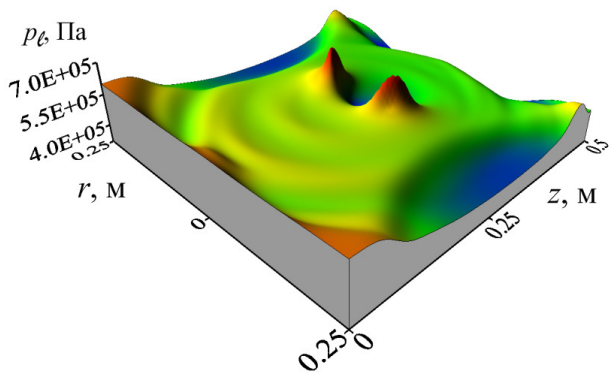
Под воздействием граничного давления $\Delta p(0, r) = p_0 + \Delta p_{l0}$ в трубе формируется волна давления, которая распространяется вдоль положительного направления оси z и воздействует на полый цилиндрический пузырьковый кластер. Акустическая жёсткость кластера ниже, чем у окружающей его воды, следовательно, первоначальная волна от границ кластера будет отражаться как от свободной границы [179] (рис. 5.2 на с. 173, фрагмент **а**). С течением времени в силу двумерности волнового процесса происходит фокусировка волны в область сильно сжимаемой пузырьковой жидкости [115]. Фокусировка начинается с зарождения башнеобразных всплесков давления (рис. 5.2 на с. 173, фрагменты **б** и **в**), которые сходятся к центру трубы, увеличивая свою амплитуду благодаря её геометрии. Амплитуда результирующей волны на оси трубы (фрагмент **г**) превышает первоначальную в несколько раз, например, на фрагменте **г**) она достигает порядка 3.5 МПа. В дальнейшем сформировавшийся пик распространяется вдоль оси трубы, уменьшаясь по амплитуде (фрагменты **д** и **е**). Следует подчеркнуть, что кластер в виде полого цилиндра генерирует вто-



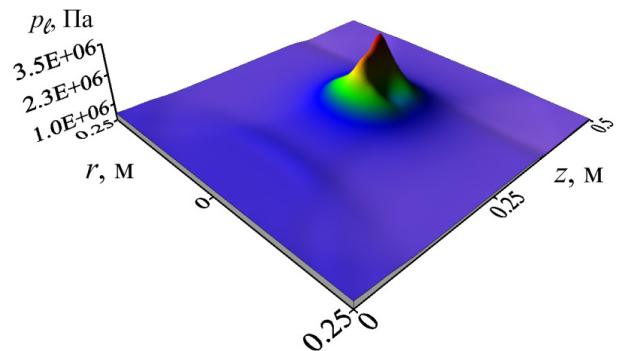
а) момент времени 0.243 мс



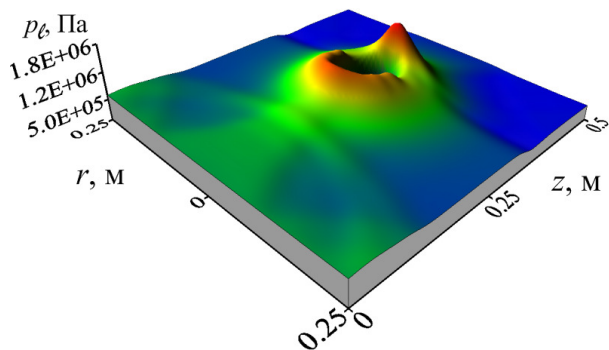
б) момент времени 0.351 мс



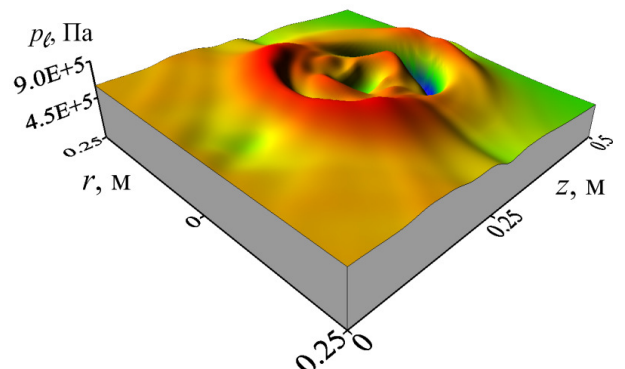
в) момент времени 0.385 мс



г) момент времени 0.459 мс



д) момент времени 0.483 мс



е) момент времени 0.528 мс

Рис. 5.2 — Поля давлений в виде изобар, представленных для случая пузырькового кластера в форме полого цилиндра в различные моменты времени.

ричные и третичные пиковые волны, амплитуда которых значительно больше среднего давления в среде (фрагменты д и е).

Численные расчёты показали, что при определённых геометрических параметрах трубы и пузырькового кластера, а также дисперсности пузырьков и их объёмного содержания в пузырьковой смеси, максимальное значение ам-

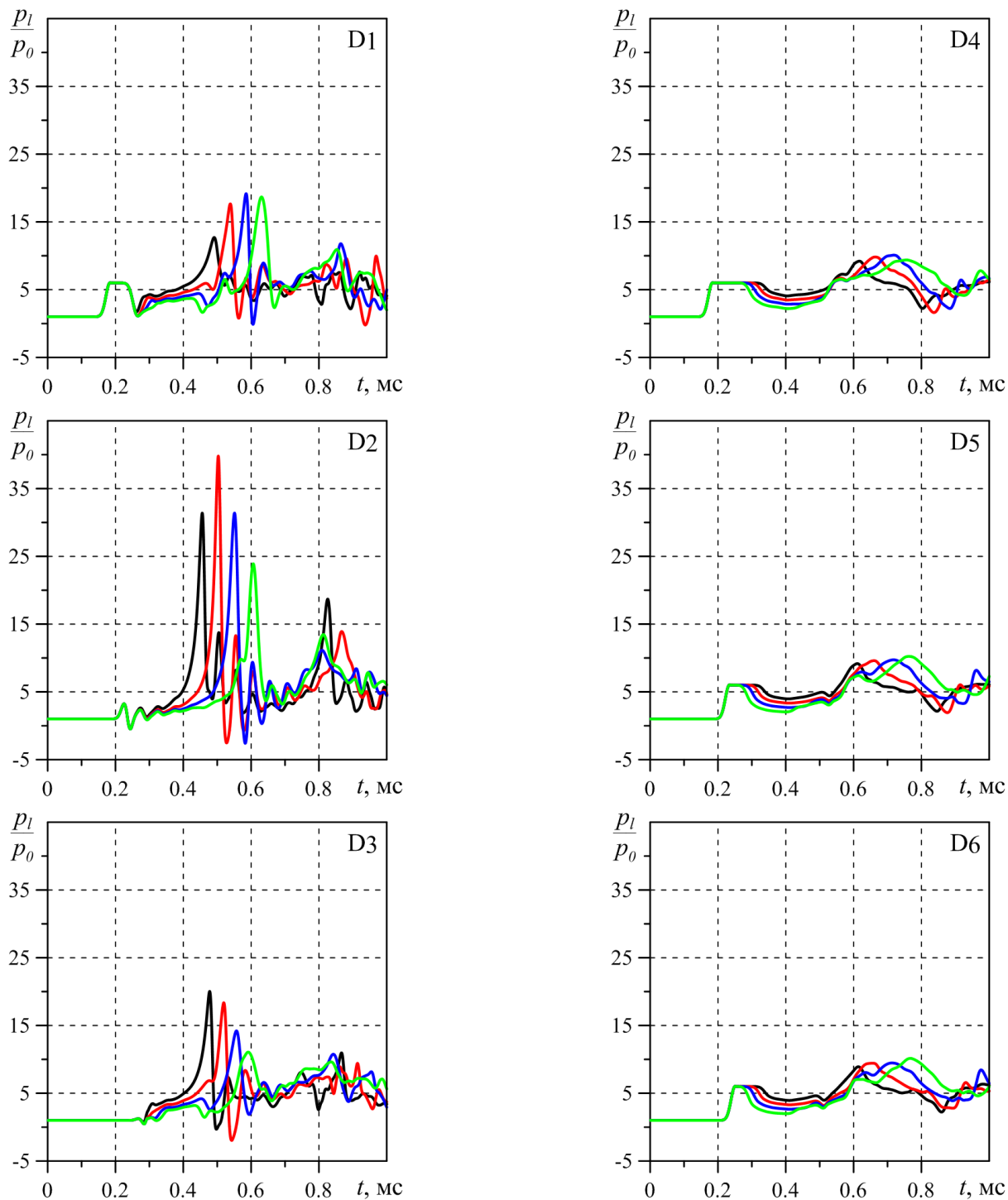


Рис. 5.3 — Показания датчиков, расположенных на оси (D_1 , D_2 , D_3) и на стенке трубы (D_4 , D_5 , D_6). Линии **чёрного цвета** соответствуют кластеру в виде полого цилиндра с внешним радиусом $R_2 = 0.075$ м, **красного** — 0.1 м, **синего** — 0.125 м и **зелёного** — 0.15 м.

плитуды давления формируется в приосевой зоне, окружённой пузырьковым кластером.

На рис. 5.3 (на с. 174) представлены эпюры давления для датчиков, расположенных на оси (D_1, D_2, D_3) и на стенке трубы (D_4, D_5, D_6) на расстояниях $l_{D_1} = l_{D_4} = 0.2$ м, $l_{D_2} = l_{D_5} = 0.275$ м, $l_{D_3} = l_{D_6} = 0.35$ м от плоскости $z = 0$, соответственно (см. рис. 5.1 на с. 170, фрагмент **а**). Внутренний радиус кластера - полого цилиндра составлял $R_1 = 0.025$ м, протяжённость завесы по координате z равна 0.05 м. Линии чёрного цвета соответствуют кластеру с внешним радиусом $R_2 = 0.075$ м, красного – 0.1 м, синего – 0.125 м и зелёного – 0.15 м. Согласно расчётным данным, максимальное давление фиксируется датчиком, расположенным внутри кластера на оси трубы (см. датчик D_2). В дальнейшем пиковое значение давления падает и смещается по направлению хода волны (см. датчик D_3). Согласно эпюрам датчика D_1 , увеличение внешнего радиуса кластера приводит к увеличению максимального давления, которое может быть реализовано в рабочей области в момент кумуляции. Однако на датчике D_2 фиксируется немонотонное изменение максимального давления при росте внешнего радиуса, то есть увеличение размеров как таковое не приводит к увеличению амплитуды волны, сфокусированной внутри кластера. Для определённого набора параметров существует некоторое предельное значение внешнего радиуса, когда его дальнейший рост уже не приводит к увеличению амплитуды проходящей волны. Это связано с тем, что волна, прошедшая через границу пузырькового кластера, не успевают сфокусироваться внутри, и не происходит максимально возможной кумуляции давления. Более того, внутри области появляются вторичные волны, возникает диссипация энергии и потеря амплитуды основной волны. В дальнейшем пик, зафиксированный датчиком D_2 , сносится вслед за волной, что зафиксировано датчиком D_3 . На нём видно, что чем больше поперечные размеры кластера, тем меньше амплитуда прошедшей волны – полная противоположность картине, зафиксированной датчиком D_1 . Датчики D_4 – D_6 демонстрируют увеличение амплитуды начального импульса до 2-х раз, связанное с переизлучением энергии кластером в центре трубы. По данным этих датчиков подчеркнём: чем больше геометрические размеры кластера, тем большую амплитуду имеет волна разгрузки. Третичные всплески давления здесь обусловлены переотражениями волны от нулевой границы и не носят информативный характер.

На рис. 5.4 (на с. 176) сравниваются зависимости координаты z^{\max} максимального пика давления на оси трубы от амплитуды начального возмущения

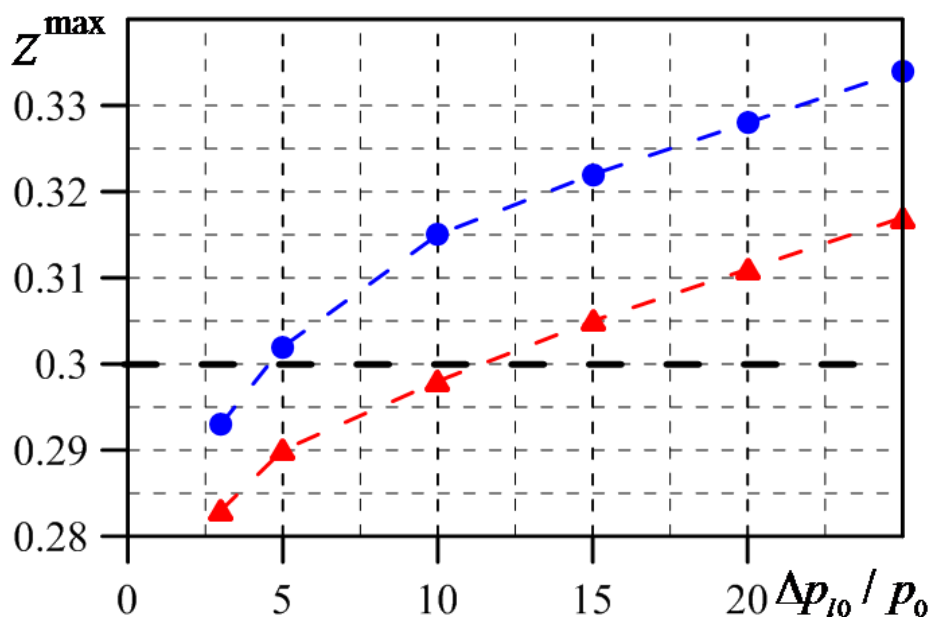


Рис. 5.4 — Зависимость координаты z^{\max} пика максимального давления на оси трубы от амплитуды начального давления Δp_{10} . Штриховой линией обозначено координата $Z_2 = 0.3$ м. Остальные параметры соответствуют рис. 5.2.

для двух типов кластеров: полого цилиндра (символы ●) и сплошного цилиндра (символы ▲). Установлено, что координата точки фокусировки возмущения по оси z с увеличением амплитуды первоначальной волны смещается в сторону роста z для обоих типов кластеров. Проходя через полый цилиндр, она смещается сильнее, чем при взаимодействии со сплошным.

Рис. 5.5 (на с. 177) иллюстрирует зависимость максимального давления на оси трубы от первоначальной амплитуды. Отметим, что для Δp_{10} менее 0.2 МПа фокусировка волны на оси трубы не происходит. С увеличением амплитуды первоначальной волны от 0.3 до 1.5 МПа происходит увеличение амплитуды результирующей волны от 1.2 до 22.1 МПа (символы ●). Дальнейший рост Δp_{10} уже не приводит к значимому увеличению интенсивности результирующего возмущения. Эти особенности определяются более поздней фокусировкой волны на оси трубы, следовательно, башнеобразные всплески успевают рассеять часть своей энергии при движении к оси трубы, а пик давления внутри кластера сносится по направлению роста координаты z . Здесь же построена зависимость для пузырькового кластера в форме сплошного цилиндра, геометрические параметры которого Z_1 , Z_2 , R_2 совпадают с параметрами полого цилиндра, но

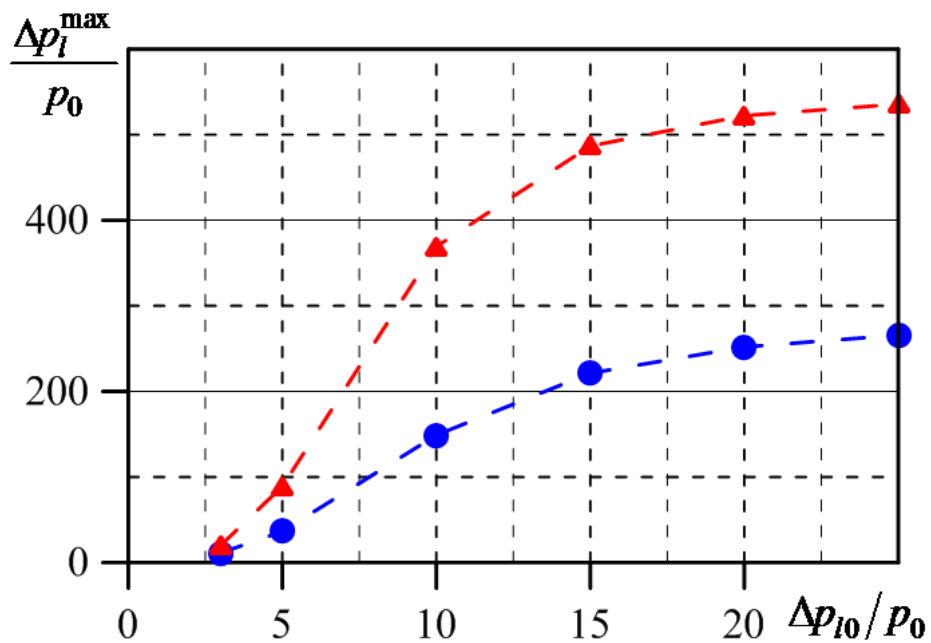
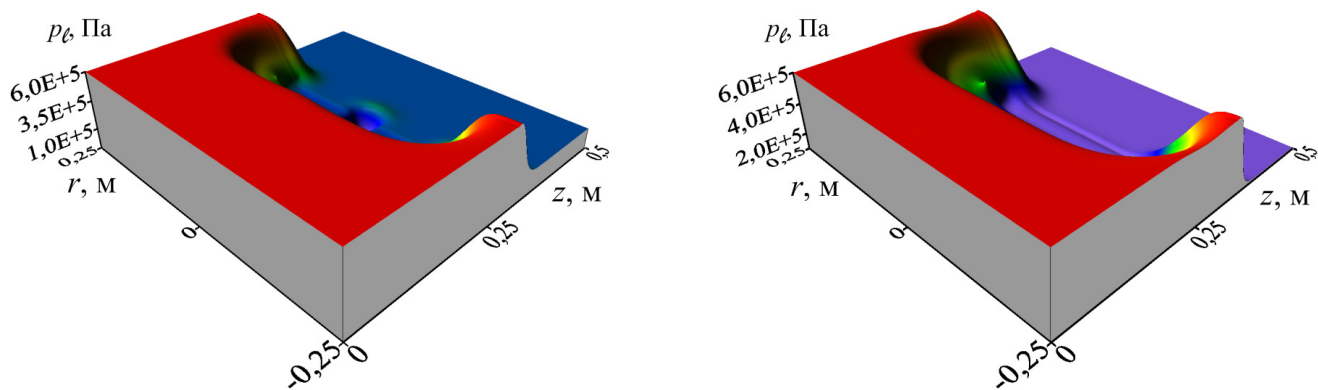


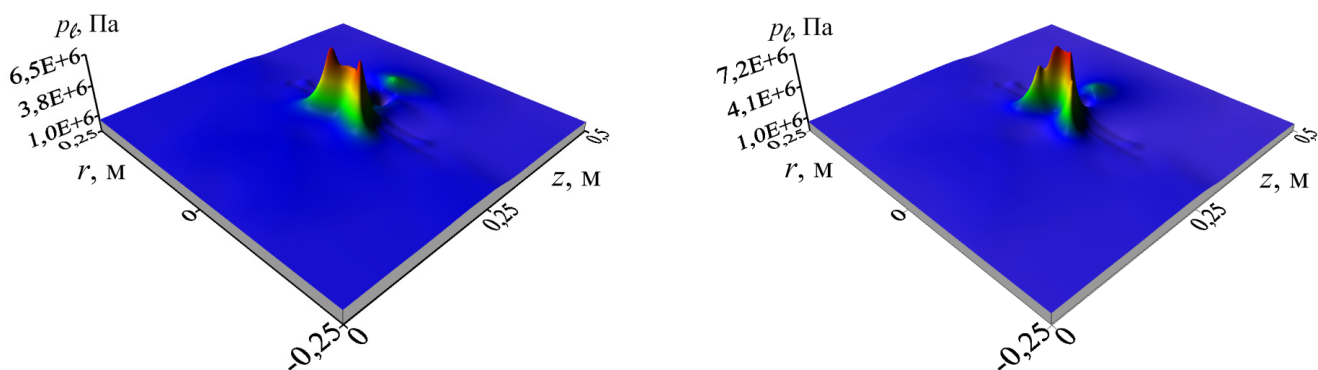
Рис. 5.5 — Зависимость максимального давления на оси трубы от амплитуды начального давления Δp_{l0} . Символы \bullet — кластер в виде полого цилиндра, \blacktriangle — сплошной цилиндр, заполненный пузырьковой смесью.

$R_1 = 0$. Сравнивая данные, можно заключить, что в диапазоне начальной амплитуды $\Delta p_l \in (0.5 - 2.5)$ МПа максимальная амплитуда фокусирующейся в сплошном пузырьковом кластере волны более чем вдвое превышает аналогичную для полого цилиндра. С увеличением амплитуды первоначальной волны от 0.3 до 1.5 МПа происходит увеличение амплитуды результирующей волны от 2.1 до 48.7 МПа (символы \blacktriangle).

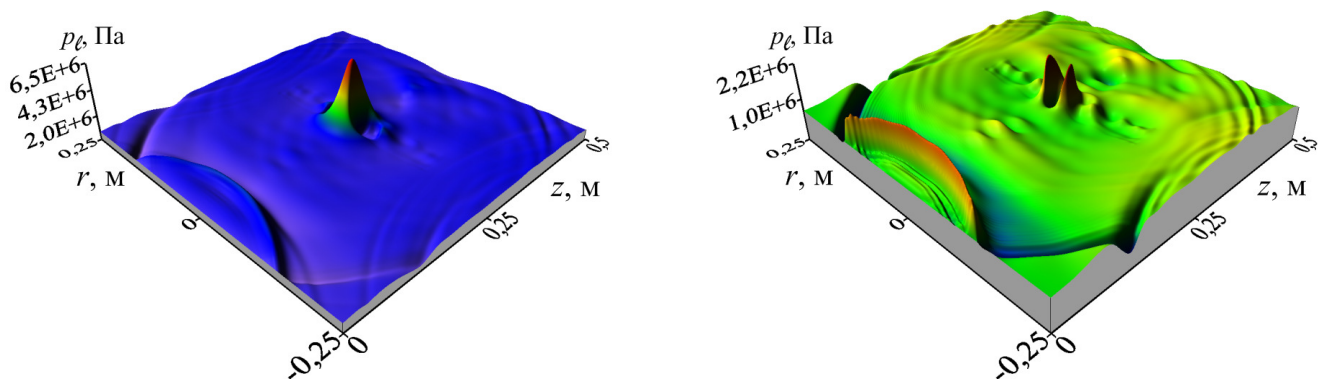
На рис. 5.6 (на с. 178) представлены поля давлений в различные моменты времени для кластера в виде полого цилиндра (слева) и для сплошного цилиндра (справа). Здесь полагается $R_2 = 0.15$ м. Остальные параметры совпадают с рис. 5.2 (на с. 173). Очевидно, что пиковые значения давления возникают на оси трубы, и это определяется геометрией задачи. Для случая сплошного цилиндра максимальное значение достигается раньше по времени, чем для полого цилиндра (согласно фрагментам **б** справа и **в** слева), поскольку максимальное значение в случае полого цилиндра достигается при слиянии волн, движущихся от торца к центру, а для сплошного цилиндра — при кумуляции волны внутри завесы. Время реализации пика давления разное в силу геометрии расчётной области, но абсолютные значения и локализация пика давления очень близки.



а) Момент времени 0.301 мс



б) Момент времени 0.581 мс



в) Момент времени 0.792 мс

Рис. 5.6 — Объёмные поля давления. Слева кластеру в форме полого цилиндра, справа — сплошного цилиндра.

Стоит добавить, что в процессе движения волн возникает существенная волна разгрузки, и это может привести к откольным эффектам на стенках трубы.

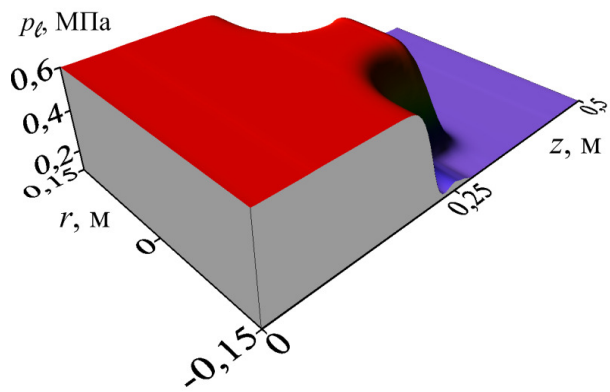
5.2.2 Случай соприкасающегося со стенкой цилиндрического кластера

Продолжим исследования, изменив расположение пузырькового кластера. Теперь внешняя граница полого цилиндра соприкасается со стенками трубы (см. рис. 5.1 на с. 170, фрагмент б). В остальном постановка задачи остаётся прежней. Для сравнения рассматривается сплошной цилиндрический пузырьковый кластер.

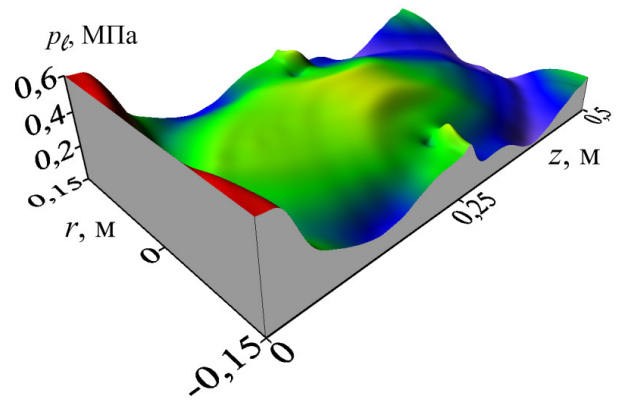
Примем следующие параметры для пузырьковой области: $Z_1 = 0.25$ м, $Z_2 = 0.3$ м, $R_1 = 0.1$ м, $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м. Амплитуда волнового импульса $\Delta p_{l0} = 0.5$ МПа. Волна задаётся описанным ранее способом.

В отличие от случая кластера «внутри» жидкости, с течением времени из-за двумерного волнового движения происходит фокусировка волны в область сильно сжимаемой пузырьковой завесы [115], [143], [184], [212] (рис. 5.7, фрагмент в), а именно на границе трубы. Скорость волны в кольцевой пузырьковой зоне в 10 раз ниже скорости волны в «чистой» жидкости, поэтому, за время взаимодействия волны с завесой, волна в «чистой» жидкости многократно успевает отразиться от границ $z = 0$ (где поддерживается граничное давление) и $z = Z_1$. Из-за фокусировки волны в пузырьковом слое и многократных отражений от границах $z = 0$ и $z = Z_1$ амплитуда результирующей волны увеличивается относительно первоначальной амплитуды. На фрагменте г рис. 5.7 отражён момент воздействия волны на стенку трубы, амплитуда волны при этом достигает приблизительно 1.5 МПа. В дальнейшем происходит «переизлучение» энергии волны от кластера и фокусировка на оси трубы (рис. 5.7, фрагмент д). Для данного случая пиковое значение давления на оси составило 2.4 МПа. Так как «переизлучения» происходит во все стороны, то к торцу $z = 0$ распространяется сфокусированная на оси трубы волна (рис. 5.7, фрагмент е). Таким образом, наличие пристеночной кольцевой пузырьковой зоны в трубе, заполненной жидкостью, приводит к увеличению амплитуды волны типа «ступенька», воздействующей через торцевую границу, из-за кумуляции энергии в область сильно сжимаемого пузырькового кольца и многократных отражений от границы, где поддерживается граничное давление, и границ кольца.

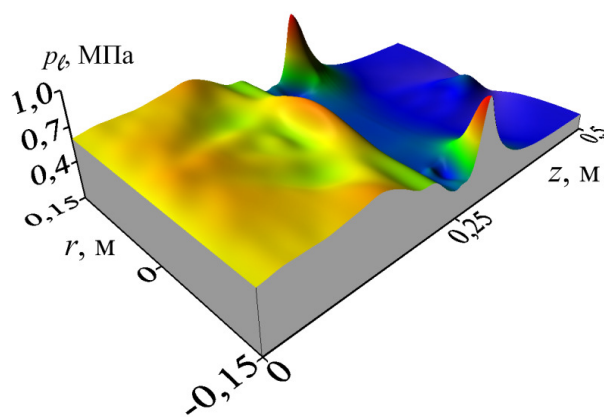
Рис. 5.8 демонстрирует показания датчиков, расположенных на оси и стенке трубы. Осциллограммы построены в промежутке времени, существенно боль-



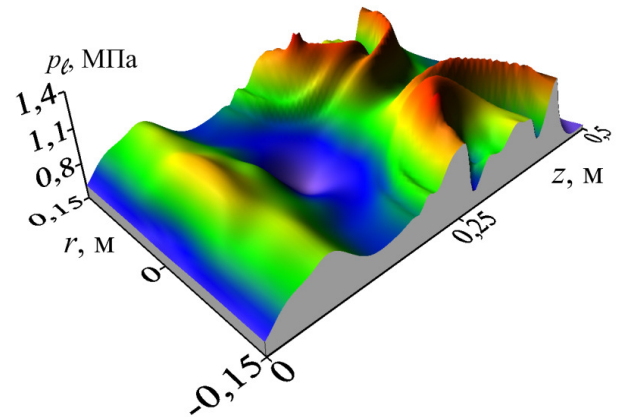
а) момент времени 0.236 мс



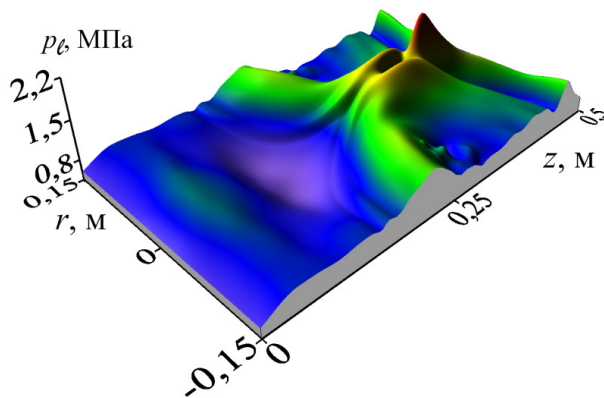
б) момент времени 0.402 мс



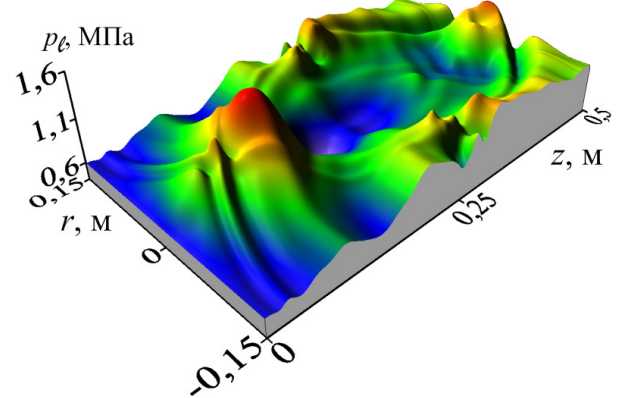
в) момент времени 0.530 мс



г) момент времени 0.772 мс



д) момент времени 0.804 мс



е) момент времени 0.888 мс

Рис. 5.7 — Динамика поля давлений в среде, содержащей пристенный пузырьковый кластер в форме полого цилиндра.

шем, чем время распространения волны от границы $z = 0$ до границы пузырькового кластера, поэтому осцилляции на графиках объясняются многократными переотражениями волны на границах кластера и на границе $z = 0$, где поддерживается постоянное граничное давление $\Delta p_{l0} = 0.5$ МПа. Из показаний

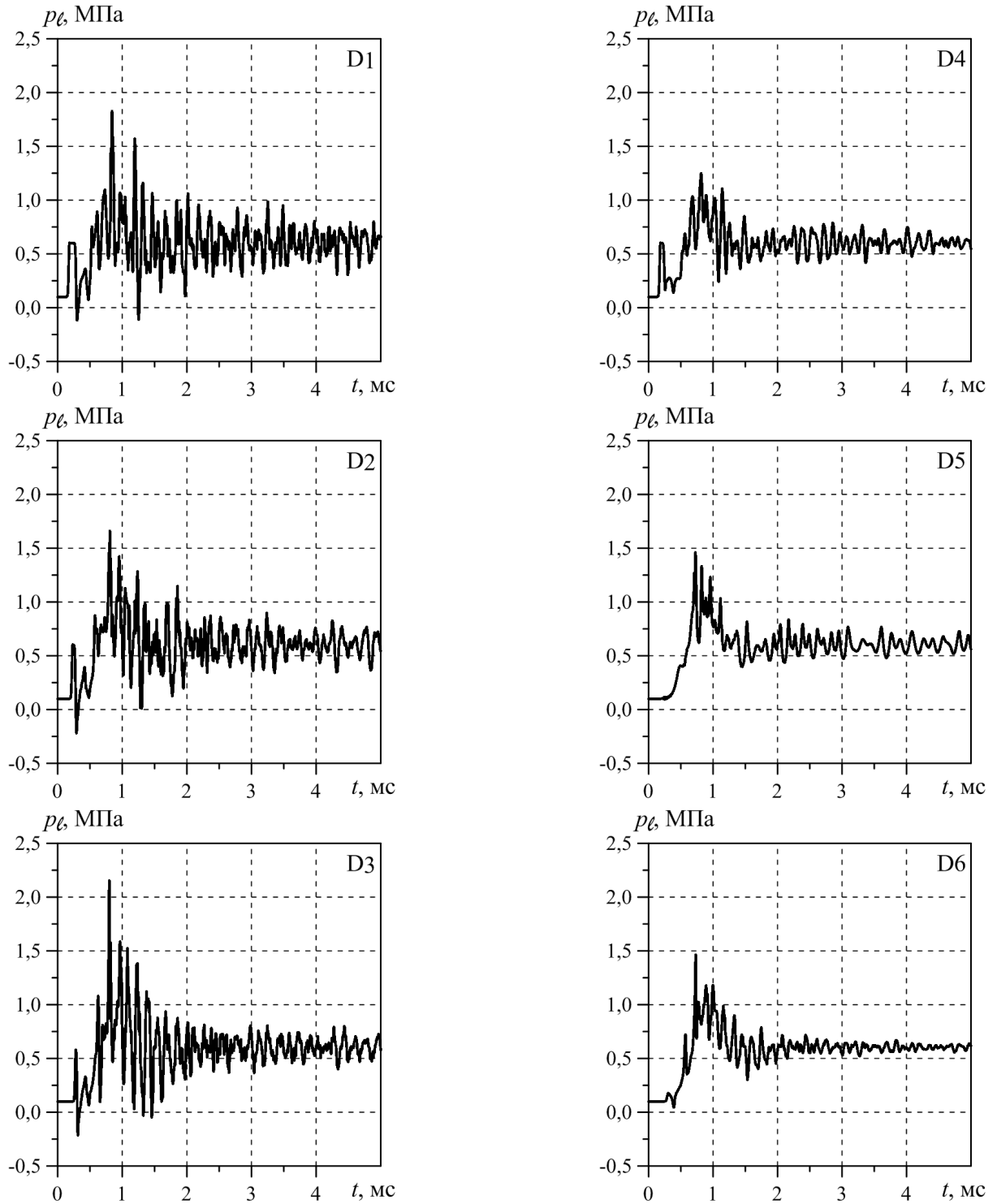


Рис. 5.8 — Показания датчиков D_1 , D_2 , D_3 , расположенных на оси трубы, и D_4 , D_5 , D_6 , расположенных на стенках на расстояниях $l_{D_1} = l_{D_4} = 0.15$ м, $l_{D_2} = l_{D_5} = 0.275$ м, $l_{D_3} = l_{D_6} = 0.35$ м от плоскости $z = 0$, соответственно.

датчиков D_1 , D_2 , D_3 следует, что пристеночная пузырьковая зона приводит к трёхкратному увеличению амплитуды волны в приосевой области трубы. В то же время происходит увеличение амплитуды на стенках трубы поблизости от пузырьковой завесы. Согласно показаниям датчиков D_4 , D_5 , D_6 амплитуда

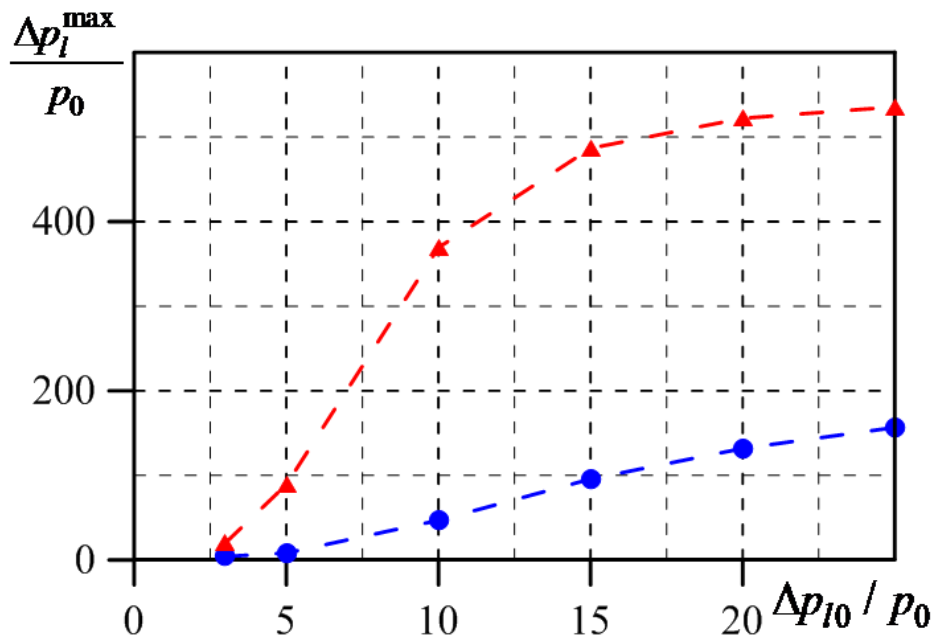


Рис. 5.9 — Зависимость максимальной амплитуды давления ($\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max} - p_0$) на стенке трубы от амплитуды начального давления Δp_{l0} . Параметры системы и расчёта соответствуют рис. 5.7.

первоначальной волны увеличивается более чем вдвое по сравнению с первоначальной. Исходя из показаний датчиков, одинаково отстоящих от границы $z = 0$ (D_1 и D_4 , D_2 и D_5 , D_3 и D_6), можно заключить, что амплитуда волны в приосевой зоне трубы больше, чем на стенке. Наблюдаемый процесс связан с геометрической фокусировкой результирующей волны, сформировавшейся в кластере, при её движении к оси.

Далее обсудим зависимость максимального значения давления на стенке трубы (рис. 5.9) и координаты максимального значения (рис. 5.10) от первоначальной амплитуды давления. Символы ● отображают данные расчётов для пузырькового кластера в виде полого цилиндра, примыкающего к внешней стенке трубы, ▲ — для кластера в виде сплошного цилиндра, заполненного пузырьковой смесью. С ростом начальной амплитуды от 0,3 до 2,5 МПа максимальное значение давления на стенке трубы линейно увеличивается от 1,0 до 17,5 МПа. Сравним кривые для двух типов цилиндрических кластеров, и подчеркнём более чем трёхкратное превышение амплитуды результирующего импульса в среде со сплошным кластером. В обоих случаях координата пикового давления, регистрируемого в расчётной области, до значения первоначальной амплитуды 1,0 МПа соответствует зоне пузырькового кластера. При дальнейшем увели-

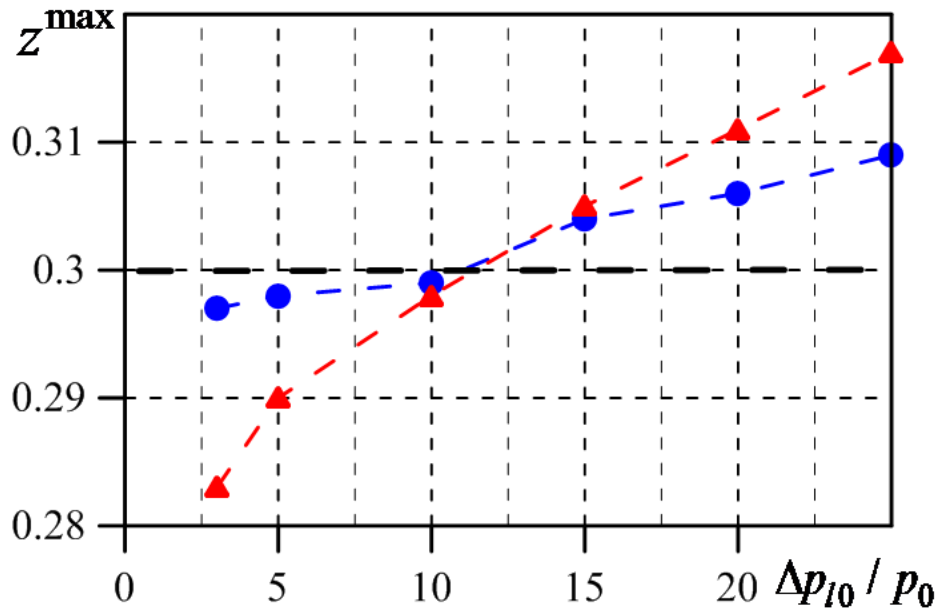


Рис. 5.10 — Зависимость координаты пикового давления на стенке трубы z^{\max} от амплитуды начального давления Δp_{10} . Штриховой линией обозначена координата $Z_2 = 0.3$ м. Параметры системы и расчёта соответствуют рис. 5.7.

чении амплитуды происходит смещение координаты максимума на несколько миллиметров вдоль оси, по росту координаты z .

Исследуем динамику максимального значения амплитуды давления с точки зрения объёмного содержания газа в пузырьковом экране *ceteris paribus*. Рост доли объёмного содержания газа с 0.001 до 0.06 приводит к увеличению максимального значения амплитуды волны, реализуемого на стенке трубы. При объёмном содержании газа менее 0.0007 увеличения амплитуды практически не происходит. Зависимость максимальной амплитуды волны на стенке трубы от объёмного содержания газа в диапазоне от 0.001 до 0.06 может быть аппроксимирована следующим выражением:

$$\frac{\Delta p_l^{\max}}{p_0} = 11.5 + 766.36 \cdot \alpha_{g0} - 7493.18 \cdot \alpha_{g0}^2.$$

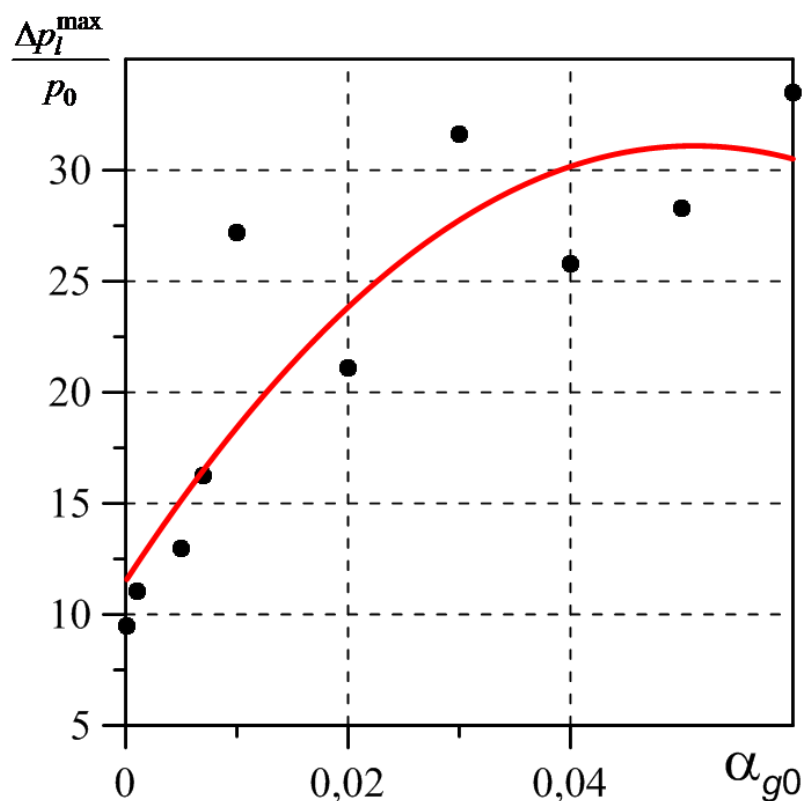


Рис. 5.11 — Зависимость максимального давления на оси трубы ($\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max} - p_0$) от объёмного содержания газа α_{g0} . Параметры системы и расчёта такие же как на рис. 5.7.

5.3 Специфика фокусировки волны давления в полых и сплошных цилиндрических пузырьковых кластерах

Последующий раздел посвящён численному исследованию и анализу особенностей кумуляции энергии в жидкости, содержащей полый либо сплошной пузырьковый кластер. Сравнение проводилось для полого цилиндра, примыкающего к стенкам трубы, и сплошного цилиндра на её оси, не примыкающего к границам. Для корректного сравнения результатов сплошной пузырьковый кластер формировался на основе характеристик пристеночного кластера, площадь сечения подбиралась одинаковой по величине и форме (рис. 5.12 на с. 185). В расчётах радиус сплошного цилиндра R_2 и расстояние между внешним и внутренним радиусами полого цилиндра ($R_c - R_1$) совпадали с пространственной протяжённостью Δz . В расчётах были приняты следующие параметры для пузырьковой области: $Z_1 = 0.25$ м, $a_0 = 10^{-3}$ м, Δz варьировался от 0.01 до 0.1 м, как и R_2 . Начальное объёмное содержание пузырьков составляло 0.001

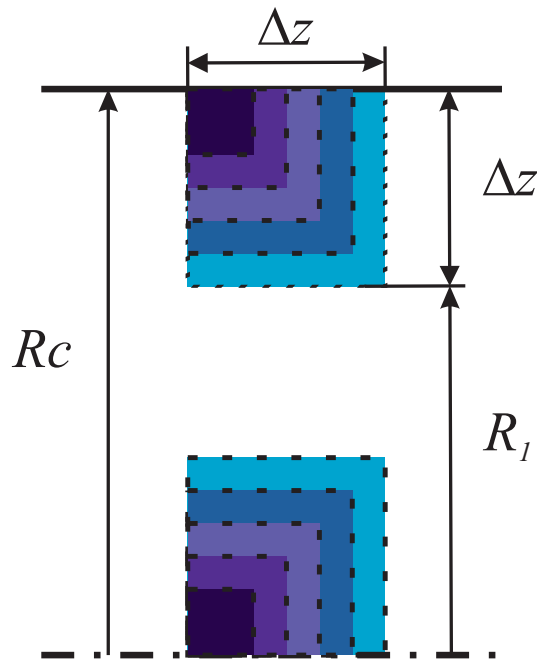


Рис. 5.12 — В расчётах радиус сплошного цилиндра R_2 и расстояние между внешним и внутренним радиусами полого цилиндра $R_c - R_1$ совпадали по значению с пространственной протяжённостью Δz .

либо 0.01. Граничное давление задавалось резким повышением на величину $\Delta p_{l0} = 0.5$ МПа и поддерживалось в течении всего расчёта

Зависимость максимального значения давления $\Delta p_l^{\max}/p_0$, регистрируемого в трубе, от геометрических размеров пузырьковой области ($\Delta z = R_c - R_1$) изображена на рис. 5.13 на с. 186. Фрагмент **а**) соответствует начальному объёмному содержанию $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, фрагмент **б**) – значению $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Сопоставление данных демонстрирует определённое повышение давления в трубе при любом объёмном содержании и форме пузырьковой завесы. Однако из общей картины выделяются данные на оси трубы в случае сплошного цилиндрического кластера из-за кумуляции энергии волны в центральной области за завесой. Этому способствует, во-первых, то, что основной фронт волны огибает пузырьковую область и, соединяясь за завесой, начинает сжимать её с тыльной стороны; во-вторых, первичная волна, взаимодействуя с завесой, движется вглубь неё и встречает волну сжатия с тыльной стороны. Слияние энергии двух волновых фронтов приводит к реализации максимального давления. Для пристеночной завесы подобный механизм вносит существенно меньший вклад в картину волновой динамики.

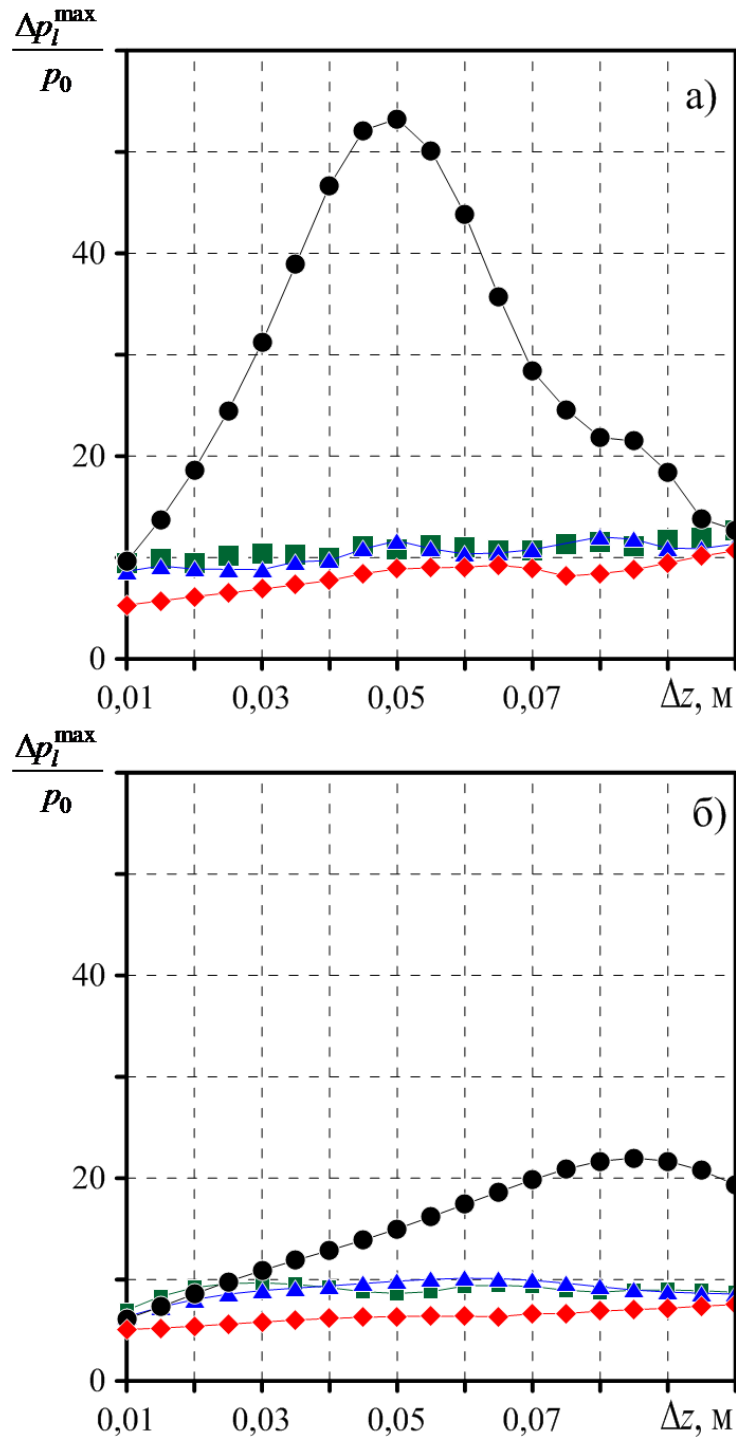


Рис. 5.13 — Зависимость максимального давления ($\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max}/p_0$) от радиуса кластера Δz ($\Delta z = R_c - R_1$) на оси трубы (круги и квадраты) и на стенке трубы (ромбы и треугольники). Круги и ромбы относятся к сплошному цилиндру, а квадраты и треугольники к полному цилиндру у внешней стенки. Верхний рисунок при $\alpha_g = 10^{-2}$, а нижний — $\alpha_g = 10^{-3}$.

Анализируя результаты, представленные на рис. 5.13 на с. 186 и в работе [113], выберем для дальнейших исследований пузырьковый кластер в ви-

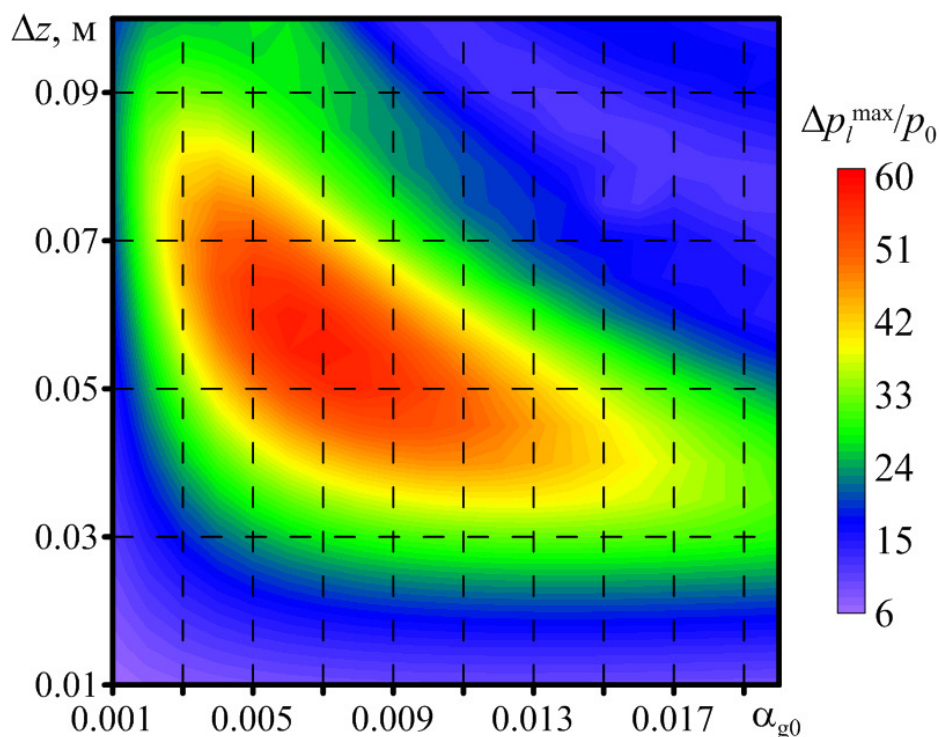


Рис. 5.14 — Зависимость максимального давления $\Delta p_l^{\max}/p_0$ от радиуса кластера Δz ($\Delta z = R_2$) и объёмного содержания пузырьков α_{g0} .

де сплошного цилиндра. На рис. 5.14 на с. 187 построена карта зон реализации максимального давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания и протяжённости завесы. Здесь также выделяются три основные зоны. Это правая верхняя область завес максимального размера и наибольшего объёмного содержания. Нижняя зона, где рассматриваются кластеры минимального размера. И средняя зона, расположенная диагонально из левого верхнего в правый нижний угол. В первой области геометрические размеры и большое объёмное содержание практически полностью демпфируют проходящую волну на рассматриваемых временных интервалах (порядка 1 мс), и увеличение волнового сигнала несущественно. Во второй области, напротив, из-за маленьких размеров пузырьковой области волновой импульс её практически не ощущает на своём пути, и значимого увеличения амплитуды волны давления, опять же, не происходит. Наиболее интересна диагональная область, где возможны реализации высоких давлений. Для маленьких объёмных содержаний разброс по геометрическим размерам пузырьковой области велик: от 0.03 м до 0.1 м. Иными словами, в этом диапазоне размеров завес определяющим фактором является объёмное содержание пузырьков газа, ре-

гулирующее скорость распространения волны в области. При таких объёмах газовых включений скорость волны составляет около 400 м/с, и область завесы длиной 0.03 м – 0.1 м преодолевается волной за короткое время. С ростом объёмного содержания газа уменьшается скорость распространения волны (до ≈ 100 м/с), и сокращается диапазон геометрических размеров. Из-за падения скорости внутри пузырьковой завесы увеличивается влияние её протяжённости. В итоге, для получения высоких давлений необходимо подбирать соответствующую комбинацию «объёмное содержание–протяжённость завесы», и добавим, что правильно подобранное сочетание параметров может как увеличить амплитуду начального волнового импульса, так и существенно ослабить.

Для более полного анализа особенностей усиления и ослабления амплитуды волн рассмотрим два характерных набора данных. В первом случае фиксируется протяжённость пузырьковой области и рассматривается влияние объёмного содержания на динамику волны (рис. 5.15 на с. 189). Во втором случае изучается влияние протяжённости пузырьковой области при фиксированном начальном объёмном содержании газа (рис. 5.16 на с. 191).

На рис. 5.15 на с. 189 содержатся результаты численного моделирования процесса взаимодействия волны давления вида «ступенька» с цилиндрическим пузырьковым кластером при начальном содержании пузырьков $\alpha_{g0} = 0.009$. Продольный размер пузырьковой завесы выбирался из $\Delta z = 0.02, 0.05$ или 0.09 м. Слева иллюстрируется изменение давления на оси трубы в различные моменты времени. Цифры 1–4 на графиках соответствуют моментам времени $t = 0.243, 0.512, 0.617$ и 0.848 мс. Справа дано объёмное распределение давления во всей расчётной области в моменты времени, которые соответствуют цифрам 2–4 на левом рисунке. Заметим, что для пузырьковых областей протяжённостью $\Delta z = 0.02$ и 0.09 м максимальное значение, фиксируемое на оси трубы, превышает давление на фронте волны давления почти в три раза. То есть, пузырьковая область способна усиливать волновые возмущения, которые с ней взаимодействуют. При $\Delta z = 0.02$ м расстояние до центра завесы мало, поэтому волновой пакет успевает достигнуть его, не рассеяв энергию, которой было бы достаточно для заметной кумуляции. Наряду с этим стоит отметить, что в другие моменты времени, в частности, представленные на графиках, давление на оси трубы колеблется в окрестности давления на фронте. Это говорит о том, что усиленный фронт в последствии рассеивается по сечению трубы, и вторичные

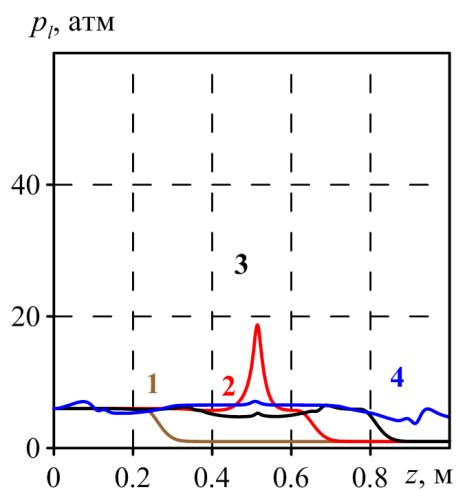
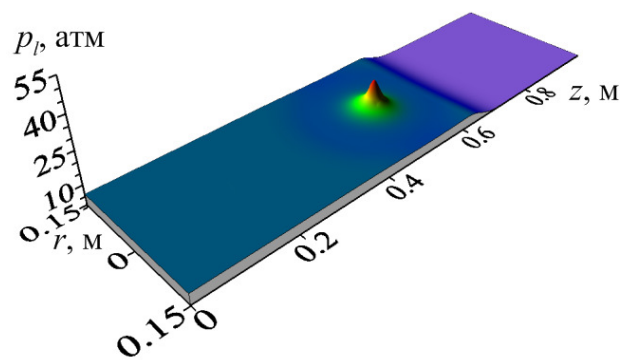
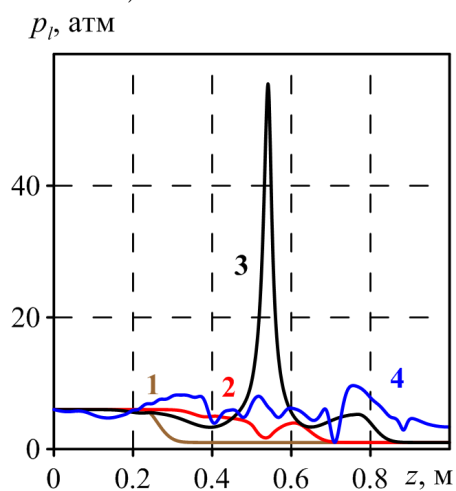
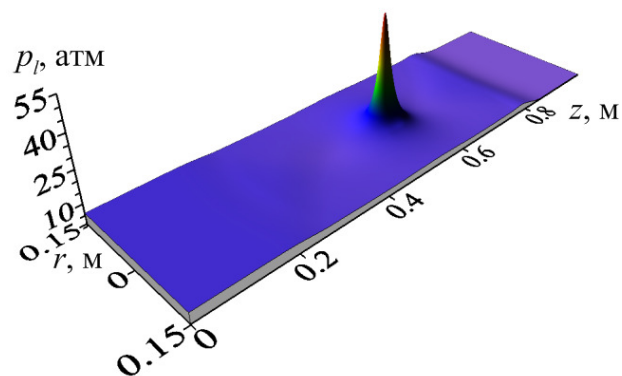
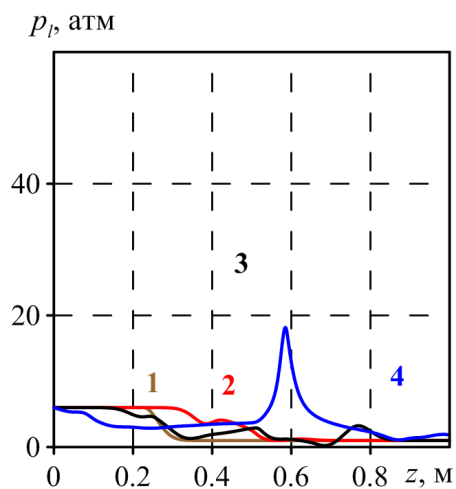
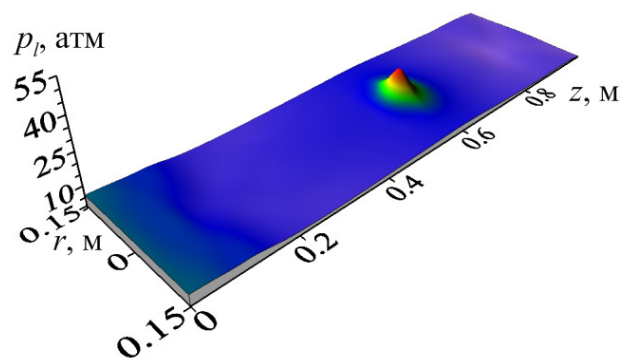
а) $\Delta z = 0.02$ мб) $t = 0.512$ мсв) $\Delta z = 0.05$ мг) $t = 0.617$ мсд) $\Delta z = 0.09$ ме) $t = 0.848$ мс

Рис. 5.15 — Давление в жидкости на оси трубы (слева) и объёмная картина течения в различные моменты времени (справа) при начальном объёмном содержании пузырьков $\alpha_{g0} = 0.009$. Значения: 1 — 0.243, 2 — 0.512, 3 — 0.617 и 4 — 0.848 мс.

переотражения от внешней границы не приводят к существенному увеличению давления на оси. Если протяжённость пузырьковой области $\Delta z = 0.05$ м, давление на пике кумуляции доходит до 55 атмосфер, что объясняется наиболее эффективным соотношением между объёмным содержанием пузырьков и протяжённостью завесы. Длины кластера ещё недостаточно, чтобы существенно ослабить волновой импульс, как при $\Delta z = 0.09$ м, но в то же время существует возможность аккумулировать достаточное количество энергии волны для усиления в момент кумуляции за счёт всестороннего сжатия пузырькового экрана. Для наглядности описанных результатов справа на рис. 5.15 построены объёмные картины распределения давления в расчётной области.

Далее зафиксируем протяжённость цилиндрического пузырькового кластера по координате z : $\Delta z = 0.05$ м, и проведём численные расчёты в рамках поставленной задачи для начальных объёмных газосодержаний $\alpha_{g0} = 0.001$, 0.009 и 0.02. Результаты моделирования показаны на рис. 5.16 на с. 191. Слева иллюстрируется значение давления на оси трубы в различные моменты времени, цифры 1–4 соответствуют $t = 0.243$, 0.514, 0.617 и 0.721 мс. Справа предложены объёмные распределения давления во всей расчётной области в моменты времени, обозначенные слева 2–4. Легко видеть, что при одной и той же протяжённости основную роль начинает играть объёмное содержание, задающее скорость распространения возмущения в пузырьковом слое. Для $\alpha_{g0} = 0.001$ она порядка 440 м/с, для $\alpha_{g0} = 0.02$ – 100 м/с. При $\alpha_{g0} = 0.001$ волна достигает центра пузырькового экрана раньше, чем в остальных случаях. За это время пузырьковая область не успевает аккумулировать достаточно энергии для формирования существенного пика давления, однако на оси фиксируется увеличение амплитуды волны до 2.5 раз. Если $\alpha_{g0} = 0.02$, то низкая скорость распространения возмущения содействует диссипативному процессу. За время движения волны по пузырьковому кластеру он успевает уменьшить амплитуду волны, что приводит к меньшей амплитуде кумуляции, и на оси фиксируется рост давления почти в 4 раза от первоначального значения. Особенности процесса эволюции волновой картины течения при $\alpha_{g0} = 0.009$ были отмечены в ходе обсуждения предыдущего рисунка. Добавим, что для использованных размеров пузырьковой области, начального объёмного содержания и формы первоначального импульса комбинация параметров $\alpha_{g0} = 0.009$ и $\Delta z = 0.05$ м позволяет достичь максимальных значений давления в расчётной области.

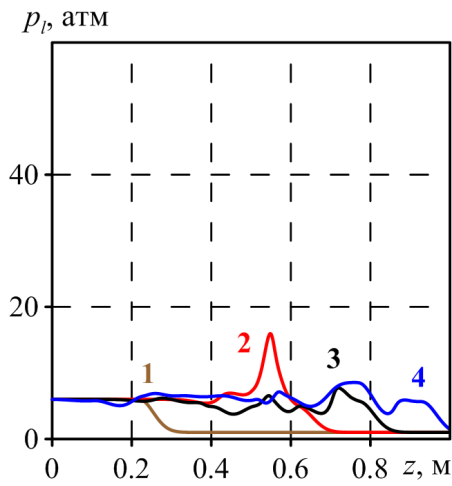
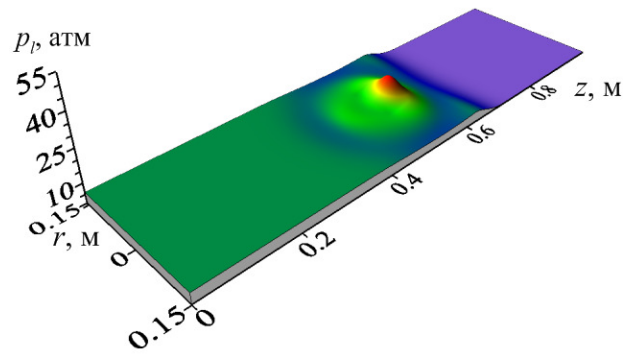
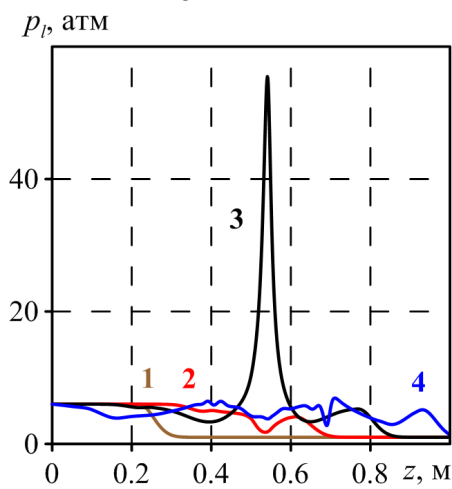
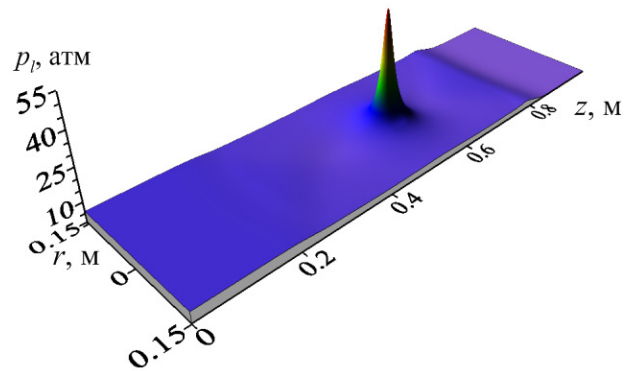
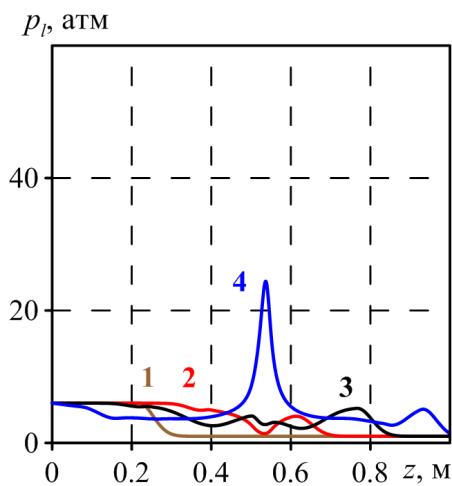
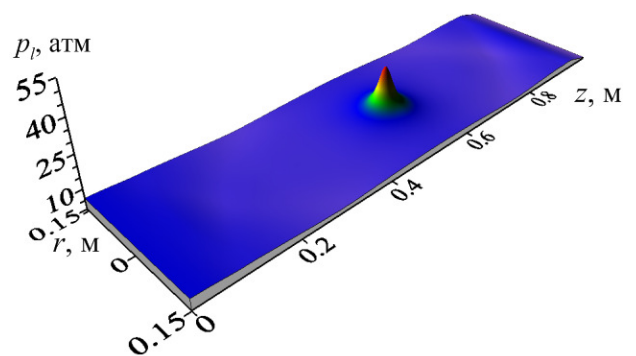
а) $\alpha_{g0} = 0.001$ б) $t = 0.514$ мсв) $\alpha_{g0} = 0.009$ г) $t = 0.617$ мсд) $\alpha_{g0} = 0.02$ е) $t = 0.721$ мс

Рис. 5.16 — Давление в жидкости на оси трубы (слева) и объёмные картины течения различные моменты времени (справа) при пространственной протяжённости завесы $\Delta z = 0.05$ м. Моменты времени: 1 — 0.243, 2 — 0.514, 3 — 0.617 и 4 — 0.721 мс.

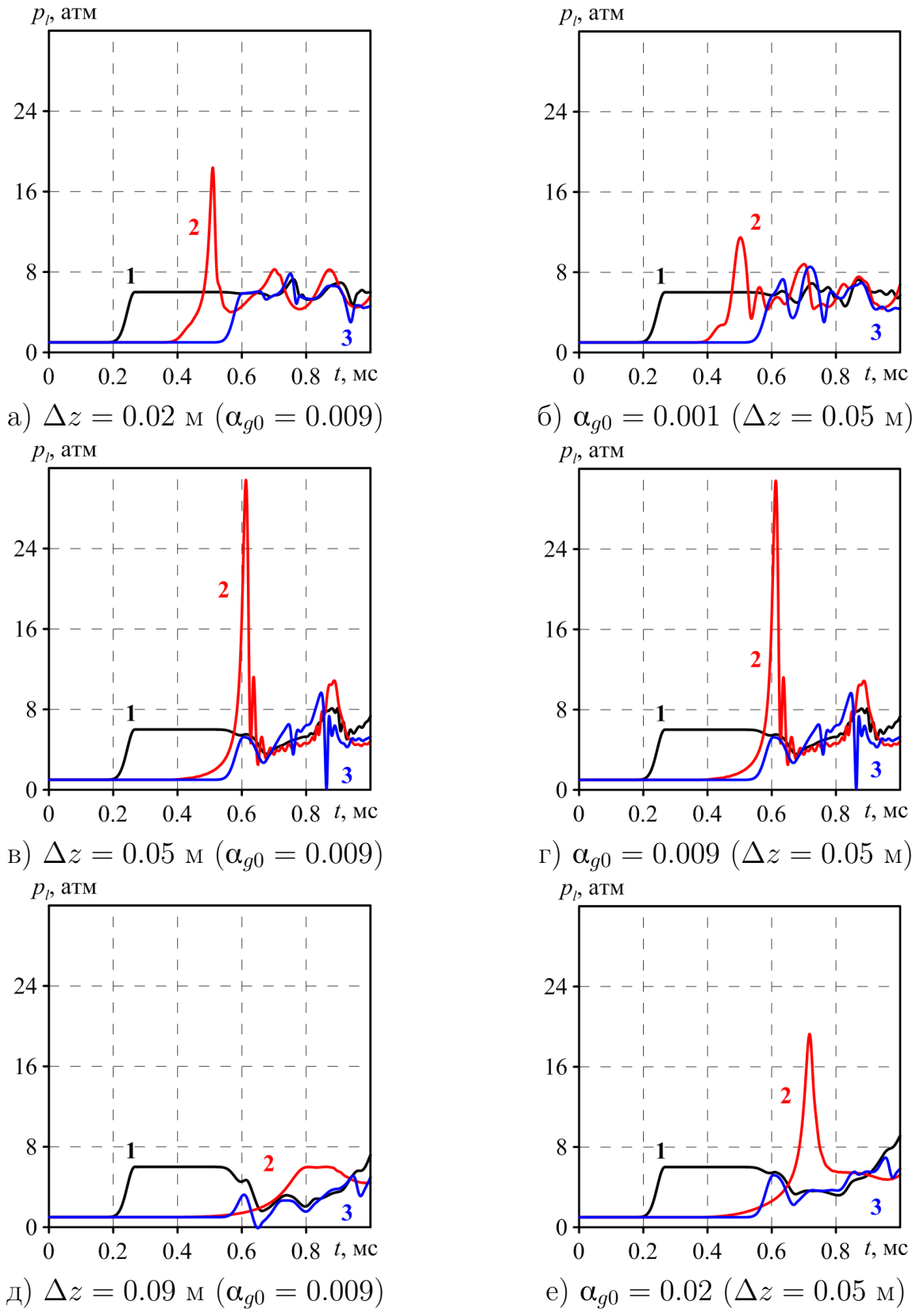


Рис. 5.17 — Показания датчиков D_1 (1), D_2 (2), D_3 (3), расположенных на оси трубы на расстояниях $l_{D_1} = 0.3$ м, $l_{D_3} = 0.6$ м от плоскости $z = 0$, D_2 — в центре пузырьковой области.

Расчётные осциллограммы расположенных на оси трубы датчиков можно увидеть на рис. 5.17 на с. 192. Слева расположены показания датчиков при различной протяжённости пузырьковой области Δz . Справа – результаты для различных начальных объёмных содержаний пузырьков α_{g0} . Анализируя рис. 5.14 (на с. 187), 5.15 (на с. 189), 5.16 (на с. 191) и сравнивая их с результатами на обсуждаемом рисунке, можно сделать вывод, что максимальное значение, регистрируемые в расчётной области, не всегда достигается в середине пузырькового кластера. В частности, сопоставляя рис. 5.15 и левую колонку рис. 5.17, отметим, что максимальное значение давления во всей расчётной области для случая $\Delta z = 0.02$ m близко по значению к показаниям датчика в центре пузырьковой области. Это связано с тем, что расстояние от границы кластера до его центра невелико, и волновой импульс проходит его за короткий временной промежуток, из-за чего происходит кумуляция именно в центре завесы. Для $\Delta z = 0.05$ m значение пиковой амплитуды давления во всей области почти вдвое превышает максимальное давление в центре пузырьковой завесы. При таком размере кластера прохождение волны от его границы к геометрическому центру требует больше времени, и этого достаточно, чтобы точка кумуляции сместилась в направлении движения волны сжатия. Для случая же $\Delta z = 0.09$ m датчик, расположенный в середине пузырьковой области, едва ли чувствует внешнее волновое воздействие. Пузырьковый кластер достаточно велик, чтобы эффективно демпфировать энергию волны, воздействующей на его границу, следовательно, он может служить эффективной защитой для предмета, помещённого в центр пузырьковой области. Сравнение рис. 5.16 и правой колонки рис. 5.17 формирует уверенность в том, что изменение объёмного содержания пузырьков α_{g0} не так существенно, как вариация геометрических размеров. Во всех трёх случаях датчик, расположенный в центре пузырьковой области, фиксирует увеличение первоначального импульса давления. Из представленных на рис. 5.17 осциллограмм можно сделать вывод, что случай на рис. 5.17 **а)** аналогичен рис. 5.17 **е)**, то есть в рамках значений параметров, принятых в данных расчётах, относительно небольшое объёмное содержание и малый радиус дают эффект, сравнимый с большим объёмным содержанием и большим радиусом. Для получения максимальной амплитуды набегающей волны следует использовать завесы протяжённостью $\Delta z = 0.05$ m и начальным объёмным содержанием $\alpha_{g0} = 0.009$.

5.4 Выводы по главе

Численно исследованы процессы распространения волн давления в форме «ступенька» в трубе с водой, содержащей соосные пузырьковые кластеры в виде полого или сплошного цилиндра. В представленных расчётах пузырьковый кластер в виде полого цилиндра рассматривался в двух случаях: расположенный на оси трубы без примыкания либо с примыканием к ее боковой поверхности. Дополнительные расчёты проводились для пузырькового кластера в виде сплошного цилиндра, не соприкасающегося с боковой поверхностью трубы. В результате численных расчётов и их анализа были сделаны следующие выводы и установлены закономерности:

Построена карта областей реализации максимального значения давления в расчётной области в координатах начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} и протяжённости завесы по координате z для сплошного цилиндрического кластера.

Проведено сравнение результатов численного расчёта по взаимодействию волны давления с пузырьковой областью в форме полого и сплошного цилиндров. **Показано**, что с расположением точки реализации максимального значения давления в расчётной области зависит от начальной амплитуды волны давления и выходит за пределы пузырькового кластера с её ростом. В выбранных условиях задачи предельное значение начального значения амплитуды для полого цилиндра на оси начальная амплитуда волны равна 0.5 МПа, для сплошного цилиндра – 1.2 МПа, а для полого цилиндра у внешней стенки трубы – 1.3 МПа.

Показано, что существует предельное значение амплитуды первоначальной волны давления для кластера в форме полого цилиндра, при которой амплитуда сфокусированной на оси волны превышает начальную более, чем десятикратно. Дальнейшее увеличение амплитуды первоначальной волны не приводит к росту результирующей амплитуды, а выводит процесс на стационарное значение.

Численно **установлено**, что взаимодействие импульса с пузырьковой областью в виде сплошного цилиндра приводит к формированию волны давления с амплитудой, в разы превышающей аналогичную для случая полого цилиндра.

Показано, что существует предельное значение ширины слоя «чистой» жидкости, окружающей пузырьковый кластер, увеличение которого не приводит к увеличению максимального значения амплитуды давления на оси трубы для кластера – полого цилиндра, не соприкасающегося с боковой поверхностью. Для рассмотренных расчётов это значение составило $R_c = 0.3$ м.

Заключение

1. Рассмотрено распространение слабых возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках помимо пара воды присутствует инертный газ (например, воздух), не участвующий в фазовых переходах.

– На основе аналитических и численных расчётов **построены** карты зон устойчивости пузырьковой парогазожидкостной смеси в зависимости от величины перегрева жидкости на плоскости объёмное содержание — радиус пузырьков. **Установлено**, что наличие нерастворимого газа в пузырьках существенно расширяет зону устойчивости в пространстве параметров, заданных значениями объёмного содержания и радиуса пузырьков на плоскости (a_0, α_g) . С ростом статического давления зона устойчивости системы с паровыми пузырьками расширяется, а зона устойчивости, где в пузырьках присутствует газ, при одних и тех же перегревах сужается.

– **Изучено** влияние перегрева жидкости на величину фазовой скорости и коэффициента затухания, когда система находится в устойчивом состоянии. **Установлено**, что для мелкодисперсной смеси (при $a_0 = 10^{-6}$ м) в зоне устойчивости перегрев несущественно влияет на изменение фазовой скорости и коэффициента затухания, что связано с достаточно высокой концентрацией инертного газа в пузырьках. Для приведённых в задаче параметров декремент затухания в устойчивой области меняется не более чем в два раза.

– Исследование гармонических волн в жидкости с достаточно крупными ($a_0 = 10^{-3}$ м) паровоздушными пузырьками **показало**, что при изменении равновесной температуры от 300 К до точки кипения 373 К вблизи низких частот ($\omega \leq \omega_R$, где $\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{\ell 0}^0}$ — собственная частота колебаний пузырьков или частота Миннаэрта) коэффициент затухания увеличивается в сто и более раз в зависимости от частоты возмущений. В случае же мелкодисперсных смесей ($a_0 = 10^{-6}$ м) изменение фазовой скорости и коэффициента затухания гораздо слабее: не более, чем вдвое. Этот эффект может быть объяснён снижением роли фазовых переходов для мелкодисперсных систем из-за роста массовой

концентрации газа в пузырьках, связанного с действием капиллярных сил на межфазной поверхности.

– **Установлено**, что в диапазоне частот $\omega_R < \omega < \omega_C$ ($\omega_C = \omega_R \sqrt{1 + \rho_{\ell 0}^0 \alpha_{g0} C_\ell^2 / \gamma p_0}$) фазовая скорость растёт и достигает своего максимума при ω_C . Однако в данном диапазоне коэффициент затухания принимает аномально высокие значения, следовательно, этот интервал соответствует полосе непропускания.

– Исследование гармонических волн в жидкости с паровоздушными пузырьками размера $a_0 = 10^{-6}$ м **показало**, что при изменении начального объёмного газосодержания α_{g0} от 10^{-4} до 10^{-1} при равновесной температуре $T_0 = 373$ К, вблизи низких частот ($\omega \leq \omega_R$) коэффициент затухания меняется незначительно (в зависимости от частоты возмущений). **Установлено**, что с уменьшением равновесного радиуса пузырьков a_0 в диапазоне от $a_0 = 10^{-3}$ м до $a_0 = 10^{-6}$ м имеет место некоторое увеличение фазовой скорости в низкочастотной области ($\omega \ll \omega_R$), а коэффициент затухания δ при этом может изменяться на несколько порядков. Роль фазовых переходов значительно снижается.

2. Рассмотрено взаимодействие гармонических волн с границей раздела между «чистой» жидкостью и жидкостью с пузырьками парогазовой смеси при «косом» их падении.

– **Изучены** особенности отражения и преломления гармонических волн на границе раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками парогазовой смеси при «косом» их падении. Для начальных температур 300 К и 353 К **показано**, что при падении акустической волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела двух сред для низкочастотных волн ($\omega \leq \omega_R$) при углах, больших критического угла падения, она полностью отражается от границы раздела. Например, при углах падения, превышающих значение $\Theta^{(0)} = 10^\circ$, угол преломления асимптотически приближается к значению $\Theta^{(s)} = 90^\circ$. **Установлено**, что в данном случае пузырьковый слой в «чистой» жидкости обладает свойствами подводного звукового канала.

– **Показано**, что для начальной температуры среды $T_0 = 373$ К угол отражения достигает максимальной величины $\Theta^{(s)} = 70^\circ$. Следовательно, для системы, находящейся при температуре 373 К, формально

не происходит полного внутреннего отражения. Однако в этом случае из-за большого значения коэффициента затухания и малого значения фазовой скорости (что отражается в значении мнимой части $n_y^{(s)}$ (или $\cos \Theta^{(s)}$)) проникающая в «чистую» жидкость волна полностью затухает вблизи границы раздела сред. Таким образом, фактически реализуется полное внутреннее отражение.

– **Показано**, что при падении волны со стороны «чистой» жидкости на границу раздела двух сред, она при любом угле падения проходит в пузырьковую жидкость.

3. Исследовано распространение волны давления вида «ступенька» в цилиндрической трубе с водой, содержащей сферический пузырьковый кластер. В численных расчётах кластер располагался на оси трубы у торцевой стенки и в центре расчётной области. **Установлены** следующие закономерности:

– Для обоих случаев расположения сферического пузырькового кластера **построены** карты областей реализации максимального значения давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} и протяжённости области по координате z .

– **Обнаружено**, что при воздействии волны вида «ступенька» на сферический пузырьковый кластер в жидкости образуется уединённая волна, чья амплитуда может превышать амплитуду первоначальной волны в десятки раз.

– **Установлено**, что сферический кластер у торцевой стенки «генерирует» уединённую волну большей амплитуды, чем кластер в центре расчётной области. Возникновение эффекта обусловлено наличием торцевой стенки, способствующей дополнительной фокусировке волны давления в пузырьковом кластере.

– **Установлено**, что при воздействии волны давления на торцевую стенку трубы, если сферический кластер прилегает к ней, наибольшая амплитуда волны реализуется, когда радиус кластера составляет половину радиуса канала. Это воздействие может быть в десятки раз сильнее, чем в отсутствие пузырькового кластера как такового.

- Для рассматриваемых параметров **показано**, что увеличение амплитуды первоначальной волны давления приводит к нелинейному увеличению максимального значения давления в расчётной области.
4. Исследована динамика волн давления вида «ступенька» в канале, заполненном водой и содержащем соосный пузырьковый кластер в виде полого или сплошного цилиндров. В расчётах пузырьковый кластер в виде полого цилиндра был либо расположен на оси трубы без соприкосновений с её стенками, либо прилегал к боковой поверхности трубы. Случай сплошного цилиндра, не соприкасающегося со стенками трубы, был рассмотрен для сравнения характеристик и особенностей течения.
- **Построена** карта областей реализации максимального значения давления в расчётной области в зависимости от начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} и протяжённости области по координате z для сплошного цилиндрического пузырькового кластера.
 - **Проведено сравнение** результатов численного расчёта взаимодействия волны давления с пузырьковой областью в случае кластеров в форме полого и сплошного цилиндров. **Показано**, что расположение точки фиксации максимального значения давления в расчётной области зависит от начальной амплитуды волны давления и выходит за пределы пузырькового кластера при увеличении амплитуды. В рассмотренных задачах наибольшее значение скачка амплитуды для полого цилиндра, примыкающего к внешней стенке канала, равно 0.82 МПа, для полого цилиндра на оси канала – 3.6 МПа, для сплошного цилиндра – 8.7 МПа.
 - **Показано**, что существует предельное значение амплитуды первоначальной волны давления в случаях полого и сплошного цилиндрического кластера, не достигая которого возможно увеличить амплитуду результирующей волны, сфокусированной на оси канала, более, чем в десять раз. Дальнейшее увеличение амплитуды первоначальной волны не приводит к росту результирующей амплитуды, а выводит процесс на стационарное значение.
 - Численно **установлено**, что для выбранных параметров расчёта взаимодействие импульса с пузырьковой областью в виде сплошного

цилиндра приводит к формированию волны давления с амплитудой, более чем в пять раз превышающей аналогичную для полого цилиндра.

Список литературы

1. Ackeret J. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Hohlraumbildung (Kavitation) im Wasser // Technische Mechanik und Thermodynamik. 1930. № 1. С. 1–22. URL: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02640226.pdf>.
2. Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. Low-intensity pressure waves in a stratified bubbly liquid // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Т. 1400, № 7. с. 077045. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1400/7/077045>.
3. Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. Acoustic waves propagation in heated water with vapor bubbles // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2020. Т. 13, № 1. С. 28–38. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42661915>.
4. Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. Focusing of Compression Waves in a Pipe Containing Annular Bubble Cluster // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Т. 44, № 5. С. 1564–1570. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54293567>.
5. Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. Focusing of compression waves in a pipe containing a cylindrical bubble cluster // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Т. 45, № 5. с. in pressed.
6. Agisheva U.O., Galimzyanov M.N., Vdovenko I.I. Acoustic properties of overheated liquid with gas nuclei during temperature increasing // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Т. 1268, № 1. с. 012014. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41808953>.
7. Agisheva U.O., Vdovenko I.I., Galimzyanov M.N. Acoustic waves in a superheated liquid with a gas nuclei // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Т. 1158, № 2. с. 022007. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38724577>.
8. Agisheva U.O., Vdovenko I.I., Galimzyanov M.N. Evolution of pressure waves acting on a bubble liquid through adjacent boundaries // Journal of Physics:

- Conference Series. 2019. T. 1158, № 2. c. 022008. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38724709>.
9. Ahmad T.J., Noui-Mehidi M., Arsalan M. Performance analysis of downhole acoustic communication in multiphase flow // *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 2014. C. 3909–3913. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7049084>.
 10. Ando K. Effects of polydispersity in bubbly flows. phdthesis: California Institute of Technology. 2010. URL: <https://thesis.library.caltech.edu/5859/1/AndoCIT2010.pdf>.
 11. Ando K., Colonius T., Brennen C. Numerical simulation of shockpropagation in a polydisperse bubbly liquid // *International Journal of Multiphase Flow*. 2011. T. 37, № 6. C. 596–608. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932211000723>.
 12. Ando K., Sanada T., Inaba K. [и др.]. Shock propagation through a bubbly liquid in a deformable tube // *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. T. 671. C. 339–363. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112010005707>.
 13. Arai S., Kanagawa T., Ayukai T. Nonlinear pressure waves in bubbly flows with drag force: theoretical and numerical comparison of acoustic and thermal and drag force dissipations // *Journal of the Physical Society of Japan*. 2022. T. 91. c. 043401. URL: <https://journals.jps.jp/doi/10.7566/JPSJ.91.043401>.
 14. Beylich A.E., Gülhan A. On the structure of nonlinear waves in liquids with gas bubbles // *Physics of Fluids*. 1990. T. 2, № 8. C. 1412–1428. URL: <https://doi.org/10.1063/1.857590>.
 15. Campbell I.J., Pitcher A.S. Shock waves in a liquid containing gas bubbles // *Proceedings of the Royal Society A*. 1958. T. 243. C. 534–545. URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0018>.
 16. Doc J.-B., Conoir J.-M., Marchiano R. [и др.]. Nonlinear acoustic propagation in bubbly liquids: Multiple scattering, softening and hardening phenomena // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2016. T. 139, № 4. C. 1703–1712. URL: <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.4945452>.

17. Drumheller D.S. A theory of bubbly liquids // The Journal of the Acoustical Society of America. 1979. T. 66, № 1. С. 197–208. URL: <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.383071>.
18. Duro V., Rajaona D.R., Decultot D. [и др.]. Experimental study of sound propagation through bubbly water: comparison with optical measurements // IEEE Journal of Oceanic Engineering. 2011. T. 36, № 1. С. 114–125. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5713817>.
19. Foldy L.L. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers // Physical Review. 1945. T. 67, № 3–4. С. 107–119. URL: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.67.107>.
20. Fox F.E., Curley S.R., Larson G.S. Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles // The Journal of the Acoustical Society of America. 1955. T. 27, № 3. С. 534–539. URL: <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1907955>.
21. Fuster D., Conoir J.M., Colonius T. Effect of direct bubble-bubble interactions on linear-wave propagation in bubbly liquids // Physical Review E. 2014. T. 90, № 6. c. 063010. URL: <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/physreve.90.063010>.
22. Fuster D., Montel F. Mass transfer effects on linear wave propagation in diluted bubbly liquids // Journal of Fluid Mechanics. 2015. T. 779. С. 598–621. URL: <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.436>.
23. Galimzyanov M.N., Agisheva U.O. Acoustic properties of overheated liquid with gas nuclei during temperature increasing // Journal of Physics: Conference Series. 2019. T. 1400, № 7. c. 077044. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1400/7/077044>.
24. Galimzyanov M.N., Agisheva U.O. Wave equation for bubble liquid in Lagrangian variables // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. T. 40, № 11. С. 1922–1928. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42777948>.

25. Galimzyanov M.N., Agisheva U.O. Propagation of a Pressure Wave in a Tube Filled with Liquid Containing of a Bubble Cluster in the Form of a Hollow Cylinder // *Fluid Dynamics*. 2023. T. 58, № 8. C. 1495–1501. URL: <https://link.springer.com/journal/10697/volumes-and-issues/58-7>.
26. Gordo P.R., Pickering A. Ultrasonic waves in bubbly liquids: an analytic approach // *Mathematics*. 2021. T. 9, № 11. C. 1–14. URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/11/1309>.
27. Grandjean H., Jacques N., Zaleski S. Shock propagation in liquids containing bubbly clusters: A continuum approach // *Journal of Fluid Mechanics*. 2012. T. 701. C. 304–332. URL: <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.159>.
28. Kagami S., Kanagawa T. Weakly nonlinear propagation of focused ultrasound in bubbly liquids with a thermal effect: Derivation of two cases of Khokolov–Zabolotskaya–Kuznetsov equations // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2022. c. 105911. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350417722000049>.
29. Kameda M., Matsumoto Y. Shock waves in a liquid containing small gas bubbles // *Physics of Fluids*. 1996. T. 8, № 2. C. 322–335. URL: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.868788>.
30. Kameda M., Shimaura N., Higashino F. Shock waves in a uniform bubbly flow // *Physics of Fluids*. 1998. T. 10, № 10. C. 2661–2668. URL: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.869779>.
31. Kanagawa T., Ayukai T., Kawame T. [и др.]. Weakly nonlinear theory on pressure waves in bubbly liquids with a weak polydispersity // *International Journal of Multiphase Flow*. 2021. T. 142. c. 103622. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932221000707>.
32. Kanagawa T., Kamei T. Effect of drag force and translation of bubbles on nonlinear pressure waves with a short wavelength in bubbly flows // *Physics of Fluids*. 2021. T. 33. c. 053314. URL: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/5.0042625>.

33. Kanagawa T., Kamei T. Thermal effect inside bubbles for weakly nonlinear pressure waves in bubbly liquids: Theory on shortwaves // *Physics of Fluids*. 2021. T. 33, № 6. с. 063319. URL: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/5.0045145>.
34. Kudryashov N.A., Ryabov P.N., Sinelshchikov D.I. Nonlinear waves in media with fifth order dispersion // *Physics Letters A*. 2011. T. 375, № 20. С. 2051–2055. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17005905>.
35. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I. Nonlinear evolution equations for describing waves in bubbly liquids with viscosity and heat transfer consideration // *Applied Mathematics and Computation*. 2010. T. 217, № 1. С. 414–421. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15329084>.
36. Lebedeva N.A., Osipov A.N., Sazhin S.S. A combined fully lagrangian approach to mesh-free modelling of transient two-phase flows // *Atomization and Sprays*. 2013. T. 23, № 1. С. 47–69. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20429856>.
37. Lee K.M., Hinojosa K.T., Wochner M.S. [и др.]. Sound propagation in water containing large tethered spherical encapsulated gas bubbles with resonance frequencies in the 50 Hz to 100 Hz range // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2011. T. 130, № 5. С. 3325–3332. URL: <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.3626160>.
38. Lee K.M., Wilson P.S., Wochner M.S. Attenuation of low-frequency underwater sound using an array of air-filled balloons and comparison to effective medium theory // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2017. T. 142, № 6. С. 3443–3449. URL: <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.5014052>.
39. Leroy V., Strybulevych A., Lanoy M. [и др.]. Superabsorption of acoustic waves with bubble metascreens // *Physical Review B*. 2015. T. 91, № 2. с. 020301. URL: <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevB.91.020301>.
40. Leroy V., Strybulevych A., Lanoy M. [и др.]. Acoustics of bubble arrays: role played by the dipole response of bubbles // *Fluids*. 2018. T. 3, № 4. С. 95–105. URL: <https://www.mdpi.com/2311-5521/3/4/95>.

41. Leroy V., Strybulevych A., Page J.H. [и др.]. Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments // The Journal of the Acoustical Society of America. 2008. Т. 123, № 4. С. 1931–1940. URL: <https://asa.scitation.org/doi/full/10.1121/1.2875420>.
42. Leroy V., Strybulevych A., Page J.H. [и др.]. Influence of positional correlations on the propagation of waves in a complex medium with polydisperse resonant scatterers // Physical Review E. 2011. Т. 83, № 4. с. 046605. URL: <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.83.046605>.
43. Leroy V., Strybulevych A., Scanlon M.G. [и др.]. Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles // The European Physical Journal E. 2009. № 29. С. 123–130. URL: <https://link.springer.com/article/10.1140/epje/i2009-10457-y>.
44. Lezhnin S.I., Alekseev M.V., Vozhakov I.S. [и др.]. Simulating gas (vapor) outflow into a liquid // Journal of Physics: Conference Series. 2018. № 1105. с. 012081. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38639157>.
45. Mahmood S., Kwak H.-Y. Pressure waves in bubbly liquids // Journal of Mechanical Science and Technology. 2016. Т. 30, № 9. С. 3935–3943. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12206-016-0805-2>.
46. Martin C.S., Padmanabhan M., Wiggert B.G. Pressure waves propagation in two-phase bubbly air–water mixtures // Bull. Dir. Etud. Rech., Ser. A / International Nuclear Information System. IAEA, 1977. С. 47–66. URL: https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:9401840.
47. Matsumoto Y., Kameda M. Pressure wave phenomena in bubbly liquid // Nuclear Engineering and Design. 1993. Т. 141, № 1. С. 123–134. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002954939390097S>.
48. Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G., Shreiber I.R. [и др.]. The wave dynamics of a vapour-liquid medium // International Journal of Multiphase Flow. 1988. Т. 14, № 6. С. 655–677. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=31144320>.
49. Noordzij L., Wijngaarden L. van. Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble/liquid mixtures // Journal of Fluid

- Mechanics. 1974. T. 66, № 1. C. 115–143. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112074000103>.
50. Pham K., Mercier J.-F., Fuster D. [и др.]. Scattering of acoustic waves by a nonlinear resonant bubbly screen // *Journal of Fluid Mechanics*. 2020. T. 906. c. A19. URL: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.799>.
 51. Rath H.J. Unsteady pressure waves and shock waves in elastic tubes containing bubbly air–water mixtures // *Acta Mechanica*. 1981. T. 38, № 1–2. C. 1–17. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01351459>.
 52. Seung S., Kwak H.-Y. Shock wave propagation in bubbly liquids at small gas volume fractions // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2017. T. 31, № 3. C. 1223–1231. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12206-017-0221-2>.
 53. Silberman E. Sound velocity and attenuation in bubbly mixtures measured in standing wave tubes // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1957. T. 29, № 8. C. 925–933. URL: <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1909101>.
 54. Strasberg M. Gas bubbles as sources of sound in liquids // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. T. 28, № 1. C. 20–26. URL: <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1908212>.
 55. Tan M.J., Bankoff S.G. Propagation of pressure waves in bubbly mixtures // *Physics of Fluids*. 1984. T. 27, № 6. C. 1362–1369. URL: <https://doi.org/10.1063/1.864778>.
 56. Tan M.J., Bankoff S.G. Strong shock waves propagating through a bubbly mixture // *Experiments in Fluids*. 1984. T. 2, № 3. C. 159–165. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00296434>.
 57. Temkin S. Attenuation and dispersion of sound in dilute suspensions of spherical particles // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2000. T. 108, № 1. C. 126–146. URL: <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.429450>.
 58. Vanhillea C., Campos-Pozuelo C. Simulation of nonlinear ultrasonic pulses propagating through bubbly layers in a liquid: filtering and characterization //

- Journal of Computational Acoustics. 2010. T. 21, № 1. C. 50–52. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350417713001399>.
59. Vanhillea C., Campos-Pozuelo C. An acoustic switch // Ultrasonics Sonochemistry. 2014. T. 18, № 1. C. 47–68. URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218396X1000405X>.
60. Vanhillea C., Campos-Pozuelo C. Ultrasounds in bubbly liquids: unidirectional propagation and switch // Physics Procedia. 2015. T. 63. C. 163–166. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S187538921500098X>.
61. Watanabe M., Prosperetti A. Shock waves in dilute bubbly liquids // Journal of Fluid Mechanics. 1994. T. 274. C. 349–381. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112094002156>.
62. Wijngaarden L. van. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // Journal of Fluid Mechanics. 1968. T. 33, № 3. C. 465–473. URL: <https://click.endnote.com/viewer?doi=10.1017/S002211206800145X>.
63. Wilson P.S., Roy R.A., Carey W.M. Phase speed and attenuation in bubbly liquids inferred from impedance measurements near the individual bubble resonance frequency // The Journal of the Acoustical Society of America. 2005. T. 117, № 4. C. 1895–1910. URL: <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1859091>.
64. Yatabe T., Kanagawa T., Ayukai T. Theoretical elucidation of effect of drag force and translation of bubble on weakly nonlinear pressure waves in bubbly flows // Physics of Fluids. 2021. T. 33, № 3. c. 033315. URL: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/5.0033614>.
65. Zhang Y., Jiang Z., Yuan J. [и др.]. Influences of bubble size distribution on propagation of acoustic waves in dilute polydisperse bubbly liquids // Journal of Hydrodynamics. 2019. T. 31, № 1. C. 50–57. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s42241-019-0016-2>.
66. Авдеев К.А., Аксенов В.С., Борисов А.А. [и др.]. Ударные волны в воде с пузырьками реакционноспособного газа: расчет // Горение и взрыв. 2016. Т. 9, № 4. С. 47–63. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27470907>.

67. Авдеев К.А., Аксенов В.С., Борисов А.А. [и др.]. Расчет распространения ударной волны в воде с пузырьками реакционноспособного газа // Химическая физика. 2017. Т. 36, № 4. С. 20–31. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29405172>.
68. Авдеев К.А., Аксенов В.С., Борисов А.А. [и др.]. Численное моделирование воздействия ударной волны на пузырьковую среду // Горение и взрыв. 2015. Т. 8, № 2. С. 57–67. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25727509>.
69. Авдеев К.А., Аксенов В.С., Борисов А.А. [и др.]. Численное моделирование передачи импульса от ударной волны к пузырьковой среде // Горение и взрыв. 2015. Т. 8, № 2. С. 45–56. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25727508>.
70. Авдеев К.А., Аксенов В.С., Борисов А.А. [и др.]. Численное моделирование передачи импульса от ударной волны к пузырьковой среде // Химическая физика. 2015. Т. 34, № 5. С. 34–46. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23335415>.
71. Агишева У.О., Болотнова Р.Х., Бузина В.А. [и др.]. Параметрический анализ режимов ударно-волнового воздействия на газожидкостные среды // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2013. № 2. С. 15–28. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=19116721>.
72. Агишева У.О., Вдовенко И.И., Галимзянов М.Н. Влияние диффузии на акустические свойства пузырьковой жидкости // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 3. С. 165–175. URL: <http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.023>.
73. Агишева У.О., Галимзянов М.Н. Особенности устойчивости и акустических свойств перегретой жидкости с газовыми зародышами // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1-2. с. 8. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44931233>.
74. Агишева У.О., Галимзянов М.Н. Волны давления в трубе, заполненной жидкостью, содержащей пузырьковую зону в виде цилиндра // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 3. С. 207–209. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=59555882>.

75. Азаматов А.Ш., Шагапов В.Ш. Распространение малых возмущений в парогазокапельной среде // Акустический журнал. 1981. Т. 27, № 2. С. 161–169.
76. Айдагулов Р.Р., Хабеев Н.С., Шагапов В.Ш. Структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена // Прикладная математика и техническая физика. 1977. № 3. С. 67–74. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/c7b/c7b8a3994e4abe1d0dbc613acd021c18.pdf>.
77. Акуличев В.А., Безответных В.В., Буренин А.В. [и др.]. Термометрия шельфовых зон океана акустическими методами // Доклады академии наук. 2006. Т. 409, № 4. С. 543–546. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9282251>.
78. Акуличев В.А., Буланов В.А. Об аномалиях акустических характеристик полидисперсных жидкостей с газовыми и паровыми пузырьками // Доклады академии наук. 2013. Т. 479, № 2. С. 195–199. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32619158>.
79. Акуличев В.А., Буланов В.А. Акустическая нелинейность, поглощение и рассеяние звука в морской воде, насыщенной пузырьками // Доклады академии наук. 2018. Т. 479, № 2. С. 195–199. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32619158>.
80. Акуличев В.А., Буланов В.А., Бугаева Л.К. Влияние пузырьковых облаков в приповерхностном слое океана на затухание звука и структуру акустического поля // Подводные исследования и робототехника. 2019. № 2(28). С. 62–69. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38254868>.
81. Акуличев В.А., Буланов В.А., Бугаева Л.К. Особенности распространения звука при наличии пузырьковых облаков в возмущенном приповерхностном слое океана // Доклады академии наук. 2019. Т. 487, № 6. С. 691–695. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39541203>.
82. Акуличев В.А., Буланов В.А., Бугаева Л.К. Влияние пузырьковых облаков в возмущенном приповерхностном слое океана на распространение звука // Ученые записки физического факультета Московского университета.

2020. № 1. с. 2010107. URL: <http://uzmu.phys.msu.ru/file/2020/1/2010107.pdf>.
83. Акуличев В.А., Буланов В.А., Коросков И.В. [и др.]. Мониторинг экологического состояния акваторий с применением акустического зондирования // Подводные исследования и робототехника. 2012. № 2(14). С. 42–54. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20872452>.
84. Акуличев В.А., Буланов В.А., Корсков И.В. [и др.]. Акустическое зондирование верхнего слоя морской воды в различных районах океана // Подводные исследования и робототехника. 2006. № 2. С. 59–71. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11687267>.
85. Алексеев М.В., Вожаков И.С., Лежнин С.И. [и др.]. Особенности эволюции волн давления, генерируемых вскипающим теплоносителем // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 6. С. 905–914. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27537740>.
86. Алексеев М.В., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А. Формирование и эволюция волн при торцевом разрыве трубопровода со вскипающим теплоносителем // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1, № 2. С. 75–84. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23639952>.
87. Алексеев М.В., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А. [и др.]. Генерация ударноволновых и вихревых структур при истечении струи вскипающей воды // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 6. С. 795–798. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22599881>.
88. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1991. 376 с.
89. Богуславский Ю.Я., Григорьев С.Б. Ударная волна в жидкости с пузырьками // Акустический журнал. 1977. Т. 23, № 4. С. 636–639. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1977_4_636-639.pdf.
90. Болотнова Р.Х., Бузина В.А., Галимзянов М.Н. [и др.]. Гидродинамические особенности процессов истечения вскипающей жидкости // Теплофизика

- и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 6. С. 719–730. URL: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/771/771227b1ee44e66c6d97c09317d651ad.pdf>.
91. Болотнова Р.Х., Галимзянов М.Н., У.О. Агишева. Моделирование процессов взаимодействия сильных ударных волн в газо-жидкостных смесях // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2011. № 2. С. 3–14. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=16863578>.
92. Борисов А.А., Гельфанд Б.Е., Нигматулин Р.И. [и др.]. Усиление ударных волн в жидкостях с пузырьками пара и растворяющегося газа // Доклады академии наук СССР. 1982. Т. 263, № 3. С. 594–598. URL: <http://www.mathnet.ru/links/e2d52b54dde910da1d26a15a1ebafc2f/dan45179.pdf>.
93. Буланов В.А., Корсков И.В., Попов П.Н. Измерения нелинейного акустического параметра морской воды с применением устройства, использующего отраженные импульсы // Приборы и техника эксперимента. 2017. № 3. С. 114–118. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29385312>.
94. Буланов В.А., Корсков И.В., Соседко Е.В. О применении нелинейного рассеяния звука для оценки структуры и размерного состава газовых факелов в море // Подводные исследования и робототехника. 2020. № 4(34). С. 45–52. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44530096>.
95. Вановский В.В., Петров А.Г. Колебания газового пузырька в жидкости при резонансе частот радиальной и произвольной осесимметричной моды колебаний 2:1 // Доклады академии наук. 2011. Т. 437, № 3. С. 331–335. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16311688>.
96. Вановский В.В., Петров А.Г. Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости // Доклады академии наук. 2012. Т. 444, № 4. С. 385–389. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17745903>.
97. Вановский В.В., Петров А.Г. Условие резонансного дробления газового пузырька в акустической волне в жидкости // Доклады академии наук. 2016. Т. 469, № 2. С. 162–166. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26345640>.

98. Вановский В.В., Петров А.Г. Пружинная аналогия нелинейных колебаний пузырька в жидкости при резонансе // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, № 4. С. 445–461. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29823143>.
99. Вараксин А.Ю. Гидродинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения (Обзор) // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 3. С. 421–455. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=19002180>.
100. Вараксин А.Ю. Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследований (Обзор) // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58, № 4. С. 646–669. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=43824024>.
101. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2-е изд. М.: Наука, 1972. 720 с.
102. Вахитова Н.К., Шагапов В.Ш. О распространении малых возмущений в парожидкостных пузырьковых средах // Прикладная математика и техническая физика. 1984. № 5. С. 34–43. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/71a/71a1de7a615a2b166abb82f311fe4a3c.pdf>.
103. Воронин Д.В., Санкин Г.Н., Тесленко В.С. [и др.]. Вторичные акустические волны в полидисперсной пузырьковой среде // Прикладная математика и техническая физика. 2003. Т. 44, № 1. С. 22–32. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17274746>.
104. Гаврилюк С.Л., Филько С.А. Ударные волны в полидисперсных пузырьковых средах с диссипацией // Прикладная математика и техническая физика. 1991. № 5. С. 26–34. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/ae8/ae8a11ca02c52ac8a9f003311402f337.pdf>.
105. Галимзянов М.Н. Математическое моделирование образования газовых гидратов // Вестник Башкирского университета. 2010. Т. 15, № 3. С. 570–574. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15244161>.
106. Галимзянов М.Н. Распространение волн давления в пузырьковых зонах конечных размеров // Известия Саратовского университета. Новая серия.

- Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, № 4. С. 27–35. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15515157>.
107. Галимзянов М.Н. Распространение волн сжатия в пузырьковых зонах конечных размеров // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 2. С. 57–66. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15166903>.
108. Галимзянов М.Н. Волны давления в трубе, заполненной жидкостью при наличии в ней пузырьковой области в форме тора // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 3-4. С. 112–120. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49949991>.
109. Галимзянов М.Н. Динамика импульсного сигнала в цилиндрическом канале с жидкостью, содержащем сферический пузырьковый кластер // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27, № 2. С. 275–286. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48910707>.
110. Галимзянов М.Н., Агишева У.О. Волновое уравнение для пузырьковой жидкости в переменных Лагранжа // Вестник Башкирского университета. 2019. Т. 24, № 2. С. 278–284. URL: <http://bulletin-bsu.com/archive/2019/2/4/>.
111. Галимзянов М.Н., Агишева У.О. Распространение волны давления в канале, заполненном жидкостью при наличии в ней пузырькового кластера тороидальной формы // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23, № 6. С. 39–48. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50272272>.
112. Галимзянов М.Н., Болотнова Р.Х., Агишева У.О. [и др.]. Гидродинамика ударных волн и вскипающих потоков пузырьковых жидкостях // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 3, № 4. С. 700–701. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21121179>.
113. Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Агишева У.О. О фокусировке волн давления в тороидальном пузырьковом кластере // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27, № 1. С. 9–17. URL: <http://bulletin-bsu.com/archive/2022/1/2/>.

114. Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю. Взаимодействие волны давления в цилиндрическом канале со сферическим пузырьковым кластером // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 2. С. 96–104. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50441318>.
115. Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2002. № 2. С. 139–147. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39274845>.
116. Галимзянов М.Н., Лепихин С.А., И.А. Чиглинцев. Распространение малых возмущений в пузырьковой жидкости, содержащей гидратообразующий газ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 2. С. 130–138. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17790060>.
117. Гасенко В.Г. Волновые и гидродинамические процессы в энергетических установках, включая топливные элементы. phdthesis: Дисс... д-ра физ.-мат. наук. 2011. URL: <https://dlib.rsl.ru/01005012301>.
118. Гасенко В.Г., Горелик Р.С., Накоряков В.Е. [и др.]. Предвестники в газожидкостных смесях // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. 2013. Т. 98, № 3–4. С. 221–227. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20868878>.
119. Гасенко В.Г., Горелик Р.С., Тимкин Л.С. Резонансные предвестники в газожидкостных смесях // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. 2014. № 1(14). С. 152–158. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26397556>.
120. Гасенко В.Г., Демидов Г.В., Ильин В.П. [и др.]. Моделирование волновых процессов в парожидкостной среде // Сибирский журнал вычислительной математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 261–270. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17871955>.
121. Гасенко В.Г., Накоряков В.Е., Оренбах З.М. [и др.]. Распространение возмущений в жидкости с пузырьками пара // Прикладная механика и тех-

- ническая физика. 1983. № 3. С. 86–90. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/fe6/fe630e1c96c326e2c0f2a9e34ef6c0fa.pdf>.
122. Гасенко В.Г., Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р. Двухволновая модель распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа // Прикладная механика и техническая физика. 1979. № 6. С. 119–127. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/ec3/ec35974d044427f19c90df0f8402b8f9.pdf>.
123. Гасенко В.Г., Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р. Усиление ударной волны в жидкости с пузырьками газа // Доклады академии наук СССР. 1980. Т. 235, № 6. С. 1330–1332. URL: <http://www.mathnet.ru/links/6b86efafff10bf86a403b35c84b3b1e5/dan43829.pdf>.
124. Гафиятов Р.Н., Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Распространение акустических волн в двухфракционных пузырьковых жидкостях с учетом фазовых превращений в каждой из фракций // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2013. Т. 3. С. 92–99. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19541533>.
125. Гельфанд Б.Е., Губанов А.В., Губин С.А. [и др.]. Затухание ударных волн в двухфазной среде жидкость–пузырьки газа // Известия академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 1. С. 173–176.
126. Гельфанд Б.Е., Губанов А.В., Тимофеев Е.И. Преломление плоских ударных волн при взаимодействии со слоем пузырьки газа жидкость // Известия академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 2. С. 173–176. URL: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01090365.pdf>.
127. Гельфанд Б.Е., Губанов А.В., Тимофеев Е.И. Расчет параметров нестационарных ударных волн в двухфазной среде // Физика горения и взрыва. 1981. № 5. С. 139–143. URL: https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=151908&ARTICLE_ID=152098.
128. Гельфанд Б.Е., Губанов А.В., Тимофеев Е.И. Взаимодействие ударных волн с защитными экранами в жидкости и двухфазной среде // Прикладная механика и техническая физика. 1982. № 2. С. 118–123. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/1d9/1d936bcb30445364aaa46e63830cc4cd.pdf>.

129. Гельфанд Б.Е., Губанов А.В., Тимофеев Е.И. Об отражении ударных волн на жесткой стенке в двухфазных средах с переменной массовой концентрацией газа // Известия академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 2. С. 159–162. URL: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01314511.pdf>.
130. Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Когарко Б.С. [и др.]. Исследование волн сжатия в смеси жидкости с пузырьками газа // Доклады академии наук СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1043–1046. URL: <http://www.mathnet.ru/links/b7d64f201b4146962d187cf74d9f0bfd/dan37985.pdf>.
131. Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Когарко С.М. [и др.]. Взаимодействие слабых сферических ударных волн с пузырьковым экраном // Известия академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 2. С. 85–89.
132. Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Когарко С.М. [и др.]. Прохождение ударных волн через границу раздела в двухфазных газожидкостных средах // Известия академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1971. № 6. С. 58–65.
133. Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Когарко С.М. [и др.]. Определение скорости распространения низкочастотных звуковых возмущений в смеси жидкости с пузырьками газа // Теплофизика высоких температур. 1975. Т. 13, № 4. С. 816–817. URL: <http://www.mathnet.ru/links/f22aa29ef7e83aa52b2e684b0962a4bd/tvt8996.pdf>.
134. Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Тимофеев Е.И. Отражение плоской ударных волн от твердой стенки в системе пузырьки газа-жидкость // Известия академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 2. С. 174–178. URL: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01091684.pdf>.
135. Гельфанд Б.Е., Степанов В.В., Тимофеев Е.И. [и др.]. Усиление ударных волн в неравновесной системе жидкость -пузырьки растворяющегося газа // Доклады академии наук СССР. 1978. Т. 239, № 1. С. 71–73. URL: <http://www.mathnet.ru/links/b662226d2d4bfa3c3e4e7db646685605/dan41573.pdf>.
136. Гельфанд Б.Е., Тимофеев Е.И., Степанов В.В. О структуре слабых ударных волн в системе пузырьки газа-жидкость // Теплофизика высоких тем-

- ператур. 1978. Т. 16, № 3. С. 569–575. URL: <https://energy.ihed.ras.ru/arhive/article/9134>.
137. Гиббс Дж.В. Термодинамические работы. М.: Гостехиздат, 1950. 143 с.
138. Гималтдинов И.К. Двумерные волны в пузырьковой жидкости. phdthesis: Дисс... д-ра физ.-мат. наук. 2005. URL: <https://dlib.rsl.ru/01003305512>.
139. Гималтдинов И.К. О затухании импульсных возмущений в трубе с пузырьковой жидкостью со ступенчатым распределением пузырьков по сечению // Вестник Оренбургского государственного университета. 2005. № 10-2(48). С. 61–67. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11664168>.
140. Гималтдинов И.К., Галимзянов М.Н., Кочанова Е.Ю. Динамика волны давления в цилиндрическом канале, содержащей кольцевую пузырьковую зону // Инженерно-физический журнал. 2023. Т. 96, № 4. С. 1008–1016. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54484031>.
141. Гималтдинов И.К., Гималтдинова А.А., Кочанова Е.Ю. О воздействии волны давления на твердую стенку, покрытую пузырьковой завесой конечных размеров // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 5. С. 1205–1211. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47163674>.
142. Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю. Условия фокусировки волны давления в пузырьковом клине // Акустический журнал. 2020. Т. 66, № 4. С. 351–356. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42898465>.
143. Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю. Фокусировка волны давления на границе пузырьковой жидкости // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 2. С. 507–512. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=45759252>.
144. Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Взаимодействие ударных волн и волн с полной дисперсией в запыленном газе // Модели и методы аэродинамики. МЦНМО, 2009. С. 56–57. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37191591>.
145. Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Взаимодействие скачков уплотнения в запыленном газе и возникновение волн с полной дисперсией // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2010. № 1. С. 70–83. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13001976>.

146. Голубкина И.В., Осипцов А.Н., Сахаров В.И. Влияние дисперсных частиц на теплообмен вблизи затупленного тела при взаимодействии головной ударной волны с косым скачком уплотнения // Модели и методы аэродинамики. МЦНМО, 2011. С. 51–52. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37540370>.
147. Гончаров В.В., Наугольных К.А., Рыбах С.А. Стационарные возмущения в жидкости, содержащие пузырьки газа // Прикладная математика и техническая физика. 1976. № 6. С. 90–96. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/06e/06e52f7cc94baff613b06d0582201cd.pdf>.
148. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю. Распространение волн вдоль границ насыщенной пористой среды и жидкости // Акустический журнал. 2006. Т. 52, № 2. С. 201–211. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9188505>.
149. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н. Распространение возмущений давления в насыщенной пузырьковой жидкостью пористой среде // Ученые записки казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 157, № 1. С. 101–106. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23465304>.
150. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н. Распространение импульсных возмущений в цилиндрическом волноводе в насыщенной пузырьковой жидкостью пористой среде // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Т. 5, № 1. С. 111–122. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37383567>.
151. Губайдуллин Д.А., Гафиятов Р.Н. Отражение и прохождение акустической волны через многофракционный пузырьковый слой // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58, № 1. С. 97–100. URL: <http://www.mathnet.ru/links/d25ca9d356c54284df02ee3f7f6b5598/tvt11145.pdf>.
152. Губайдуллин Д.А., Губайдуллина Д.Д., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкостях с полидисперсными пузырьками газа. Сравнение теории с экспериментом // Известия Российской академии наук. Механика жид-

- кости и газа. 2013. № 6. С. 81–90. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20887700>.
153. Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Урманчиев С.Ф. Моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 87–96. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17358775>.
154. Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Урманчиев С.Ф. Воздействие воздушных ударных волн на преграды, покрытые пористым слоем // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 3. С. 7–20. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13026371>.
155. Губайдуллин Д.А., Ивандаев А.И. Скорость и затухание звука в парогазо-капельных системах. Роль теплообменных процессов // Прикладная математика и технифеская физика. 1987. Т. 28, № 3. С. 115–123. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/96a/96a2bd5b2d19c6e43c6c1fe9548f0a5d.pdf>.
156. Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И. Нестационарные волны в жидкости с пузырьками газа // Доклады академии наук СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1299–1302. URL: <http://www.mathnet.ru/links/a778c015bc9e9e96c308653fe841661b/dan39799.pdf>.
157. Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры // Прикладная математика и технифеская физика. 1978. № 2. С. 78–86. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/ca4/ca4b7212b4bfd90a740185dab7e84754.pdf>.
158. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Акустические возмущения в смеси жидкости с пузырьками пара и газа // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, № 2. С. 188–192. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13725607>.
159. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Акустические волны в вязкоупругих пузырьковых средах // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 1. С. 150–153. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37135834>.

160. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в двухфракционных пузырьковых жидкостях с фазовыми превращениями // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50, № 2. С. 269–273. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17679879>.
161. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в многофракционных пузырьковых жидкостях // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, № 2. С. 250–255. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23103215>.
162. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых средах // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, № 5. С. 743–753. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20406060>.
163. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в жидкостях с полидисперсными и парогазовыми и газовыми пузырьками // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. № 1. С. 67–77. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23283999>.
164. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в жидкости с полидисперсными парогазовыми пузырьками // Акустический журнал. 2016. Т. 62, № 2. С. 178–186. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25481495>.
165. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Отражение акустической волны от пузырькового слоя конечной толщины // Доклады академии наук. 2016. Т. 470, № 5. С. 525–527. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26665441>.
166. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Падение акустической волны на многослойную среду, содержащую слой пузырьковой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2017. № 1. С. 109–116. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29008218>.
167. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Особенности отражения акустических волн от границы или слоя двухфазной среды // Акустический журнал. 2018. Т. 64, № 2. С. 162–173. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32626062>.

168. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2019. № 2. С. 126–133. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37068958>.
169. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкости с газовыми включениями, имеющими жидкую прослойку и вязкоупругую оболочку // Теплофизика высоких температур. 2021. Т. 59, № 4. С. 533–540. URL: <http://www.mathnet.ru/links/a7a0de4741d1f9cd8aa14e4c606bdda4/tvt11314.pdf>.
170. Донцов В.Е. Отражение волн давления умеренной интенсивности от твердой стенки в жидкости с пузырьками легкорастворимого газа // Прикладная математика и технифеская физика. 1998. № 5. С. 19–24. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/a56/a56ba9d8ec688add28570030a3c54235.pdf>.
171. Донцов В.Е. Взаимодействие ударной волны со сферическим газожидкостным кластером // Прикладная математика и технифеская физика. 2004. Т. 45, № 1. С. 3–11. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17249170>.
172. Донцов В.Е. Распространение волн давления в газожидкостной среде кластерной структуры // Прикладная математика и технифеская физика. 2005. Т. 46, № 3. С. 50–60. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15175928>.
173. Донцов В.Е., Кузнецов В.В., Марков П.Г. [и др.]. Эволюция волны давления умеренной интенсивности в жидкости с пузырьками газа // Акустический журнал. 1987. Т. 33, № 6. С. 1041–1044. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1987_6_1041-1044.pdf.
174. Донцов В.Е., Кузнецов В.В., Марков П.Г. [и др.]. Распространение волн давления в жидкости с пузырьками газа разных размеров // Акустический журнал. 1989. Т. 35, № 1. С. 157–159. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1989_1_157-159.pdf.
175. Донцов В.Е., Кузнецов В.В., Напоряков В.Е. Ударные волны умеренной амплитуды в двухфазной среде // Акустический журнал. 1985. Т. 31, № 2. С. 193–196. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1985_2_193-196.pdf.

176. Донцов В.Е., Накоряков В.Е. Эволюция волн давления в жидкости с пузырьками двух разных газов // Прикладная математика и технифеская физика. 2002. Т. 43, № 2. С. 110–115. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17274651>.
177. Донцов В.Е., Накоряков В.Е. Волны давления в газожидкостной среде с расслоенной структурой жидкости – пузырьковая смесь // Прикладная математика и технифеская физика. 2003. Т. 44, № 4. С. 102–108. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17274814>.
178. Иорданский С.В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // Прикладная математика и технифеская физика. 1960. № 3. С. 102–110. URL: https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=158596&ARTICLE_ID=158605.
179. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
180. Кедринский В.К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // Прикладная математика и технифеская физика. 1968. Т. 46, № 4. С. 29–34. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/e28/e288f9f8bc398189c6dddd35b2dc76d4.pdf>.
181. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. 435 с.
182. Кедринский В.К., Вшивков В.А., Дудникова Г.И. [и др.]. Фокусировка осциллирующей ударной волны, излученной тороидальным облаком пузырьков // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2004. Т. 125, № 6. С. 1302–1310. URL: http://www.jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/r_125_1302.pdf.
183. Кедринский В.К., Вшивков В.А., Лазарева Г.Г. Формирование и усиление ударных волн в пузырьковом «шнуре» // Прикладная математика и технифеская физика. 2005. Т. 46, № 5. С. 46–52. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15175963>.
184. Кедринский В.К., Шокин Ю.И., Вшивков В.А. [и др.]. Генерация ударных волн в жидкости сферическими пузырьковыми кластерами // Доклады

- академии наук. 2001. Т. 381, № 6. С. 773–776. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44446961>.
185. Когарко Б.С. Одномерное неустановившееся движение жидкости свозникновением и развитием кавитации // Доклады АН СССР. 1964. Т. 155, № 4. С. 779–782. URL: <http://www.mathnet.ru/links/d4835271e8611763a6290285fc815f6c/dan29376.pdf>.
186. Кочетков И.И., Пинаев А.В. Ударные и детонационные волны в жидкости и пузырьковых средах при взрыве проволоочки // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48, № 2. С. 124–133. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17706976>.
187. Кочетков И.И., Пинаев А.В. Ударно-волновые процессы при взрыве проводников в воде и пузырьковых средах // Физика горения и взрыва. 2015. Т. 51, № 6. С. 109–119. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25461168>.
188. Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И., Чернявский И.Л. Нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений в вязко-эластичной трубке // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 69–86. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11929229>.
189. Кудряшов Н.А., Тетерев Н.А. Численное моделирование распространения уединенной волны давления в жидкости, содержащей пузырьковую область // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 3. С. 3–17. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21276325>.
190. Кузнецов В.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Взаимодействие солитонов в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 27, № 8. С. 194–198.
191. Кузнецов В.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. [и др.]. Жидкость с пузырьками газа как пример среды Кортвега–де–Вриза–Бюргера // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23, № 4. С. 520–523.
192. Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газожидкостных смесях. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
193. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.

194. Лебедева Н.А., Осипцов А.Н. Комбинированный лагранжев метод для моделирования осесимметричных вихревых газодисперсных течений // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 72–85. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26932340>.
195. Лежнин С.И., Прибатурин Н.А. Генерация и эволюция волн давления при фазовых превращениях // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. 2015. № 1(16). С. 222–226. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26398715>.
196. Лежнин С.И., Сорокин А.Л. Моделирование эволюции импульса разрежения при контакте холодной жидкости и насыщенного пара // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 3. С. 397–400. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16589684>.
197. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва: Гостехтеоретиздат, 1952. 600 с.
198. Нагиев Ф.Б., Хабеев Н.С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков // Акустический журнал. 1979. Т. 25, № 2. С. 271–279. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1979_2_271-279.pdf.
199. Накоряков В.Е., Вассерман Е.С., Покусаев Б.Г. [и др.]. Усиление амплитуды волн давления в парожидкостной среде пузырьковой структуры // Теплофизика высоких температур. 1994. Т. 32, № 3. С. 411–417. URL: <http://www.mathnet.ru/links/24ab3c5da87c6ef6b038e4f3d772608d/tvt3104.pdf>.
200. Накоряков В.Е., Донцов В.Е. Взаимодействие ударных волн со сферическим пузырьковым кластером в жидкости // Доклады академии наук. 2003. Т. 391, № 2. С. 199–202. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17339504>.
201. Накоряков В.Е., Донцов В.Е. Эволюция ударной волны в газожидкостной среде кластерной структуры // Доклады академии наук. 2004. Т. 394, № 4. С. 480–483. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17352230>.
202. Накоряков В.Е., Донцов В.Е., Марков П.Г. Взаимодействие уединенных волн давления умеренной интенсивности в жидкости с пузырьками газа //

- Доклады АН СССР. 1990. Т. 313, № 5. С. 1074–1077. URL: <http://www.mathnet.ru/links/0d5229ca5f0da4a2bc875f67b173daac/dan48940.pdf>.
203. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Прибатурин Н.А. [и др.]. Распространение возмущений давления конечной амплитуды в пузырьковой парожидкостной среде // Прикладная механика и техническая физика. 1982. № 3. С. 84–90. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/e2d/e2dcd8ca0e2c4af52450b4cf7e8e7087.pdf>.
204. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 1983. 237 с.
205. Напоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Прибатурин Н.А. [и др.]. Акустика жидкости с пузырьками пара // Акустический журнал. 1984. Т. 30, № 6. С. 808–812. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1984_6_808-812.pdf.
206. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1, 2. 464, 360 с.
207. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых жидкостях // Доклады академии наук. 2012. Т. 447, № 3. С. 284–287. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18443613>.
208. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны разной геометрии в полидисперсных пузырьковых жидкостях. Теория и эксперимент // Доклады академии наук. 2013. Т. 450, № 6. С. 665–669. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19086307>.
209. Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С., Шагапов В.Ш. Об ударных волнах в жидкости с пузырьками газа // Доклады АН СССР. 1974. Т. 214, № 4. С. 779–782.
210. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде // Доклады АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1081.

211. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. [и др.]. Об ударных волнах в жидкости с паровыми пузырьками // Инженерно-физический журнал. 1982. Т. 42, № 2. С. 192–206.
212. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Гималтдинов И.К. [и др.]. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны // Доклады академии наук. 2001. Т. 378, № 6. С. 763–768. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44438446>.
213. Оренбах З.М., Смирнова Л.П., Шрейбер И.Р. Структура линейных волн в трубках, заполненных вязкой жидкостью // Акустический журнал. 1987. Т. 33, № 4. С. 729–735. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1987_4_729-735.pdf.
214. Оренбах З.М., Шрейбер И.Р. Распространение волн в жидкости с фазовыми переходами // Акустический журнал. 1986. Т. 32, № 1. С. 76–80. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1986_1_76-80.pdf.
215. Оренбах З.М., Шушков Г.А. Экспериментальное определение скорости и коэффициента затухания акустического возмущения в газожидкостной пене // Акустический журнал. 1991. Т. 37, № 2. С. 403–405. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1991_2_403-405.pdf.
216. Оренбах З.М., Шушков Г.А. Скорость и диссипация звука в газожидкостных пенах // Акустический журнал. 1992. Т. 39, № 1. С. 127–132. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1993_1_127-132.pdf.
217. Оренбах З.М., Шушков Г.А. Акустические характеристики водно-воздушных пен // Акустический журнал. 1993. Т. 38, № 2. С. 373–374. URL: http://www.akzh.ru/pdf/1992_2_373-374.pdf.
218. Осипцов А.Н. Лагранжев подход в механике дисперсных сред: преимущества и перспективы // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–3. С. 1024–1026. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21121302>.
219. Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д. Эффект фокусировки аэрозольных частиц за ударной волной, движущейся в микроканале // Доклады академии на-

- ук. 2010. Т. 433, № 3. С. 346–349. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15142432>.
220. Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д. Фокусировка аэрозоля за ударной волной, движущейся в микроканале // Теоретические основы химических технологий. 2011. Т. 45, № 2. С. 178–186. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16311381>.
221. Петров А.Г. Пульсирующие газовые пузырьки в жидкости. Условие их слияния // Доклады академии наук. 2010. Т. 434, № 5. С. 631–635. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15524887>.
222. Петров А.Г. Вынужденные колебания в жидкости двух газовых пузырей в окрестности их контакта // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. № 4. С. 81–99. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16441182>.
223. Петров А.Г. Механизмы слияния и дробления пульсирующих в жидкости газовых пузырьков // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–3. С. 1034–1035. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21121306>.
224. Петров А.Г., Фомичев А.В. Колебания газового пузыря в жидкости при резонансе частот радиальных и деформационных колебаний 2:1 // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2009. № 2. С. 102–115. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11726283>.
225. Прибатурин Н.А., Стасенко Д.П. Исследование возможности интенсификации насыщения жидкостей газом путем воздействия ударных волн // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 2. С. 64–70. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17261872>.
226. Радовский И.С., Дробан Н.В. Скорость и декремент затухания звука в пароводяной смеси пузырьковой структуры // Теплофизика высоких температур. 1978. Т. 16, № 2. С. 289–293. URL: <http://www.mathnet.ru/links/d81c11e396b9469f013bd6b29beb376c/tvt8675.pdf>.

227. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 432 с.
228. Сафиуллин А.Р., Фаттахов С.Р., Галимзянов М.Н. Акустические волны в жидкости с парогазовыми зародышами: гидродинамический симулятор для моделирования акустических волн в жидкости с парогазовыми зародышами. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024619304. Зарегистрировано в Реестре программ ЭВМ 07 мая 2024 г., 2024. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=67264159>.
229. Седов А.И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи математических наук. 1965. Т. 20, № 5. С. 121–180. URL: https://www.turpion.org/links/b50df1134557f3b04dbf667e87467d72_2.phtml.
230. Сильников М.В. Применение релаксационных систем для обеспечения безопасности // Научнотехнические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2019. Т. 25, № 3. С. 71–85. URL: https://engtech.spbstu.ru/userfiles/files/articles/2019/3/5_Silnikov.pdf.
231. Суоров В.С. К расчету ударно-волновых процессов в пузырьковых жидкостях // Журнал технической физики. 1998. Т. 68, № 11. С. 12–19. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/34777>.
232. Суоров В.С. Взаимодействие ударной волны с пузырьковым экраном // Журнал технической физики. 1999. Т. 69, № 1. С. 42–48. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/35942>.
233. Суоров В.С. Взаимодействие ударной волны с каплями пузырьковой жидкости // Журнал технической физики. 2001. Т. 71, № 6. С. 17–22. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/38810>.
234. Сычев А.И. Трансформация ударных волн на границе раздела пузырьковых сред // Физика горения и взрыва. 2006. Т. 42, № 2. С. 97–104. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16542165>.
235. Сычев А.И. Электропроводность пузырьковых сред в ударных и детонационных волнах // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47, № 5. С. 793–796. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12901326>.

236. Сычев А.И. Сильные ударные волны в пузырьковых средах // Журнал технической физики. 2010. Т. 80, № 6. С. 31–35. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/10013>.
237. Сычев А.И. Ударные волны в многокомпонентных средах «жидкость–пузырьки газа–капли жидкости» // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 3. С. 409–414. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16455652>.
238. Тимофеев Е.И., Гельфанд Б.Е., Гумеров А.Г. [и др.]. Влияние пузырькового экрана на ударно-волновое возмущение в жидкости // Физика горения и взрыва. 1985. № 3. С. 98–102. URL: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/119/1199bc475066ba8858194ad3c59ad3d0.pdf>.
239. Тимофеев Е.И., Губанов А.В., Гельфанд Б.Е. [и др.]. О возможности неакустического отражения слабых волн давления в кипящей жидкости // Доклады академии наук СССР. 1981. Т. 257, № 5. С. 1125–1127. URL: <http://www.mathnet.ru/links/70593480d72fba93321fcd84ba5e037/dan44393.pdf>.
240. Тухватуллина Р.Р., Фролов С.М. Ударные волны в жидкости, содержащей инертные и реакционноспособные газовые пузырьки // Горение и взрыв. 2017. Т. 10, № 2. С. 52–61. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30682301>.
241. Фаттахов С.Р., Сафиуллин А.Р., М.Н. Галимзянов. Двумерные волны в пузырьковой жидкости: гидродинамический симулятор для моделирования волн давления в каналах с жидкостью при наличии в ней пузырьковой области. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023687121. Зарегистрировано в Реестре программ ЭВМ 12 декабря 2023 г., 2023. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=56014897>.
242. Шагапов В.Ш. Структура ударных волн в полидисперсной смеси жидкость–пузырьки газа // Известия академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 6. С. 145–147.
243. Шагапов В.Ш. Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками // Прикладная математика и техническая физика.

1977. № 1. С. 90–101. URL: <https://sibran.ru/upload/iblock/bb5/bb5cd5e607fc878488eb4f4a6725a1f0.pdf>.
244. Шагапов В.Ш. Динамика гетерогенных сред при наличии физико-химических превращений. phdthesis: Дисс... д-ра физ.-мат. наук. 1987. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01000018738>.
245. Шагапов В.Ш. К теории о распространении звука в тумане // Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24, № 5. С. 506–512.
246. Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Волны в пузырьковой системе при наличии химических реакции в газовой фазе // Физика горения и взрыва. 1989. № 6. С. 14–22. URL: https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120135&ARTICLE_ID=135857.
247. Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Агишева У.О. Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, № 2. С. 232–240. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43021444>.
248. Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Акустика и устойчивость перегретой жидкости с газовыми зародышами // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 3. С. 85–95. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38162702>.
249. Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при «косом» их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 3. С. 464–468. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37713522>.
250. Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при прямом их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 2. С. 284–290. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37297497>.

251. Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности устойчивости и акустических свойств перегретой жидкости с газовыми зародышами при повышении давления // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 5. С. 748–754. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39324225>.
252. Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. [и др.]. Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 4. С. 912–921. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35325382>.
253. Шагапов В.Ш., Зайнуллина О.А. Распространение малых возмущений во вскипающей жидкости, содержащей газы зародыши // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, № 1. С. 91–97. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22841005>.
254. Шагапов В.Ш., Коледин В.В. К теории роста паровых пузырьков в метастабильной жидкости // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 4. С. 543–551. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19143694>.
255. Шагапов В.Ш., Коледин В.В., Вахитова Н.К. Об устойчивости перегретой жидкости, содержащей парогазовые зародыши // Прикладная математика и технифеская физика. 2013. Т. 54, № 5. С. 64–80. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20653893>.
256. Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 1. С. 40–48. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22681961>.
257. Шагапов В.Ш., Ялаев А.В. Объемное вскипание жидкости, содержащей газы зародыши // Теоретические основы химических технологий. 2012. Т. 46, № 4. С. 420–431. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17795900>.
258. Шихмурзаев З.А. Распространение ударных волн в жидкости с пузырьками газа // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. 1983. № 1. С. 95–99.

Список рисунков

2.1	Схема микрочастицы.	54
2.2	В случае недогретой жидкости ($p_0 > p_e(T_0)$) существует единственный равновесный радиус.	72
2.3	Графики зависимостей равновесных радиусов от массы газовых зародышей в перегретой жидкости ($p_e(T_0) > p_0$) для различных начальных m_{g0} 1 : $m_{g0} = 0$, 2 : $0 < m_{g0} < m_{g*}$, 3 : $m_{g0} = m_{g*}$, 4 : $m_{g0} > m_{g*}$	73
2.4	Кривая, отражающая зависимость равновесного радиуса a_0 от массы газового зародыша m_{g0} в перегретой жидкости.	74
2.5	Сопоставление результатов теоретических исследований (сплошная линия) с экспериментальными данными (символы ●) работы [53]. На фрагменте (а) зависимость фазовой скорости, на фрагменте (б) – коэффициента затухания от частоты возмущений ω при $a_0 = 3.1 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 5.8 \cdot 10^{-4}$	78
2.6	Сопоставление результатов теоретических исследований (сплошная линия) с экспериментальными данными (символы ●) работы [53]. На фрагменте (а) зависимость фазовой скорости, на фрагменте (б) – коэффициента затухания от частоты возмущений ω при $a_0 = 2.3 \cdot 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 1.1 \cdot 10^{-2}$	79
2.7	Группы кривых, демонстрирующих зависимости фазовых скоростей (а) и коэффициентов затухания (б) от равновесной температуры смеси для различных частот волновых возмущений: 1 – $\omega = 10^3$ с ⁻¹ , 2 – 10^4 с ⁻¹ , 3 – 10^5 с ⁻¹	81
2.8	Зависимость фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) от частоты возмущений вблизи точки кипения для различных значений равновесной температуры: 1 – $T_0 = 372$ К, 2 – 373 К, 3 – 374 К	86
2.9	Влияние числа зародышей на значения фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) для трёх значений n_0 : 1 – 10^{10} м ⁻³ , 2 – 10^{11} м ⁻³ , 3 – 10^{12} м ⁻³ при температуре 374 К с учётом диффузии (сплошные линии) и без её учёта (штрих-пунктирные)	87

- 2.10 Изменение равновесной скорости звука с ростом температуры при различных значениях начального радиуса ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$ вверх и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ вниз): 1 – $a_0 = 10^{-3}$ м, 2 – 10^{-4} м, 3 – 10^{-5} м, 4 – 10^{-6} м. 89
- 2.11 Влияние начального радиуса включений на фазовую скорость (**а**) и коэффициент затухания (**б**) волны: 1 – $a_0 = 10^{-3}$ м, 2 – 10^{-4} м, 3 – 10^{-5} м, 4 – 10^{-6} м. 90
- 2.12 Воздействие начального радиуса парогазовых пузырьков на фазовую скорость (**а**) и коэффициент затухания (**б**) при перегреве $\Delta T_0 = 1$ К: 1 – $a_0 = 10^{-6}$ м, 2 – 10^{-5} м, 3 – $2,2 \cdot 10^{-5}$ м. 91
- 2.13 Дисперсионные кривые фазовой скорости акустического возмущения в смеси (**а**) и коэффициента его затухания (**б**) в зависимости от радиуса пузырьков для $T_0 = 373$ К и начального объёмного газосодержания $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ при различных значениях частоты возмущения: 1 – $\omega = 10^{-2}$ с⁻¹, 2 – 10^{-3} с⁻¹, 3 – 10^{-4} с⁻¹. 93
- 2.14 Зависимости фазовой скорости (**а**) и коэффициента затухания (**б**) акустической волны смеси от равновесной температуры для $a_0 = 10^{-3}$ м и $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ при различных частот: 1 – $\omega = 10^{-2}$ с⁻¹, 2 – 10^{-3} с⁻¹, 3 – 10^{-4} с⁻¹. 94
- 2.15 Влияние начального объёмного газосодержания α_{g0} на скорость возмущения (**а**) и коэффициент его затухания (**б**) при $a_0 = 10^{-3}$ м. Линии 1, 2, 3 и 4 на рисунке соответствуют значениям $\alpha_{g0} = 10^{-1}$, 10^{-2} , 10^{-3} и 10^{-4} 95
- 2.16 Влияние начального объёмного газосодержания α_{g0} на скорость возмущения (**а**) и коэффициент его затухания (**б**) при $a_0 = 10^{-6}$ м. Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют обозначениям на рис. 2.15. 96
- 2.17 Влияние начальной равновесной температуры на дисперсионные кривые в смеси с крупнодисперсными парогазовыми включениями: 1 – $T_0 = 300$ К, 2 – 353 К, 3 – 373 К ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м). 98

- 2.18 Влияние начальной равновесной температуры на дисперсионные кривые в смеси с мелкодисперсными парогазовыми включениями: 1 — $T_0 = 300$ К, 2 — 353 К, 3 — 373 К ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-6}$ м). 99
- 3.1 Схематическое изображение расчётной области при прямом (слева) и «косом» (справа) падении волны на границу раздела. 103
- 3.2 Влияние равновесной температуры T_0 на коэффициенты отражения (**а**) и преломления (**б**) при прямом падении волны со стороны «чистой» жидкости ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м). 108
- 3.3 Влияние равновесной температуры T_0 на коэффициенты отражения (**а**) и преломления (**б**) при прямом падении волны со стороны «чистой» жидкости ($\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-6}$ м). 109
- 3.4 Зависимость коэффициентов отражения (**а**) и преломления (**б**) при прямом падении волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м. 110
- 3.5 Зависимость коэффициентов отражения (**а**) и преломления (**б**) при прямом падении волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-6}$ м. 112
- 3.6 Дисперсионные кривые при различных значениях начального объёмного содержания пузырьков. Штриховые линии соответствуют результатам [256], сплошные линии – результаты настоящего исследования 114
- 3.7 Влияние начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} на модули (1, 2) и аргументы (3, 4) φ и ψ коэффициентов отражения (**а**) и преломления (**б**) при «косом» падении волны со стороны «чистой» жидкости на границу раздела: 1, 3 – $\alpha_{g0} = 10^{-2}$; 2, 4 – $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Штриховые линии – [256], сплошные – расчёты. 115

- 3.8 Влияние начального объёмного содержания пузырьков α_{g0} на модули (1, 2) и аргументы (3, 4) φ и ψ коэффициентов отражения (а) и преломления (б) при «косом» падении волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела: 1, 3 – $\alpha_{g0} = 10^{-2}$; 2, 4 – $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Штриховые линии – [256], сплошные – расчёты. 116
- 3.9 Зависимость угла преломления от угла падения со стороны «чистой» жидкости (а) и со стороны пузырьковой жидкости (б) при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и $a_0 = 10^{-3}$ м: 1 – $\omega = 10^2$ с $^{-1}$, 2 – 10^3 с $^{-1}$, 3 – 10^4 с $^{-1}$ 117
- 3.10 Зависимость угла преломления от угла падения со стороны «чистой» жидкости (а) и со стороны пузырьковой жидкости (б) при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и $a_0 = 10^{-6}$ м: 1 – $\omega = 10^5$ с $^{-1}$, 2 – 10^6 с $^{-1}$, 3 – 10^7 с $^{-1}$. $T_0 = 300$ К (штрих), 353 К (пунктир) и 373 К (сплошная линия) 119
- 3.11 Линии, определяющие на плоскости (α_{g0}, a_0) границу раздела устойчивых и неустойчивых состояний перегретой воды с паровоздушными пузырьками. 121
- 3.12 Дисперсионные кривые при различных значениях давления ($\alpha_0 = 10^{-3}$, $a_0 = 10^{-6}$ м, $\Delta T_0 = 10^{-1}$ К). Линии 1, 2 и 3 соответствуют значениям, как на рис. 3.11. Сплошные линии – фазовая скорость C_p , штриховые – коэффициент затухания δ . . . 123
- 3.13 Зависимость фазовой скорости C_p (сплошные линии) и коэффициента затухания δ (штриховые линии) от волновой частоты ω для трёх показателей перегретости ($\alpha_0 = 10^{-3}$, $a_0 = 10^{-6}$ м, $p_0 = 1$ МПа). Обозначения на линиях соответствуют рис. 3.11. 124
- 3.14 Зависимость фазовой скорости C_p (сплошные линии) и коэффициента затухания δ (штриховые линии) от частоты возмущения ω при различных значениях радиуса пузырьков: 1 – $a_0 = 10^{-6}$ м, 2 – $2.62 \cdot 10^{-6}$ м, 3 – $5.04 \cdot 10^{-4}$ м и 4 – 10^{-3} м. ($\alpha_0 = 10^{-3}$, $\Delta T_0 = 1$ К, $p_0 = 1$ МПа). 125

- 3.15 Зависимость равновесной скорости звука от радиуса пузырьков a_0 при различных значениях перегрева ΔT_0 для $p_0 = 1$ МПа и $\alpha_0 = 10^{-3}$. Обозначения на линиях соответствуют рис. 3.11. 126
- 3.16 Зависимость величины инкремента ω' от радиуса a_0 при различных значениях перегрева ΔT_0 . Обозначения на линиях соответствуют рис. 3.11. 127
- 3.17 Зависимость фазовой скорости (**а**) и коэффициента затухания (**б**) от частоты возмущения при различных значениях перегрева: 1 – $\Delta T_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ К, 2 – $5 \cdot 10^{-1}$ К, 3 – 1 К, 4 – 5 К, 5 – 10 К. 129
- 4.1 Схема задачи. R_C и R_{cl} – радиусы трубы и сферического кластера. Z_1 – координата центра кластера. $D_1 - D_6$ – датчики давления. 133
- 4.2 Схема расположения пузырькового кластера в ударной трубе в эксперименте [171]: 1 – рабочий участок; 2 – дно рабочего участка; 3 – стальная проволока; 4 – газожидкостный кластер; Д5 и Д6 – датчики давления. 139
- 4.3 Осциллограмма датчика **Д6**. Слева представлен результат расчёта, а справа – эксперимент [171]. В расчётах и в эксперименте: $a_0 = 0.248$ мм, $\alpha_{g0} = 0.128$, $c_g = 1003$ Дж/кг·К, $\lambda_g = 0.0259$ м·кг/К·с³, $\Delta p_l = 1.28$ МПа. 140
- 4.4 Профили волн давления в жидкости за пузырьковым кластером (экспериментальные [171] – сверху, расчётные – снизу). Фрагменты **а**, **б** и **в** соответствуют показаниям датчиков расположенных на расстояниях 0.105, 0.305 и 0.495 от границы $z = 0$ 141
- 4.5 Показания датчиков $D_1 - D_6$ при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Линии **чёрного цвета** соответствуют сферическому кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.025$ м, **красного** – 0.05 м и **синего** – 0.075 м. 143
- 4.6 Динамика поля давлений в трубе, содержащей сферический пузырьковый кластер $R_{cl} = 0.05$ м, в различные моменты времени. 145
- 4.7 Поля давлений для случая сферического пузырькового кластера в различные моменты времени при $R_{cl} = 0.025$ м. 146

- 4.8 Показания датчиков D_2 и D_3 при $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (слева) и $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (справа). Линии **чёрного цвета** соответствуют сферическому кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.025$ м, **красного** – 0.05 м и **синего** – 0.075 м. 148
- 4.9 Распределение давления на оси трубы (слева) и внутри трубы (справа) при начальном объёмном газосодержании $\alpha_{g0} = 10^{-2}$. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.092, 0.472, 0.631$ и 0.933 мс. 150
- 4.10 Распределение давления на оси трубы (слева) и внутри трубы (справа) при начальном объёмном газосодержании $\alpha_{g0} = 10^{-3}$. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.092, 0.422, 0.545$ и 0.582 мс. 152
- 4.11 Зависимость максимального значения давления p_l^{\max} от величины амплитуды начального давления Δp_{l0} . Линии **чёрного цвета** соответствуют кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.025$ м (цифра 1), **красного** – 0.05 м (цифра 2) и **синего** – 0.075 м (цифра 3). 154
- 4.12 Зависимость максимального давления ($\Delta p_l^{\max}/p_0$) от радиуса кластера R_{cl} и объёмного содержания пузырьков α_{g0} для случая, когда сферический кластер расположен на торцевой стенке канала. 155
- 4.13 Показания датчиков D_1 – D_6 при $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$. Линии **чёрного цвета** соответствуют сферическому кластеру с радиусом $R_{cl} = 0.01$ м, **красного** – 0.03 м и **синего** – 0.05 м. 157
- 4.14 Поля давлений для случая сферического пузырькового кластера в различные моменты времени при $R_{cl} = 0.03$ м. 159
- 4.15 Распределение давления на оси трубы (слева) и внутри трубы (справа) при начальном объёмном газосодержании $\alpha_{g0} = 5 \cdot 10^{-3}$. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.159, 0.432, 0.488$ и 0.566 мс. 161
- 4.16 Распределение давления на оси трубы (слева) и внутри трубы (справа) при радиусе пузырькового кластера $R_{cl} = 0.03$ м. Цифры 1–4 соответствуют моментам времени $t = 0.159, 0.439, 0.488$ и 0.599 мс. 163

- 4.17 Зависимость максимального значения давления p_l^{\max} от величины амплитуды начального давления Δp_{l0} . Линии **чёрного цвета** соответствуют начальному объёмному содержанию пузырьков $\alpha_{g0} = 0.005$ (цифра 1), **красного** – 0.01 (цифра 2), **синего** – 0.015 (цифра 3) и **фиолетового** – 0.02 (цифра 4). 164
- 4.18 Зависимость максимального давления ($\Delta p_l^{\max}/p_0$) от радиуса кластера R_{cl} и объёмного содержания пузырьков α_{g0} для случая, когда сферический кластер расположен на оси канала. 165
- 5.1 Схема задачи. R_C , R_1 и R_2 – радиус трубы, внутренний и внешний радиусы цилиндрического кластера. Z_1 и Z_2 – координаты кластера. $D_1 - D_6$ – датчики давления. 170
- 5.2 Поля давлений в виде изобар, представленных для случая пузырькового кластера в форме полого цилиндра в различные моменты времени. 173
- 5.3 Показания датчиков, расположенных на оси (D_1, D_2, D_3) и на стенке трубы (D_4, D_5, D_6). Линии **чёрного цвета** соответствуют кластеру в виде полого цилиндра с внешним радиусом $R_2 = 0.075$ м, **красного** – 0.1 м, **синего** – 0.125 м и **зелёного** – 0.15 м. 174
- 5.4 Зависимость координаты z^{\max} пика максимального давления на оси трубы от амплитуды начального давления Δp_{l0} . Штриховой линией обозначено координата $Z_2 = 0.3$ м. Остальные параметры соответствуют рис. 5.2. 176
- 5.5 Зависимость максимального давления на оси трубы от амплитуды начального давления Δp_{l0} . Символы **●** – кластер в виде полого цилиндра, **▲** – сплошной цилиндр, заполненный пузырьковой смесью. 177
- 5.6 Объёмные поля давления. Слева кластеру в форме полого цилиндра, справа – сплошного цилиндра. 178
- 5.7 Динамика поля давлений в среде, содержащей пристенный пузырьковый кластер в форме полого цилиндра. 180

- 5.8 Показания датчиков D_1, D_2, D_3 , расположенных на оси трубы, и D_4, D_5, D_6 , расположенных на стенках на расстоянии $l_{D_1} = l_{D_4} = 0.15$ м, $l_{D_2} = l_{D_5} = 0.275$ м, $l_{D_3} = l_{D_6} = 0.35$ м от плоскости $z = 0$, соответственно. 181
- 5.9 Зависимость максимальной амплитуды давления $(\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max} - p_0)$ на стенке трубы от амплитуды начального давления Δp_{l0} . Параметры системы и расчёта соответствуют рис. 5.7. 182
- 5.10 Зависимость координаты пикового давления на стенке трубы z^{\max} от амплитуды начального давления Δp_{l0} . Штриховой линией обозначена координата $Z_2 = 0.3$ м. Параметры системы и расчёта соответствуют рис. 5.7. 183
- 5.11 Зависимость максимального давления на оси трубы $(\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max} - p_0)$ от объёмного содержания газа α_{g0} . Параметры системы и расчёта такие же как на рис. 5.7. 184
- 5.12 В расчётах радиус сплошного цилиндра R_2 и расстояние между внешним и внутренним радиусами полого цилиндра $R_c - R_1$ совпадали по значению с пространственной протяжённостью Δz . 185
- 5.13 Зависимость максимального давления $(\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max} / p_0)$ от радиуса кластера Δz ($\Delta z = R_c - R_1$) на оси трубы (**круги** и **квадраты**) и на стенке трубы (**ромбы** и **треугольники**). **Круги** и **ромбы** относятся к сплошному цилиндру, а **квадраты** и **треугольники** к полому цилиндру у внешней стенки. Верхний рисунок при $\alpha_g = 10^{-2}$, а нижний – $\alpha_g = 10^{-3}$. . 186
- 5.14 Зависимость максимального давления $\Delta p_l^{\max} / p_0$ от радиуса кластера Δz ($\Delta z = R_2$) и объёмного содержания пузырьков α_{g0} . . 187
- 5.15 Давление в жидкости на оси трубы (слева) и объёмная картина течения в различные моменты времени (справа) при начальном объёмном содержанием пузырьков $\alpha_{g0} = 0.009$. Значения: 1 – 0.243, 2 – 0.512, 3 – 0.617 и 4 – 0.848 мс. 189
- 5.16 Давление в жидкости на оси трубы (слева) и объёмные картины течения различные моменты времени (справа) при пространственной протяжённости завесы $\Delta z = 0.05$ м. Моменты времени: 1 – 0.243, 2 – 0.514, 3 – 0.617 и 4 – 0.721 мс. 191

- 5.17 Показания датчиков D_1 (1), D_2 (2), D_3 (3), расположенных на оси трубы на расстояниях $l_{D_1} = 0.3$ м, $l_{D_3} = 0.6$ м от плоскости $z = 0$, D_2 – в центре пузырьковой области. 192

Приложение А

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023687121

**Двумерные волны в пузырьковой жидкости:
гидродинамический симулятор для моделирования волн
давления в каналах с жидкостью при наличии в ней
пузырьковой области**

Правообладатель: **ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ УФИМСКИЙ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (RU)**

Авторы: **Фаттахов Салават Радикович (RU), Сафиуллин Аскар
Русланович (RU), Галимзянов Марат Назипович (RU)**

Заявка № **2023686622**Дата поступления **06 декабря 2023 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **12 декабря 2023 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

документ подписан электронной подписью
Сертификат 429b6a0fe2853164ba96f83b73b4aa7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 18.05.2023 по 02.08.2024

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024660458

Акустические волны в жидкости с парогазовыми зародышами: гидродинамический симулятор для моделирования динамики акустических волн в жидкости с парогазовыми зародышами

Правообладатель: **ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (RU)**

Авторы: **Сафиуллин Аскар Русланович (RU), Фаттахов Салават Радикович (RU), Галимзянов Марат Назипович (RU)**



Заявка № 2024619304

Дата поступления 28 апреля 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 07 мая 2024 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

документ подписан электронной подписью
Сертификат 429b6a0fe3853164baf96f83b73b4aa7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 18.05.2023 по 02.08.2024

Ю. С. Зубов