

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

На правах рукописи



**ХИСАМОВ АРТУР АЛЬФИРОВИЧ**

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ  
ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В СИСТЕМЕ ПЛАСТ-ТРЕЩИНА  
ГИДРОРАЗРЫВА**

Специальность 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических  
наук, профессор  
Хабибуллин И.Л.

УФА-2023

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **ГЛАВА 1. ОБЗОР ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ПОСВЯЩЕННЫХ ИЗУЧЕНИЮ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТАХ С ТРЕЩИНАМИ ГИДРОРАЗРЫВА**

- 1.1. Механизм образования трещин гидроразрыва пластов
- 1.2. Математическое моделирование нестационарной фильтрации в пластовых системах с трещиной гидроразрыва

### **ГЛАВА 2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ПЛАСТЕ С ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ**

- 2.1. Постановка задач
- 2.2 Решение первой краевой задачи
  - 2.2.1 Решение, полученное на основе использования общих правил и теорем теории преобразований Лапласа
  - 2.2.2 Решение, полученное с использованием метода контурного интегрирования
  - 2.2.3 Сравнительный анализ двух видов решения
- 2.3 Анализ результатов расчетов решения первой краевой задачи
- 2.4 Решение второй краевой задачи
- 2.5 Анализ результатов расчетов решения второй краевой задачи
- 2.6 Кривые падения и восстановления давления в скважине с трещиной гидроразрыва

### **ГЛАВА 3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ПЛАСТЕ С ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ**

- 3.1. Постановка задач
- 3.2 Решение первой краевой задачи
- 3.3 Анализ результатов расчетов решения первой краевой задачи
- 3.4 Решение второй краевой задачи
- 3.5 Анализ результатов расчетов решения второй краевой задачи

**ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ В СИСТЕМЕ  
ПЛАСТ-ТРЕЩИНА ГИДРОРАЗРЫВА ПРИ НАЛИЧИИ СКИН-ЗОНЫ  
В ТРЕЩИНЕ**

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность темы исследования**

В настоящее время для интенсификации нефтегазодобычи из пластов с трудноизвлекаемыми запасами используются технологии гидроразрыва пластов (ГРП). При этом гидродинамическая связь скважины с пластом реализуется не непосредственно, а через трещину ГРП, тем самым существенно изменяется геометрия фильтрационных потоков. В отличие от классических моделей плоско-радиального и плоско-параллельного потоков, в пластах с трещиной ГРП выделяются модели линейного, билинейного, трилинейного и псевдо-радиального потоков. Исследование фильтрации в пластах с трещинами ГРП достаточно полно развито в приближении стационарной фильтрации. Нестационарные процессы изучаются в основном применительно к теории гидродинамических методов исследований пластов, в которой рассматриваются асимптотически ограниченные интервалы изменения времени, намного меньшие чем характерное время процесса фильтрации. При этом, в коллекторах с трудноизвлекаемыми запасами (малые проницаемости пластов и высоковязкие нефти), продолжительность нестационарных процессов распределения давления может быть одного порядка с характерным временем процесса фильтрации. Поэтому актуальным является аналитическое моделирование нестационарных процессов фильтрации в системе пласт-трещина с точки зрения развития обеих теорий этих процессов, а также для развития методов гидродинамических исследований пластов и методов оценки дебита скважин с трещиной гидроразрыва.

### **Степень разработанности темы исследования**

Создание в пласте вертикальных трещин, пересекающихся со скважинами, является одним из эффективных методов интенсификации добычи нефти и газа из малопроницаемых коллекторов. В зависимости от соотношения проницаемостей пласта и трещины, соотношения длины

трещины и характерного размера пласта меняются геометрия и интенсивность фильтрационного потока в системе пласт-трещина-скважина. Модели таких фильтрационных потоков достаточно полно развиты в приближении стационарной фильтрации.

Исследованию неустановившихся потоков жидкости в пластах с трещиной ГРП, посвящены работы Р.Д. Каневской, С.Н. Бузинова, И.Д. Умрихина, Г.И. Баренблатта, М.Х. Хайруллина, Е.Р. Бадертдиновой, И.Л. Хабибуллина, В.Ш. Шагапова, З.М. Нагаевой, М.М. Хасанова, О.Ю. Головнёвой, Г.Т. Булгаковой, А.Я. Давлетбаева, В.М. Максимова, H. Cinco-Ley, M. Prats, V.F. Samaniego, M.J. Economides, A.C. Gringarten, H.J. Ramey Jr., E. Ozkan, R. Raghavan, R.N. Horne, J.A. Rushing, T.A. Blasingame, J.P. Spivey, W.J. Lee, R.A. Wattenbarger, M.Y. Soliman, C.P.J.W. Van Kruysdijk, A.B. Dyes, C.E. Kemp, B.H. Caudle, J.R. Brockengrough, M. Azari, W.O. Wooden, I.e. Coble, D. Lefevre, G. Pellissier, J.C. Sabathier, M. Elahmady, R.A. Wattenberger, L.J. Durllofsky, M.W. Burgoyne, A.L. Little, A.F. Van Everdingen, W. Hurst, M.H. Ibrahim, B.D. Poe, M. Brown, R. Raghavan, H. Kazemi и др. Нестационарные аналитические модели рассматриваются в основном применительно к задачам гидродинамических исследований скважин и пластов, при этом исследуются зависимости от времени давления на забое скважины или дебита скважины. Особенности распределения давления и скорости фильтрации в трещине и в пласте рассмотрены не в полной мере.

**Целью работы** является построение аналитических решений задач, описывающих нестационарную фильтрацию однофазной жидкости в системе пласт-трещина гидроразрыва, а также анализ влияния гидродинамических характеристик пласта и трещины на эволюцию давления и скорости фильтрации и на дебит скважины.

**Поставленная цель достигнута** путем аналитического решения следующих задач, описывающих распределение давления при фильтрации в системе пласт-трещина ГРП в рамках моделей трещины неограниченной и ограниченной протяженностей:

- Первая краевая задача, когда скважина работает в режиме заданной депрессии.

- Вторая краевая задача, когда скважина работает в режиме заданного дебита.

- Третья краевая задача, когда на забое скважины задано условие описывающее наличие скин-зоны внутри трещины ГРП.

- Исследование на основе решений указанных выше задач закономерностей влияния на распределение давления, на скорость фильтрации и на дебит геометрических и коллекторских характеристик пласта, трещины и скин-зоны.

### **Научная новизна**

Получены аналитические решения задач нестационарной фильтрации в системе пласт-трещина гидроразрыва в общей постановке с учетом фильтрации в пласте и упругоёмкости трещины. Установлено, что при наличии трещины качественно и количественно изменяются зависимости давления, скорости фильтрации и дебита от фильтрационных характеристик системы пласт-трещина гидроразрыва.

Построены аналитические решения задач, описывающих нестационарную фильтрацию в системе пласт-трещина гидроразрыва конечной протяженности. На основе анализа этих решений исследовано влияние длины трещины на основные характеристики (распределение давления, скорость фильтрации, дебит скважины и давление на забое скважины) изучаемых процессов.

Сформулирована модель нестационарной фильтрации в системе пласт-трещина гидроразрыва при наличии скин-зоны в трещине, изучено влияние характеристик скин-зоны, трещины и пласта на распределение давления и дебит скважины.

### **Теоретическая и практическая значимость исследования**

Теоретическая значимость работы заключается в установлении качественных и количественных закономерностей формирования

нестационарных полей давления в пластах с вертикальной трещиной гидроразрыва при различных режимах работы скважины – режимы заданной депрессии и заданного дебита, восстановление давления после остановки скважины, учет наличия скин-эффекта в трещине. Полученные аналитические решения могут служить для валидации алгоритмов расчетов при численном моделировании фильтрации в пластах с трещинами ГРП.

Практическая значимость результатов диссертационного исследования заключается в том, что полученные в работе зависимости выражения для давления на забое скважины от времени можно использовать при гидродинамических исследованиях пластов методом типовых кривых. Полученные в работе аналитические выражения для дебита позволяют провести анализ зависимости дебита от времени и всего комплекса гидродинамических характеристик пласта, трещины и физических свойств флюида. Представляется возможным использование аналитических выражений для полей давления и скоростей фильтрации, при разработке математических моделей неизотермической фильтрации флюида применительно к задачам термометрии пластов, а также при моделировании трассерных исследований в пластах трещиной ГРП.

### **Методология и методы исследования**

В диссертационной работе при аналитическом моделировании задач теории фильтрации использованы методы интегрального исчисления, методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Аналитические решения получены использованием метода интегральных преобразований Лапласа и контурного интегрирования. Численные расчеты по полученным аналитическим выражениям производился в программных обеспечениях Maple, Matlab.

### **Основные положения и результаты, выносимые на защиту**

1. Аналитические решения, описывающие распределение давления в пласте и трещине неограниченной протяженности при работе скважины в режимах заданной депрессии и заданного дебита.

2. Аналитические решения, описывающие распределение давления в пласте и трещине ограниченной протяженности при работе скважины в режимах заданной депрессии и заданного дебита.

3. Математическая модель, описывающая фильтрацию в системе пласт-трещина гидроразрыва при наличии скин-зоны в трещине.

4. Установленные на основе анализа полученных решений закономерностей влияния на распределения давления в трещине и в пласте, скорости фильтрации, дебита и забойного давления скважины фильтрационных характеристик пласта, трещины и скин-зоны.

### **Степень достоверности и апробация результатов**

Обоснованность и достоверность результатов обуславливается корректностью физической и математической постановки задач; получением решений, не противоречащих общим представлениям и находящимся в соответствии с результатами, полученными другими исследователями; совпадением полученных решений задач в частных случаях с известными в литературе результатами.

**Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:**

- IX Конгресс молодых ученых, «Национальный исследовательский университет ИТМО» г. Санкт - Петербург, 2020 г.
- Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, июль 2019, Уфа.
- XI Международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 11-14 ноября 2020 года.
- Международный Симпозиум SPE BLACK GOLD SYMPOSIUM – PhD and Young specialists section, Уфа, 29.10.2021 г.
- XIII Международный молодежный научно-практический Конгресс «Нефтегазовые горизонты», ноябрь 2021 г., Москва.

- XII Международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 6-9 октября 2021 года.

- Всероссийская научная конференция студентов – физиков и молодых ученых «ВНКСФ-26», апрель 2022 г., Уфа.

### **Публикации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 19 научных трудах, в том числе 1 научная статья в рецензируемом научном издании, входящем в перечень Scopus, 3 научных статьи в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень международных реферативных баз данных и RSCI, 3 научных статьи в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК, 12 научных публикаций в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень РИНЦ.

### **Благодарности**

Автор выражает благодарность профессору кафедры прикладной физики И.Л. Хабибуллину за постановку задач и постоянную помощь и советы при выполнении работы.

# ГЛАВА 1. ОБЗОР ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ПОСВЯЩЕННЫХ ИЗУЧЕНИЮ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТАХ С ТРЕЩИНАМИ ГИДРОРАЗРЫВА

## 1.1. Механизм образования трещин гидроразрыва пластов

В настоящее время достаточно активно происходит развитие способов интенсификации добычи нефти, которые включают в себя создание трещин высокой проводимости в низкопроницаемых пластах, что приводит к снижению сопротивления призабойной зоны пласта (ПЗП) и увеличению радиуса дренирования скважины.

Математическое описание процесса образования трещин основано на фундаментальных положениях термодинамики, физики нефтегазоносных пластов, теории фильтрации и теории упругости. Одна из первых моделей процесса возникновения двумерной трещины, предложенная С.А. Христиановичем, Ю.П. Желтовым и Г.И. Баренблаттом получила всеобщее признание [38, 12, 13] (модель 1). Позднее Т.К. Перкинс, Л.Р. Керн [92] представили вторую модель распространения трещин (модель 2).

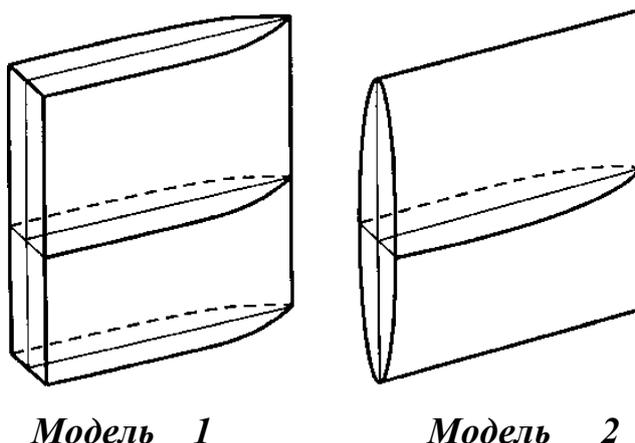


Рисунок 1.1 Модели вертикальной трещины

В представленных моделях высота вертикальной трещины является постоянной величиной. Различие моделей состоит в том, что в первой модели вертикальное поперечное сечение трещины является

прямоугольником, а во второй модели – это эллипс. Модели основаны на линейной теории распространении трещин в упругом теле. Основное различие в представленных моделях трещин ведет к разности поведения давления в трещине.

В работе R.P. Nordgren [87] обобщена область применения каждой из вышеописанных моделей распространения трещин: в первой модели рассматривается распространение в горизонтальной плоскости вертикальной трещины гидроразрыва, относительно второй модели описывается ее изменение в вертикальном направлении. На начальном этапе возникновения и распространения трещины, в случае, когда ее длина намного меньше высоты используется первая модель; когда длина трещины в разы превышает высоту, т.е. на конечной стадии, применима вторая модель. В настоящее время получили интерес псевдотрехмерные модели распространения трещин, которые описывают рост трещины и течение флюида в двух взаимно перпендикулярных направлениях [102]. В работах [31, 66, 67], описаны механизмы распространения трещин при гидроразрыве пласта вкпе с математическим моделированием процесса трещинообразования.

Способность к образованию горизонтальной или вертикальной трещины зависит, прежде всего, от распределения тектонических напряжений в пластах. Считается, что при нормальных условиях горизонтальное трещинообразование возникает на глубинах до 200 метров, вертикальные - на глубинах свыше 500 м [31]. В теоретических исследованиях рассматриваются вертикальные трещины гидроразрыва, в связи с тем, что нефтяные и газовые пласты разрабатываются в основном на существенно больших глубинах.

## 1.2. Математическое моделирование нестационарной фильтрации в пластовых системах с трещиной гидроразрыва

Нестационарные режимы фильтрации жидкости в системе пласт-трещина описываются на основе уравнений упругого режима.

$$\kappa_i \Delta P_i = \frac{\partial P_i}{\partial t};$$

Здесь индексы  $i = r, f$  – относятся к пласту и трещине,  $\kappa_i$  – коэффициенты пьезопроводности. При этом трещина рассматривается как пористая среда.

Эта система уравнений с соответствующей реальной геометрией течения граничными и начальными условиями позволяет описать совокупность всех возможных случаев. При этом на поверхности раздела трещина-пласт задаются условия непрерывности давлений и фильтрационных потоков или же специальное граничное условие, описывающее наличие на этой поверхности скин-зоны. Обычно считается, что гидродинамическая связь пласта со скважиной реализуется только через трещину ГРП. При этом на линии пересечения скважины с трещиной для давления задаются обычные граничные условия первого или второго родов, или же граничные условия, учитывающие скин-зону и влияние ствола скважины.

Первые исследования по моделированию процесса фильтрации в пластах с трещиной ГРП были рассмотрены в работах [69, 70], в которых для решений задач неустановившейся фильтрации использовался метод функций Грина. В этих работах давление вдоль трещины считается постоянным, для нахождения давления в пласте получено аналитическое выражение. Это выражение построено на основе суммирования конечного числа функций источников, равномерно распределенных вдоль трещины. Отдельно рассмотрены асимптотические представления решения для малых и больших времен.

В работе [69] описана задача нестационарной фильтрации в ограниченных и неограниченных пластах с учетом функций Грина. В работе [70] используются приближения распределения фильтрации через границы трещины ГРП для случая бесконечной проводимости. Выделены следующие режимы фильтрации: радиальная, линейная вертикальная из пласта к трещине, переходный режим и радиальный для потока из пласта к трещине.

Gringarten и др. в работе [70] представили использование метода граничных элементов для разработки решений неустановившегося давления для скважин с вертикальными трещинами методом адаптации аналогичных решений для теории теплопроводности. Данный метод был широко использован при анализах поведения неустановившегося давления в скважинах с вертикальными трещинами.

Метод функций Грина для построения нестационарных решений в пространстве изображений Лапласа был также предложен в работе [104].

Cinco-Ley et [60] впервые применили анализ нестационарного давления в скважинах с трещинами конечной проводимости. В этом методе использованы мгновенные функции Грина и функции источников, а также метод произведения Ньюмана, предложенный Грингартенем. Интеграл был дискретизирован по времени и пространству. Точность полуаналитического метода зависит от количества временных интервалов и выбранных отрезков длины трещины. Также поток жидкости по трещине имеет ступенчатое, а не плавное равномерное распределение.

В работе рассматривается билинейный режим фильтрации, моделирования в случае притока жидкости к скважине с вертикальной трещиной ГРП. Билинейный режим состоит из двух одномерных потоков взаимно перпендикулярных при фильтрации через боковые поверхности трещины ГРП из пласта, из трещины ГРП в скважину. Билинейный поток – два линейных потока сжимаемой жидкости в пласте и несжимаемый поток в трещине.

Н. Cinco-Ley и V. Samaniego [60] представили метод анализа

неустановившегося давления в скважинах с вертикальной трещиной. Этот метод основан на теории билинейного притока, которая учитывает неустановившийся линейный поток в трещине и в пласте. Целью этой работы являлось представление нового метода интерпретации данных по давлению на ранних временах для скважины, пересеченной вертикальной трещиной бесконечной или конечной проводимости. В представленной работе видно, что для промысловых величин безразмерного времени изменение давления зависит от двух параметров: от безразмерной проводимости трещины и безразмерного времени. В работе описывается скважина с вертикальной трещиной гидроразрыва с постоянным дебитом  $q$  в бесконечном, горизонтальном и изотропном пласте, состоящий из слабо сжимаемого флюида с сжимаемостью  $c$  и вязкостью  $\mu$ . Пористая среда имеет проницаемость  $k$ , пористость  $\phi$ , толщину  $h$  и начальное давление  $p_i$ . Скважина пересечена полностью проникающей пласт вертикальной трещиной полудлины  $x_f$ , ширины  $b_f$ , проницаемостью  $k_f$ , пористостью  $\phi_f$  и полной сжимаемостью  $c_{ft}$  (Рисунок 1.2).

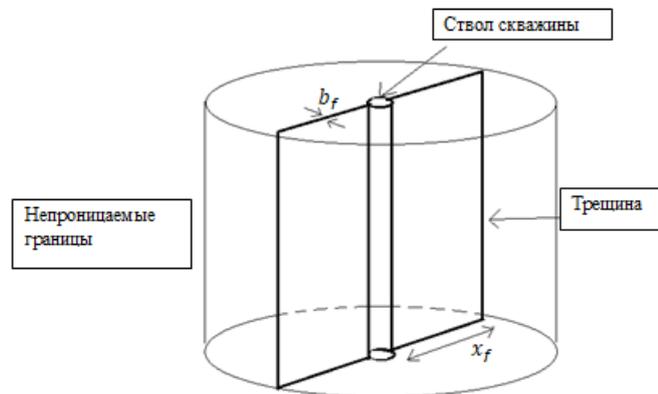


Рисунок 1.2 Вертикальная трещина конечной проводимости в бесконечном пласте

Давление в трещине и в пласте описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial^2 P_{fD}}{\partial x_D^2} + \frac{2}{(k_f b_f)_D} \frac{\partial P_D}{\partial y_D} \Big|_{y_D=0} = \frac{1}{\eta_{fD}} \frac{\partial P_{fD}}{\partial t_{Dx_f}} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial y_D^2} = \frac{\partial P_D}{\partial t_{Dx_f}} \quad 0 < y_D < \infty; t_{Dx_f} > 0 \quad (1.2)$$

при краевых условиях для трещины

$$P_{fD} = 0, \quad t_{Dx_f} = 0, \quad 0 \leq x_D < \infty, \quad \left. \frac{\partial P_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} = -\frac{\pi}{(k_f b_f)_D},$$

$$t_{Dx_f} > 0, \quad \lim_{x_D \rightarrow \infty} P_{fD} = 0, \quad t_{Dx_f} > 0.$$

для пласта

$$P_D = 0; \quad 0 < y_D < \infty; \quad t_{Dx_f} = 0, \quad P_D|_{y_D=0} = P_{fD}; \quad t_{Dx_f} > 0,$$

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} P_D = 0, \quad t_{Dx_f} > 0.$$

где  $P$  и  $P_f$  давление в пласте и в трещине, соответственно;  $x$  - направление притока в трещине,  $y$  - направление притока в пласте, перпендикулярное к плоскости трещины.

$$p_{fD} = \frac{kh[p_i - p_f]}{141.2qB\mu}, \quad p_D = \frac{kh[p_i - p]}{141.2qB\mu},$$

$$t_{Dx_f} = \frac{0.000264 kt}{\phi \mu c_t x_f^2}, \quad x_D = \frac{x}{x_f}.$$

Распределение забойного давления имеет следующий вид:

$$p_{wD} = \frac{\sqrt{\pi \eta_{fD}}}{(k_f b_f)_D} \int_0^{t_{Dx_f}} \frac{\operatorname{erfc} \left[ \frac{\eta_{fD} \lambda}{(k_f b_f)_D (t_{Dx_f} - \lambda)^{\frac{1}{2}}} \right]}{\sqrt{\lambda}} d\lambda. \quad (1.3)$$

В случае нестационарной фильтрации жидкости к трещине гидроразрыва конечной проводимости с удаленным контуром питания, в окрестностях скважины наблюдается четыре режима течения. Это кратковременное течение в трещине. В дальнейшем проявляется билинейный режим течения, который сменяется линейным течением из пласта в трещину. Последующий псевдорadiaльный режим течения наблюдается на удаленных частях пласта на финальной стадии притока жидкости к трещине

гидроразрыва. При определении режимов притока к трещине гидроразрыва применяются графики изменения давления и ее производной в скважине. Несмотря на использование диагностических графиков, выделение режимов течения осложняется влиянием объема ствола скважины, границ пласта и скин-эффектом прискважинной зоны.

Задача равномерного потока в скважину с бесконечной вертикальной трещиной рассматривалась в работе [56]. Получена формула для давления вдоль вертикальной трещины бесконечной проводимости в случае постоянного дебита:

В работах [89, 93] с использованием преобразования Лапласа и определяя линейный источник вдоль трещины через функцию Грина, получено выражение для давления:

$$\bar{P}_{DOR,inf}(|x_D| \leq 1, y_D = 0) = \frac{1}{2s\sqrt{u}} \int_0^{\sqrt{u}(1 \pm x_D)} K_0(z) dz \quad (1.4)$$

$$\text{Здесь } \int_0^\infty K_0(u) du = \frac{\pi}{2}.$$

С практической точки зрения для гидродинамических исследований пластов наиболее подходящими являются решения для моделей конечной проводимости трещины.

В [63] получено решение для безразмерного давления в скважине с вертикальной трещиной конечной проводимости в виде:

$$\begin{aligned} P_{CSDD,inf}(t_{LfD}, |x_D| \leq 1, y_D = 0) = & \quad (1.5) \\ & = \frac{1}{4} \int_0^{t_{LfD}} \int_{-1}^1 q_{fD}(x', \tau) \frac{\exp\left[-\frac{(x_{Df} - x)^2}{4(t_{LfD} - \tau)}\right]}{(t_{LfD} - \tau)} dx' d\tau \\ & \frac{\pi}{C_{fD}} \int_0^{x_D} \int_0^{x'} q_{fD}(x'', t_{LfD}) dx'' dx' + \frac{\pi x_D}{C_{fD}} + s_f q_{fD}(x_D, t_{LfD}) \end{aligned}$$

Cinco и Meng [59] используя преобразование Лапласа в уравнении (2.10) получили следующее представление для давления:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{CMD,inf}(|x_D| \leq 1, y_D = 0) = & \quad (1.6) \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{q}_{fD}(x', s) [K_0(|x_D - x'| \sqrt{u}) + K_0(|x_D + x'| \sqrt{u})] dx' \\ & - \frac{\pi}{C_{fD}} \int_0^{x_D} \int_0^{x'} q_{fD}(x'', s) dx'' dx' + \frac{\pi x_D}{s C_{fD}} + s_f q_{fD}(x_D, s) \end{aligned}$$

Это выражение может быть также вычислено только численно.

В представленной работе рассматривается случай расположения скважины с вертикальной трещиной ГРП в центре замкнутого прямоугольного элемента пласта и предлагается методика определения коэффициента продуктивности этой скважины для определенного момента, которая заключается в наложении данных давления, переведенных в безразмерный вид, на расчетные кривые зависимости безразмерного давления от времени, построенных для фиксированных значений отношения полудлин трещин к длине элемента, безразмерных проводимостей и соотношений сторон расчетного элемента. В этой работе предполагается однофазность флюида, поэтому полученная методика работает только при давлении выше давления насыщения. В работе представлены специальные корреляционные зависимости для нахождения дебита, учитывающие снижение давления ниже давления насыщения. M.J. Economides, K.G. Nolte учли зависимости, предложив методику нахождения коэффициента продуктивности при совместной неустановившейся фильтрации нефти и газа к скважине с трещиной ГРП.

Bennett и другие [54] представили численные и аналитические решения для скважин с вертикальными трещинами в слоистых пластах.

Bennett [55] предоставил обширные сведения о скважинах с большим количеством трещин, используя численное решение, и представил вычисленные табличные значения для различных входных и выходных граничных условий.

В работе [88] рассматривается аналитическое решение для расчета давления в скважине, пересекающейся трещиной конечной проводимости в

конечном прямоугольном пласте. Модель включает в себя эффекты влияния ствола скважины и фазовое расслоение (сегрегация фаз) в стволе скважины.

Применение метода граничных элементов при изучении поведения неустановившегося давления в вертикальных трещинах конечной проводимости было впервые использовано Cinco-Ley и др. [63]. Они разработали основную полуаналитическую модель, в которой геометрия трещины и пласта предполагались однородными. Их модель также учитывает, что высота трещины равна толщине пласта. Данная модель широко используется для анализа поведения неустановившегося давления в скважинах с трещинами конечной проводимости [60]. Она также была сопоставлена с большинством из более поздних приближенных моделей [51, 81].

В более поздних работах Cinco-Ley и Meng [59] представили модель трещины конечной проводимости для пластов с двойной пористостью, в которой также используется метод граничных элементов. Их решение является аналогом полуаналитического решения представленного в [63], кроме того, эта работа была выполнена на основе использования метода преобразований Лапласа. Решение для трещины с конечной проводимостью в пространстве Лапласа было разработано van Kruysdiik [100]. Одновременно и независимо от него в работе [63] Cinco-Ley, Meng и van Kruysdijk разработали решения для трещин конечной проводимости с учетом равномерной геометрии трещины и свойств материала.

Решение для безразмерного пластового давления для случаев бесконечного, однородного или изотропного пласта с учетом вертикальной трещины конечной проводимости было представлено Cinco-Ley и др. в работе [63]. Область трещины поперечного сечения перпендикулярна направлению потока и считается прямоугольником. Жидкость поступает в трещину через торцевую поверхность трещины. При этом не учитывается поток через концы трещины, так как ширина трещины очень мала по сравнению с длиной трещины. Скважина моделируется в качестве плоского

источника и предполагается, что дебит скважины постоянен. Трещина считается симметричной относительно ствола скважины. Течение жидкости в трещине является ламинарным и описывается законом Дарси.

Е. Ozkan, R. Raghavan в [89, 93] получили решения для нестационарной фильтрации методом преобразования Лапласа в бесконечном пласте.

В работах [60, 62, 63] получено решение для вертикальных трещин конечной проводимости. Трещины приняты прямоугольной формы, торцы - непроницаемые, приток реализован через боковую поверхность трещины ГРП. Течение в трещине ГРП считается одномерным. Показано [63], что для практических значений безразмерного времени характер давления зависит только от двух параметров: безразмерного времени и безразмерной проводимости трещины.

Модель билинейного потока также исследована в [61] и использована для исследования нестационарного режима давления в скважинах с вертикальной трещиной конечной проводимости. Модель позволяет учитывать влияние самой трещины, скин-эффекта и влияния ствола скважины для случаев когда на скважине заданы постоянный дебит или постоянное давление. Модель выполняется для малых времен и ее асимптотическое сочетание с известным полулогарифмическим асимптотическим решением для больших времен позволяет описать изменение давления во всем практически значимом диапазоне изменения времени. В работе отмечено, что на переходное поведение давления в скважине с трещиной в значительной степени влияет объем ствола скважины и повреждение поверхностного слоя трещины. Учет скин-зоны трещины описывает распределение стабилизированного потока вдоль трещины более равномерно. Скин-зону трещины можно приблизительно оценить по кратковременным данным с помощью метода сопоставления типовых кривых, если известна проницаемость трещины и запас в стволе скважины пренебрежимо мал. Увеличение производительности скважины, созданной

путем гидроразрыва пласта, зависит от характеристик трещины, таких как проводимость трещины, длина, проницаемость, а также от возможного повреждения пласта, непосредственно окружающего трещину. Неустановившийся поток в направлении скважины с вертикальной трещиной конечной проводимости, окруженной зоной повреждения, был изучен с использованием модифицированной версии модели.

Как известно продолжительность неустановившейся фильтрации в низкопроницаемых коллекторах значительно выше, по сравнению с высокопроницаемыми. В связи с этим, в случае высокопроницаемых коллекторов проведение исследований для нахождения коэффициента продуктивности скважины возможно лишь при стационарном режиме работы скважины. С целью возможности оценки коэффициента продуктивности по неустановившейся фильтрации, началось массовое внедрение ГРП для низкопроницаемых коллекторов. В работе [86] получены зависимости безразмерного распределения давления в скважине от времени для определения безразмерной проводимости трещины ГРП, описаны методы расчета коэффициента продуктивности для скважин с вертикальной трещиной гидроразрыва пластов.

В работе по расчету параметров пласта и трещины ГРП, коллектив авторов D. Malekzadeh, F.U. Khan, J.J. Day [84] получили решение для случая бесконечной трещины гидроразрыва в ограниченном пласте [70]. Основопологающим в их решение применена эффективная длина трещины, а не ее проводимость.

В работе D. Tiab [97] описал новый метод определения следующих параметров с использованием аналитических решений: проницаемость пласта, полудлина трещины и скин-фактор.

S.A. Holditch, R.A. Morse [73] и K.H. Guppy, H. Cinco-Ley [71] разработали методику по анализу уравнений фильтрации с трещиной ГРП с использованием полуаналитических решений и конечно-разностного подхода. Авторы показали, что для пороговых значений скорости

фильтрации в случае их превышения, необходимо принимать во внимание нелинейный член. В ином случае, по данным неустановившейся фильтрации, проводимость трещины уменьшится.

Edward J. и другие [72] разработали полуаналитическую модель для анализа давления в скважине с трещиной ГРП. Эта модель позволяет изучить неустановившейся режим работы скважины с трещиной гидроразрыва как в бесконечном, так и в ограниченном пласте.

В работе [53] представлено аналитическое решение для скважин с вертикальными трещинами конечной проводимости в случае постоянства давления. Приведен анализ типовых кривых с асимптотическим подходом для псевдорadiaльного потока и сравнение с представленными моделями. Prats [94] и др. получены решения для распределения давления в случае цилиндрической геометрии.

Динамика неустановившегося давления в пласте с трещиной ГРП подробно рассматривается в [72] для двух основных моделей – когда на забое скважины задано постоянное давление или постоянная скорость. Отмечается, что модель описывающая режим постоянного дебита используется для гидродинамических исследований. Решения полученные в режиме постоянного давления используются в анализе и определении дебита скважины в зависимости от параметров системы. В работе анализируется применение метода типовых кривых для основных режимов течения в системе пласт-скважина: линейный в трещине, билинейный в трещине и в пласте, линейный в пласте. При этом учитывается эффект после притока в скважине с трещиной конечной длины.

Аналитические решения для фильтрации с вертикальной трещиной ГРП при наличии скин-зоны вдоль трещины ГРП и влияния ВСС (влияние ствола скважины), полученные в пространстве изображений Лапласа описаны в работе [104]. Для численной реализации использован алгоритм Стехфеста, в результате получены кривые изменения забойного давления и, соответственно, ее производные от времени с учетом скин-эффекта и ВСС –

типовые кривые распределения давления, использование которых позволяет определить коллекторские свойства пласта и трещины ГРП.

В работах [61, 104] описаны следующие основные виды повреждения трещин ГРП: «choked fracture skin» - нарушение внутри самой трещины (снижение проницаемости проппантного состава) и «fracture-face skin» - нарушение на поверхности пласт-трещина, проявившееся в результате фильтрационной «корки» или в результате прохождения полимера. Нарушение возникает, когда проппант внутри трещины раздавливается, внедряется вблизи ствола скважины. В работе представлена оценка влияния этой модели на стационарный и нестационарный поток.

В работах [72, 104] представлено рассмотрение моделей билинейного притока в приближении несжимаемости трещины с флюидом.

В [26] З.М. Нагаева и В.Ш. Шагапов рассмотрены решения по добыче жидкости из скважины при работе с постоянным дебитом и давлением. Авторами получены точные аналитические решения для определения влияния свойства пласта и трещины, ее коллекторских параметров на динамику изменения давления и дебита скважины при работе при постоянном давлении и дебите. В пласте течение принято одномерным. Для случая фильтрации в режиме постоянного расхода получено выражение, описывающее закон падения давления в скважине пропорционально  $t^{1/4}$ .

В работе [47] представлены решения для работы скважины с трещиной ГРП бесконечной и конечной длины при постоянном дебите и давлении. Получены аналитические выражения на основе методики изменения стационарных состояний. Представленный анализ результатов следующий: в начальный момент фильтрации вдоль стенок трещины ГРП скорость фильтрации  $u_p$  намного меньше, чем нормальная составляющая к стенке  $v_p$  ( $v_p \gg u_p$ ).

В работе [48] рассмотрена задача о выходе процесса функционирования скважины на стационарный режим при постоянном

перепаде давления между забойным и пластовыми значениями, а также при постоянном дебите. Построены точные и приближенные аналитические решения, описывающие фильтрационные течения в системе «скважина–трещина–пласт». Получены формулы, определяющие дебит скважины (аналоги формулы Дюпюи). Отметим, что в этой работе, как и в предыдущей, распределение давления в пласте не рассматривается.

В работе [27] рассмотрена модель в приближении билинейной фильтрации. Модель учитывает скин-эффект на границе раздела пласт–трещина и эффект влияния на распределение давления объема ствола скважины.

Уравнения для забойного давления в работе [33], полученные с учетом скин-фактора от времени  $t$  и безразмерных параметров рассматриваемой системы используются типовой кривой. В работе отмечено, что на качество проведения ГРП влияют следующие факторы: качество околотрещинной зоны пласта, скин-зоны (fluid loss damage zone). От параметров скин-зоны зависят дебит и коэффициент продуктивности скважины. Наличие этой зоны описывается граничным условием третьего рода для давления.

Хасанов М.М., Головнева О.Ю. в работе [25] получено аналитическое решение с учетом трилинейной модели фильтрации жидкости к скважине. Представленная в работе аналитическая модель применима для определения дебита скважины с трещиной гидроразрыва и позволяет проводить быстрые расчеты.

Достаточно много работ рассматривают численные модели течения жидкости к скважинам с трещинами гидроразрыва. При этом существуют сложности при построении разностной модели трещины, когда ее ширина намного меньше размеров сетки при выборе разностных сеток. С целью устранения данных проблем описано множество методов: ремасштабирование (upscaling) параметров пласта и жидкости, ячеек сетки [64]; применение эквивалентного радиуса скважины и отрицательного скин-фактора в призабойной ее зоне [83]; указание псевдопроницаемости ячеек

[68]. Для решения проблем также используются ряды точечных источников для замены трещины, таким образом определяя дебит скважины (принцип суперпозиции) [64]. В работе [57] сделан следующий вывод о том, что корректное моделирование нестационарной фильтрации жидкости малой подвижности затрудняет крупномасштабная сетка из-за размеров ячейки, так как их размер значительно больше характерных значений физических параметров. Также следует отметить, что изменение размеров ячеек увеличивает период расчета полученных моделей и влияет на сходимость рассматриваемых расчетов. В представленной работе описывается, что отложения асфальтенов сильно снижают проницаемость коллектора, вызывая снижение добычи. Целью работы являлось создание численной модели для описания поврежденной зоны пласта в нетрадиционных коллекторах. Исследование описывает влияние различных факторов, влияющих на изменение проницаемости трещины. Показано, что отложения асфальтенов могут частично или полностью закупоривать трещины. Анализ чувствительности показал, что длительное время добыча и высокая концентрация асфальтенов оказывают неблагоприятное влияние на проницаемость трещины.

В работе Mohammed H. и Gringarten представили математическую модель анализа нестационарных режимов дебита в горизонтальных скважинах с многостадийным ГРП. В представленной модели введено понятие скин-фактора. Решение получено с использованием метода точечных источников, преобразования Лапласа и численного моделирования. Представлено описание режимов течения горизонтальных скважин с многостадийным ГРП на основе переходных режимов дебита, включая скин-эффект, показана оценка скин-фактора, полудлина трещины, проводимость трещины.

В работе [82] авторы представили для малых времен разбивку режимов фильтрации: линейная фильтрация в трещине ГРП, линейная фильтрация из коллектора в трещину ГРП и параллельный линейный поток в трещине ГРП.

Полученная аналитическая модель получила название – трилинейный поток. Решения получены методом преобразования в пространстве Лапласа. Трилинейный поток на ранних временах включает в себя следующие режимы течения: билинейный, линейный, псевдорадиальный.

Аналитические решения для пластов с вертикальными трещинами гидроразрыва на основе билинейных и трилинейных моделей потока для случаев с постоянными значениями давления и дебита в ограниченных и бесконечных пластах построены в [51]. В отличие от [82] в данной работе учитывается линейный скин на трещине, проводимость трещины, влияние объемов ствола скважины и трещины, расслоение фаз в стволе. Результаты расчетов по модели позволяют расширить решения при неустановившемся режиме для псевдорадиального потока. В целях облегчения перехода к псевдорадиальному решению представлены характерны кривые, касающиеся эффективного радиуса ствола скважины для различных проводимостей трещин, скина, коэффициента влияния ствола скважины. Представленные типовые кривые идентифицируют билинейный, линейный и псевдорадиальные режимы течения.

Полуаналитический метод решения задачи нестационарного притока жидкости к скважине с трещиной ГРП конечной проводимости рассмотрена в [23].

В [103] рассматривается так называемая трилинейная псевдорадиальная модель (ТПР). В этой модели использовано понятие «десуперпозиции» представленное в [56], чтобы «объединить» задачу трилинейного потока (не модель радиального потока) с решением Ozkan O. и Raghavan R. [89, 93] для преобразования Лапласа в случае равномерного потока в вертикальной трещине бесконечной проводимости. Таким образом, это гибридное решение основано на объединении решения для трилинейной модели вертикальной трещины конечной проводимости и решения для однородного потока в вертикальной трещине бесконечной проводимости (модель псевдо-радиального потока).

С физической точки зрения трилинейная модель потока в трещине Lee и Brockenbrough [81] аппроксимирует поток в трещиноватом пласте лучше, чем модель билинейного потока [60, 104].

Olarewaju J. S. и Lee W. J. [88] расширили модель трилинейного потока для скважины с трещиной ГРП в ограниченном прямоугольном пласте конечных размеров.

Трилинейная модель для пласта и трещины конечных размеров исследована в [88]. Аналитические решения для коллекторов с вертикальными трещинами конечной проводимостью разрабатываются на основе билинейной и трилинейной моделей течения трещины. Эти решения включают влияние скин-зоны, проводимость трещины, отношение длины трещины к высоте пласта, влияние ствола скважины и объема трещины. Простой метод решения этих задач используется для применения нестационарных решений для трещины на псевдорadiaльный режим течения для различных параметров трещины. Для облегчения перехода к псевдорadiaльным решениям представлены типовые кривые, связывающие эффективный радиус ствола скважины для различных значений проводимости трещины, скин-фактора и влияния ствола скважины. Представленные в работе типовые кривые идентифицируют линейный, билинейный, пластовый линейный и псевдорadiaльный режимы течения. Примеры использования практических задач анализируются с использованием методов типовых кривых.

В работе [51] представлен полный набор аналитических решений для реакции скважины с гидравлическим разрывом на давление, основанной на трехлинейном режиме течения в трещине. Уравнения нестационарного течения в сочетании с методом оптимизированного решения используются для обеспечения надежного метода анализа скважин с трещинами в экстремальных временных диапазонах с различными параметрами трещин.

Система уравнений фильтрации описывающая потоки в пласте и трещине (трилинейный поток) решается использованием метода

преобразования Лапласа. При этом конечным выражением является полученное уравнение для определения забойного давления в пространстве изображений Лапласа. Переход к оригиналам реализуется использованием алгоритма Stehfest. Показано, что режимы течения в системе пласт-скважина в определяющей степени зависят от безразмерной проводимости трещины. В частности, длительность билинейного режима возрастает по мере снижения проводимости трещины. В пласте с безразмерной проводимостью трещины менее 80, линейный поток в пласте не развивается и образуется переход от билинейного к псевдорadiaльному потоку.

В последние годы модели билинейной и трилинейной фильтрации получили дальнейшее развитие для описания фильтрации в системе горизонтальная скважина-трещина гидроразрыва. В работе [106] предложена модель притока к горизонтальной скважине с трещинами гидроразрыва пласта для месторождений сланцевой нефти. Показано, что при ГРП в сланцевых коллекторах возникает сеть трещин, которая соединяется с естественными трещинами. В результате улучшаются фильтрационно-емкостные свойства сланцевого коллектора вблизи трещин ГРП (образовывается так называемый искусственный объем пласта) [108, 109]. Принимая во внимание, что продуктивность горизонтальной скважины для низкопроницаемых коллекторов с трещинами гидроразрыва описывается инейными перетоками в пласте. В [110] описана аналитическая модель, в которой линейное течение происходит в следующих трех областях: в трещине ГРП, в рабочем объеме пласта и ее внешней части. Принято, что вся область сланцевого коллектора между трещинами гидроразрыва пласта является простимулированным объемом коллектора и имеет повышенную проницаемость за счет образования сети микротрещин при ГРП. Представленная в работе [111] модель подтверждена полуаналитически. В дальнейшем были разработаны модели для линейной фильтрации к горизонтальной скважине с трещинами гидроразрыва для различных видов течений [112, 113, 114]. Численные модели были предложены в работах [115,

116] и полуаналитическая модель, позволяющие смоделировать двумерное течение и описать фильтрационные характеристики пласта.

Аналитическая модель линейной фильтрации к горизонтальной трещине ГРП для случая малопроницаемых коллекторов точно позволяет определить продуктивность скважины, несмотря на простоту модели. В работе [1] получено аналитическое решение задачи линейной фильтрации в низкопроницаемых коллекторах для случая горизонтальной скважины с трещинами гидроразрыва. При этом в пласте рассматривается совокупность нескольких одномерных моделей, которые взаимосвязаны с соответствующими выбранной геометрии потоков граничными условиями.

Завершая обзор приведем еще одну модель, описывающую задачу об истощении пласта, граничащего с пластом большой мощности, но малой проницаемости [3]. Эта модель не имеет непосредственного отношения к ГРП, но модель фильтрации в системе двух слоистых пластов является математическим аналогом модели билинейного потока.

Рассматривается двухслойный пласт при выполнении условий  $kh \gg k_1H$ , при этом  $H \gg h$ . Область фильтрации можно представить в виде:

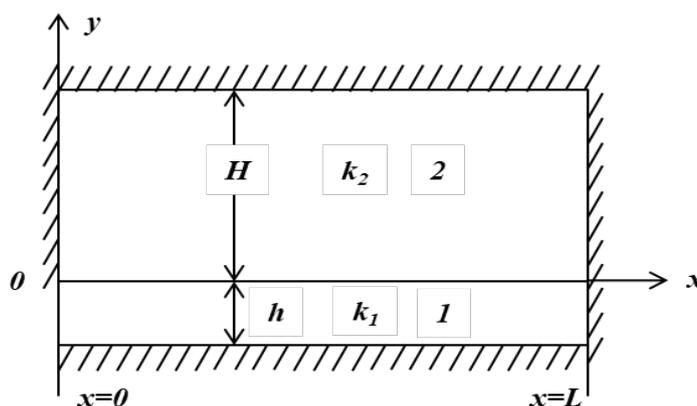


Рисунок 1.3 Область фильтрации

В момент  $t = 0$  из нижнего пласта начинается отбор флюида с постоянным расходом  $Q$ . Рассматривается замкнутая система, границы  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  непроницаемы. Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (-h \leq y \leq 0);$$

$$\begin{aligned} & (0 \leq x \leq L); \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \kappa_1 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (0 \leq y \leq H); \end{aligned}$$

При условиях:

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=+0} &= k \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=-0}; \quad p|_{y=+0} = p|_{y=-0} \\ \frac{\partial}{\partial y} p(0, y, t) &= 0; \quad k \int_{-h}^0 \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} dy = Q; \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (y > 0). \end{aligned}$$

Далее используя исходные предположения о тонком высокопроницаемом и слабопроницаемом верхнем пластах приведено упрощение вышеприведенной системы до следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \kappa_1 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad [p = p(x, y, t); y > 0]; \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\kappa k_1}{hk} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=0} \quad [P = P(x, t)]; \\ p(x, y, 0) &= P(x, 0) = P_0; \quad p(x, 0, t) = P(x, t); \\ \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=H} &= 0; \quad \frac{kh}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q = const; \quad \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned}$$

Видно, что эта задача совпадает с моделью билинейного притока жидкости в системе пласт-трещина. В работе [3] получены выражения для давления на галерее  $P(x=0, t)$  для разных временных этапов процесса. Практическая значимость данной модели связана с оценкой запасов нефти или газа в слоистых пластах, частично сложенных малопроницаемыми сланцевыми отложениями.

Проведенный выше обзор современного состояния теоретических исследований нестационарных моделей в пластовых системах с трещинами гидроразрыва показывает, что значительное внимание в существующих работах уделяется определению динамики давления на забое скважины в рамках моделирования ГДИС. Вместе с тем актуальными являются работы по описанию моделей систем пласт-трещина ГРП-скважина для

нестационарной фильтрации при постоянном дебите и давлении скважины, с целью прогнозирования добычи. Аналитические модели, основанные на билинейном и трилинейном потоках, последние два десятилетия получали широкое развитие для анализа и прогнозирования добычи в пластах с горизонтальными скважинами со сплошной геометрией разветвленных трещин. В таких пластах наряду с первичной сетью трещин активизируется сеть вторичных мини-трещин. При этом вокруг скважины выделяются несколько областей – трещина ГРП, стимулированная область и внешняя область, в каждой из которых определяется доминирующее направление фильтрационных потоков. Сеть вторичных мини-трещин образуют стимулированную область, проницаемость которой отличается от проницаемости трещины и пласта.

Необходимы более эффективные методы анализа пластов с трещинами гидроразрыва, о чем свидетельствует возрастающая потребность в более широком использовании массивного гидроразрыва пласта для разработки ранее нерентабельных запасов. Тенденция в нефтяной науке заключается в разработке более быстрых методов решения и более точных решений для определения нестационарного давления, в системе пласт-трещина-скважина при различных граничных и начальных условиях, отражающих реальные ситуации.

Проведенный обзор современного состояния теоретических исследований нестационарных моделей в пластовых системах с трещинами гидроразрыва показывает, что значительное внимание в существующих работах уделяется определению динамики давления на забое скважины в рамках моделирования ГДИС. Вместе с тем актуальными являются исследования нестационарных гидродинамических процессов с целью прогнозирования добычи. Аналитические модели билинейного и трилинейного потоков последние два десятилетия получали широкое развитие для анализа и прогнозирования добычи в пластах с горизонтальными скважинами со сплошной геометрией разветвленных

трещин. В таких пластах наряду с первичной сетью трещин активизируется сеть вторичных мини-трещин. При этом вокруг скважины выделяются несколько областей – трещина ГРП, стимулированная область и внешняя область, в каждой из которых определяется доминирующее направление фильтрационных потоков. Сеть вторичных мини-трещин образуют стимулированную область, проницаемость которой отличается от проницаемости трещины и пласта

## ГЛАВА 2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ПЛАСТЕ С ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

### 2.1. Постановка задач

Моделирование в теории фильтрации, как в любой отрасли естественных наук, развивается от простого к сложному. Здесь можно указать следующую последовательность: стационарная фильтрация – нестационарная фильтрация; несжимаемая среда – упругая среда; бесконечный пласт – ограниченный пласт; скважины нулевого радиуса – скважина конечного радиуса. Такая иерархия соблюдалась и при создании теоретических основ важной прикладной области гидродинамических методов исследования пластов и скважин. Теоретической основой первых методов гидродинамических исследований являлась так называемая основная формула теории упругого режима фильтрации. Эта формула описывает распределение давления в неограниченном горизонтальном пласте постоянной толщины, когда в центре этого пласта работает скважина нулевого радиуса (точечный сток) с постоянным дебитом. Дальнейшие уточнения модели проводились в плане учета конечности радиусов скважины и пласта. В настоящей работе мы следуем аналогичной методике – во второй главе рассматривается более простая модель – модель трещины бесконечной протяженности, а в главе 3 представлена модель трещины конечной длины.

В бесконечном пласте, насыщенном однородным слабосжимаемым флюидом, имеется скважина, которая пересекается симметричной вертикальной трещиной ГРП по всей толщине пласта. Гидравлическая связь пласта и скважины реализуется только через боковую поверхность трещины, так как ее раскрытие (ширина) намного меньше чем длина. Начальное давление в пласте и в трещине одинаково, при  $t=0$  скважина запускается в

работу. При этом в трещине и в пласте создается нестационарный фильтрационный поток. С учетом симметрии геометрии задачи относительно скважины и трещины рассматривается 1/4 часть области фильтрации (рис. 2.1).

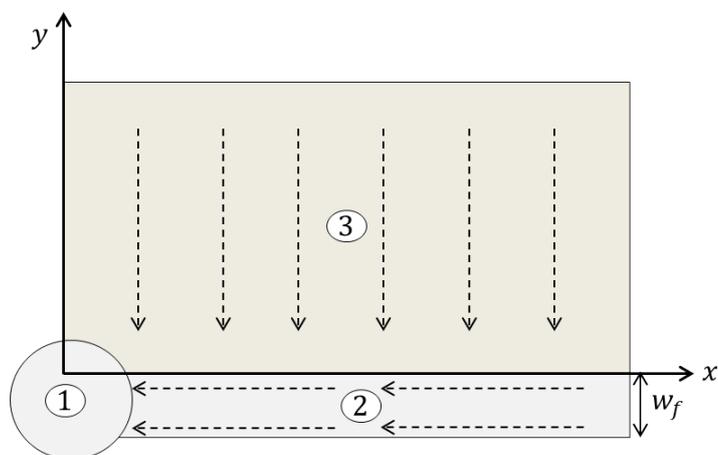


Рисунок 2.1. Схема области течения (1/4 часть области фильтрации): 1 – скважина, 2 – трещина, 3 – пласт.

Поток в трещине считается одномерным (по оси  $x$ ), так как ширина трещины намного меньше, чем длина. Поток в пласте (по оси  $y$ ) также одномерен и перпендикулярен боковой поверхности трещины. Таким образом, имеет место билинейный режим течения, представляющий собой совокупность одновременно существующих в трещине и в пласте двух одномерных взаимно-перпендикулярных потоков [21, 60, 104, 39, 40].

Обоснование использования модели одномерного потока в пласте рассматривался в ряде работ [3, 26, 31]. Так в работе [81] представлено математическое обсуждение о доминирующем направлении потока в пласте. Используя интегральное преобразование Лапласа для давления в пласте, получено двухмерное уравнение:

$$s\bar{P}_r = \frac{\partial^2 \bar{P}_r}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 P_r}{\partial \bar{y}^2},$$

здесь  $s$  – параметр преобразования Лапласа.

Решение этого уравнения построено методом разделения переменных Фурье. Зависимость от горизонтальной координаты  $\bar{x}$  в этом решении определяется множителем  $\cos \frac{n\pi}{\bar{x}}$ . Для практически значимых величин  $n$  и  $\bar{x}$ ,  $\frac{n\pi}{\bar{x}} \ll 1$ . Тогда зависимость от  $\bar{x}$  в решении выпадает и можно считать, что  $\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}) \approx \bar{P}_r(\bar{y})$ .

Таким образом, для определения давления в пласте и трещине принимаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = \kappa_r \frac{\partial^2 P_r}{\partial y^2} \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \kappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\kappa_f k_r}{w_f k_f} \frac{\partial P_r}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad -w_f \leq y \leq 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $P$  - давление, индексы  $r$  и  $f$  относятся к пласту и трещине,  $x$  и  $y$  - координаты,  $t$  - время,  $\kappa$  - коэффициент пьезопроводности,  $k$  - проницаемость,  $w_f$  - полуширина трещины.

Начальные условия для давлений:

$$P_r(x, y, t = 0) = P_f(x, t = 0) = P_0$$

На линии раздела пласт - боковая поверхность трещины выполняется условие непрерывности давлений:

$$P_r(x, y = 0, t) = P_f(x, y = 0, t) \quad (2.3)$$

На непроницаемых границах выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial P_r(x, y = \infty, t)}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

$$P_i(x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty, \bar{t}) = P_0 \quad (i = r, f) \quad (2.5)$$

На линии пересечения трещины и скважины выполняются условия, описывающие эксплуатацию скважины в режимах заданной депрессии  $P_0$  -  $P_c$  или заданного дебита  $Q$ :

$$P_f(x = 0, t) = P_c \quad (2.6)$$

$$\frac{k_f h_r w_f}{\mu} \frac{\partial P_f(x=0, t)}{\partial x} = Q \quad (2.7)$$

Здесь  $Q$  – часть дебита, поступающего в скважину из рассматриваемой области фильтрации,  $\mu$  – вязкость жидкости,  $h_r$  – толщина пласта,  $x_f$  – полудлина трещины.

Соответственно имеют место первая ((2.1)-(2.6)) или вторая краевые задачи ((2.1)-(2.5), (2.7)).

В безразмерных переменных:

$$\bar{P}_r = \frac{P_r - P_0}{P^*}, \bar{P}_f = \frac{P_f - P_0}{P^*}, P_1^* = P_c - P_0, P_2^* = \frac{Q\mu}{k_r h_r}, \bar{y} = \frac{y}{x_f}, \bar{x} = \frac{x}{x_f}, \bar{t} = t \frac{\kappa_r}{x_f^2}$$

Эти задачи имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{P}_r}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = a \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{x}^2} + b \frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} \quad (2.9)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t} = 0) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t} = 0) = 0 \quad (2.10)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) \quad (2.11)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t}) = 1 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \frac{b}{a} \quad (2.13)$$

$$\bar{P}_i(\bar{x} \rightarrow \infty, \bar{y} \rightarrow \infty, \bar{t}) = 0 \quad (i = r, f) \quad (2.14)$$

Здесь  $a = \kappa_f / \kappa_r$ ,  $b = a(k_r / k_f)(x_f / w_f)$ , величина  $a/b$  совпадает с безразмерной проводимостью трещины, впервые введенной в [60] -  $F_{cd} = \frac{k_f w_f}{k_r x_f}$ .

Представленные модели являются инвариантными относительно изменения знаков дебита скважины и депрессии на пласт. Полученные модели позволяют описать процессы закачки жидкости в пласт через

скважину с трещиной ГРП и отбора жидкости из пласта через трещину и скважину.

В данной и последующих главах рассматривается фильтрация в системе пласт-трещина ГРП упругой жидкости. Полученные решения можно применить и для случая фильтрации газа. При этом давление  $\bar{P}$  заменяется функцией Лейбензона [4]

$$\varphi(\bar{P}) = \int \frac{k(P)\rho(P)}{\mu(P)} + const$$

Тогда вместо уравнения пьезопроводности рассматривается уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \kappa(\varphi)\Delta\varphi.$$

## 2.2 Решение первой краевой задачи

Для решения задачи используем метод интегральных преобразований Лапласа по переменной  $t$  [9]

$$\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, s) = \int_0^{\infty} \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, t) e^{-st} dt = L(\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, t))$$

Задача (2.8) – (2.12), (2.14) в пространстве изображений преобразования Лапласа преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 \bar{P}_r}{dy^2} = s \bar{P}_r \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2 \bar{P}_f}{d\bar{x}^2} - \frac{s}{a} \bar{P}_f + \frac{b}{a} \frac{d\bar{P}_r}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = 0 \quad (2.16)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, s) = \bar{P}_f(\bar{x}, s) \quad (2.17)$$

$$\bar{P}_f(0, s) = \frac{1}{s} \quad \bar{P}_i(\bar{x} \rightarrow \infty, \bar{y} \rightarrow \infty) = 0, \quad i = (r, f). \quad (2.18)$$

Задача (2.15) – (2.18) решается методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений [15]. В начале выписывается решение уравнения (2.15) с учетом граничных условий (2.17) и (2.18). Подставляя это

выражение в (2.16), получаем уравнение, которое решается с учетом условий (2.18). В итоге получаются выражения для давлений в пространстве изображений Лапласа:

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s) = \frac{1}{s} \exp\left(-\bar{x} \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{s}}\right) \exp(-\bar{y} \sqrt{s}) \quad (2.19)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = \frac{1}{s} \exp\left(-\bar{x} \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{s}}\right) \quad (2.20)$$

Переход к оригиналам в выражениях (2.19) и (2.20) дает распределение давления в пласте и в трещине.

### 2.2.1 Решение, полученное на основе использования общих правил и теорем теории преобразований Лапласа

Выражение (2.20) представим в виде

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = \frac{1}{b \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \exp\left(-\frac{b\bar{x}}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}}\right) = F\left(\frac{s}{b^2}\right)$$

В теории преобразований Лапласа имеет место однозначное соответствие между оригиналом и изображением  $f(t) \rightleftharpoons F(s)$  и выполняется теорема подобия [9]

$$f(\lambda t) \rightleftharpoons \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

Согласно этой теореме

$$F\left(\frac{s}{b^2}\right) \rightleftharpoons b^2 f(b^2 t)$$

Тогда выражение  $\bar{P}_f(\bar{x}, s)$  представляется в виде:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} L[V(\bar{x}, b^2 \bar{t})], \quad L[V(\bar{x}, b^2 \bar{t})] = \frac{b^2}{\sqrt{s}} \exp\left(-\frac{b\bar{x}}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \sqrt{s}}\right) \quad (2.21)$$

Далее, используя теорему о свертке [9]

если

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(\bar{t} - \tau)d\tau$$

и формулу обращения преобразования Лапласа [9]  $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$

( $L^{-1}$ –символ обратного преобразования Лапласа) из (2.21) имеем:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{b} \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{\pi(\bar{t} - \tau)}} V(\bar{x}, \tau) d\tau. \quad (2.22)$$

Для нахождения  $P(\bar{x}, \bar{t})$ , используя правило операционного исчисления [11]

$$\frac{g(s + \sqrt{s})}{\sqrt{s}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{\bar{t} - u}} \exp\left(\frac{u^2}{4(\bar{t} - u)}\right) f(u) du, f(u) = L^{-1}g(s),$$

во втором выражении (2.21) переходим к оригиналу:

$$V(\bar{x}, b^2\bar{t}) = \frac{b^3\bar{x}}{2\pi\sqrt{a}} \int_0^{b^2\bar{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau - u)} - \frac{b^2\bar{x}^2}{4au}\right) \frac{du}{\sqrt{b^2\tau - uu}\sqrt{u}} \quad (2.23)$$

Подставим это выражение в (2.22):

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\bar{x}b}{2\pi\sqrt{\pi a}} \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{\bar{t} - \tau}} \int_0^{b^2\bar{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau - u)} - \frac{b^2\bar{x}^2}{4au}\right) \frac{du}{\sqrt{b^2\tau - uu}\sqrt{u}} d\tau.$$

Изменим в этом выражении порядок интегрирования используя соответствующее свойство двойных интегралов [36]:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\bar{x}b}{2\pi\sqrt{\pi a}} \int_0^{b^2\bar{t}} \frac{1}{u\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{b^2\bar{x}^2}{4au}\right) \int_{\frac{u}{b^2}}^{\bar{t}} \frac{\exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau - u)}\right) d\tau}{\sqrt{(b^2\tau - u)(\bar{t} - \tau)}} du.$$

Внутренний интеграл вычисляется и выражается через дополнительную функцию ошибок  $erfc\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-u^2} du$ :

$$\int_{\frac{u}{b^2}}^{\bar{t}} \frac{\exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau - u)}\right)}{\sqrt{b^2\tau - uu}\sqrt{u}} d\tau = \frac{\pi}{b} erfc \frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t} - u}}.$$

Этот интеграл вычисляется по методике, предложенной в работах [29, 32].

Таким образом, имеем:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\bar{x}b}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^{b^2\bar{t}} \exp\left(-\frac{b^2\bar{x}^2}{4au}\right) \operatorname{erfc} \frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t}-u}} \frac{du}{u\sqrt{u}} \quad (2.24)$$

Произведем замену  $u$  на  $\rho^2 b^2 \bar{t}$ :

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right) \operatorname{erfc} \frac{\rho^2 b \sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{(1-\rho^2)}} \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (2.25)$$

Аналогично из (2.19) для распределения давления в пласте получаем следующее выражение:

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right) \operatorname{erfc} \frac{\bar{y} + \rho^2 b \bar{t}}{2\sqrt{\bar{t}(1-\rho^2)}} \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (2.26)$$

В конечном виде, распределение давления в трещине и в пласте описываются выражениями (2.25) и (2.26).

Рассмотрим анализ выражения (2.25). Подинтегральная функция  $F(\rho)$   $F(\rho) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right) \operatorname{erfc} \frac{\rho^2 b \sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{\rho^2}$  в области определения  $0 < \rho < 1$  является немонотонной функцией, так как  $F(0) = 0, F(\infty) = 0$ . Для типичных значений параметров  $F(\rho)$  является дельтаобразной функцией с максимумом при малых значениях  $\rho \ll 1$ . Этот максимум  $F_{max} \approx e^{-1} \frac{4a\bar{t}}{\bar{x}^2}$  достигается при  $\rho \approx \frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}}$ . Таким образом, при  $x \rightarrow 0$  подинтегральная функция и сам интеграл в (2.25) стремятся к бесконечности, а прединтегральный множитель стремится к 0. По всей вероятности, взаимная компенсация этих предельных соотношений, обуславливает выполнение граничного условия  $\bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t}) = 1$ , что не очевидно из выражения (2.25). Отметим, что выполнение этого граничного условия можно показать строго,

используя в (2.25) замену переменной  $u = \frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}\rho}}$  и осуществляя переход  $\bar{x} \rightarrow 0$ .

Рассмотрим частный случай, когда пренебрегается сжимаемостью трещины. Из ранее описанного следует, что выражение давление в трещине в пространстве изображений имеет вид:

$$\bar{P}_f = \frac{1}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \bar{x} \sqrt{\sqrt{s}}\right) \quad (2.27)$$

Это выражение соответствует  $\frac{s}{a} \ll \frac{b}{a} \sqrt{s}$ , другими словами  $\sqrt{s} \ll b$  или  $\frac{1}{\sqrt{\bar{t}}} \ll b$ .

Рассмотрим переход в (2.27) к оригиналу. Это выражение представим в виде:

$$\bar{P}_f = \frac{1}{\sqrt{s}} L[V], \quad L[V] = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-c \sqrt{\sqrt{s}}\right), \quad c = \sqrt{\frac{b}{a}} \bar{x}. \quad (2.28)$$

Используя теорему о свертке и соответствие [11]

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi\bar{t}}}$$

получим

$$\bar{P}_f = \int_0^{\bar{t}} \frac{V(\bar{x}, \tau)}{\sqrt{\pi(\bar{t} - \tau)}} d\tau. \quad (2.29)$$

Следовательно, необходимо из (2.28) найти  $V(\bar{x}, \bar{t})$ , тогда изначальное выражение оригинала находится из формулы (2.29).

Таким образом, воспользовавшись правилом операционного исчисления [11]

$$L^{-1}\left[\frac{g(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi\bar{t}}} \int_0^{\infty} f(u) \exp\left(-\frac{u^2}{4\bar{t}}\right) du,$$

$$\text{где } f(t) = L^{-1}g(s) = L^{-1}[e^{-c\sqrt{s}}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{c}{\bar{t}\sqrt{\bar{t}}} \exp\left(-\frac{c^2}{4\bar{t}}\right),$$

из (2.28) имеем:

$$V(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi\bar{t}}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{4\bar{t}} - \frac{c^2}{4u}\right) \frac{du}{u\sqrt{u}}$$

Подставим это выражение в (2.29) и изменим порядок интегрирования:

$$\bar{P}_f = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{c^2}{4u}\right) \frac{du}{u\sqrt{u}} \int_0^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{4\tau}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\bar{t}-\tau)}}$$

Внутренний интеграл вычисляется:

$$\int_0^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{4\tau}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\bar{t}-\tau)}} = \pi \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{\bar{t}}}\right)$$

В конечном виде получается следующее выражение для определения распределения давления в трещине:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{b}{a}} \bar{x} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{b\bar{x}^2}{4a\rho}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\bar{t}}}\right) \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho}} \quad (2.30)$$

Полученное приближение относится к описанию билинейного режима течения, для которого характерна зависимость давления в скважине от времени в степени одна четвертая. Из приведенного выше неравенства  $\sqrt{s} \ll b$  (см. формулу (2.27)) следует, что данное приближение имеет место при выполнении условия

$$t \gg t_* = \left(\frac{m_f}{m_r}\right)^2 \frac{w_f^2}{\kappa_r}$$

С точностью до постоянного множителя выражение для  $t_*$  совпадает с аналогичным выражением в работе [26]. Одним из основных параметров определяющим характерное время  $t_*$  является полуширина трещины  $w_f$ . Для трещин ГРП (малые значения  $w_f$ ) приведенные выше условие выполняется. В случае моделирования фильтрации в двухслойных пластах [3] (см. гл. 1, рис. 1.3), когда  $w_f$  необходимо заменить толщиной нижнего малопроницаемого пласта  $h_f$  ( $h_f \gg w_f$ ), приведенное выше неравенство

может не выполняться и в уравнении (2.9)  $\frac{\partial P_f}{\partial t} \neq 0$ . Таким образом, рассматриваемую выше модель в общем виде с учетом сжимаемости можно использовать для исследования фильтрации в двухслойных пластах.

### 2.2.2 Решение, полученное с использованием метода контурного интегрирования

Для перехода к оригиналу в (2.19) – (2.20) применим теорему обращения Меллина [9]. Необходимо вычислить контурный интеграл для определения давления согласно (2.20):

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp\left(s\bar{t} - \bar{x} \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \quad (2.31)$$

Подынтегральная функция имеет единственную особую точку в начале координат – это точка ветвления. Поэтому эта функция является однозначной и аналитической на всей плоскости комплексной переменной  $s = \gamma + i\sigma$  с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси, берега которого соединены дугой окружности, огибающей начало координат. Согласно теореме Коши [24] интегрирование по отрезку  $(\gamma - i\sigma, \gamma + i\sigma)$  может быть заменено интегрированием вдоль любой кривой, которая имеет концы в точках  $\gamma \pm i\sigma$  и не пересекает разрез. Тогда можно воспользоваться контуром интегрирования (рис. 2.2):

$$\int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FB}$$

Интегралы вдоль дуг  $AC$  и  $FB$  при  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. На прямых  $CD$  и  $EF$  соответственно

$s = \rho e^{i\pi} = -\rho, \sqrt{s} = i\sqrt{\rho}, s = \rho e^{-i\pi} = -\rho, \sqrt{s} = -i\sqrt{\rho}$ , здесь  $\rho = |s|$ .

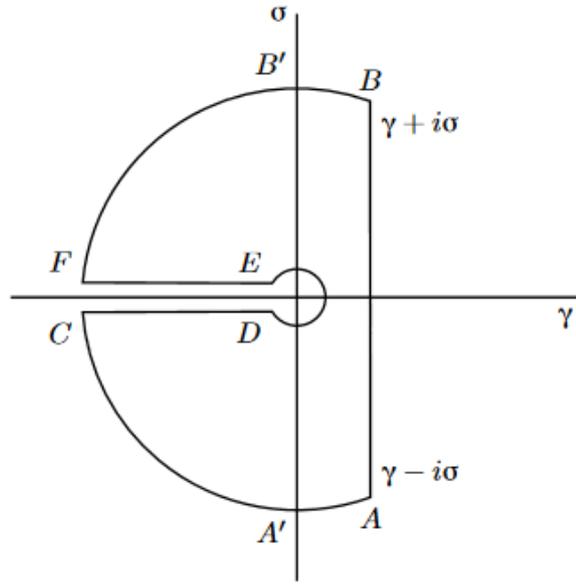


Рисунок 2.2 Контур интегрирования

Тогда, при  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  переходя к пределу имеем

$$\begin{aligned} \int_{CD} + \int_{EF} &= \frac{1}{2\pi i} \int_R^r \exp\left(-\rho\bar{t} - x \sqrt{-\frac{\rho}{a} + \frac{b}{a}i\sqrt{\rho}}\right) \frac{d\rho}{\rho} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_r^R \exp\left(-\rho\bar{t} - x \sqrt{-\frac{\rho}{a} - \frac{b}{a}i\sqrt{\rho}}\right) \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\rho t - \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\rho} - \frac{\rho}{a}}\right) \sin\left[\frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\rho} + \frac{\rho}{a}}\right] \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл по малому кругу  $DE$ .

Полагая  $s = \varepsilon \cdot \exp(i\varphi), ds = \varepsilon \cdot \exp(i\varphi) i d\varphi, \frac{ds}{s} = i d\varphi$  получаем  $\sqrt{s} = \sqrt{\varepsilon} \cdot \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right)$ .

$$\begin{aligned}
\int_{DE} &= \int_{DE} \exp\left(st - x \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[t\varepsilon \cdot \exp(i\varphi) - x \sqrt{\frac{\varepsilon}{a} \cdot \exp(i\varphi) + \frac{b}{a}\sqrt{\varepsilon}\exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right)}\right] id\varphi \\
\lim_{r \rightarrow 0} \int_{DE} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} id\varphi = i[\pi - (-\pi)] = 2\pi i.
\end{aligned}$$

В итоге выражение (2.31) принимает вид

$$\begin{aligned}
\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left[-\rho\bar{t} - \frac{\bar{x}}{\sqrt{2a}} \sqrt{\sqrt{\rho^2 + b^2\rho} - \rho}\right] \cdot \\
&\quad \cdot \sin\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{2a}} \sqrt{\sqrt{\rho^2 + b^2\rho} + \rho}\right) \frac{d\rho}{\rho}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Аналогично осуществляем переход от изображения к оригиналу в выражении (2.19).

Окончательные выражения для давлений имеют вид:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp[-\rho\bar{t} - f_1(\rho)\bar{x}] \sin[f_2(\rho)\bar{x}] \frac{d\rho}{\rho} \tag{2.33}$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp[-\rho\bar{t} - f_1(\rho)\bar{x}] \sin[f_2(\rho)\bar{x} + \sqrt{\rho}\bar{y}] \frac{d\rho}{\rho} \tag{2.34}$$

Здесь

$$f_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{\sqrt{\rho^2 + b^2\rho} - \rho}, \quad f_2(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{\sqrt{\rho^2 + b^2\rho} + \rho}.$$

В случае, когда трещина с насыщающим ее флюидом ( $\kappa_f \rightarrow \infty$  и  $a \rightarrow \infty$ ) считается несжимаемой из (2.33) (с учетом  $\frac{b}{a} = \frac{k_r x_f}{k_f w_f}$ ), следует выражение, аналогичное полученному в [26]:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left[-\rho\bar{t} - \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\rho}}\right] \sin\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\rho}}\right) \frac{d\rho}{\rho} \tag{2.35}$$

### 2.2.3 Сравнительный анализ двух видов решения

Очевидно, что выражения (2.33) – (2.34) тождественны выражениям (2.25) – (2.26) так как они представляют решения одной и той же задачи. При этом нахождение оригиналов реализовано различными методами. Выражения (2.33) – (2.34) получены с использованием теоремы Меллина, а (2.25) и (2.26) получены используя общие правила теории преобразования Лапласа.

При  $b = 0$  имеем предельный случай, отсутствие притока флюида из пласта в трещину. При этом из (2.33) и (2.25), соответственно получаются:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\rho \bar{t}) \sin\left(\frac{\bar{x}\sqrt{\rho}}{\sqrt{a}}\right) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{\bar{x}}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right) \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{erfc} \frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}} = \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}}} \exp(-\rho^2) d\rho. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Полученные выражения совпадают с решением классической задачи о плоскопараллельной фильтрации упругой жидкости к галерее в полубесконечном пласте [4].

Таким образом, выше представлены решения следующих задач:

1) билинейный режим течения упругой жидкости в упругой системе пласт-трещина: (2.33) и (2.25).

2) билинейный режим течения в системе пласт-трещина ГРП в приближении несжимаемости трещины и насыщающего ее флюида: (2.35) и (2.30).

3) Классическая задача о плоско-параллельной фильтрации упругой жидкости к галерее в полубесконечной области (предельный случай рассматриваемых задач при  $b \rightarrow 0$ ): (2.36) и (2.37).

Представляет интерес показать тождественное равенство соответствующих уравнений (2.33) и (2.25), (2.34) и (2.26), (2.35) и (2.30), (2.36) и (2.37). Тождественное равенство выражений (2.36) и (2.37) показывается достаточно просто. Для этого в (2.36) можно применить подстановку  $\rho = \xi^2$  и вычислить интеграл методом дифференцирования по параметру  $\frac{\bar{x}}{\sqrt{a}}$ . Установление тождественности остальных выражений не тривиально и этот вопрос требует специального исследования.

Отметим, что такая ситуация встречается при решении краевых задач теории теплопроводности [22]. В качестве примера рассмотрим решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

в области  $0 < x < l$ , при начальной температуре  $T(x, t = 0) = f(x)$ , граничные плоскости при  $x = 0$  и  $x = l$  поддерживаются при нулевой температуре.

При использовании теоремы Меллина решение получено в виде

$$T(x, t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x') \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x'}{l} \exp\left(-\frac{an^2\pi t}{l^2}\right) dx'$$

При использовании другого метода нахождения оригинала (разложение изображения в ряд по отрицательным степеням показательной функции) решение получено в виде:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} f(x') \left[ \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{(x - x' - 2nl)^2}{4xt}\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x + x' - 2ul)^2}{4xt}\right) \right] dx'$$

В работе [22] нетривиально показано, что эти решения тождественны.

Результаты численных расчетов по выражениям (2.33) и (2.25) показывают совпадение величин для соответствующих случаев в пределах

принятой степени точности расчетов. В таблицах 2.1 и 2.2 приведены значения  $\bar{P}_f$ , вычисленные по выражениям (2.25) и (2.33) при  $a = 1000000, b = 20000$  для трех значений  $\bar{t}$ :  $\bar{t}_1 = 0,002, \bar{t}_2 = 0,02$  и  $\bar{t}_3 = 0,2$ .

Таблица 2.1

$\bar{x}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\bar{t}_1$	1	0,94667	0,89577	0,84724	0,80098	0,75692	0,71497	0,67506	0,63711	0,60105	0,56679
$\bar{t}_2$	1	0,96971	0,94020	0,91145	0,88347	0,85622	0,82969	0,80388	0,77876	0,75433	0,73056
$\bar{t}_3$	1	0,98287	0,96599	0,94935	0,93296	0,91681	0,90090	0,88523	0,86979	0,85458	0,83961

Таблица 2.2

$\bar{x}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\bar{t}_1$	1	0,94664	0,89572	0,84716	0,80088	0,75679	0,71482	0,67490	0,63693	0,60084	0,56657
$\bar{t}_2$	1	0,96969	0,94017	0,91141	0,88341	0,85614	0,82961	0,80378	0,77865	0,75420	0,73042
$\bar{t}_3$	1	0,98286	0,96597	0,94933	0,93293	0,91677	0,90085	0,88517	0,86972	0,85451	0,83952

### 2.3 Анализ результатов расчетов решения первой краевой задачи

Результаты расчетов первой краевой задачи приведены на рисунках 2.3 – 2.8.

Вычисления были проведены при следующих значениях базовых параметров: начальное давление пласта  $P_0 = 200 \cdot 10^5$  Па, мощность пласта  $h_r = 10$  м, ширина трещины  $w_f = 5 \cdot 10^{-3}$  м, проницаемость пласта  $k_r = 10^{-15}$  м<sup>2</sup> и трещины  $k_f = 10^{-9}$  м<sup>2</sup>, вязкость флюида  $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$  Па · с, коэффициент упругости  $\beta = 10^{-9}$  Па<sup>-1</sup>.

При расчетах в данном разделе и последующих разделах принято, что упругости пласта и трещины совпадают, при этом  $a = \frac{\kappa_f}{\kappa_r} = \frac{k_f}{k_r}$ . В общем случае  $a = \frac{\kappa_f}{\kappa_r} = \frac{k_f \beta_r^*}{k_r \beta_f^*}$ . При необходимости коэффициенты упругости можно определять по формуле  $\beta^* = t\beta_\phi + \beta_c$ , где  $\beta_\phi$  и  $\beta_c$  – коэффициенты сжимаемости флюида и матрицы пористой среды.

На рис. 2.3 представлены кривые распределения давления вдоль трещины при разных значениях безразмерной проводимости трещины  $F_{cd}$ , при  $\bar{t} = 0,002$ , вычисленные по формулам (2.25) и (2.33). При этом значения

давления, вычисленные по этим формулам, практически совпадают (различие не превышает долей процента). По оси абсцисс отложена величина  $\bar{x} = \frac{x}{x_f}$ , по оси ординат давление  $P_f = P_0 + \bar{P}_f(P_c - P_0)$  (принято  $P_c = 200$  атм,  $P_0 = 300$  атм). Из рис. 2.3 следует, что падение давления в трещине существенно зависит от проводимости трещины.

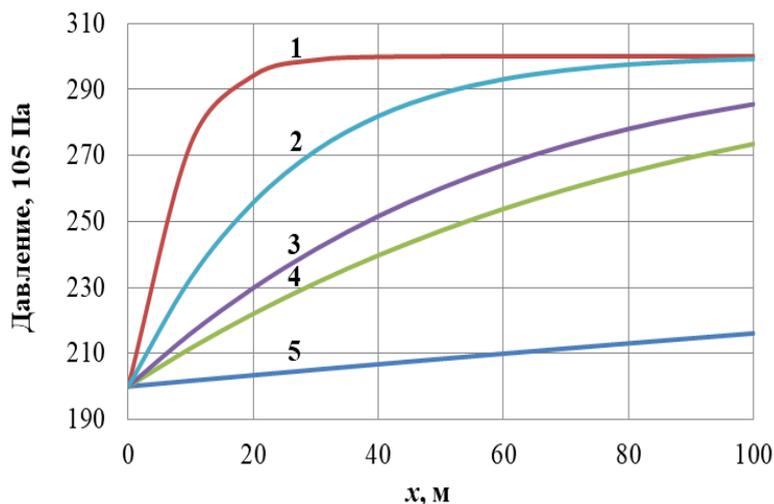


Рисунок 2.3 Распределение давления вдоль трещины

кривая 1 -  $F_{cd} = 0,1$ , кривая 2 -  $F_{cd} = 1$ , кривая 3 -  $F_{cd} = 5$ , кривая 4 -  $F_{cd} = 10$ , кривая 5 -  $F_{cd} = 500$ .

На рисунках 2.4 – 2.5 представлены результаты расчетов, вычисленные по формуле (2.33), определяющие изменение давления вдоль трещины, при значениях безразмерной проводимости трещины  $F_{cd} = \frac{k_f w_f}{k_r x_f}$  для различных моментов времени. Кривые 1, 2, 3 соответствуют временам  $t$ : 86400 сек, 432000 сек, 864000 сек. По оси абсцисс отложена величина  $x = \bar{x} \cdot x_f$ , по оси ординат  $P_f = P_0 + \bar{P}_f(P_c - P_0)$  (принято  $P_c = 100$  атм,  $P_0 = 200$  атм). Из рисунков видно, что для принятых значений параметров распределение давления вдоль трещины близко к линейному, со временем темп снижения давления уменьшается. С увеличением проводимости трещины происходит заметное увеличение падения давления.

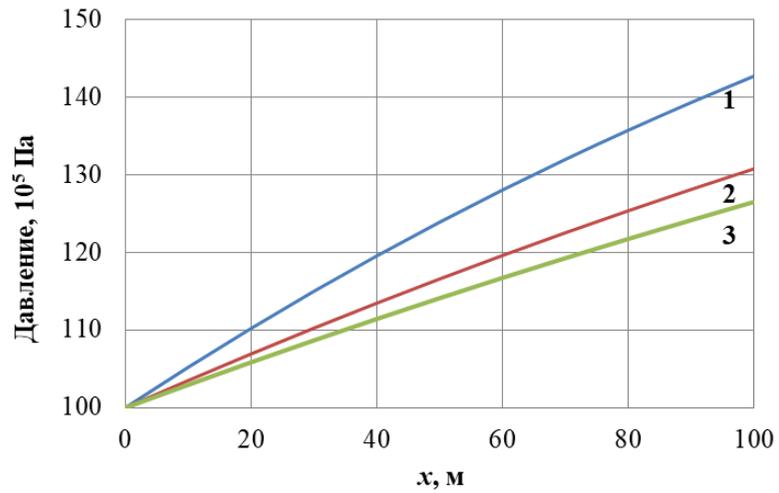


Рисунок 2.4 Распределение давления вдоль трещины,  $F_{cd} = 50$

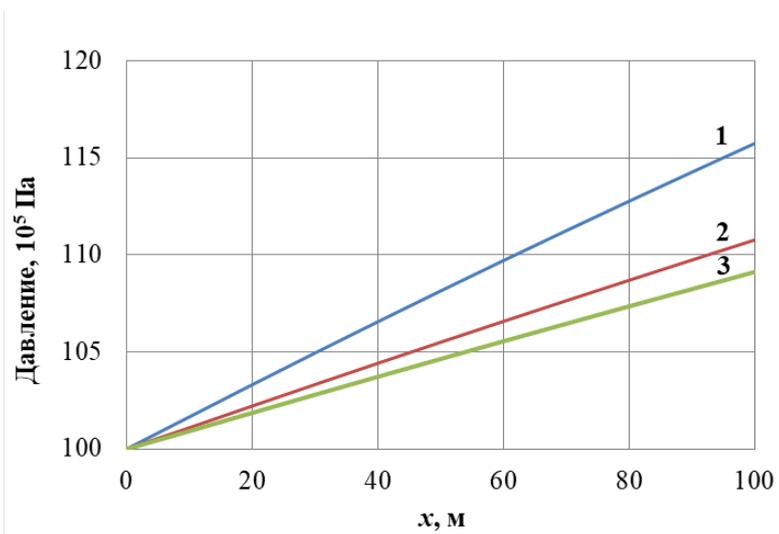


Рисунок 2.5 Распределение давления вдоль трещины,  $F_{cd} = 500$

На рисунках 2.6 и 2.7 представлены зависимости давления в трещине от проницаемостей трещины и пласта. Расчеты проведены по формулам (2.33) и (2.35). При этом значения давления полученные по этим формулам близки. При малых  $\bar{x}$  расхождение составляет менее 2 %, с ростом  $\bar{x}$  расхождение увеличивается и при  $\bar{x} \rightarrow 1$  достигает 6-7 %. Для несжимаемой трещины (формула (2.35)) падение давления меньше. Падение давления вдоль трещины существенно уменьшается: при  $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2 - \Delta P \approx 84 \text{ атм}$ , при  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2 - \Delta P \approx 17 \text{ атм}$  (рисунок 2.6). Кривые

соответствуют следующим значениям проницаемости трещины: 1 –  $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$ ; 2 –  $k_f = 10^{-9} \text{ м}^2$ ; 3 –  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$ .

Из рисунка 2.7 следует, что с увеличением  $k_r$  падение давления в трещине уменьшается. При этом падение давления вдоль трещины существенно увеличивается: при  $k_r = 10^{-16} \text{ м}^2 \Delta P \approx 27 \text{ атм}$ , при  $k_r = 10^{-14} \text{ м}^2 \Delta P \approx 64 \text{ атм}$ . Кривые 1 –  $k_r = 10^{-14} \text{ м}^2$ ; 2 –  $k_r = 10^{-15} \text{ м}^2$ ; 3 –  $k_r = 10^{-16} \text{ м}^2$ .

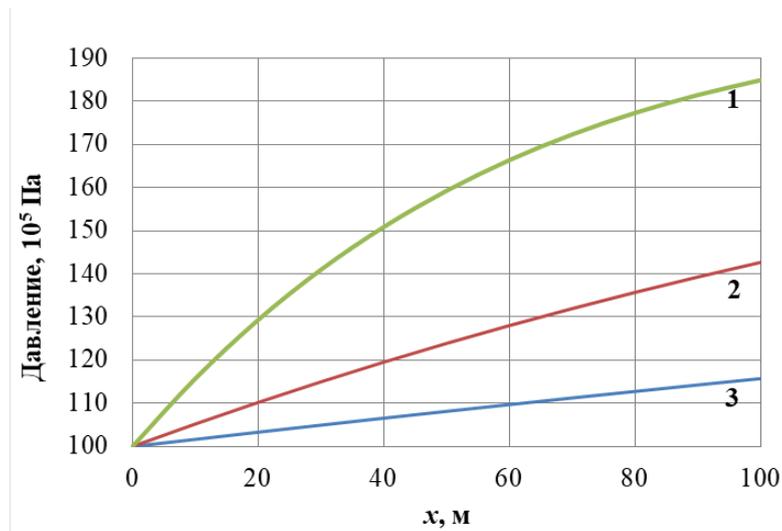


Рисунок 2.6 Распределение давления в трещине при различных значениях проницаемости трещины

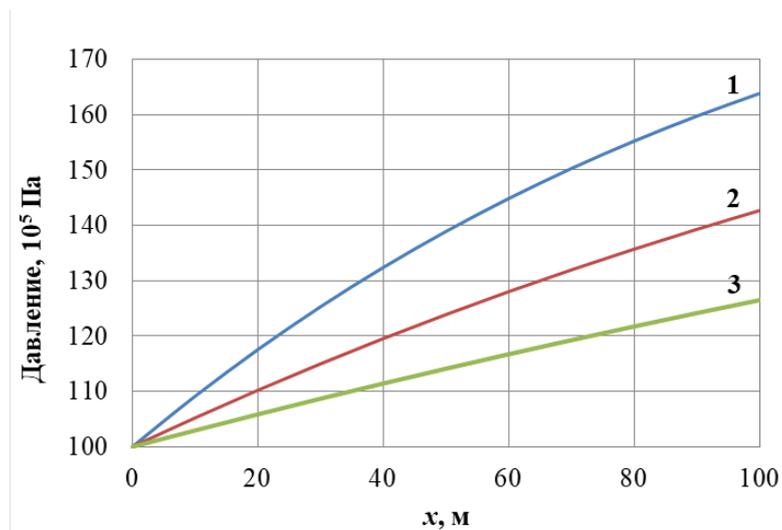


Рисунок 2.7 Распределение давления в трещине при различных значениях проницаемости пласта

Из полученных выше выражений для давления определяется дебит скважины, согласно принятой симметрии задачи дебит скважины можно определить по формуле:

$$Q = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P_f(0, t)}{\partial x} 4w_f h.$$

Определим безразмерный дебит:

$$\bar{Q} = -\frac{\partial \bar{P}_f(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \text{ тогда } Q = \bar{Q} \frac{4w_f h k_f (P_c - P_0)}{\mu x_f} \quad (2.38)$$

Используя (2.33) находим:

$$\bar{Q} = \frac{1}{\pi \sqrt{2a}} \int_0^{\infty} e^{-\rho \bar{t}} \sqrt{\sqrt{\rho^2 + b^2} \rho + \rho} \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.39)$$

В приближении несжимаемой трещины из (2.35) находим:

$$\bar{Q} = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^{\infty} e^{-\rho \bar{t}} \rho^{-\frac{3}{4}} d\rho = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{b}{2a}} \bar{t}^{-\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \quad (2.40)$$

Здесь  $\Gamma$  – символ гамма-функции,  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{x-1} d\rho$ .

Учитывая, что  $\Gamma(0,25) = 3,625$ , выражение для дебита (2.40) представим в размерном виде:

$$Q = 3,264 \cdot k_f^{\frac{1}{2}} \cdot w_f^{\frac{1}{2}} \cdot h \cdot k_r^{\frac{1}{4}} \cdot \beta^{\frac{1}{4}} \cdot \mu^{-\frac{3}{4}} \cdot (P_c - P_0) t^{-\frac{1}{4}}$$

Эта формула определяет зависимость дебита скважины с вертикальной трещиной ГРП от параметров пласта и трещины, от физических свойств фильтрующегося флюида. Из этого выражения можно найти коэффициент продуктивности скважины. Интегрируя это выражения по времени можно найти накопленную добычу флюида за время  $t$ :

$$Q_H = 3,264 \cdot \frac{4}{3} \cdot k_f^{\frac{1}{2}} \cdot w_f^{\frac{1}{2}} \cdot h \cdot k_r^{\frac{1}{4}} \cdot \beta^{\frac{1}{4}} \cdot \mu^{-\frac{3}{4}} \cdot (P_c - P_0) t^{\frac{3}{4}}$$

Сопоставительный анализ этих формул с классическими аналогами (формула дебита скважины при плоско-радиальной фильтрации, формула для

дебита галереи при плоско-параллельной фильтрации) позволяет оценить влияние наличия трещины ГРП на дебит и накопленную добычу.

На рисунке ниже представлены кривые изменения дебита скважины  $Q$  от времени для нестационарного распределения давления и приближения несжимаемой трещины, определенные по формулам (2.39) и (2.40). Из рисунка можно сделать вывод, что незначительное различие в дебитах (менее 1%). Это различие растет при увеличении ширины трещины. Наиболее значительное изменение дебита происходит при малых временах, со временем изменение дебита стабилизируется.

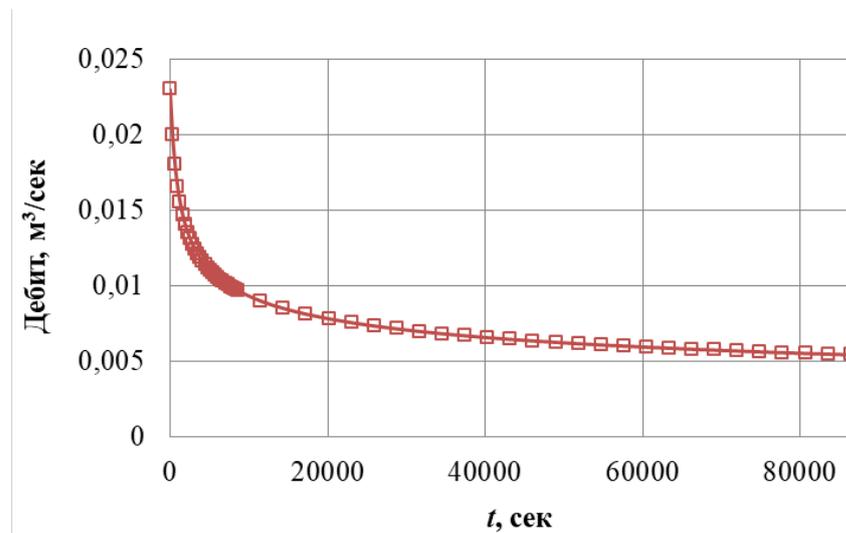


Рисунок 2.8 Зависимость дебита от времени, сплошная линия – формула (2.39), маркер «квадрат» – формула (2.40),  $a = 10^6, b = 2 \cdot 10^4$

## 2.4 Решение второй краевой задачи

Вторая краевая задача также решена методом преобразования Лапласа

$$L[\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})] = \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, s) = \int_0^{\infty} \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \exp(-s\bar{t}) d\bar{t}$$

В пространстве Лапласа задача (2.1)-(2.5), (2.7) имеет вид:

$$\frac{d^2 \bar{P}_r}{dy^2} = s \bar{P}_r \quad (2.41)$$

$$\frac{d^2 \bar{P}_f}{dx^2} - \frac{s}{a} \bar{P}_f + \frac{b}{a} \frac{d \bar{P}_r}{dy} \Big|_{y=0} = 0 \quad (2.42)$$

$$\bar{P}_r(x, y = 0, s) = \bar{P}_f(x, s) \quad (2.43)$$

$$\frac{d \bar{P}_f(0, s)}{dx} = \frac{b}{a} \frac{1}{s} \quad (2.44)$$

$$\bar{P}_i(x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty) = 0 \quad (i = r, f) \quad (2.45)$$

Решение системы находится стандартными методами – понижением порядка и разделением переменных:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = -\frac{b \exp(-\bar{x} \cdot \delta)}{a s \delta} \quad (2.46)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s) = -\frac{b \exp(-\bar{x} \cdot \delta - \bar{y} \sqrt{s})}{a s \delta} \quad (2.47)$$

$$\delta \equiv \left[ \frac{s}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{s} \right]^{1/2}$$

Окончательные выражения получаются посредством перехода в выражениях (2.46), (2.47) к оригиналам.

Выражение (2.46) представим в виде:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = -\frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{s}} L[V(\bar{x}, \bar{t})], \quad L[V(\bar{x}, \bar{t})] = \frac{b \exp(-\bar{x} \delta)}{\sqrt{s} \sqrt{a} \delta}$$

Для удобства нахождения оригинала второе выражение (2.48) представляется в виде

$$L[V(\bar{x}, \bar{t})] = \frac{1}{b} \frac{\exp\left(-\frac{b \bar{x}}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{b^2}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}}} = F\left(\frac{s}{b^2}\right) \quad (2.48)$$

Используя табличную формулу обращения преобразования Лапласа и теорему о свертке [9]

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

из (2.48) имеем:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{\pi(\bar{t}-\tau)}} V(\bar{x}, \tau) d\tau$$

Далее необходимо найти  $V(\bar{x}, \bar{t})$ .

Из (2.48) видно, что в ходе решения задачи в пространстве изображений вместо  $F(s)$  получено  $F\left(\frac{s}{b^2}\right)$ . Тогда используя теорему подобия [9] находим

$$L[V(\bar{x}, b^2\bar{t})] = \frac{b}{\sqrt{s}} \frac{\exp\left[-\frac{b\bar{x}}{\sqrt{a}}(s + \sqrt{s})^{1/2}\right]}{\sqrt{s + \sqrt{s}}} \quad (2.49)$$

Для поиска  $V(\bar{x}, b^2\bar{t})$ , в (2.49) используем правило операционного исчисления [9]:

$$L^{-1}\left[\frac{g(s + \sqrt{s})}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}-u}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(\bar{t}-u)}\right) f(u) du,$$

$$\text{здесь } f(u) = L^{-1}[g(s)]$$

Тогда

$$V(\bar{x}, b^2\bar{t}) = \frac{b}{\pi} \int_0^{b^2\bar{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau - u)} - \frac{b^2\bar{x}^2}{4au}\right) \frac{du}{\sqrt{b^2\tau - u}\sqrt{u}}$$

$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t})$  можно представить с учетом вышеописанного выражения:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{a}\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}-\tau}} \int_0^{b^2\tau} \exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau - u)} - \frac{b^2\bar{x}^2}{4au}\right) \frac{dud\tau}{\sqrt{b^2\tau - u}\sqrt{u}}$$

Изменяем здесь порядок интегрирования и вычисляем внутренний интеграл

$$\int_{u/b^2}^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{(b^2\tau - u)(\bar{t}-\tau)}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau - u)}\right) d\tau = \frac{\pi}{b} \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t}-u}}\right).$$

Для вычисления этого интеграла последовательно используются подстановки

$$b^2\tau - u = y, \bar{t} - \tau = \bar{t} - \frac{y}{b^2} - \frac{u}{b^2}, \bar{t} - \frac{u}{b^2} = \alpha, \quad \frac{u^2}{4y} = \omega \quad (d\tau \rightarrow dy, dy \rightarrow d\omega).$$

Тогда искомый интеграл представляется в виде:

$$\frac{u}{2\sqrt{ab^2}} \int_{\frac{u^2}{4ab^2}}^{\infty} \frac{\exp(-\omega)d\omega}{\omega \sqrt{\omega - \frac{u^2}{4ab^2}}}$$

Далее используется известный интеграл [7]

$$\int_u^{\infty} \frac{\exp(-\mu x)}{x\sqrt{x-u}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{u}} \operatorname{erfc}\sqrt{u\mu}.$$

Выражение для давления в трещине в конечном итоге имеет следующий вид:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} \int_0^{b^2\bar{t}} \exp\left(-\frac{b^2\bar{x}^2}{4au}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t}-u}}\right) \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (2.50)$$

В (2.50) произведем замену  $u$  на  $\rho^2 b^2 \bar{t}$  для удобства численных расчетов. Тогда имеем

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{(1-\rho^2)}}\right) d\rho \quad (2.51)$$

Аналогично из (2.47) получаем выражение для давления в пласте:

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\bar{t} + \bar{y}}{2\sqrt{\bar{t}(1-\rho^2)}}\right) d\rho \quad (2.52)$$

Особенность билинейной модели заключается в том, что в исходной постановке задачи градиент давления в пласте по оси  $x$ , вследствие незначительности не учитывается. При этом в ходе решения задачи поле давления в пласте получается двумерным. Зависимость давления в пласте от  $x$  определяется условием (2.3), описывающим непрерывность давления на границе раздела пласт-трещина.

Полагая в (2.50)  $\bar{x}=0$  находим давление на забое скважины:

$$\bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{b^2\bar{t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t}-u}}\right) \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (2.53)$$

Асимптотическое представление этой формулы, соответствующее большим значениям времени является одним из основных теоретических выражений, используемых при гидродинамическом исследовании скважин с трещиной гидроразрыва. А именно, это выражение определяет характерную для билинейного режима фильтрации зависимость давления на забое скважины от времени в степени  $1/4$ , и представляет теоретическую формулу для оценки проводимости трещины [60].

В работе [60] отмечается, что ввиду сложности получение соответствующей асимптотики для больших времен из (2.53) является затруднительным. Поэтому эта асимптотика определяется в пространстве изображений Лапласа из выражения (2.47) при  $x = 0$  и малых  $s$  (больших  $\bar{t}$ ) и последующим переходом от изображения к оригиналу.

Покажем далее для больших времен получение асимптотики из уравнения (2.53). Для этого случая ( $b^2\bar{t} \rightarrow \infty$ ) представим выражение (2.53) в следующем виде

$$\bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t}) \approx -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2b\sqrt{\bar{t}}}\right) \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (2.54)$$

Произведем подстановку выражения  $u/2b\sqrt{\bar{t}} = z$  в (2.54), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t}) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{b}{a}} (\bar{t})^{\frac{1}{4}} \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}(z) \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{b}{a}} (\bar{t})^{\frac{1}{4}} \frac{2\Gamma(0.75)}{\sqrt{\pi}} \\ &= 1.103 \sqrt{\frac{b}{a}} (\bar{t})^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Здесь  $\Gamma$  – гамма-функция:

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{\xi-1} du$$

В размерном виде выражение (2.55) имеет следующий вид:

$$P_f(x = 0, t) = P_0 - 1.103 \frac{Q\mu^{3/4}t^{1/4}}{h_r\sqrt{w_f k_f \beta_*^{1/4} k_r^{1/4}}} \quad (2.56)$$

Полученное выражение (2.56) определяет зависимость давления от основных параметров. Классическим аналогом (при отсутствии трещины) выражения (2.56) является формула для давления на галерее [4]

$$P(x = 0, t) = P_0 - 1.128 \frac{Q\sqrt{\mu}\sqrt{t}}{Bh_r\sqrt{k_r}\sqrt{\beta_*}} \quad (2.57)$$

Здесь  $B$  – ширина галереи.

Из сравнения выражений (2.56) и (2.57) следует, что различие между выражениями является качественным, так как принципиально отличаются зависимости давления от времени, вязкости, проницаемости и упругоэластичности пласта, в частности, при наличии трещины влияние проницаемости и упругоэластичности пласта на давление ослабляется, а влияние вязкости флюида, наоборот, усиливается.

Количество жидкости, поступающее из пласта в трещину, определяется из выражения

$$q = \int_0^\infty \left. \frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=0} d\bar{x}$$

Тогда, с учетом выражений (2.51) и (2.52) можно найти долю в дебите скважины объема жидкости, поступающего в трещину из пласта

$$\frac{q}{Q} = 1 - \exp(b^2\bar{t}) \operatorname{erfc}(b\sqrt{\bar{t}})$$

Из этого выражения следует, что в начальной стадии в дебите скважины преобладает доля притока из трещины, со временем увеличивается доля притока из пласта. Так, при  $\bar{t} < 0.59/b^2$  больше половины дебита скважины определяется емкостью трещины, в размерном виде это условие имеет вид:

$$t < 0.59 \left( \frac{k_f}{k_r} \right)^2 \frac{\kappa_r w_f^2}{\kappa_f^2}$$

Оценки по этому выражению показывают, что проявление емкости трещины в дебите скважины является заметным при малых временах и при малых значениях подвижности  $k_r/\mu$  жидкости в пласте.

В области определения  $0 \leq z \leq 1$  функция  $erfc$  изменяется в пределах от 1 до 0, поэтому, согласно теореме о среднем значении [36], выражение (2.11) можно представить в виде

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{a}} c \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}z^2}\right) dz, \quad 0 \leq c \leq 1 \quad (2.58)$$

Очевидно, что значение этого выражения при  $c = 1$  является мажорантой для построенного выше решения (2.11) во всем диапазоне изменения  $\bar{x}$  и  $\bar{t}$ .

Вычисляя интеграл в (2.58), полагая  $c = 1$ , получаем известную формулу, описывающую распределение давления при плоскопараллельной фильтрации жидкости в полубесконечном пласте, когда при  $x = 0$  задано значение дебита [4]. В размерных переменных эта формула, которая следует так же из полученного выше решения (2.11) при  $k_r = 0$  (отсутствие перетока жидкости из пласта в трещину), имеет вид:

$$P_f(x, t) = P_0 + \frac{\mu Q}{k_f w_f h_r} \left[ x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_f t}}\right) - \frac{2\sqrt{\kappa_f t}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa_f t}\right) \right]$$

## 2.5 Анализ результатов расчетов решения второй краевой задачи

Результаты расчетов второй краевой задачи по формулам (2.51)-(2.53) приведены на рисунках 2.9 – 2.17.

Базовые параметры, используемые в расчетах, представлены в разделе 2.3 за исключением следующих: начальное пластовое давление  $P_0 = 200 \cdot 10^5$  Па, дебит скважины дебит  $Q = 10 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$ .

На рисунке 2.9 представлено распределение давления в трещине и в пласте для фиксированного момента времени  $t = 1$  сутки. Кривая 1

описывает распределение давления вдоль трещины  $P_f(x, t)$  (формула (2.11)), кривая 2 – изменение давления в пласте  $P_r(x = 0, y, t)$  по формуле (2.12). Пересекающиеся линии на этом графике определяют соответствующие значения давления по осям  $x$  и  $y$ : линия  $ab$  описывает изменение давления в рассматриваемый момент времени на расстоянии  $x = 20$  м от скважины (по трещине) для всех точек пласта  $0 < y < 100$  м. Аналогично, линия  $cd$  определяет давление  $P(x, y = 60 \text{ м}, t = 1 \text{ сут})$ .

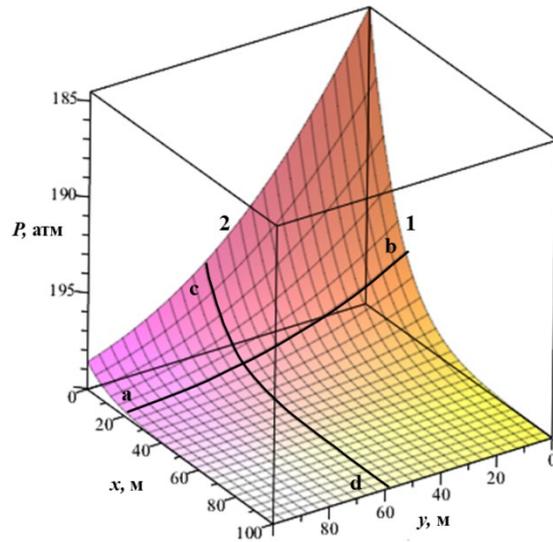


Рисунок 2.9 Распределение давления ( $P$ ) в трещине и в пласте

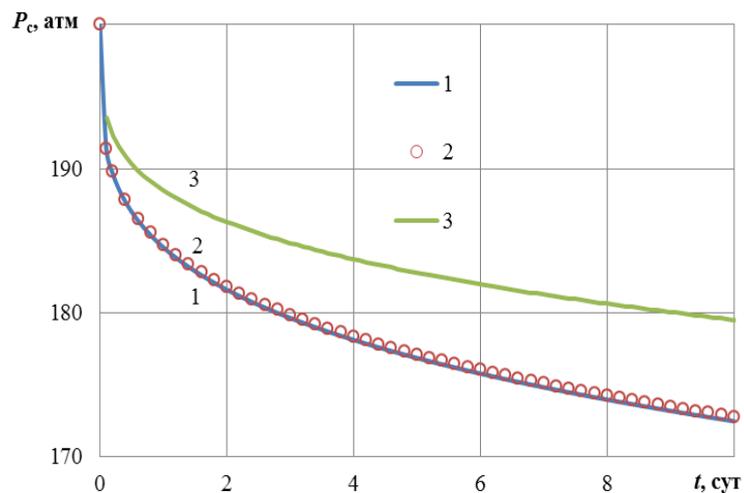


Рисунок 2.10 Распределение забойного давления: 1 – формула (2.53), 2 – формула (2.56), 3 – формула в приближении несжимаемости жидкости в трещине

На рисунке 2.10 представлены кривые изменения забойного давления от времени. Кривые 1 и 2 построены по точной формуле (2.53) и асимптотической формуле (2.56), кривая 3 – по формуле, полученной в работе [26] в приближении несжимаемости жидкости в трещине. Эта формула с точностью до обозначений совпадает с выражением (2.55), но имеется количественное различие в численных коэффициентах, в работе [26] этот коэффициент равен 0.83, в формуле (3.4) – 1.103. Расчеты по формулам (2.53) и (2.56) показывают совпадение результатов - во всем практически значимом диапазоне изменения времени разница не превышает 1%. Различие между кривыми 1 и 3 является заметным и увеличивается с ростом времени. При  $t = 1$  сут это различие составляет 2%, при  $t = 10$  сут – 4%. Таким образом, асимптотическое представление точного решения (формула (2.56)) является более приемлемым по сравнению с приближением, когда не учитывается сжимаемость трещины.

На рисунке 2.11 представлено распределение давления в трещине при следующих значениях дебита:  $Q = 10 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$  (сплошные линии) и  $30 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$  (штриховые линии). Кривые 1, 4 соответствуют изменению давления при 1 сутках; 2, 5 – 5 суток; 3, 6 – 10 суток.

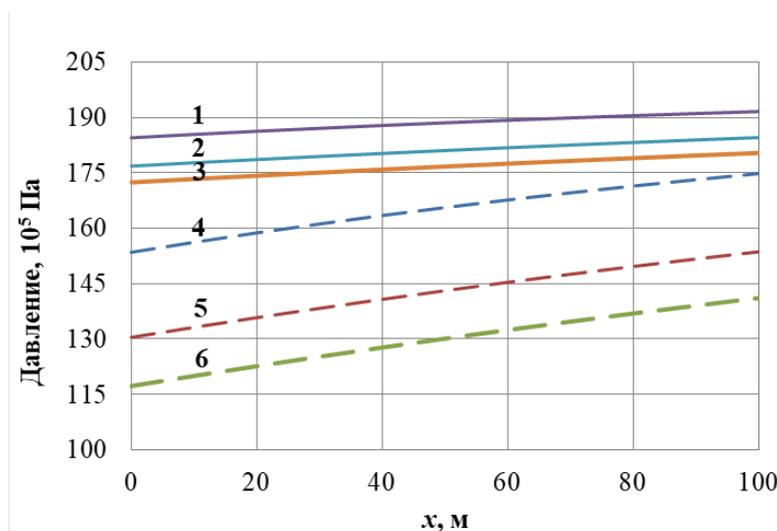


Рисунок 2.11 Распределение давления в трещине

Из рисунка 2.11 видно, что падение давления напрямую связано с увеличением дебита скважины. Так, например, при 10 сутках и значении дебита при  $Q = 10 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$  - падение давления составляет - 28 атм, в случае  $Q = 30 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$ , падение давления достигает - 80 атм.

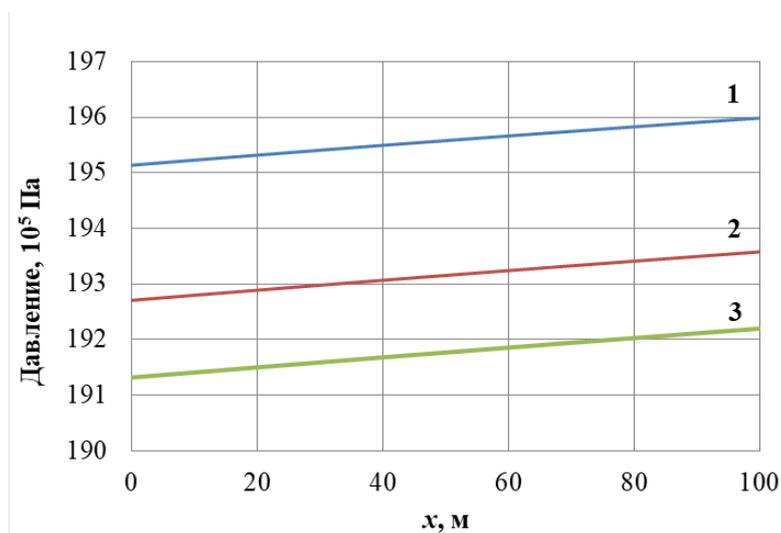


Рисунок 2.12 Распределение давления в трещине при  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$  при 1, 5 и 10 сутках (кривые 1, 2 и 3, соответственно)

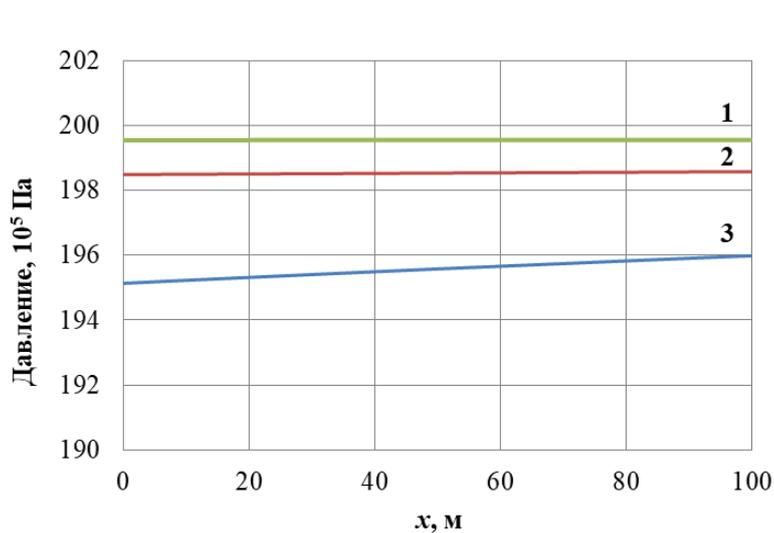


Рисунок 2.13 Распределение давления в трещине при различных значениях проницаемости трещины:

1 –  $k_f = 10^{-6} \text{ м}^2$ ; 2 –  $k_f = 10^{-7} \text{ м}^2$ ; 3 –  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$ .

Из рисунков 2.12 и 2.13 можно сделать, что падение давления уменьшается с увеличением проницаемости трещины. Эпюры кривых давления постепенно выпрямляются. Как видно из рисунка 2.12, при  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$  падение давления в трещине за 1 сутки составляет менее 1 атм. Соответственно, при принятых нами параметрах, трещина имеет большую проводимость, поэтому распределение давления вдоль трещины является практически однородным.

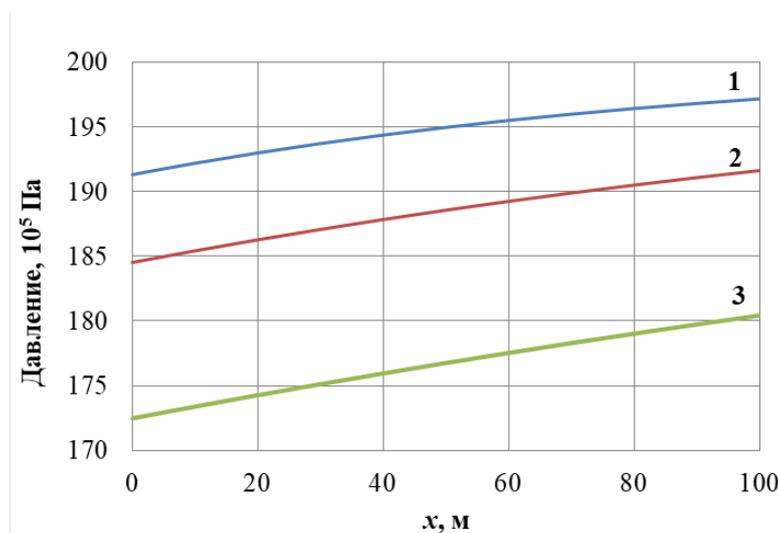


Рисунок 2.14 Распределение давления в трещине при различных значениях проницаемости пласта и при фиксированном времени 1 сут:

$$1 - k_r = 10^{-14} \text{ м}^2; 2 - k_r = 10^{-15} \text{ м}^2; 3 - k_r = 10^{-16} \text{ м}^2.$$

На рисунке 2.14 видно, что увеличение падения давления в трещине связано с уменьшением проницаемости пласта.

На рисунках 2.15 – 2.16 представлено распределение давления в пласте (формула (2.52)) при различных значениях времени: кривые 1,2,3 – соответствуют моментам времени 1,5 и 10 суток; и на различных расстояниях от скважины ( $x = 1 \text{ м}$  и  $x = 100 \text{ м}$ ). С отдалением от скважины падение давления в пласте уменьшается. При 10 сутках, на расстоянии  $x = 1 \text{ м}$  – падение давления составляет 26 атм, при  $x = 100 \text{ м}$  падение давления – 20 атм. Для принятых при расчете параметров коэффициента пьезопроводности пласта  $\kappa = 0,25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Такое малое значение  $\kappa$  обуславливает длительный

процесс перераспределения давления, что видно из рассматриваемых рисунков. Закон движения границы области влияния трещины в пласте можно приближенно оценить по выражению  $l \approx 2\sqrt{\kappa_r t}$  [4]. Для  $t = 1$  сутки имеем  $l \approx 9,3$  м. Это значение коррелируется с профилем давления в пласте (кривые 1 на рисунках 2.15 и 2.16).

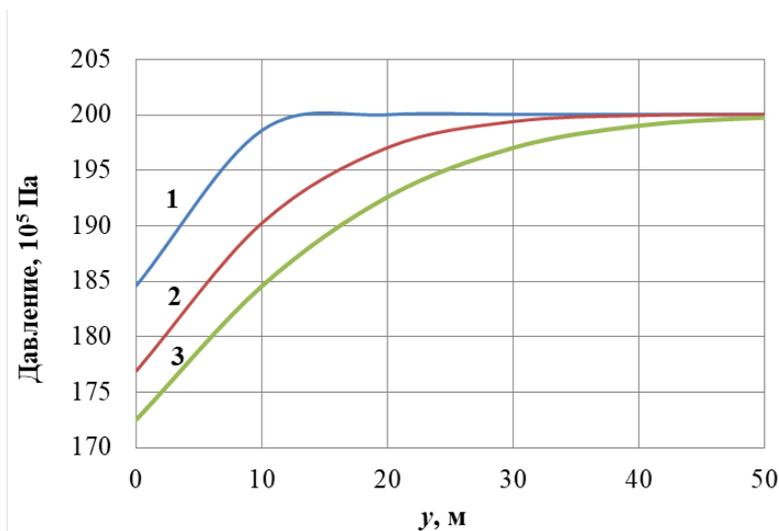


Рисунок 2.15 Распределение давления в пласте при  $x = 1$  м

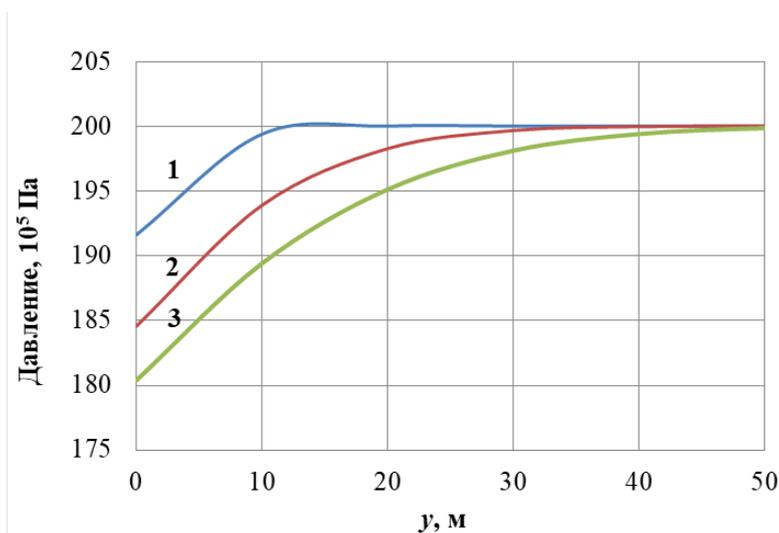


Рисунок 2.16 Распределение давления в пласте при  $x = 100$  м

Выше получено выражение (2.55) для забойного давления. Анализ полученной зависимости с фактическими промысловыми данными (кривой падения/восстановления давления) позволяет найти один из основных параметров - безразмерную проводимость трещины  $F_{CD}$ .

При этом используется метод типовых кривых: наложение экспериментальной кривой на теоретические кривые.

На рисунке 2.17 приведено сопоставление экспериментальных данных с теоретическими значениями давления. Были построены теоретические кривые по формуле (2.53) при различных значениях безразмерной проводимости трещины  $F_{CD} = \frac{k_f w_f}{k_r x_f}$ , которые составляют: 5, 8, 20, 50 и 90.

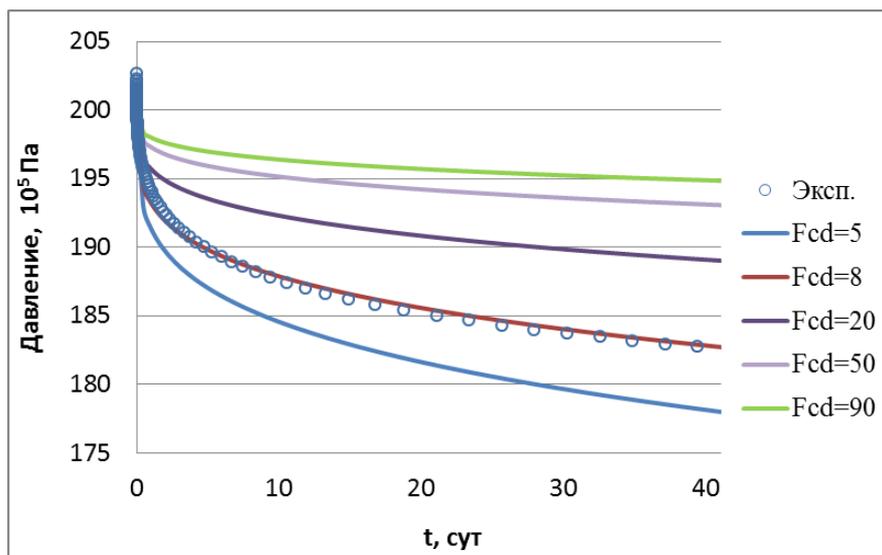


Рисунок 2.17 Сравнительный анализ распределения давления на забое скважины

Наиболее близкое совпадение с экспериментальной кривой (данные этой кривой на рис. 2.17 обозначены маркером круг) получилось при значении безразмерной проводимости трещины, равное 8. Таким образом, из анализа кривых видно, что трещина имеет конечную проводимость.

## 2.6 Кривые падения и восстановления давления в скважине с трещиной гидроразрыва

Экспериментальное определение кривых падения давления (КПД) и восстановления давления (КВД) и сопоставительный анализ этих кривых с соответствующими теоретическими уравнениями КПД и КВД является

основополагающей при проведении гидродинамических исследований пластов.

Аналитические расчеты кривых КПД и КВД для вертикальной скважины без трещины ГРП достаточно полно исследованы для различных сценариев изменения дебита. Представляет интерес исследование КПД и КВД для скважины с вертикальной трещиной ГРП.

Отметим, что близкие к изложенным здесь результаты получены в работе на основе модели, предложенной в работе [26].

Математическое моделирование определения аналитических зависимостей КПД и КВД при наличии трещины ГРП описывается задачей (2.1) – (2.5), условие (2.7) заменяется на следующее:

$$\frac{k_f h_r w_f}{\mu} \frac{\partial P_f(x=0, t)}{\partial x} = Q [H(t) - H(t - t_1)] \quad (2.59)$$

где  $H(\xi) = \begin{matrix} 0 & \xi < 0 \\ 1 & \xi > 0 \end{matrix}$  – единичная функция Хэвисайда. Условие (2.59) описывает следующий режим работы скважины: при  $0 < t < t_1$  скважина работает с постоянным дебитом  $Q$ , при  $t = t_1$  скважина закрывается. Таким образом в добывающей скважине при  $0 < t < t_1$  происходит падение давления, при  $t > t_1$  – восстановление давления.

В пространстве изображений Лапласа задача имеет вид (2.41) – (2.45), в которой условие (2.44) заменяется на следующее:

$$\frac{d\bar{P}_f(0, s)}{dx} = \frac{b}{a} \frac{1}{s} (1 - \exp(-s\bar{t}_1))$$

Решение представленной задачи имеет вид

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = -\frac{b}{a} \frac{\exp(-\bar{x} \cdot \delta)}{s\delta} \cdot (1 - \exp(-st_1)), \quad (2.60)$$

$$\delta \equiv \left[ \frac{s}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{s} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Полагая  $\bar{x} = 0$  и применяя асимптотическое приближение при достаточно больших временах (малых  $s$ ), из (2.60) получаем

$$\bar{P}_f(0, s) = -\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{1}{s^{\frac{5}{4}}} \cdot (1 - e^{-st_1}). \quad (2.61)$$

Используя правила операционного исчисления, находим оригинал этого выражения.

$$\bar{P}_f(0, \bar{t}) = -\sqrt{\frac{b}{a}} \left[ \frac{\bar{t}^{\frac{1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} + \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} (\bar{t}_1 - \bar{t})^{\frac{1}{4}} \right].$$

Используя значения гамма-функции и переходя к размерным переменным, зависимость забойного давления от времени представляем в виде:

$$P_0 - P_f = 1,1032 \frac{Q\mu^{\frac{3}{4}}}{k_r^{\frac{1}{4}} h_r \sqrt{k_f w_f} \beta^{\frac{1}{4}}} \left[ t^{\frac{1}{4}} - (t - t_1)^{\frac{1}{4}} \right]. \quad (2.62)$$

При  $t < t_1$  в уравнении (2.13) учитывается только первое слагаемое в квадратной скобке – это КПД. При  $t > t_1$  в (2.13) в квадратной скобке учитываются оба члена – это кривая восстановления давления (КВД).

Классический аналог (кривые падения и восстановления давления для скважины без трещины гидроразрыва) этого соотношения имеет вид [4]

$$P_f - P_0 = \frac{Q\mu}{4\pi k h_r} \ln \frac{t}{t - t_1} \quad (2.63)$$

На рисунке (2.18) представлен график сравнения распределений давления, полученных в ПО Saphire и по формуле (2.62) для проницаемости пласта  $k_r = 10^{-15} \text{ м}^2$ , полудлины трещины  $x_f = 1000 \text{ м}$ ,  $F_{cd} = 5$ .

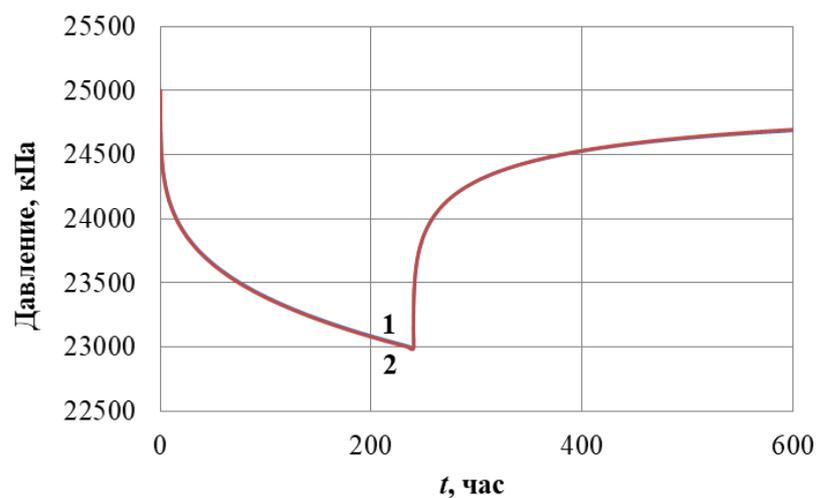


Рисунок 2.18 – Зависимость забойного давления от времени  
(1 – численное решение; 2 – аналитическое решение)

Из рисунка видно, что результаты вычислений по аналитической формуле и численного расчета практически совпадают.

Рассмотрим сравнение теоретических формул для кривой восстановления давления в вертикальной скважине и вертикальной скважине с трещиной гидроразрыва. Для обычной вертикальной скважины формула распределения забойного давления во времени при работе при постоянном дебите и последующей остановке имеет следующий вид [4, 46]:

- при работе

$$P(r_c, t) = P_0 - \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left( \ln \frac{4\mu t}{r_c^2} - 0,5772 \right), \quad (2.64)$$

- при остановке

$$P(r_c, t) = P_0 - \frac{Q\mu}{4\pi kh} \ln \frac{t}{t - t_1}. \quad (2.65)$$

На рисунках ниже показана динамика забойного давления при КВД в вертикальной скважине и в скважине с ГРП для различных проницаемостей пласта и фиксированном значении дебита.

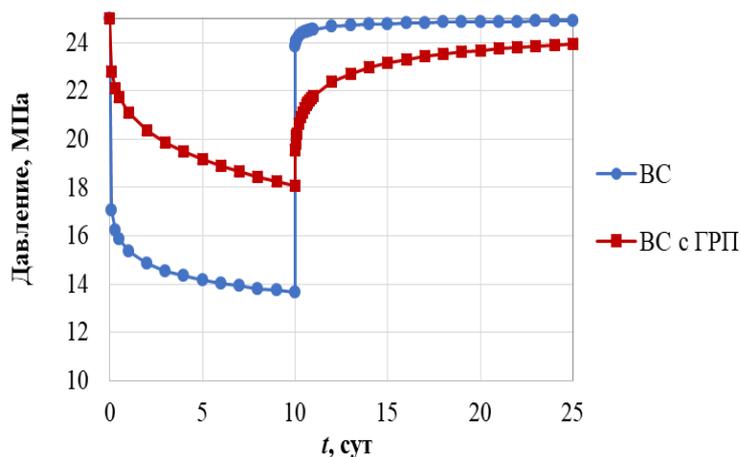


Рисунок 2.19 – Динамика изменения забойного давления в вертикальной скважине без ГРП и в скважине с ГРП для проницаемости пласта  $k_r = 25$  мД

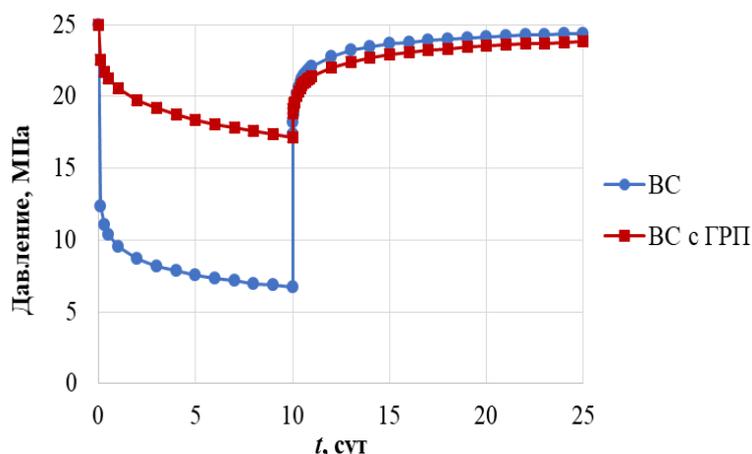


Рисунок 2.20 – Динамика изменения забойного давления в вертикальной скважине без ГРП и в скважине с ГРП для проницаемости пласта  $k_r = 15$  мД

Из графиков видно, что давление на забое скважины снижается медленнее для скважины с трещиной гидроразрыва пласта по сравнению со скважиной без трещины ГРП. После остановки скважины с трещиной ГРП восстановление давление также происходит медленнее.

Отметим, что в работе<sup>1</sup>, на основе модели несжимаемой трещины, предложенной в [26], исследованы особенности эволюции давления в

<sup>1</sup> Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Фокеева Н.О. Особенности фильтрации флюидов в коллекторах, подверженных гидроразрыву пласта, при переходных режимах работы скважины // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 3(373). – С. 117-127.

трещине при переходных режимах работы скважины, когда рассматриваются различные законы изменения давления в скважине или дебита скважины со временем. Обсуждается возможность использования полученных теоретических зависимостей при гидродинамических исследованиях скважин с трещиной ГРП.

В данной главе приводятся решения первой и второй краевых задач нестационарной фильтрации жидкости в системе пласт-трещина ГРП-скважина, в рамках модели трещины неограниченной протяженности.

Решения задач построены методом интегрального преобразования Лапласа по переменной  $t$ . При этом решении первой краевой задачи (на скважине задано давление) использованы разные способы вычисления оригинала по изображению. Окончательные выражения для давления в трещине и в пласте представляются в различных видах, эти выражения тождественны, так как они представляют решение одной и той же задачи. Рассмотрены частные случаи, совпадающие с известными в литературе результатами.

Из решения первой краевой задачи определяется формула для дебита скважины:

$$Q = 3,264 \cdot k_f^{\frac{1}{2}} \cdot w_f^{\frac{1}{2}} \cdot h \cdot k_r^{\frac{1}{4}} \cdot \beta^{\frac{1}{4}} \cdot \mu^{-\frac{3}{4}} \cdot (P_c - P_0) t^{-\frac{1}{4}}$$

Это выражение позволяет определить зависимость дебита от времени и фильтрационных характеристик пласта, трещины и жидкости. Сравнение этой формулы с ее классическим аналогом (плоско-параллельный фильтрационный поток при отсутствии трещины) позволяет качественно и количественно оценить зависимость дебита скважины от фильтрационных характеристик при наличии трещины.

Основной результата решения второй краевой задачи – это получение формулы для давления в трещине, в пласте и на забое скважины.

Выражение для давления на забое скважины можно рассматривать как так называемую типовую кривую, которая используется при

гидродинамических методах исследования скважин. В размерном виде это выражение имеет вид:

$$P_f(x = 0, t) = P_0 - 1.103 \frac{Q\mu^{3/4}t^{1/4}}{h_r\sqrt{w_f k_f \beta_*^{1/4} k_r^{1/4}}}$$

Получена формула, определяющая долю в дебите скважины объема жидкости, поступающего в трещину из пласта.

Получены аналитические формулы, определяющие кривые падения и восстановления давления в скважине при наличии трещины ГРП.

# ГЛАВА 3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ПЛАСТЕ С ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

## 3.1. Постановка задач

Рассмотрим моделирование нестационарной фильтрации в пласте с трещиной ГРП конечной протяженности. При этом, как в главе 2 описывается одна четвертая часть области фильтрации ( $0 < x < x_f, 0 < y < \infty$ ), ( $0 < x < x_f, -w_f < y < 0$ ), схема которой приведена на рисунке 2.1 (глава 2).

Постановка задачи по аналогии с главой 2 имеет вид:

$$a \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{x}^2} + b \frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} \quad 0 < \bar{x} < 1, \bar{t} > 0, \quad (3.1)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t} = 0) = 0 \quad (3.2)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t}) = 1 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \frac{b}{a} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x} = 1, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_r}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{t}} \quad 0 < \bar{y} < \infty, \bar{t} > 0 \quad (3.5)$$

$$\bar{P}_r(\bar{y}, \bar{t} = 0) = \bar{P}_r(\bar{y} = \infty, \bar{t}) = 0 \quad (3.6)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) \quad (3.7)$$

Таким образом имеем две взаимосвязанные задачи для определения давления в трещине (3.1) - (3.4) и в пласте (3.5) – (3.7). Взаимосвязанность этих задач обуславливается вторым слагаемым в левой части (3.1), которое описывает интенсивность перетока между трещиной и пластом, а также условием непрерывности давления (3.7) на границе раздела трещина-пласт. В соответствии с тем, какое из условий (3.3) принимается, имеет место первая (при  $\bar{x} = 0$  задано давление) или вторая краевые задачи (при  $\bar{x} = 0$  задан

расход жидкости). Трещина имеет прямоугольную форму и постоянную ширину, выполняются соотношения:  $w_f \ll x_f, w_f \ll h_r$ .

В (3.1) – (3.7) использованы следующие безразмерные величины и обозначения, аналогичные разделу 2.1:

$$\bar{P}_r = \frac{P_r - P_0}{P^*}, \bar{P}_f = \frac{P_f - P_0}{P_{1,2}^*}, P_1^* = P_c - P_0, P_2^* = \frac{Q\mu}{k_r h_r}, \bar{y} = \frac{y}{x_f}, \bar{x} = \frac{x}{x_f}, \bar{t} = t \frac{\kappa_r}{x_f^2},$$

$$a = \kappa_f / \kappa_r, b = a(k_r / k_f)(x_f / w_f).$$

На основе этой модели можно рассматривать как задачу нагнетания жидкости в пласт через скважину с трещиной гидроразрыва, так и задачу отбора жидкости из пласта с трещиной ГРП. Задача (3.1) – (3.7) решается методом преобразований Лапласа функции давления по переменной  $\bar{t}$ :

$$\bar{P}(\bar{x}, s) = L[\bar{P}(\bar{x}, \bar{t})] = \int_0^\infty \bar{P}(\bar{x}, \bar{t}) e^{-s\bar{t}} d\bar{t}.$$

В пространстве изображений Лапласа задача (3.1) – (3.7) записывается в виде:

$$\frac{d^2 \bar{P}_f}{d\bar{x}^2} + \frac{b}{a} \frac{d\bar{P}_r}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{s}{a} \bar{P}_f \quad (3.8)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x} = 0) = \frac{1}{s} \quad \text{или} \quad \frac{d\bar{P}_f(\bar{x} = 0)}{d\bar{x}} = \frac{b}{a} \frac{1}{s} \quad (3.9)$$

$$\frac{d\bar{P}_f(\bar{x} = 1)}{d\bar{x}} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{d^2 \bar{P}_r}{d\bar{y}^2} = s \bar{P}_r \quad (3.11)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, s) = \bar{P}_f(\bar{x}, s); \quad \bar{P}_r(\bar{y} \rightarrow \infty, s) = 0. \quad (3.12)$$

### 3.2 Решение первой краевой задачи

Решая задачу (3.8) – (3.12) (с первым условием (3.9)) имеем:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = -\frac{1}{s} \frac{ch[f(s)(1 - \bar{x})]}{ch[f(s)]}, \quad f(s) = \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}} \quad (3.13)$$

Здесь  $ch$  - символ функции гиперболического косинуса.

При известном давлении в трещине  $\bar{P}_f(\bar{x}, s)$  по (3.13), давление в пласте определяется из выражения

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s) = \bar{P}_f(\bar{x}, s)e^{-\bar{y}\sqrt{s}}. \quad (3.14)$$

Переход в выражениях (3.13) – (3.14) к оригиналу представляет окончательное решение первой краевой задачи.

Для перехода к оригиналу в (3.13) это выражение представим в виде

$$\bar{P}_f(x, s) = -\frac{1}{s} L[V(x, t)], \quad (3.15)$$

где

$$L[V(\bar{x}, \bar{t})] = \frac{ch \left[ (1 - \bar{x}) \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \right]}{ch \left[ \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \right]}. \quad (3.16)$$

Используя теорему подобия [9]

$$f(\lambda t) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

имеем:

$$L[V(\bar{x}, b^2\bar{t})] = \frac{ch \left[ (1 - \bar{x}) \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \sqrt{s}} \right]}{b^2 ch \left[ \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \sqrt{s}} \right]} \quad (3.17)$$

Переходя к оригиналу в выражении (3.15), используя теорему интегрирования для оригинала [9]

$$\frac{1}{s} F(s) \Leftrightarrow \int_0^t f(\tau) d\tau$$

получаем:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = - \int_0^{\bar{t}} V(\bar{x}, b^2 \tau) d\tau. \quad (3.18)$$

Таким образом, необходимо найти  $V(\bar{x}, b^2 \bar{t})$  из (3.17), тогда давление в трещине будет определяться выражением (3.18).

Для перехода к оригиналу в (3.17) используем следующее соотношение операционного исчисления [9]

$$L^{-1}[F(s + \sqrt{s})] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u}{(t-u)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(t-u)}\right) f(u) du, \quad (3.19)$$

В этой формуле для изображения (3.17) функция  $f(u)$  имеет вид:

$$f(u) = L^{-1}F(s) = L^{-1} \left[ \frac{ch\left[\frac{b}{\sqrt{a}}(1-\bar{x})\sqrt{s}\right]}{ch\left[\frac{b\sqrt{s}}{\sqrt{a}}\right]} \right], \quad (3.20)$$

Таким образом, использование правила (3.19) позволяет перейти к более простому изображению (3.20), по сравнению с исходным изображением (3.17).

Далее воспользуемся переходом от изображения к оригиналу [9]

$$L^{-1} \left[ \frac{ch\left[(l-x)\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right]}{ch\left[l\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right]} \right] = -\frac{\kappa}{l} \frac{\partial \theta_2\left(\frac{x}{2l}, \frac{\kappa t}{l^2}\right)}{\partial x}, \quad 0 < x < l$$

Вторая тета-функция определяется по формуле

$$\theta_2(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(v+n)^2}{\tau}\right]$$

Используя эти два выражения, (3.20) можно представить в виде:

$$L^{-1} \left[ \frac{ch\left[\frac{b}{\sqrt{a}}(1-\bar{x})\sqrt{s}\right]}{ch\left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]} \right] = \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{1}{\bar{t}\sqrt{\bar{t}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \cdot \exp\left[-\frac{b^2(\bar{x} + 2n)^2}{4a\bar{t}}\right]$$

С учетом (3.20)-(3.21) находим оригинал выражения (3.17):

$$V(\bar{x}, b^2\bar{t}) = -\frac{b}{4\pi\sqrt{a}} \int_0^{b^2\bar{t}} \exp\left[-\frac{u^2}{4(b^2\bar{t}-u)}\right] \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \cdot \exp\left[-\frac{b^2}{4au} (\bar{x} + 2n)^2\right] \frac{du}{\sqrt{u}(b^2\bar{t}-u)^{3/2}}.$$

Подставляя это выражение в (3.18) получаем уравнение для давления в трещине:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{b^3}{4\pi\sqrt{a}} \int_0^{\bar{t}} d\tau \int_0^{b^2\tau} \exp\left[-\frac{u^2}{4(b^2\tau-u)}\right] \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \cdot \exp\left[-\frac{b^2}{4au} (\bar{x} + 2n)^2\right] \frac{du}{\sqrt{u}(b^2\tau-u)^{3/2}} \quad (3.22)$$

Изменяя в (3.22) порядок интегрирования и вычисляя интеграл по  $\tau$

$$\int_{u/b^2}^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau-u)}\right) \frac{d\tau}{(b^2\tau-u)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{b^2u} \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t}-u}}\right),$$

получаем

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{b}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^{b^2\bar{t}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n [\bar{x} + 2n] \cdot \exp\left[-\frac{b^2}{4au} (\bar{x} + 2n)^2\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t}-u}}\right) \frac{du}{u\sqrt{u}} \quad (3.23)$$

Используя в (3.23) замену переменной интегрирования  $u = \rho^2 b^2 \bar{t}$

имеем:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \cdot \exp\left[-\frac{1}{4a\rho^2\bar{t}} (\bar{x} + 2n)^2\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{(1-\rho^2)}}\right] \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (3.24)$$

Аналогично, переходя к оригиналу в (3.15), находится выражение для давления в пласте:

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \cdot \exp\left[-\frac{(\bar{x} + 2n)^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b \bar{t} + \bar{y}}{2\sqrt{b}\sqrt{\bar{t}}\sqrt{(1-\rho^2)}}\right) \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (3.25)$$

Выражения (3.24) и (3.25) в конечном виде представляют окончательное решение рассматриваемой задачи.

Из выражения (3.24) определяем скорость фильтрации в трещине ГРП:

$$\begin{aligned} \bar{v}_f(\bar{x}, \bar{t}) &= -\frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[ (-1)^n \exp\left[-\frac{(\bar{x} + 2n)^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^n (\bar{x} + 2n)^2 \exp\left[-\frac{(\bar{x} + 2n)^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right]}{2a\rho^2\bar{t}} \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b \sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{(1-\rho^2)}}\right) \frac{d\rho}{\rho^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

При  $\bar{x}=0$  из этого выражения следует формула для определения дебита скважины:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\bar{t}) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2}{a\rho^2\bar{t}}\right) \cdot \left(1 - \frac{2n^2}{a\rho^2\bar{t}}\right) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \operatorname{erfc}\frac{\rho^2 b \sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{d\rho}{\rho^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из выражения (3.25) можно найти расход жидкости из пласта в трещину:

$$\bar{q}(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \frac{\partial \bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t})}{\partial \bar{y}}. \quad (3.28)$$

Решения, полученные в рамках модели трещины бесконечной протяженности (раздел 2.2.1) следуют из (3.24) и (3.25) при  $n = 0$ .

### 3.3 Анализ результатов расчетов решения первой краевой задачи

Рассматривается отбор жидкости из пласта через скважину с трещиной гидроразрыва с полудлиной  $x_f = 100$  м, давление в скважине  $P_c = 100 \cdot 10^5$  Па, начальное давление  $P_0 = 200 \cdot 10^5$  Па, мощность пласта  $h_r = 10$  м, ширина трещины  $w_f = 5 \cdot 10^{-3}$  м, проницаемости пласта  $k_r = 10^{-15}$  м<sup>2</sup> и трещины  $k_f = 10^{-9}$  м<sup>2</sup>. При выполнении расчетов принято изменение  $n$  от -4 до 4, так как ряды, входящие в решения, сходятся достаточно быстро, при  $n \gg 4$  различие результатов расчетов проявляется в шестом или седьмом знаках после запятой.

На рисунке 3.1 представлено распределение давления в трещине при проницаемости трещины  $k_f = 10^{-9}$  м<sup>2</sup> и различных временах (1, 5 и 10 суток, соответственно). Со временем происходит уменьшение значения давления по всей длине трещины, темп падения давления резко снижается.

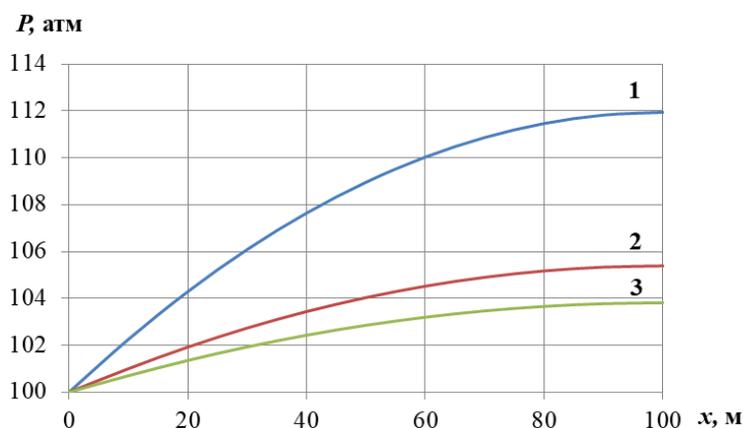


Рисунок 3.1 Распределение давления в трещине при различных временах

На рисунке 3.2 представлены кривые изменения давления в трещине ГРП при проницаемости трещины  $k_f$  и при фиксированном времени  $t = 10$  суток: 1 —  $10^{-8}$  м<sup>2</sup>; 2 —  $10^{-9}$  м<sup>2</sup>; 3 —  $10^{-10}$  м<sup>2</sup>. Из рисунка видно, что падение давления вдоль трещины меньше в высокопроницаемых трещинах. Принято считать [21, 60-61], что динамика давления в трещине зависит от ее

безразмерной проводимости  $F_{cd} = \frac{k_f w_f}{k_r x_f}$ . Для практически значимых случаев эта величина может изменяться в пределах  $1 < F_{cd} < 1000$ , при этом оказывается, что при значениях безразмерной проводимости трещины  $F_{cd} > 300$  давление в трещине является практически однородным и совпадает с давлением на забое скважины (трещина бесконечной проводимости). На рис. 3.2 такой ситуации соответствует кривая 1, для которой  $F_{cd} = 500$ . Кривая 3, наоборот, соответствует трещине малой проводимости ( $F_{cd} = 5$ ), при этом в трещине реализуется значительный градиент давления.

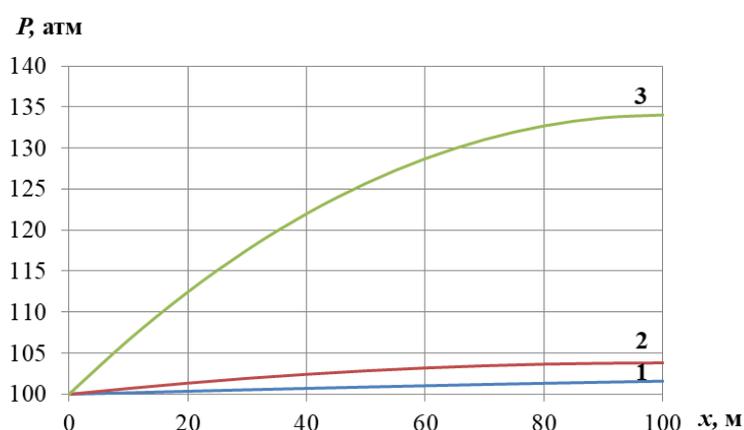


Рисунок 3.2 Распределение давления в трещине при различных значениях проницаемости трещины

На рисунке 3.3 представлено распределение давление в трещине при различных значениях проницаемости пласта для момента времени 10 суток. Кривые 1-3 соответствуют значениям  $k_r$ :  $10^{-14} \text{ м}^2$ ;  $10^{-15} \text{ м}^2$ ;  $10^{-16} \text{ м}^2$ . С увеличением проницаемости пласта, падение давления вдоль трещины растет, а в фиксированном сечении трещины - уменьшается.

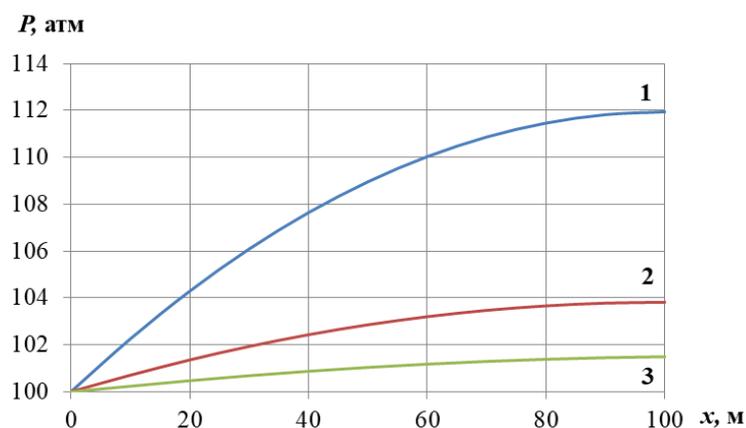


Рисунок 3.3 Распределение давления в трещине при различных значениях проницаемости пласта

На рисунке 3.4 представлены при постоянном значении времени равное 1 суткам зависимости давления в трещинах различной длины. Существенное влияние на изменение давление вносит протяженность трещины. Кривая 4 соответствует модели трещины бесконечной длины, она построена по формуле (3.24) при  $n = 0$ .

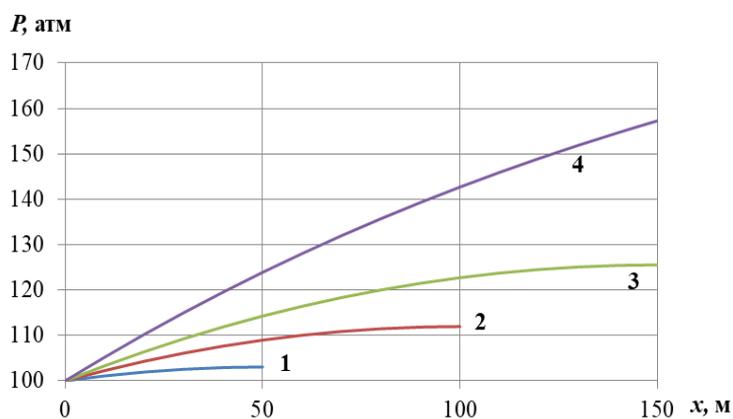


Рисунок 3.4 Распределение давления в трещине при различных значениях полудлин трещины: 1 -  $x_f = 50$  м; 2 -  $x_f = 100$  м; 3 -  $x_f = 150$  м; 4 -  $x_f = \infty$ .

Как следует из рис. 3.5, изменение дебита со временем заметно проявляется в начальной стадии, с течением временем устанавливается

практически постоянное значение дебита. Дебит скважины больше в случае трещины большей проницаемости.

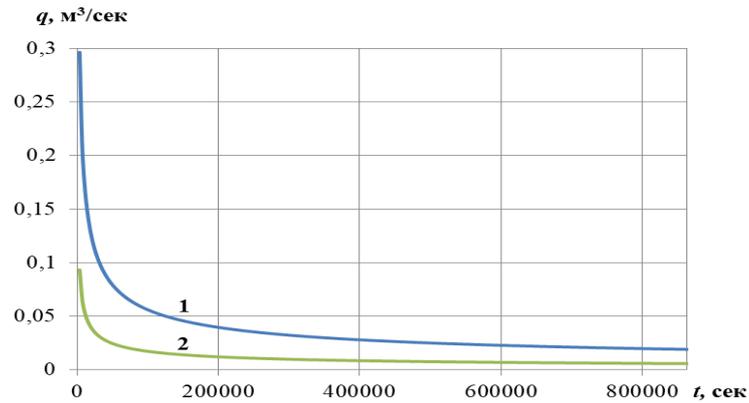


Рисунок 3.5 Изменение дебита скважины от времени в зависимости от проницаемости трещины: 1 –  $k_f = 10^{-9} \text{ м}^2$ ; 2 –  $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$ ;

### 3.4 Решение второй краевой задачи.

Решение этой задачи ((3.1) – (3.7), при втором условии (3.3)) имеет вид:

$$\bar{P}_f(x, s) = -\frac{b}{a} \frac{1}{sf(s)} \frac{ch[f(s)(1 - \bar{x})]}{sh[f(s)]}, f(s) = \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}}$$

При этом давление в пласте определяется из выражения:

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s) = \bar{P}_f(\bar{x}, s) e^{-\bar{y}\sqrt{s}}.$$

Выражение  $\bar{P}_f(x, s)$  представим в виде

$$\bar{P}_f(x, s) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{s} L[V(x, t)], \tag{3.29}$$

где

$$L[V(\bar{x}, \bar{t})] = \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \frac{ch \left[ (1 - \bar{x}) \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \right]}{sh \left[ \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \right]}. \tag{3.30}$$

Используя теорему интегрирования для оригинала [9]

$$\frac{1}{s}F(s) \doteq \int_0^t f(\tau)d\tau$$

в выражении (3.29) переходим к оригиналу:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\bar{t}} V(\bar{x}, \tau) d\tau. \quad (3.31)$$

Таким образом, необходимо найти  $V(\bar{x}, \bar{t})$  по (3.30). Тогда распределение давления в трещине будет определяться выражением (3.29).

На основе теоремы о подобии  $f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$  [41] имеем:

$$L[V(\bar{x}, \bar{t}b^2)] \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\sqrt{s + \sqrt{s}}} \frac{ch\left[(1 - \bar{x}) \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \sqrt{s}}\right]}{sh\left[\frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \sqrt{s}}\right]} \quad (3.32)$$

Для нахождения  $V(\bar{x}, \bar{t})$  применим правило преобразования Лапласа:

$$L^{-1}[F(s + \sqrt{s})] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u}{(t-u)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(t-u)}\right) f(u) du,$$

Здесь

$$f(t) = L^{-1}F(s), F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{ch\left[(1-\bar{x})\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]}{sh\left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V(\bar{x}, \bar{t}b^2) \frac{1}{b^2} &= \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}b} \int_0^{\bar{t}b^2} \frac{u}{(\bar{t}b^2 - u)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(\bar{t}b^2 - u)}\right) \theta_0\left(\frac{1 - \bar{x}}{2} \left| \frac{i\pi u a}{b^2} \right.\right) du. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Используем следующее соотношение, связывающее изображение и оригинал [9]:

$$L^{-1}\left[\frac{ch\left[\frac{b}{\sqrt{a}}(1 - \bar{x})\sqrt{s}\right]}{\sqrt{s} sh\left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]}\right] = \frac{\sqrt{a}}{b} \theta_0\left(\frac{1 - \bar{x}}{2} \left| \frac{i\pi \bar{t} a}{b^2} \right.\right) \quad (3.34)$$

Тета-функция  $\theta_0(v|\tau)$  выражается в виде ряда [9]:

$$\theta_0(v|\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{i\pi}{\tau} \left(v - \frac{1}{2} + n\right)^2\right)$$

Таким образом, имеем:

$$\theta_0\left(\frac{1-\bar{x}}{2} \middle| \frac{i\pi\bar{t}a}{b^2}\right) = \frac{b}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{b^2(n-\bar{x})^2}{4au}\right) \quad (3.35)$$

С учетом (26) подставляя (24) в (23) находим:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{b^2}{2\pi\sqrt{a}} \int_0^{\bar{t}} d\tau \cdot \quad (3.36)$$

$$\cdot \int_0^{\tau b^2} \exp\left(-\frac{u^2}{4(\tau b^2 - u)}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{b^2(n-\bar{x})^2}{4au}\right) \cdot \frac{\sqrt{u} du}{(\tau b^2 - u)^{3/2}}$$

Изменение порядка интегрирования в двойном интервале позволяет получить вычисляемый интеграл:

$$\int_{\frac{u}{b^2}}^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{(\tau b^2 - u)}\right) \frac{d\tau}{(\tau b^2 - u)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{ub^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t} - u}}\right)$$

Тогда:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{b^2\bar{t}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(\frac{b^2(n-\bar{x})^2}{4au}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t} - u}}\right) \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (3.37)$$

Этот интеграл запишем через новую переменную интегрирования:  $u = \rho^2 b^2 \bar{t}$ .

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi a}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{(2n-\bar{x})^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\rho \quad (3.38)$$

Осуществление перехода от изображения к оригиналу в (3.29) позволяет найти распределение давления в пласте.

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi a}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{(2n-\bar{x})^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\bar{t} + \bar{y}}{2\sqrt{\bar{t}}(1-\rho^2)}\right) d\rho \quad (3.39)$$

Таким образом, решение задачи о нестационарной фильтрации в системе пласт-трещина гидроразрыва определяется выражениями (3.38) – (3.39).

Представляют интерес, частные случаи, имеющие самостоятельное значение.

При  $n = 0$  из (3.39) следует выражение для давления в трещине неограниченной протяженности.

При  $k_r = 0$  из (3.39) следует выражение, которое в размерном виде представляется формулой:

$$P_f(x, t) = P_0 + \frac{Q\mu\sqrt{\kappa_f t}}{k_f w_f h_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(2nx_f - x)^2}{4\kappa_f t}\right) - \sqrt{\pi} \frac{2nx_f - x}{2\sqrt{\kappa_f t}} \operatorname{erfc} \frac{2nx_f - x}{2\sqrt{\kappa_f t}} \right].$$

Здесь все индексы  $f$  можно заменить на  $r$ , то есть трещина как область фильтрации отсутствует, имеет место только пласт. При этом имеет следующие частные случаи:

- При  $n = 0$  приходим к известной в теории фильтрации формуле для давления в плоско-параллельном потоке, когда при  $x = 0$  задан дебит [4].

- Фильтрация жидкости в замкнутом пласте между галереей с заданным дебитом и непроницаемой линией сброса (разлома) при заданном на галерее значения дебита;

- Линейная фильтрация жидкости из пласта в трещину бесконечной проводимости при отборе жидкости из скважины с заданным дебитом [21].

При  $\bar{x} = 0$  из (3.38) следует формула давления на забое скважины. Это давление зависит от времени, дебита скважины, геометрических и коллекторских параметров пласта и трещины, физических свойств флюида. В размерном виде эта формула имеет вид:

$$P_f(0, t) = P_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{Q\sqrt{\mu}}{h_r} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{t}}{w_f\sqrt{k_f}} \int_0^1 \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 x_f^2 \mu \beta}{k_f t \rho^2}\right) \right] \cdot \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{k_r} \sqrt{t} \rho^2}{\sqrt{\mu \beta} w_f 2 \sqrt{1 - \rho^2}} \right] d\rho. \quad (3.40)$$

В структуре этой формулы выделяются три сомножителя – прединтегральный сомножитель и два сомножителя под интегралом. Прединтегральное выражение однозначно определяет зависимость давления от дебита скважины и высоты трещины. Первый множитель внутри интеграла однозначно определяет зависимость давления от длины трещины. Сомножитель в интеграле *erfc* характеризует наличие потока флюида между пластом и трещиной и однозначно определяет зависимость забойного давления от проницаемости пласта. Зависимости этого давления от вязкости и сжимаемости, проницаемости и ширины трещины и времени являются нелинейными.

При проведении гидродинамических исследований скважин формулу (3.40) можно рассматривать как типовую кривую, определяющую зависимость забойного давления от времени и параметров пласта, трещины и фильтрующейся жидкости.

Используя закон Дарси из (3.39) можно найти скорость фильтрации жидкости в трещине  $\bar{v} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}}$ . Формула для скорости фильтрации в трещине имеет значимость при теоретическом описании термометрических [10] и трассерных методов исследований нефтяных пластов с трещинами гидроразрыва. Это связано с тем, что аналитические модели этих методов включают конвективный перенос соответствующих субстанций (тепла или трассера) в трещине. Интенсивность конвективного переноса в трещине, в свою очередь, определяется скоростью фильтрации.

### 3.5 Анализ результатов расчетов решения второй краевой задачи

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов по выражениям (3.38), (3.39) и (3.40), при отборе жидкости из пласта. Базовые параметры, используемые в расчетах, представлены в главе 2. При расчетах параметр  $n$  принят в пределах ( $n = -5, n = 5$ ), что оказалось вполне достаточным вследствие быстрой сходимости рядов. В ходе решения при нахождении оригиналов по изображениям получаются тета-функции. Как отмечается в литературе [24], тета-функции представляются быстро сходящимися рядами. К тому же ряды, входящие в полученные решения, являются знакопеременными, и их сходимость следует из правила Лейбница.

На рис. 3.6 представлено распределение давления в пласте и в трещине для момента времени  $t = 1$  сутки. Кривая 1 описывает изменение давления вдоль трещины  $P_f(x)$  (формула (3.38)), кривая 2 – изменение давления в пласте  $P_r(x = 0, y)$  по формуле (3.39). Линия  $ab$  описывает изменение давления в рассматриваемый момент времени на расстоянии  $x = 40$  м от скважины (по трещине) для всех точек пласта  $0 < y < 100$  м.

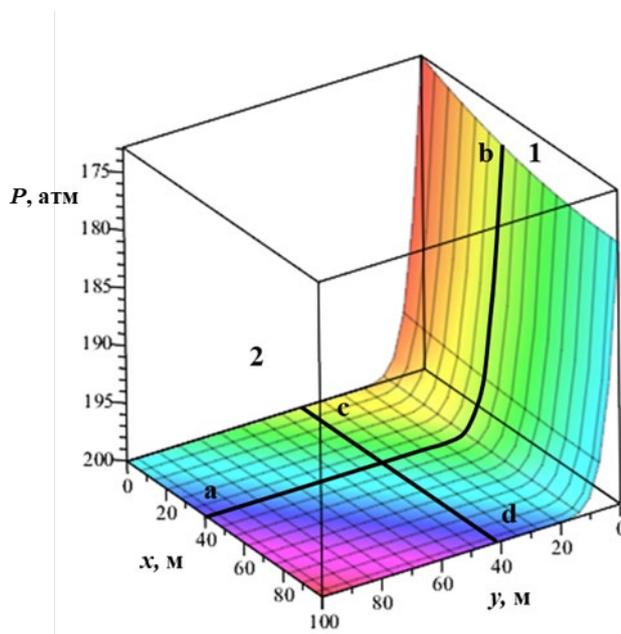


Рисунок 3.6 Распределение давления в трещине и в пласте

На рис. 3.7 представлены зависимости давления на забое скважины от времени. Кривая 1 – трещина неограниченной протяженности, кривые 2, 3, 4 и 5 соответствуют значениям полудлин трещин  $x_f$ : 300, 150, 100 и 50 м, соответственно. Из рисунка можно сделать вывод, что в расчетах давления при значениях полудлин выше  $x_f = 300$  м можно использовать модель трещины неограниченной протяженности (при принятых параметрах). Относительное расхождение между значениями давления при  $t = 1$  сут для  $x_f = 100$  м и расчетами давления по модели неограниченной протяженности составляет – 6,76 %, при снижении полудлины трещины при  $x_f = 50$  м – 22,88 %. С увеличением времени относительное расхождение между расчетами по моделям трещин неограниченной и ограниченной протяженностей растет, так, например, при  $t = 10$  сут и  $x_f = 300$  м погрешность составляет - 11,34 %. Следует отметить, что с увеличением проницаемости трещины, предельное значение полудлины трещины, выше которого допустимо использование модели неограниченной протяженности трещины, увеличивается. При увеличении проницаемости пласта, предельное значение полудлины трещины уменьшается.

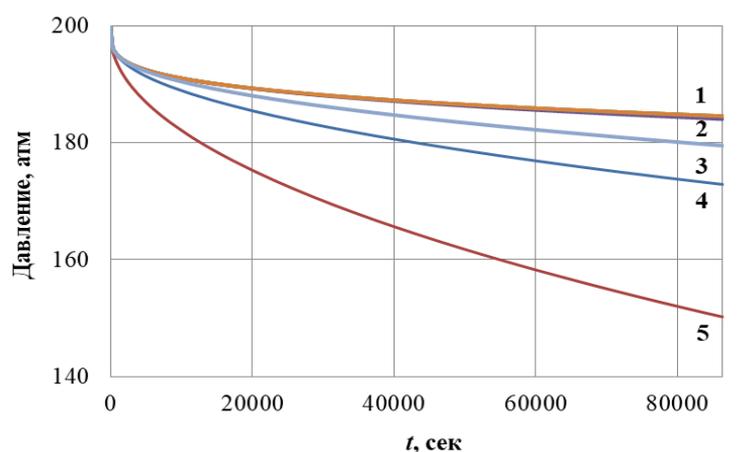


Рисунок 3.7 Зависимость забойного давления от времени для трещин различной протяженности

На рисунках 3.8-3.9 представлены зависимости забойного давления от времени ( типовые кривые падения давления) (3.40) при проницаемостях

трещины и пласта. Из рисунка видно, что падение давления в трещине уменьшается с увеличением проницаемости трещины и пласта.

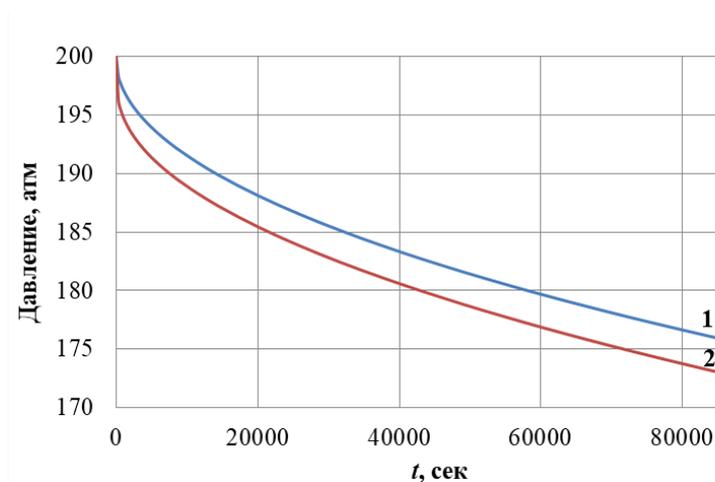


Рисунок 3.8 Зависимость забойного давления от времени:

$$1 - k_f = 10^{-8} \text{ м}^2, 2 - k_f = 10^{-9} \text{ м}^2, x_f=100 \text{ м.}$$

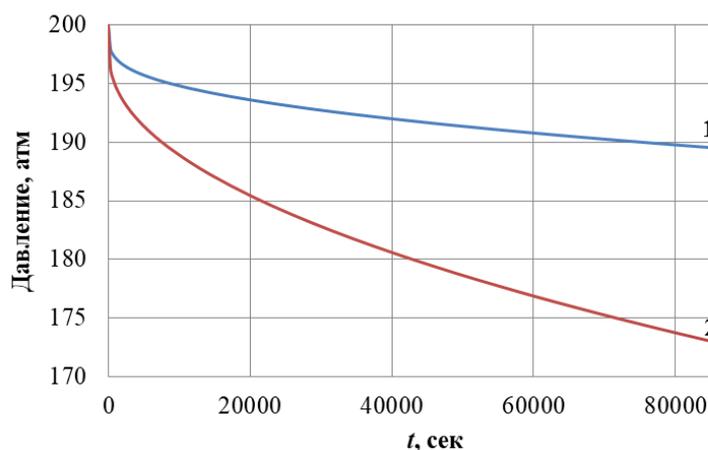


Рисунок 3.9 Зависимость забойного давления от времени:

$$1 - k_r = 10^{-14} \text{ м}^2, 2 - k_r = 10^{-15} \text{ м}^2, x_f=100 \text{ м.}$$

Из рис. 3.10 следует, что падение давления на забое скважины увеличивается с повышением дебита скважины. Зависимость разности забойного и пластового давлений от дебита является важнейшей характеристикой скважины, определяющей эффективность ее эксплуатации (продуктивность для добывающих скважин, приемистость для нагнетательных скважин). Формула (3.40) позволяет провести анализ

чувствительности этой характеристики от всего набора параметров пласта, трещины и флюида.

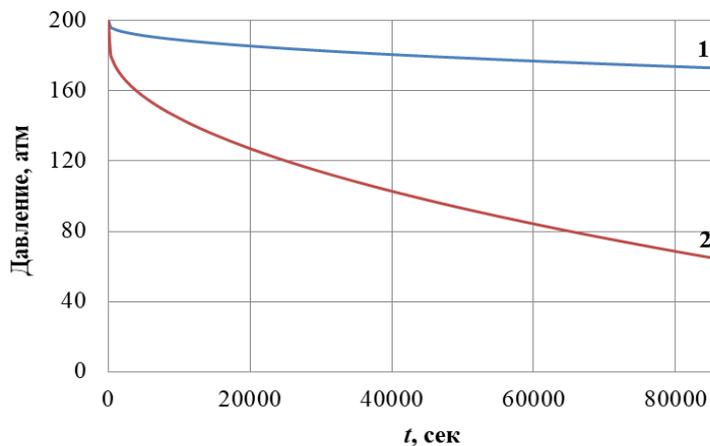


Рисунок 3.10 Зависимость забойного давления от времени:

1 –  $q = 10 \text{ м}^3/\text{сут}$ , 2 –  $q = 50 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $x_f = 100 \text{ м}$ .

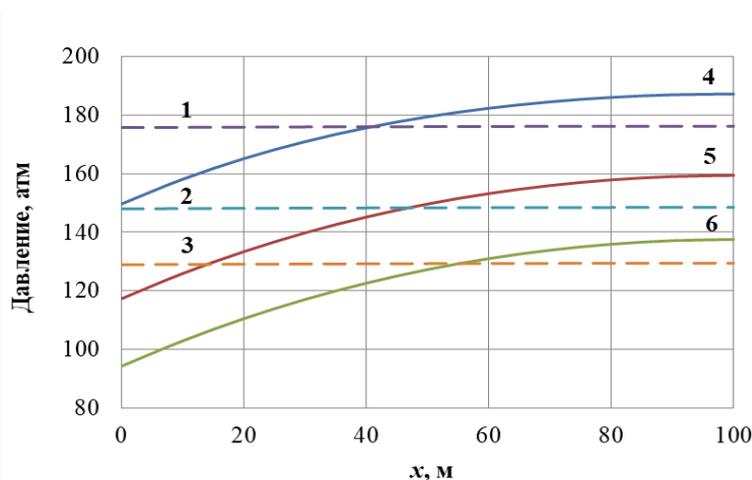


Рисунок 3.11 Распределение давления вдоль трещины при различных значениях проницаемости трещины (сплошные линии –  $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$ , штриховые линии –  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$ ):  $t = 1 \text{ сут}$  (1, 4),  $5 \text{ сут}$  (2, 5),  $10 \text{ сут}$  (3, 6).

Из рис. 3.11 видно, что вблизи скважины по всей длине трещины ГРП наблюдается падение давления. При этом падение давления вдоль трещины резко уменьшается с увеличением проницаемости, эпюры кривых давления постепенно выпрямляются. Как следует из рисунка, при  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$  падение давления в трещине составляет менее 1 атм. Следовательно, трещина

имеет большую проводимость, поэтому давление вдоль трещины с давлением на забое скважины практически не изменяется и незначительно отличается от давления на забое скважины.

В данной главе построены решения первой и второй краевых задач нестационарной фильтрации жидкости в системе пласт-трещина ГРП в рамках модели трещины ограниченной протяженности.

Решения рассматриваемых задач выражаются через тета-функции, которые, в свою очередь, представляются через быстро сходящиеся ряды. Установлено, что при расчетах давления достаточно рассматривать полученные в решениях бесконечные ряды в пределах  $-5 < n < 5$ .

## ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ В СИСТЕМЕ ПЛАСТ-ТРЕЩИНА ГИДРОРАЗРЫВА ПРИ НАЛИЧИИ СКИН-ЗОНЫ В ТРЕЩИНЕ

Предположим, что в пласте имеется скважина, которая пересекается симметричной трещиной ГРП. Считается, что жидкость из пласта в скважину поступает только через трещину. При этом в системе пласт-трещина реализуется билинейный режим фильтрации [21, 33, 40-42, 60, 61].

Интенсивность фильтрации флюида между пластом и скважиной зависит от характеристик трещины (размеры и коллекторские свойства). В процессе гидроразрыва возможны повреждения трещины, ухудшающие эти характеристики, например образование зон пониженной проницаемости – скин-зоны.

Обычно выделяются два вида повреждений трещин [61]:

- 1) Поврежденная зона в пласте вокруг трещины («*fluid loss damage fracture*» - повреждения, вызывающие уменьшение потока флюида);
- 2) Зона повреждения внутри трещины в окрестности скважины («*choked fracture*» - закупоренная трещина).

Фильтрация в системе пласт-трещина ГРП, при наличии повреждения первого вида исследована в работах [33, 104]. В данной главе диссертации рассматривается моделирование фильтрации в системе пласт-трещина ГРП при наличии повреждения второго вида [43]. Схема процесса фильтрации приведена на рис. 4.1 (вид сверху).

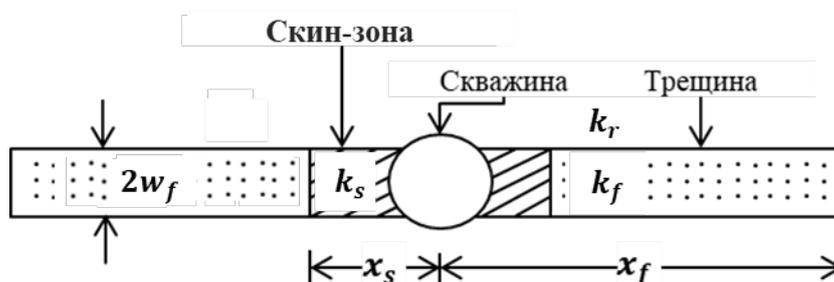


Рисунок 4.1 Вертикальная трещина с зоной повреждения внутри

На линии смыкания трещины и скважины принимается граничное условие третьего рода для давления, что позволяет использовать при моделировании представленную на рисунке 4.2 схематизацию процесса фильтрации.

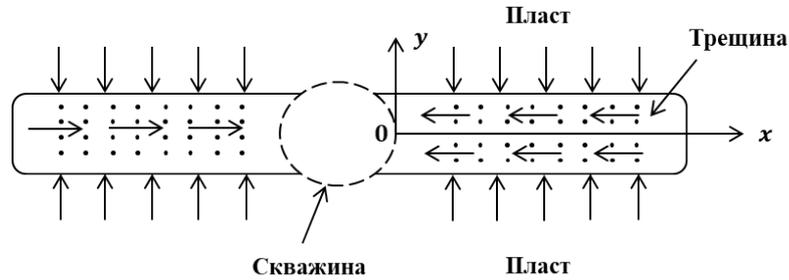


Рисунок 4.2. Схематизация процесса фильтрации

Таким образом, геометрически скин-зона из рассмотрения исключается, но параметры этой зоны, такие как проницаемость и протяженность, входят в выражение для граничного условия третьего рода (выражение (4.5)). Как и в главах 2 и 3 рассматривается 1/4 часть области фильтрации:

пласт:  $0 < x < x_f, 0 < y < \infty$ , трещина:  $0 < x < x_f, -w_f < y < 0$ .

Распределение давления в трещине ( $P_f$ ) и в пласте ( $P_r$ ) описывается следующей задачей [43]:

$$\kappa_r \frac{\partial^2 P_r}{\partial y^2} = \frac{\partial P_r}{\partial t} \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \quad (4.1)$$

$$\kappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\kappa_f k_r}{w_f k_f} \frac{\partial P_r}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial P_f}{\partial t} \quad 0 < x < \infty, \quad -b_f < y < 0 \quad (4.2)$$

$$P_r(x, y, t = 0) = P_f(x, t = 0) = P_0 \quad (4.3)$$

$$P_r(x, y = 0, t) = P_f(x, t) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial P_f(0, t)}{\partial x} - d P_f(0, t) = -d \cdot P_c, \quad d = \frac{1}{x_s \left( \frac{k_f}{k_s} - 1 \right)} \quad (4.5)$$

Отличие этой задачи от известных моделей билинейного потока [40,42,60,61] заключается в том, что при  $x = 0$  для давления принимается граничное условие третьего рода (4.5). Это условие определяет дополнительный перепад давления за счет наличия в призабойной зоне трещины скин-зоны, проницаемость которой меньше чем проницаемость трещины. В (4.5)  $k_s$  и  $x_s$  – проницаемость и протяженность скин зоны,  $P_c$  – давление на забое (внутри скважины),  $P_f(0, t)$  – давление в трещине (в призабойной скин-зоне). За счет разницы этих давлений и создается вышеуказанный перепад давления.

Применение граничного условия третьего рода в задачах фильтрации описано в работах [3, 28, 33]. В частности в [3] показано, что такое условие выполняется на участках границы, через которые может происходить обмен жидкости с соседними пластами через сравнительно слабопроницаемые перемычки.

Проанализируем условие (4.5). При  $d \rightarrow \infty$  из (4.5) имеем  $P_f(0, t) = P_c$  – граничное условие 1го рода. Из выражения для  $d$  следует, что такая ситуация имеет место при  $x_s = 0$  (ширина скин-зоны равна нулю), а также при  $k_s = k_f$ . При этом скин зона отсутствует, поверхность  $x = 0$  является проницаемой. При  $d \rightarrow 0$  из (4.5) следует граничное условие второго рода – условие непроницаемости  $\frac{\partial P_f(0,t)}{\partial x} = 0$ . Из выражения для  $d$  видно, что при этом  $x_s \rightarrow \infty$ , то есть скин-зона охватывает всю трещину.

Задачу (4.1)–(4.5) перепишем через безразмерные переменные:

$$\bar{x} = \frac{x}{x_f}, \quad \bar{y} = \frac{y}{y_f}, \quad \bar{t} = t \frac{\kappa_r}{x_f^2},$$

$$\bar{P}_r = \frac{P_r - P_0}{P^*}, \quad \bar{P}_f = \frac{P_f - P_0}{P^*}, \quad P^* = P_c - P_0,$$

$$\frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{P}_r}{\partial \bar{y}^2} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = a \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{x}^2} + b \left. \frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=0} \tag{4.7}$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, 0) = \bar{P}_f(\bar{x}, 0) = \bar{P}_r(\bar{x}, \infty, \bar{t}) = \bar{P}_f(\infty, \bar{t}) = 0 \quad (4.8)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} - C \bar{P}_f(0, \bar{t}) = -C \quad (4.10)$$

Здесь  $a = \frac{\kappa_f}{\kappa_r}$ ,  $b = a \frac{k_r x_f}{k_f w_f}$ ,  $C = d \cdot x_f$ ,  $x_f$  – полудлина трещины.

Задача (4.6) – (4.10) решается методом интегральных преобразований Лапласа.

$$\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, s) = L[\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})] = \int_0^\infty \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) e^{-s\bar{t}} d\bar{t}.$$

Задача (4.6) - (4.10) в пространстве изображений Лапласа:

$$\frac{d^2 \bar{P}_f}{d\bar{x}^2} = \frac{s}{a} \bar{P}_f + \frac{b}{a} \frac{d\bar{P}_r}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 \bar{P}_r}{d\bar{y}^2} = s \bar{P}_r \quad (4.12)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = \bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, s), \bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} \rightarrow \infty) = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{d\bar{P}_f(\bar{x} = 0, s)}{d\bar{x}} - C \bar{P}_f(\bar{x} = 0, s) = -\frac{C}{s} \quad (4.14)$$

Решение уравнения (4.12) с учетом условий (4.13):

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s) = \bar{P}_f(\bar{x}, s) \exp(-\sqrt{s}\bar{y})$$

Подстановка этого выражения в (4.11) определяет  $\bar{P}_f$ , которое имеет решение:

$$\bar{P}_f(x, s) = C_2 \exp\left(-\bar{x} \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{s}}\right).$$

Постоянная  $C_2$  определяется из условия (4.14).

Таким образом, решение (4.11) – (4.14) в пространстве изображений:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = \frac{C \exp\left(-\bar{x}\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}}\right)}{s \left(C + \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}}\right)} \quad (4.15)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s) = \frac{C \exp\left(-\bar{x}\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}} - \bar{y}\sqrt{s}\right)}{s \left(C + \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}}\right)} \quad (4.16)$$

Из (4.15) и (4.16) следует, что при  $C \rightarrow \infty$  (отсутствие скин-зоны), выражения для  $\bar{P}_f(\bar{x}, s)$  и  $\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s)$  совпадают с решением первой краевой задачи, когда на скважине задано давление (глава 2).

Используя теорему о свертках и табличную формулу нахождения оригинала [9], рассмотрим переход к оригиналу в (4.15):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

оригинал (4.15) представим в виде

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = C \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{\pi(\bar{t} - \tau)}} V(\bar{x}, \tau) d\tau \quad (4.17)$$

Здесь

$$V(\bar{x}, \bar{t}) = L^{-1} \left[ \frac{\exp\left[\left(-\frac{b}{\sqrt{a}}\bar{x}\right)\sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}}\right]}{b\sqrt{\frac{s}{b^2}} \left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} + C\right]} \right] \quad (4.18)$$

Используя теорему подобия [9]

$$\frac{1}{a} g\left(\frac{s}{a}\right) = f(at), g(as) = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right), \text{ где } g(s) = Lf(t)$$

(4.18) можно преобразовать к виду

$$L[V(\bar{x}, b^2\bar{t})] = \frac{b \cdot \exp\left[-\frac{b}{\sqrt{a}}\bar{x}\sqrt{s+\sqrt{s}}\right]}{\sqrt{s}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s+\sqrt{s}}+C\right)}$$

Для нахождения  $V(x, b^2\bar{t})$  применим операционное соотношение [9]

$$\frac{g(s+\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}-u}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(\bar{t}-u)}\right) f(u) du,$$

здесь  $f(u) = L^{-1}[g(s)]$ .

Тогда имеем

$$V(\bar{x}, b^2\bar{t}) = \frac{1}{b} \int_0^{b^2\bar{t}} \frac{\exp\left[-\frac{\rho^2}{4(b^2\tau-\rho)}\right]}{\sqrt{\pi(b^2\tau-\rho)}} L^{-1}\left[\frac{\exp\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\bar{x}\sqrt{s}\right)}{\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}+C}\right] d\rho$$

Используя формулу перехода к оригиналу [9], получим:

$$L^{-1}\left[\frac{\exp(-\alpha\sqrt{s})}{C+\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi\bar{t}}} \cdot \exp\left[-\frac{\alpha^2}{4\bar{t}}\right] - C \exp(\alpha C + C^2\bar{t}) \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\bar{t}}} + C\sqrt{\bar{t}}\right)$$

В результате получится

$$V(\bar{x}, b^2\tau) = b \int_0^{b^2\tau} \frac{\exp\left[-\frac{\rho^2}{4(b^2\tau-\rho)}\right]}{\sqrt{\pi(b^2\tau-\rho)}} \left[ \frac{\sqrt{a}}{b} \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \exp\left(-\frac{b^2\bar{x}^2}{4a\rho}\right) - \frac{Ca}{b^2} \exp\left(C\bar{x} + \frac{C^2a\rho}{b^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{b\bar{x}}{2\sqrt{a\rho}} + \frac{C}{b}\sqrt{a\rho}\right) \right] d\rho$$

Подставляя это выражение в (4.17) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = Cb \int_0^{\bar{t}} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(\bar{t}-\tau)}} \int_0^{b^2\tau} \frac{\exp\left[-\frac{\rho^2}{4(b^2\tau-\rho)}\right]}{\sqrt{\pi(b^2\tau-\rho)}} \cdot \\ \cdot \left[ \frac{\sqrt{a}}{b} \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \exp\left(-\frac{b^2\bar{x}^2}{4a\rho}\right) - \frac{Ca}{b^2} \exp\left[C\bar{x} + \frac{C^2a\rho}{b^2}\right] \right] \cdot \\ \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{b\bar{x}}{2\sqrt{a\rho}} + \frac{C}{b}\sqrt{a\rho}\right) d\rho \end{aligned}$$

В этом двойном интеграле изменяем порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = & \frac{bC}{\pi} \int_0^{b^2\bar{t}} \left[ \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{\rho\pi}} \exp\left(-\frac{b^2\bar{x}^2}{4a\rho}\right) - \frac{aC}{b^2} \exp\left(C\bar{x} + \frac{C^2a\rho}{b^2}\right) \right. \\ & \left. \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{b\bar{x}}{2\sqrt{a\rho}} + \frac{C\sqrt{a}}{b}\sqrt{\rho}\right) \right] d\rho \cdot \int_{\rho/b^2}^{\bar{t}} \frac{\exp\left[-\frac{\rho^2}{4(b^2\tau - \rho)}\right]}{\sqrt{(\bar{t} - \tau)(b^2\tau - \rho)}} d\tau \end{aligned} \quad (4.19)$$

Интеграл по  $\tau$  вычисляется по методике указанной в главе 2:

$$\int_{\rho/b^2}^{\bar{t}} \frac{\exp\left[-\frac{\rho^2}{4(b^2\tau - \rho)}\right]}{\sqrt{(\bar{t} - \tau)(b^2\tau - \rho)}} d\tau = \frac{\pi}{b} \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho}{2\sqrt{b^2\bar{t} - \rho}}\right)$$

Тогда выражение (4.19) принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = & C \int_0^{b^2\bar{t}} \left[ \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{\rho\pi}} \exp\left(-\frac{b^2\bar{x}^2}{4a\rho}\right) - \frac{aC}{b^2} \exp\left(C\bar{x} + \frac{C^2a\rho}{b^2}\right) \right. \\ & \left. \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{b\bar{x}}{2\sqrt{a\rho}} + \frac{C\sqrt{a}}{b}\sqrt{\rho}\right) \right] \operatorname{erfc}\frac{\rho}{2\sqrt{b^2\bar{t} - \rho}} d\rho \end{aligned} \quad (4.20)$$

Выражение для давления в пласте при переходе к оригиналу в (4.16):

$$\begin{aligned} \bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = & C \int_0^{b^2\bar{t}} \left[ \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{\rho}} \exp\left(-\frac{b^2\bar{x}^2}{4a\rho}\right) \right. \\ & \left. - \frac{aC}{b^2} \exp\left(Cx + \frac{C^2a\rho}{b^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{b\bar{x}}{2\sqrt{a\rho}} + \frac{C\sqrt{a}}{b}\sqrt{\rho}\right) \right] \\ & \cdot \operatorname{erfc}\frac{b\bar{y} + \rho}{2\sqrt{b^2\bar{t} - \rho}} d\rho \end{aligned} \quad (4.21)$$

Используя замену переменных  $\rho = z^2 b^2 \bar{t}$  выражение (4.20) представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = & 2C\sqrt{a\bar{t}} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}z^2}\right) - C\sqrt{a\bar{t}} \cdot z \right. \\ & \left. \cdot \exp(C\bar{x} + C^2a\bar{t}z^2) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}z} + C\sqrt{a\bar{t}} \cdot z\right) \right] \\ & \cdot \operatorname{erfc}\frac{z^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1 - z^2}} dz \end{aligned} \quad (4.22)$$

При  $\bar{x} = 0$  из (4.22) следует:

$$\bar{P}_f(0, \bar{t}) = 2C\sqrt{a\bar{t}} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} - C\sqrt{a\bar{t}} \cdot z \cdot \exp(C^2 a\bar{t} z^2) \right] \cdot \operatorname{erfc} \left( C\sqrt{a \cdot \bar{t}} \cdot z \right) \cdot \operatorname{erfc} \frac{z^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-z^2}} dz \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = 2C^2\sqrt{a\bar{t}} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} - C\sqrt{a\bar{t}} \cdot z \cdot \exp(C^2 a\bar{t} z^2) \right] \cdot \operatorname{erfc} \left( C\sqrt{a \cdot \bar{t}} \cdot z \right) \cdot \operatorname{erfc} \frac{z^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-z^2}} dz \quad (4.24)$$

Переход в выражениях (4.22) - (4.24) к размерному виду приводит к формулам, определяющим явную зависимость давления и дебита от комплекса параметров, характеризующих пласт, трещину и скин-зону. Анализ этих формул позволяет оценить влияние на изучаемый процесс фильтрации всего набора гидродинамических и геометрических параметров модели.

Параметры, используемые в расчетах, представлены в главе 2, дополнительно задано начальное давление пласта  $P_0 = 200 \cdot 10^5$  Па, давление в скважине  $P_c = 150 \cdot 10^5$  Па, проницаемость скин-зоны  $k_s = 10^{-13} \text{ м}^2$ ,  $x_s = 0,2$  м,  $d = 5 \cdot 10^{-4}$ .

На рисунках 4.3-4.6 представлены графики давления, вычисленные по формулам (4.22) и (4.23).

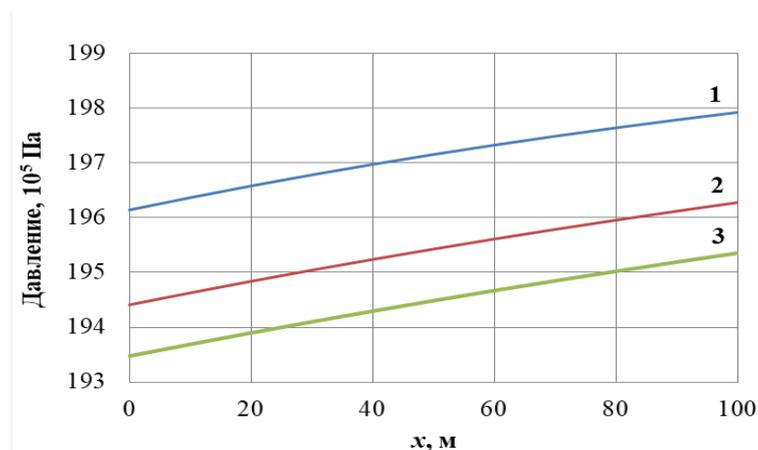


Рисунок 4.3 Распределение давления вдоль трещины:

1 – 1 сут, 2 – 5 сут, 3 – 10 сут.

Из рисунка 4.3 видно, что по длине трещины давление меняется незначительно. На фиксированном сечении трещины со временем давление падает, со временем темп падения давления резко замедляется, так при  $x=0$ : при 1 сутках давление составляет 196 атм, при 10 сутках – 193 атм.

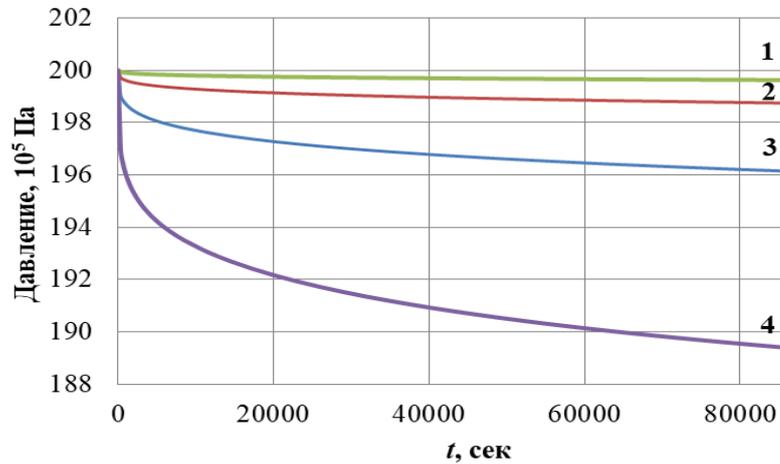


Рисунок 4.4 Давление  $P_f(0, t)$  при различных проницаемостях трещины:

$$1 - k_f = 10^{-7} \text{ м}^2, 2 - k_f = 10^{-8} \text{ м}^2, 3 - k_f = 10^{-9} \text{ м}^2, 4 - k_f = 10^{-10} \text{ м}^2.$$

Из рисунка 4.4 следует, что с увеличением проницаемости трещины падение давления при  $x = 0$  резко снижается. Так, например, при проницаемости трещины  $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$  падение давления за 1 сутки составляет около 11 атм, при  $k_f = 10^{-7} \text{ м}^2$  - менее 1 атм.

На рисунке 4.5 представлено распределение давления при  $x = 0$  для различных проницаемостей пласта. Давление изменяется незначительно при больших проницаемостях пласта, с уменьшением проницаемости пласта изменение давления становится значительным. Так для времени  $t=1$  сут при  $k_r = 10^{-16} \text{ м}^2$ , падение давления составляет около 7 атм, а при  $k_r = 10^{-14} \text{ м}^2$  давление за 1 сутки уменьшается на 2 атм.

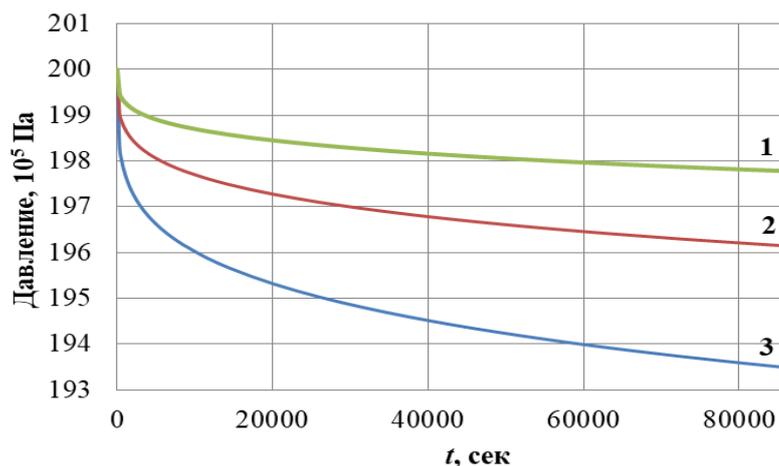


Рисунок 4.5 Давление  $P_f(0, t)$  при различных значениях проницаемости пласта:

$$1 - k_r = 10^{-14} \text{ м}^2, 2 - k_r = 10^{-15} \text{ м}^2, 3 - k_r = 10^{-16} \text{ м}^2.$$

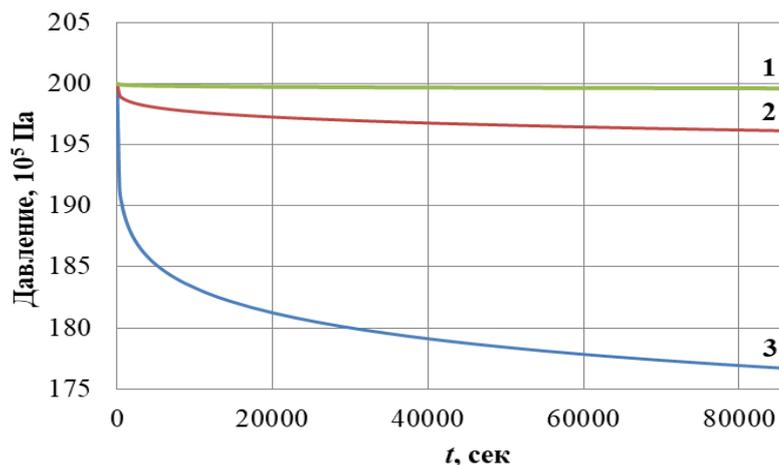


Рисунок 4.6 Давление  $P_f(0, t)$  при различных значениях проницаемости скин-зоны:

$$1 - k_s = 10^{-14} \text{ м}^2, 2 - k_s = 10^{-13} \text{ м}^2, 3 - k_s = 10^{-12} \text{ м}^2.$$

Из рисунка 4.6 видно, зависимость давления  $P_f(0, t)$  от проницаемости пласта является нелинейным. С увеличением проницаемости скин-зоны падение давления увеличивается, так при проницаемости скин-зоны  $k_s = 10^{-14} \text{ м}^2$  падение давления составляет менее 1 атм, при  $k_s = 10^{-12} \text{ м}^2$  – 23 атм.

Рассмотрим частный случай, имеющий самостоятельный интерес. При  $b = 0$  имеет смысл рассматривать задачу, включающую уравнение (4.7),

краевые условия (4.8) и (4.10). Эта задача описывает плоско-параллельный фильтрационный поток из пласта к галерее или к трещине гидроразрыва бесконечной проводимости при наличии скин-зоны соответственно на галерее или на боковой поверхности трещины. Решение задачи определяется (4.22)-(4.24) при  $b = 0$ . Вычисляя в (4.22) интегралы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}z^2}\right) dz &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}}\right) - \frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}} \operatorname{erfc} \frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}} \\ \int_0^1 C\sqrt{a\bar{t}z} \cdot \exp(C\bar{x} + C^2a\bar{t}z^2) \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}z}} + C\sqrt{a\bar{t}z}\right) dz &= \\ &= \frac{\exp(C\bar{x})}{2C\sqrt{a\bar{t}}} \exp(C^2a\bar{t}) \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}} + C\sqrt{a\bar{t}}\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}}\right) - \left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}} + \frac{1}{2C\sqrt{a\bar{t}}}\right) \operatorname{erfc} \frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \operatorname{erfc} \frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}} - \exp(C\bar{x} + C^2a\bar{t}) \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}} + C\sqrt{a\bar{t}}\right)$$

При  $\bar{x} = 0$  из этого выражения следуют:

$$\begin{aligned} \bar{P}_f(0, \bar{t}) &= 1 - \exp\left(C\sqrt{a\bar{t}}\right) \operatorname{erfc}\left(C\sqrt{a\bar{t}}\right) \\ \frac{\partial \bar{P}_f(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} &= -C \exp(C^2a\bar{t}) \operatorname{erfc}\left(C\sqrt{a\bar{t}}\right) \end{aligned}$$

Эти выражения можно записать в размерном виде с учетом следующих очевидных соотношений:

$$P_f(0, t) = P_0 + (P_c - P_0) \bar{P}_f(0, \bar{t}), \quad \frac{\partial P_f}{\partial x} = \frac{P_c - P_0}{x_f} \frac{\partial \bar{P}_f(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \quad (4.25)$$

Расход жидкости, поступающей из трещины в скважину определяется по формуле

$$Q_s = \frac{w_f h_r k_f}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial x} = \frac{w_f h_r k_f (P_0 - P_c)}{\mu} d \exp(d^2 \kappa_f t) \cdot \operatorname{erfc}(d \sqrt{\kappa_f t})$$

Переходя в этом выражении к пределу при  $d \rightarrow \infty$  получаем выражение для дебита при отсутствии скин-зоны:

$$Q = \frac{w_f h_r k_f (P_0 - P_c)}{\mu \sqrt{\pi k_f t}}$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с формулой дебита при плоско-параллельной фильтрации жидкости от контура питания к галерее [4].

Из последних двух выражений имеем:

$$\frac{Q_s}{Q} = \sqrt{\pi} F(\eta), \quad F(\eta) = \eta \cdot \exp(\eta^2) \operatorname{erfc}(\eta), \quad \eta = d \sqrt{k_f t}$$

Видно, что формулы для дебита принципиально различны. При наличии скин-зоны дебит меньше, различие в дебитах уменьшается при увеличении  $d$  и времени. Это различие определяется безразмерным параметром, включающим в себя характеристики скин-зоны  $(k_s, x_s)$ , трещины  $(k_f, k_f)$  и время:  $\eta = \frac{k_s \sqrt{k_f t}}{x_s (k_f - k_s)}$ .

Из определения функции  $F(\eta)$  следует:

$$F(\eta = 0) = 0, F(\eta \rightarrow \infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{dF}{d\eta} > 0.$$

Таким образом  $F(\eta)$  – монотонно растущая функция. Зависимость отношения дебитов от параметра  $\eta$  представлено на рисунке 4.7.

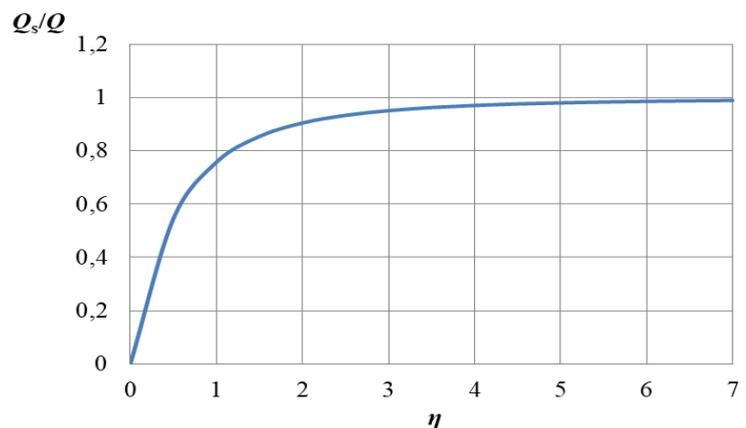


Рисунок 4.7 Зависимость отношения дебитов от параметра  $\eta$

С увеличением параметра  $\eta$  различие в дебитах уменьшается, например, при  $\eta > 7$  разница в дебитах составляет менее 1%.

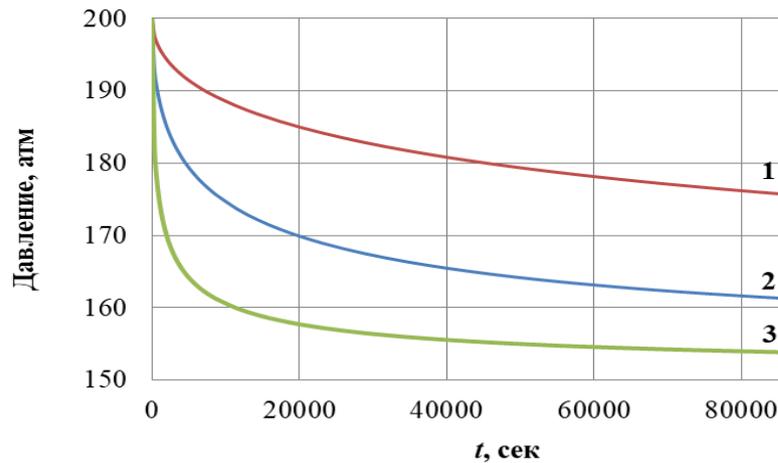


Рисунок 4.8 Зависимость давления в призабойной зоне от времени

Зависимость давления в призабойной зоне и дебита, вычисленные по формулам (4.25) представлены на рис. 4.8 и 4.9. Кривые 1, 2, 3 соответствуют следующим значениям параметра  $d = 5 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-3}$ . Из рисунка 4.8 видно, что давление в призабойной зоне со временем уменьшается, при этом перепад давления  $P_0 - P_f(0, t)$ , обусловленный скин-эффектом тем больше, чем больше параметр  $d$ . Увеличение этого параметра, при фиксированной проницаемости трещины, соответствует изменению параметров скин-зоны: увеличению ее протяженности или уменьшению проницаемости. С увеличением скин-фактора падение дебита со временем становится больше. В отличие от случая отсутствия скин-зоны, дебит при  $t \rightarrow \infty$  не стремится к бесконечности (формула для  $Q$ ), а имеет конечное значение, определяемое по формуле  $\frac{w_f h_r k_f (P_0 - P_c)}{\mu} d$ . Это выражение определяет максимально возможное значение дебита, полученное в рамках рассматриваемой модели. Следующим отличием является то, что при наличии скин-зоны темп снижения давления со временем ниже чем при её отсутствии.

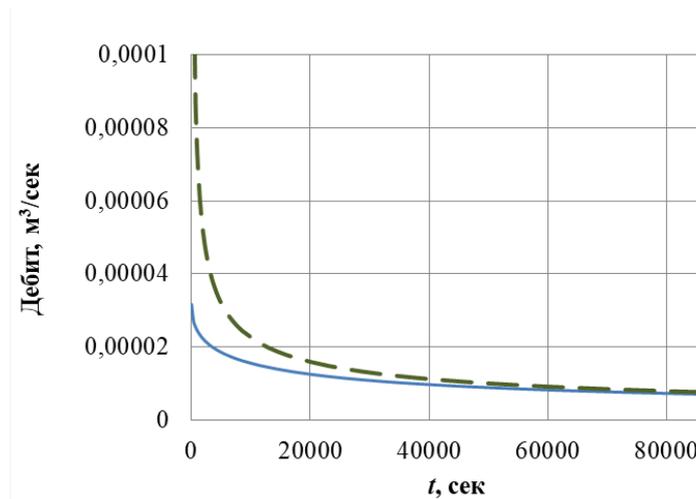


Рисунок 4.9 Зависимость дебита скважины от времени

На рисунке 4.9 представлены кривые дебита от времени. При этом сплошная линия соответствует случаю наличия скин-зоны, штриховая линия – ее отсутствию. При принятых выше параметрах, начальное значение дебита составляет  $3,169 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$ . При малых временах наблюдается заметное различие дебитов.

Для моделирования нестационарной фильтрации жидкости, в случае когда в призабойной зоне внутри трещины имеется скин-зона пониженной проницаемости, для давления в трещине, на линии ее смыкания со скважиной, использовано граничное условие третьего рода. В это условие входят длина и проницаемость скин-зоны.

Получен безразмерный параметр  $\eta = \frac{k_s \sqrt{\kappa_f t}}{x_s (k_f - k_s)}$ , в которую входят проницаемости скин-зоны и трещины  $k_s$ ,  $k_f$ , пьезопроводность трещины  $\kappa_f$ , длина скин-зоны  $x_s$  и время  $t$ . Этот параметр определяет отношение дебитов при наличии и отсутствии скин-зоны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены аналитические решения задач теории нестационарной фильтрации жидкости в системе пласт-трещина гидроразрыва в рамках моделей трещины бесконечной и конечной протяженностей. Рассмотрены первая и вторая краевые задачи, соответствующие режимам заданной депрессии и заданного расхода в скважине. Решения получены с использованием метода интегральных преобразований Лапласа. Полученные аналитические решения позволяют исследовать зависимость давления и дебита от коллекторских свойств пласта и трещины, от физических свойств флюида и пористой среды.

На основе решения первой краевой задачи получена формула для дебита скважины с трещиной гидроразрыва, согласно которой дебит зависит от перепада давления  $P_c - P_0$ , времени  $t^{-\frac{1}{4}}$ , ширины  $w_f^{\frac{1}{2}}$  и высоты  $h$  трещины, проницаемостей пласта  $k_r^{\frac{1}{4}}$  и трещины  $k_f^{\frac{1}{2}}$ , упругости пласта  $\beta^{\frac{1}{4}}$  и вязкости флюида  $\mu^{-\frac{3}{4}}$ .

На основе решения второй краевой задачи получено выражение, определяющее зависимость давления на забое скважины от времени в степени  $\frac{1}{4}$ , от дебита  $Q$ , вязкости флюида  $\mu^{\frac{3}{4}}$ , высоты  $h_r^{-1}$  и ширины  $w_f^{-\frac{1}{2}}$  трещины, упругости  $\beta_r^{-\frac{1}{4}}$  пласта, проницаемостей трещины  $k_f^{\frac{1}{2}}$  и пласта  $k_r^{-\frac{1}{4}}$ . Это выражение можно рассматривать как типовую кривую при гидродинамических методах исследования пластов. Используя выражения для давления в пласте и в трещине, получена формула для определения доли в дебите скважины, объема жидкости, поступающего из пласта в трещину.

Построены решения первой и второй краевых задач нестационарной фильтрации в пласте с трещиной гидроразрыва ограниченной протяженности. Установлено, что с увеличением длины трещины падение

давления на забое скважины уменьшается. Для каждого момента времени и фиксированного набора фильтрационных параметров существует предельная длина трещины, кривая падения давления для которой практически совпадает с кривой падения давления для трещины неограниченной протяженности.

Получены аналитические решения задач нестационарной фильтрации в системе пласт-трещина гидроразрыва при наличии скин-зоны в трещине. При этом скин-зона моделируется граничным условием третьего рода для давления на линии соприкосновения трещины со скважиной. Установлены закономерности влияния на распределение давления и скорости фильтрации характеристик скин-зоны, трещины и пласта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аньлунь В., Якушев В.С. Аналитическая модель линейного притока к горизонтальной скважине с трещинами гидроразрыва пласта в низкопроницаемых коллекторах // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2017. – № 3. – С. 18-30.
2. Байков В.А., Булгакова Г.Т., Ильясов А.М., Кашапов Д.В. К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2018. № 5. – С. 64-75.
3. Баренблатт Г.И., Ентов ВМ., Рыжик ВМ. Движение жидкостей и газов в пористых пластах. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
4. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 488 с.
5. Башмаков, Р.А. Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП / Р. А. Башмаков, Д. А. Насырова, В. Ш. Шагапов // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т. 86. – № 1. – С. 88-104.
6. Башмаков Р.А., Шагапов В. Ш., Фокеева Н.О. Особенности фильтрации флюидов в коллекторах, подверженных гидроразрыву пласта, при переходных режимах работы скважины // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63. – № 3(373). – С. 117-127.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Изд. 4, перераб. 1963. 1100 с.
8. Давлетбаев, А. Я. Моделирование закачки жидкости в скважину с развитием трещины гидравлического разрыва пласта / А. Я. Давлетбаев, З. С. Мухаметова // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92. – № 4. – С. 1074-1082.

9. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z- преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
10. Давлетшин Ф.Ф. Диссертация: Исследование нестационарных термогидродинамических процессов в пласте с трещиной гидроразрыва применительно к скважинной термометрии. – Уфа. – 136 С.
11. Диткин А.В., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.
12. Желтов Ю.П. Деформации горных пород. – М.: Недра, 1966. – 134 с.
13. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: «Недра», 1975, – 216 с.
14. Зазовский А.Ф., Тодуа Г.Т. О стационарном притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва большой протяженности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1990. – № 4. – С. 107-116.
15. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М., 2001. — 576 с.
16. Ивашнев О.Е., Смирнов Н.Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестн.МГУ. Математика, механика. 2003. № 6. С. 28–36.
17. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.
18. Ильясов А.М., Булгакова Г.Т. Квазиодномерная модель гиперболического типа гидроразрыва пласта // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 739–754. DOI: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1522>.
19. Ильясов, А. М. Моделирование течения вязкой жидкости в магистральной вертикальной трещине с проницаемыми стенками / А. М. Ильясов, Г. Т. Булгакова // Математическое моделирование. – 2016. – Т. 28. – № 7. – С. 65-80.

20. Кадет В.В., Селяков В.И. Фильтрация флюида в среде, содержащей эллиптическую трещину гидроразрыва // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1988. – № 5. – С. 54-60
21. Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 1999. – 212с.
22. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.:Наука. 1964. 487 с.
23. Котяхов Ф.И. Физика газовых и нефтяных коллекторов. М.: Недра, 1977. 287 с.
24. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002. 749 с.
25. Морозов П. Е. Полуаналитическое решение задачи нестационарного притока жидкости к несовершенной скважине // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159, № 3. – С. 340-353.
26. Нагаева, З. М. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте / З. М. Нагаева, В. Ш. Шагапов // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81. – № 3. – С. 319-329.
27. Назмутдинов, Ф. Ф. Моделирование фильтрации к скважине вскрытой трещиной ГРП / Ф. Ф. Назмутдинов, И. Л. Хабибуллин, Н. К. Вахитова // Вестник Башкирского университета. – 2018. – Т. 23. – № 4. – С. 953-957
28. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с. 2017 (№3)
29. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.

30. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
31. Реутов В.А. Гидравлический разрыв пласта: условия образования трещин, их практическое определение и использование. – М.:Недра, 1991. – 178 с,
32. Рубинштейн Л.И. Температурные поля в нефтяных пластах. М.: Недра, 1972. 276 с.
33. Сазонов, Е. О. Типовые кривые забойного давления для скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва с учетом скин-фактора / Е. О. Сазонов, И. Л. Хабибуллин // Нефтяное хозяйство. – 2021. – № 11. – С. 130-132. – DOI 10.24887/0028-2448-2021-11-130-132
34. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 219 с.
35. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
36. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2. М.: Наука, 2003. 800 с.
37. Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С, Шамсиев М.Н., Бадертдинова Е.Р. Гидродинамические методы исследования вертикальных скважин с трещиной гидроразрыва пласта / Ижевск : Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. – 84 с. – ISBN 978-5-4344-0059-6.
38. Хасанов М. М., Головнева О.Ю. Определение дебита вертикальных скважин с гидроразрывом пласта на неустановившемся режиме фильтрации // Нефтяное хозяйство. – 2016. – № 12. – С. 64-68.
39. Хабибуллин И.Л., Евграфов Н.А., Хисамов А.А. Моделирование нестационарного притока жидкости из пласта в скважину через трещину гидроразрыва // Сборник трудов Первой летней школы-конференции “Физико-химическая гидродинамика: модели и приложения”. Уфа: РИЦ БашГУ. 2016. С. 184-192.

40. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22. №2. С. 309-314.
41. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23. №4. С. 958-963.
42. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Механика жидкости и газа», Известия Российской академии наук, номер 5, 2019 г. С. 6-14.
43. Хабибуллин, И. Л. Исследование фильтрационного потока к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва при наличии скин-зоны в трещине / И. Л. Хабибуллин, А. А. Хисамов // Вестник Башкирского университета. – 2022. – Т. 27. – № 2. – С. 270-274.
44. Хабибуллин, И. Л. Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт - трещина гидроразрыва / И. Л. Хабибуллин, А. А. Хисамов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 77. – С. 158-168.
45. Хабибуллин, И. Л. Моделирование неустановившейся фильтрации жидкости в пласте с трещиной гидроразрыва / И. Л. Хабибуллин, А. А. Хисамов // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63. – № 4(374). – С. 116-125. – DOI 10.15372/PMTF20220412.
46. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.
47. Шагапов, В. Ш. Приближенное решение задачи об упругом режиме фильтрации в трещине, находящейся в нефтяном пласте / В. Ш. Шагапов, З. М. Нагаева // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93. – № 1. – С. 206-215.
48. Шагапов, В. Ш. Фильтрация к вертикальной скважине из пласта, подверженного ГРП, в случае коротких трещин / В. Ш. Шагапов, И. Р.

Хамидуллин, З. М. Нагаева // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93. – № 6. – С. 1414-1423.

49. Эрлагер Р. Гидродинамические методы исследования скважин. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 521 с.

50. Abbaszadeh, M. D., Cinco-Ley H. Pressure-Transient Behavior in a Reservoir With a Finite-Conductivity Fault // Society of Petroleum Engineers. – 1995. – P. 1 – 16

51. Azari M., Wooden W. O., & Coble L. E. A Complete Set of Laplace Transforms for Finite-Conductivity Vertical Fractures Under Bilinear and Trilinear Flows // Society of Petroleum Engineers. – 20556-MS. – 1990. – P. 251-266

52. Azari M., Wooden W.O., Coble L.E. A complete set of Laplace transforms for finite- conductivity vertical fractures under bilinear and trilinear flows//SPE 20556. – 1990.

53. Azari, M., Soliman, M. Y., Wooden, W. O., & Hunt, J. L. Performance Prediction for Finite-Conductivity Vertical Fractures // Society of Petroleum Engineers. – 22659-MS. – 1991. – P. 995-1004

54. Bennett, C.O. et.al. Approximate Solutions for Fractured Wells Producing Layered Reservoirs // SPEJ. – Oct. 1985. – P. 729-742

55. Bennett. C.O. Analysis of Fractured wells: Ph.D. Dissertation. – University of Tulsa. – 1982. – 160 P

56. Blasingame T. A., & Poe B. D. Semianalytic Solutions for a Well With a Single Finite-Conductivity Vertical Fracture // Society of Petroleum Engineers. – 26424-MS. – 1993. – P. 89-100

57. Burgoyne M.W., Little A.L. From high perm oil to tight gas - A practical approach to model hydraulically fractured well performance in coarse grid reservoir simulators//SPE-156610. – 2012.

58. Carey M.A., Mondal S., Sharma M.M. Analysis of water hammer signatures for fracture diagnostics // Paper SPE-174866-MS Presented at the SPE

Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, 28–30 September. 2015. DOI: <http://dx.doi.org/10.2118/174866-MS>.

59. Cinco-Ley H. and Meng H.Z. Pressure transient analysis of wells with finite conductivity vertical fractures in double porosity reservoirs // Paper SPE 18172 presented at the 1988 SPE Annual Technical conference and exhibition, Houston, TX. – P. 645-660

60. Cinco-Ley, H. and Samaniego-V. Transient Pressure Analysis for Fractured Wells // JPT. – Sept. 1981. – P. 1749-1766, SPE 7490

61. Cinco-Ley, H. and Samaniego-V., F., Effect of Wellbore Storage and Damage on the Transient Pressure Behavior of Vertically Fractured Wells,- paper SPE 6752 presented at the 1977 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Oct. 9-12

62. Cinco-Ley, H. Evaluation of Hydraulic Fracturing by Transient Pressure Analysis Method // Paper SPE 10043 presented at the 1982 SPE Intl.Petroleum Equipment and Technology Exhibition, Beijing. – P. 639-665]

63. Cinco-Ley, H.Samaniego V.F., and Domingues A.N. Transient Pressure Behavior for a well with a Finite Conductivity vertical fracture // SPEJ. - Aug.1978. – P. 253-264

64. Durlofsky L.J. Upscaling and gridding of fine scale geological models for flow simulation//Presented at 8th International Forum on Reservoir Simulation Iles Borromees. – 2005. – V. 2024.

65. Dyes A.B., Kemp C.E., Caudle B.H. Effect of Fractures on Sweep-out Pattern. Petroleum Transactions//AIME. – 1958. – V. 213. – P. 245–249.

66. Economides M.J., Martin T. Modern fracturing. Enhancing natural gas production. Houston, TX. USA:Energy Tribune Publishing Inc., 2007. 509 p.

67. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir Stimulation. – Oil and gas J., 1989. – 85 p

68. Elahmady M., Wattenberger R.A. Coarse scale simulation in tight gas reservoirs// Journal of Canadian Petroleum Technology. – 2006. – V. 45. – №12. – P. 67–71.

69. Gringarten A.C. and Ramey H.J. The use of source and Green's functions in solving unsteady flow problems in reservoirs // SPEJ Trans., AIME. – Vol.255. – Oct.1973. – P. 285-296
70. Gringarten A.C., Ramey H.J.Jr., Raghavan R. Unsteady-state pressure distributions created by a well with a single infinite-conductivity vertical fracture// Society of Petroleum Engineers Journal. – 1974. – V. 14. – № 04. – P. 347–360.
71. Guppy K.H., Cinco-Ley H., Ramey H.J. Pressure building analysis of fractured wells producing at high flow rates // J. Petrol. Technol. – 1982. – V. 34. – N 11. – P. 2656-2666
72. Hanley Edward J. and Pratip Bandyopadhyay Pressure Transient Behavior of the uniform flux Finite Capacity Fracture // Society of Petroleum Engineers. – 8278. – 1979. – 15 P
73. Holditch, S.A. and Morse, R.A. The Effects of Non-Darcy Flow on the Behavior of Hydraulically Fractured Gas Wells // JPT. – Oct.1976. – P. 1169-1179
74. Holzhausen C.R., Gooch, R.P. Impedance of hydraulic fracture: Its measurement and use for estimating fracture closure and dimensions // Paper SPE13892 presented at SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symposium, Denver, 1985. 19–22 May. DOI: <https://doi.org/10.2118/13892-MS>.
75. Houze O.P., Horne R.N. Ramey H.J. Pressure-Transient Response of an Infinite-Conductivity vertical fracture in a reservoir with double-porosity behavior // SPEFE. – September 1988. – P. 510-518
76. Ibrahim M.H., Wattenbarger R.A. Rate dependence of transient linear flow in tight gas wells//Journal of Canadian Petroleum Technology. –2006. – V. 45. – № 10.
77. Iriarte J., Merritt J., Kreyche B. Using water hammer characteristics as a fracture treatment diagnostic // Paper SPE-185087-MC presented at the 2017 SPE Oklahoma City Oil and Gas Symposium, 27–31 March, Oklahoma City, Oklahoma, USA. DOI: <https://doi.org/10.2118/185087-MS>.

78. Kay M. Practical Hydraulics. 2nd ed. Taylor & Francis, 2008. XII, 253 p.
79. Khabibullin, I. L. Unsteady Flow through a Porous Stratum with Hydraulic Fracture / I. L. Khabibullin, A. A. Khisamov // Fluid Dynamics. – 2019. – Vol. 54. – No 5. – P. 594-602.
80. Khisamov, A. A. Modeling of unsteady flow around well with hydraulic fracture / A. A. Khisamov, I. L. Khabibullin // E3S Web of Conferences, Saint Petersburg, 31 мая – 06 2021 года. – Saint Petersburg, 2021.
81. Lee S.-T., Brockenbrough J.R. A new approximate analytic solution for finite conductivity vertical fractures//SPE Formation Evaluation. – 1986. – V. 1. – № 01. – P. 75–88.
82. Lee, S. and Brockenbrough A new analytical solution for finite conductivity vertical fractures with real time and Laplace space parameter estimation // Paper SPE 12013 presented at the 1982 SPE annual technical conference and exhibition. – San Francisco, Oct.5-8. – 14 P
83. Lefevre D., Pellissier G., Sabathier J.C. A new reservoir simulation system for a better reservoir management//SPE 25604. – 1993.
84. Mader D. Hydraulic proppant fracturing and gravel packing. Developments in petroleum science. – Elsevier Science Publishers, 1989.– V. 26. – 1240 P
85. Malkowski P., Ostrowski L. The methodology for the young modulus derivation for rocks and its value // Proc. ISRM European Rock Mechanics Symposium — EUROCK 2017, 20–22 June, Ostrava. 2017. V. 191. P. 134–141. Elsevier Ltd.
86. Meng H-Z., Brown K.E. Coupling of production forecasting, fracture geometry requirements and treatment scheduling in the optimum hydraulic fracture design // J.Petrol.Technol. – 1987. – 49 P
87. Nordgren R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // Society of Petroleum Engineers J. 1972. V. 12. № 4. P. 306–314.

88. Olarewaju J. S., & Lee, W. J. A New Analytical Model of Finite-Conductivity Hydraulic Fracture in a Finite Reservoir // Society of Petroleum Engineers. – 19093-MS. – 1989. – P. 363-376
89. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems: Part 2 – Computational considerations and applications//SPE Formation Evaluation. – 1991. – V. 6. – № 03. – P. 369–378.
90. Paige R.W., Murray L.R., Roberts J.D.M. Field application of hydraulic impedance testing for fracture measurement // SPE J. 1995. V. 10. № 1. P. 6–12. DOI: <https://doi.org/10.2118/26525-PA>.
91. Patzek T.W., De A. Lossy transmission line model of hydrofractured well dynamics // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2000. V. 25. № 1/2. P. 59–77. DOI: <https://doi.org/10.2118/46195-MS>.
92. Perkins T.K., Kern L.R. Width of hydraulic fractures // Journal of Petroleum Technology. 1961. V. 13. № 4. P. 937949.
93. Practical solutions for pressure-transient responses of fractured horizontal wells in unconventional shale reservoirs/M. Brown, E. Ozkan, R. Raghavan, H. Kazemi//SPE Reservoir Evaluation and Engineering. – 2011. – V. 14. – № 06. – P. 663–676.
94. Prats M., Hazebroek P. and Stricklet W.R. Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior – Compressible-Fluid Case // SPEJ. –1962. – P. 87-94
95. Rodriguez F. Unsteady – State Pressure Behavior of a Reservoir with a well intersected by a partially-penetrating finite-conductivity vertical fracture: Ph.D. Dissertation, Stanford University. – 1982. – 147 P.
96. Sneddon J.N., Berry D.S. The classical theory of elasticity. Berlin etc.: Springer, 1958
97. Tiab D. Analysis of pressure and pressure derivative without type-curve matching: Vertically fractured wells in closed systems // J. Petrol. Science and Eng. – 1994. - V. 11. - P. 323-333
98. Tijsselin A., Anderson A. Johannes von Kries and the history of water hammer // Journal of Hydraulic Engineering. 2007. V. 133. № 1. P. 1–8.

99. Van Everdingen A.F., Hurst W. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs//Journal of Petroleum Technology. – 1949. – V. 1. – № – 12. – P. 305–324.
100. Van Kruysdijk C.P.J.W. Semianalytical Modeling of Pressure Transients in Fractured Reservoirs // Paper SPE 18169 presented at the 1988 SPE annual Technical Conference and Exhibition, Houstonm TX. – P. 619-630.
101. Vogel J.V. Inflow performance relationships for solution-gas drive wells // J. Petrol. Technol. – 1968. – V. 20. – N 1. – P. 83-92.
102. Warpinski N.R., Moschovidis Z.a., Parker C.D., Abou-Sayed I.S. Comparison study of hydraulic fracturing models – Test case: GRI staged filed experiment No.3. – J.Petrol.Technol. – 1994. – 67 P.
103. Warren J.E. and Root P.J. The Behavior of Naturally fractured reservoirs // SPEJ, Trans., AIME. – 1963. – P. 245-255.
104. Wong D.W., Harrington A.G., Cinco-Ley H. Application of the Pressure-Derivative Function in the Pressure-Transient Testing of Fracture Wells // Paper SPE 13056, SPE formation Evaluation. –1986. – P. 470-480.
105. Wylie E.B., Streeter V.L. Fluid transients in systems. N.J.: Prentice-Hall, Englewood cliffs, 1993. 463 p.
106. Chen C., Raghavan R. A. Multiply-Fractured Horizontal Well in a Rectangular Drainage Region // SPE. J. 1997. V. 2. № 4. P. 455–465.
107. Zhao Y., Zhang L., Zhao J., Luo J., Zhang B. “Triple porosity” modeling of transient well test and rate decline analysis for multi-fractured horizontal well in shale gas reservoirs// SPE. J. 2013. V. 110. P. 253–262.
108. Daneshy A. A. Off-Balance Growth: A new concept in hydraulic fracturing. 2003 //J. Pet. Tech. V. 55. № 4. P. 78–85; Clarkson C. R. Production data analysis of unconventional gas wells: Review of theory and best practices // Int. J. Coal Geol. 2013. V. 109. P. 101–146.
109. Mayerhofer M., Lolon E., Warpinski N., Cipolla C., Walser D., Rightmire C. What Is Stimulated Reservoir Volume // SPE. Prod. Oper. 2010. V. 25. P. 89–98.

110. Medeiros F., Jr., Ozkan E., Kazemi H. Productivity and drainage area of fractured horizontal wells in tight gas reservoirs // SPE. Res. Eval. Eng. 2008. V. 11. № 5. P. 902–911.
111. Brown M. L. Analytical trilinear pressure transient model for multiply fractured horizontal wells in tight shale reservoirs // Paper. SPE 172083. 2009.
112. Brohi I., Pooladi-Darvish M., Aguilera R. Modeling fractured horizontal wells as dual porosity composite reservoirs – application to tight gas, shale gas and tight oil gases// Paper. SPE. 144057. 2011.
113. Stalgorova E., Mattar L. Analytical Model for History Matching and Forecasting Production in Multifrac Composite Systems // Paper. SPE 162516. 2012.
114. Deng Y., Guo R., Tian Z., Xiao C., Han H., Tan W. Productivity model for shale gas reservoir with comprehensive consideration of multi-mechanisms // Open Petr. Eng. J. 2015. V. 8. P. 235–247.
115. Kim T.H., Lee K. S. Pressure-transient characteristics of hydraulically fractured horizontal wells in shale-gas reservoirs with natur- and rejuvenated-fracture networks //J. Petr. Techn. 2015.
116. Li Y., Jiang Y., Zhao J., Liu C., Zhang L. Extended finite element method for analysis of multi-scale flow in fractured shale gas reservoirs // Environ Earth. Sci. 2015. V. 73. P. 6035–6045.