На правах рукописи

ЗО АУНГ

НЕРАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель:	**Гладков Сергей Октябринович,** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Карташов Эдуард Михайлович,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет»
	Хакимова Зульфия Разифовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и прикладной математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уфимский государственный нефтяной технический университет»
Ведущая организация:	Общество с ограниченной ответственностью «РН-БашНИПИнефть», г. Уфа

Защита состоится «14» декабря 2023 г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.479.05 на базе ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте: https://uust.ru/.

Автореферат разослан «____» _________ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Киреев В.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Благодаря развитию в настоящее время теоретических и экспериментальных исследований в области гидродинамики, возникает необходимость исследования их различных свойств, в частности, кинетических, связанных с изучением движения малых частиц в жидкостях и газах, когда соответствующие поправки к уравнению Навье – Стокса становятся чрезвычайно важны в условиях, если длина свободного пробега молекул континуума оказывается сравнимой с размером частицы.

В этом направлении существует множество теоретических работ (их список приведен в диссертации), так или иначе пересекающимися с нашей задачей. Однако, надо отметить, что при решении задач, связанных с вычислением поправок к ряду физических параметров по числу Кнудсена, вычисления ведутся без учета неоднородного бигармонического слагаемого, входящего в уравнение Навье – Стокса, введение которого строго обосновано и впервые найдено в настоящей диссертации. Его учет, как, впрочем, и слагаемых более высоких порядков по оператору Лапласа весьма важен при изучении физических свойств наносистем.

Цель работы:

1. С помощью методов теории неравновесной статистической физики решить задачу физической кинетики с помощью получения для мезо – и макроскопических систем обобщенное уравнение Навье – Стокса с учетом следующих по оператору Лапласа слагаемых в его правой части.
2. Вычислить силу сопротивления для шара, обтекаемого стационарным вязким потоком с учетом найденного неоднородного бигармонического слагаемого в правой части обобщеного уравнения Навье – Стокса.

Объект исследования: гидродинамические неравновесные системы в классических ньютоновских жидкостях и газах для числа Кнудсена меньше или порядка единицы ($K < 1$).

Предмет исследования: сферические наночастицы, обтекаемые стационарным потоком вязкой жидкости.

Новизна работы заключается в том, что:

1. С помощью теории неравновесного статистического распределения дан вывод обобщенного уравнения Навье – Стокса в виде ряда по степеням оператора Лапласа;
2. Предложен алгоритм решения задачи о вычислении поправок к силе сопротивления с учетом этих дополнительных неоднородных слагаемых;
3. Приведено подробное решение задачи о вычислении силы Стокса в виде ряда по числу Кнудсена.

Практическая значимость

Выполненные в работе вычисления, основанные на применении теории неравновесного статистического распределения, позволяют учесть в уравнении Навье – Стокса дополнительные неоднородные слагаемые по оператору Лапласа, играющие важную роль в деле практического изучения движения наночастиц в жидкостях и газах, когда соответствующие поправки важны в условиях, когда длина свободного пробега молекул континуума оказывается сравнимой с размером тела. Это, в частности, оказывается чрезвычайно важным в деле изучения свойств наночастиц.

Практическое использование проведенных исследований диктуется прежде всего возможностью непосредственного приложения полученных аналитическим методом решений к конкретным техническим задачам и, в частности, в нанотехнологиях, где с необходимостью используются потоки наночастиц, проходящих сквозь газовый или жидкий континуум.

Научные результаты и основные положения, выносимые на защиту:

1. С помощью классического кинетического уравнения Больцмана найдены дополнительные неоднородные добавки к правой части уравнения Навье – Стокса, позволяющие впервые применять его для наносистем.

2. Получено обобщение формулы Стокса в виде ряда по числу Кнудсена, играющей важную роль при описании физических свойств малых частиц.
3. Аналитически получена сила сопротивления, действующая на сферическую наночастицу с учетом дополнительных неоднородностей в уравнении Навье – Стокса.

Достоверность полученных результатов

В процессе аналитического исследования поставленных задач была использована хорошо проверенная на практике методика решения, основанная на применении классического кинетического уравнения Больцмана. Этот подход имеет массу приложений, и используется в огромном количестве оригинальных публикаций множества авторов, как в нашей стране, так и за рубежом. Полученные с его помощью теоретические результаты находят экспериментальное подтверждение в различных научных исследовательских центрах. Именно этим хорошо зарекомендовавшим себя апробированным методом неравновесного статистического распределения в диссертации была решена задач вычисления неоднородных добавок к правой части уравнения Навье – Стокса.

Апробация работы

Все основные результаты диссертации докладывались на конференциях:

1. С.О. Гладков, Зо Аунг. Об одной модели турбулентности// Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность НеЗаТеГиУс' 2020, 31 марта -3 апреля 2020, Звенигород, Академический пр-д, вл. 1. С. 42.
2. С.О. Гладков, Зо Аунг. О поправках к уравнению Навье–Стокса// Всероссийская конференция с международным участием "Теория управления и математическое моделирование'' СТММ2020', 15–19 июня 2020, Ижевск, Удмуртский государственный университет, С. 270-271, ISBN 978–5–4312–0790–7.

3. С.О. Гладков, Зо Аунг. К вопросу модификации уравнения Навье-Стокса при учете дополнительных неоднородных слагаемых в высших порядках по длине свободного пробега// VII-я Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» СПФМН-2020’, 4-5 декабря 2020, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, С. 244-247, ISBN 978-5-99290923-4.
4. С.О. Гладков, Зо Аунг. К вопросу о поправках к уравнению Навье – Стокса// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики 2020, 7-9 декабря 2020, Воронежский Государственный Университет, С. 1486-1490.
5. С.О. Гладков, Зо Аунг. О поправках к уравнению Навье-Стокса// II Всероссийская научная конференция «Актуальные проблемы математики и информационных технологий» 2021, 5-7 февраля 2021, Дагестанский государственный университет.
6. С.О. Гладков, Зо Аунг. К вопросу обобщения уравнения Навье–Стокса на случай малых частиц// Перспективная элементная база микро- и наноэлектроники с использованием современных достижений теоретической физики 2021, 20–23 апреля 2021, Московский государственный областной университет, С. 77-91. ISSN 2072-8387.
7. С.О. Гладков, Зо Аунг. О возможных поправках к уравнению Навье-Стокса по числу Кнудсена// Всероссийская конференция молодых учёных-механиков 2021, 3-12 сентября 2021, Сочи, пансионат МГУ "Буревестник", С. 63. ISBN 978-5-19-011642-7.
8. С.О. Гладков, Зо Аунг. К теории течения жидкостей по каналам произвольного сечения// VII-я Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2021)’, 18-21 ноября 2021, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, С. 476-481. ISBN 978-5-9929-1076-6.

9. С.О. Гладков, Зо Аунг. О бигармонических поправках к уравнению Навье – Стокса// 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ 2021, 29 ноября – 3 декабря 2021, Московский физико-технический институт (МФТИ), С. 312-316. ISBN 978-5-7417-0785-2.
10. С.О. Гладков, Зо Аунг. К теории стационарного течения жидкостей по трубам произвольного сечения// Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (АППМИМ-2021), 13-15 декабря 2021, Воронежский Государственный Университет, С. 1402-1406. ISBN 978-5-6045486-6-0.
11. С.О. Гладков, Зо Аунг. О силе Стокса в высших порядках по длине свободного пробега// Международная научная конференция молодых учёных «Наука на благо человечества – 2022», 18-29 апреля 2022, Московский государственный областной университет.
12. С.О. Гладков, Зо Аунг. О неоднородных поправках к уравнению Навье - Стокса// VIII-я Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» СПФМН-2022’, 5 – 6 декабря 2022, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, С. 386-392.

Объем и структура диссертации

Структура диссертации состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 117 страницы машинописного текста. Список литературы насчитывает 100 источник.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении описываются цели и задачи исследования, научная новизна, актуальность, теоретическая и практическая ценность полученных результатов и их достоверность, приводятся данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Первая глава диссертации посвящена анализу основных гидродинамических уравнений и их аналитическому выводу, исходя из законов сохранения.

В первом разделе первой главы представлен подробный вывод уравнения непрерывности, исходя из закона сохранения количества протекающей жидкости. Этот вывод учитывает траекторию движения выделенного элемента объема жидкости, и позволяет в общем случае вывести искомое уравнение.

В самом деле, если исходить из условия сохранения количества вещества, а именно

$$m = \int_V \rho(t, \mathbf{r})\, dV = const\,, \tag{1}$$

где $\rho(t,\mathbf{r})-$ плотность континуума, $t-$ время, $\mathbf{r}-$ радиус – вектор, проведенный из начала координат в точку наблюдения, конец которого совпадает с элементом объема dV (см. рис. 1), а $V-$ полный объем, занимаемый жидкостью, после дифференцирования по времени получаем

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(t,\mathbf{r})\, dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho\right) dV + \int_V \rho\, div\mathbf{v}\, dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{v})\right] dV = 0\,.$$

Откуда сразу же следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{v}) = 0\,. \tag{2}$$

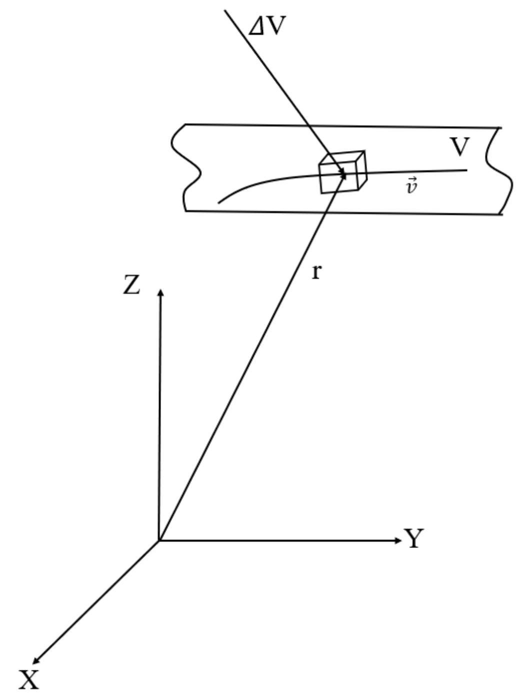

Рис.1. Схематическое изображение траектории движения выделенного элемента жидкости

Во втором разделе первой главы приведены аналитические подробности получения диссипативной функции, играющей чрезвычайно важную роль при выводе основного уравнения гидродинамики, исходя из закона сохранения полной мощности системы.

В случае несжимаемой жидкости диссипативную функцию можно представить как (ср. с [1]):

$$\dot{Q} = \eta \int_V \left[\left(\frac{\partial \mathrm{v}^i}{\partial x^k} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(div\mathbf{v} \right)^2 \right] dV + \varsigma \int_V \left(div\mathbf{v} \right)^2 dV \,, \tag{3}$$

где $\varsigma -$ вторая вязкость, $\delta_k^i -$ символ Кронекера.

При решении задачи Стокса распределение скоростей дается формулой (см. [1])

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} \right) + \frac{\mathbf{r}\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} \right)}{r^3} \left(\frac{3b}{r^2} - a \right), \tag{4}$$

где $a = \frac{3R}{4}$, $b = \frac{R^3}{4}$.

И с помощью решения (4) нетрудно получить формулу для диссипативной функции

$$\dot{Q} = 6\pi\eta R u^2 . \tag{5}$$

В третьем разделе этой же главы продемонстрирована методика получения уравнения Навье – Стокса, исходя из условия сохранения полной мощности системы при условии, что температура постоянная. При этом выводе очень важную роль играет знание диссипативной функции, которой посвящен предыдущий раздел первой главы. Вывод уравнения осуществлен в рамках упрощающего предположения, что жидкость считается несжимаемой. Если учесть сжимаемость жидкости, то уравнение выводится более сложным путем, но его вид, как и должно быть, не изменяется.

Последний раздел первой главы было решено посвятить подробному анализу и выводу закона Стокса, который нам необходим для решения поставленной задачи о вычислении поправок по числу Кнудсена к силе Стокса. Все приведенные выкладки в этом разделе описаны очень подробно с соответствующими комментариями и выводами. Последнее значительно упрощает решение нашей задачи, и делает ее вполне понятной с точки зрения математического описания.

Вторая глава диссертации посвящена решению основной проблемы, поставленной в настоящей работе, и сводится к следующим основным разделам.

В первом разделе второй главы с помощью метода кинетического уравнения Больцмана находятся неоднородные поправки к уравнению Навье – Стокса, первая из которых представляет собой отрицательное бигармоническое по оператору Лапласа слагаемое с коэффициентом порядка числа Кнудсена в квадрате. Показывается, что следующие поправки по неоднородностям должны иметь вид соответственно кубического слагаемого по оператору Лапласа, идущего со знаком «плюс», затем идет его четвертая степень со знаком «минус» и т.д..

Решение задачи начинается с классического кинетического уравнения Больцмана, которое запишем в стандартном виде, как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f + \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = L(f), \tag{6}$$

где $f = f(t, \mathbf{p}, \mathbf{r})$ – искомая функция распределения, $\mathbf{v}$ – скорость молекул, $\mathbf{F}$ – сила действующая на частицу, $\mathbf{p}$ – ее импульс, а $L(f)$ – интеграл столкновений.

Решение ищем в виде ряда

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots , \tag{7}$$

где квазиравновесная функция распределения

$$f_0 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon(p) - \mathbf{pV}}{T}}, \tag{8}$$

а фигурирующий здесь нормировочный множитель

$$Z = \int \bar{f} d\Gamma = \int e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}} d\Gamma . \tag{9}$$

Элемент фазового объема $d\Gamma = d^3 p dV$, равновесная функция распределения в (9) $\bar{f} = f_0|_{\mathbf{V}=0}$. $\varepsilon(p) = \dfrac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия молекулы, а интегрирование ведется по всему импульсному пространству.

В результате поправка n – ого порядка по числу Кнудсена к квазиравновесной функции распределения оказывается такой

$$f_n = (-1)^n \tau_p^n \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right]^n f_0 . \tag{10}$$

Во втором разделе второй главы подробно описано решение основной задачи поставленной в диссертации, и с помощью подробно описанного в первой главе четвертого раздела метода вычисления, найдены поправки к силе Стокса в виде ряда по числу Кнудсена. Результат вычислений показывает, что в этом случае силу Стокса можно представить в виде формулы

$$F_c = 6\pi \mathrm{u} \eta R f(K), \tag{11}$$

где функция от числа Кнудсена

$$f(K)=\frac{\left[1+4Ke^{-\frac{1}{K}}\left(K^2+K+1\right)\right]}{\left(1-6K^2\right)}\times$$
$$\times\left[\frac{\left(1+0.5K^2\right)}{\left(1-6K^2\right)}\left[1+4Ke^{-\frac{1}{K}}\left(K^2+K+1\right)\right]+\frac{e^{-\frac{1}{K}}}{9}\left(4-\frac{15}{2}K-K^2-K^3\right)\right]. \tag{12}$$

Зависимость (11) иллюстрирует рис. 2.

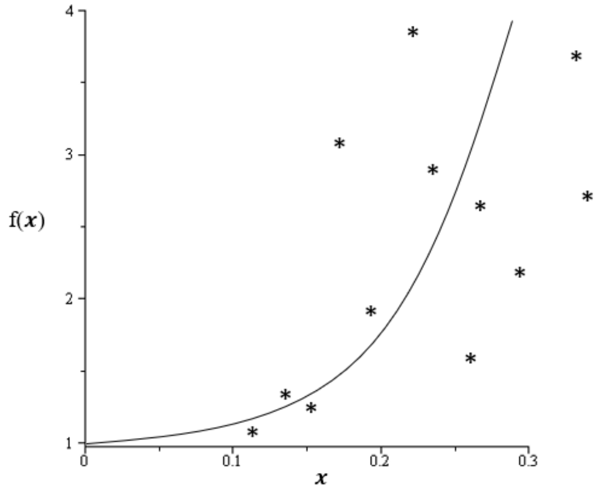

Рис. 2. Графическая интерпретация зависимости (11). Видно, что с уменьшением размера частиц сила сопротивления довольно резко возрастает. Звездочками отмечены экспериментальные значения.

Проведенный последующий анализ полученного результата позволил утверждать, что в случае относительно больших размеров обтекаемых тел эти поправки, как и должно быть, малы и ими можно пренебречь. Однако, при уменьшении размеров тела число Кнудсена может стать сравнимым с единицей, и соответствующие поправки к силе Стокса должны будут играть существенную роль для вязкого сопротивления, что не позволяет ими пренебречь. Важность этих поправок существенна для мезоскопических систем из нано диапазона, соответствующего по порядку величины $10^{-5}-10^{-7}$ см в системе СГС.

Считая жидкость несжимаемой, то есть, полагая $div\mathbf{V}=0$, а также пренебрегая высшими производными по времени, что вполне позволительно в рамках выполнения условия $\delta t \gg \overline{\tau}$, где $\overline{\tau}$ – среднее время релаксации, мы приходим к искомому уравнению

$$\dot{\mathbf{V}} = \nu \Delta \mathbf{V} - \nu^2 \tau^* \Delta^2 \mathbf{V}, \tag{13}$$

При этом кинематическая вязкость ν и время релаксации τ^* определяются с помощью следующих несобственных интегралов

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\overline{p^4 \tau_p}}{15 m^3 T} = \frac{1}{15 m^3 T Z_0} \int_0^\infty \tau_p p^6 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp, \\ \nu^2 \tau^* &= \frac{\overline{\tau_p^3 p^6}}{35 m^5 T} = \frac{1}{35 m^5 T Z_0} \int_0^\infty \tau_p^3 p^8 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp, \end{aligned} \tag{14}$$

Нормировочный множитель, стоящий в знаменателе, определяется как

$$Z_0 = \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp. \tag{15}$$

Добавив в уравнение (13) член с градиентом давления и, раскрывая полную производную по времени, окончательно находим

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V} \cdot \nabla\right) \mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V} - \nu^2 \tau^* \Delta^2 \mathbf{V}. \tag{16}$$

Третий раздел второй главы посвящен численному анализу полученной во втором разделе общей формулы для сопротивления, и ее графической интерпретации.

Четвертый раздел включает в себя общие рассуждения об области практического приложения полученного результата, и его применимости к наночастицам. Здесь же обсуждается и возможность учета в уравнении Навье – Стокса всего бесконечного ряда неоднородных поправок по оператору Лапласа, где в качестве упрощающего фактора этот ряд аппроксимируется рядом геометрической прогрессии. Это позволяет сделать качественную оценку для силы Стокса, и привести ее обобщенное оценочное выражение с учетом всех возможных поправок по неоднородностям.

В последнем пятом разделе второй главы проанализировано влияние неоднородностей на скорость течения потока в близкой к телу области.

Третья глава диссертации посвящена анализу также весьма важного в практическом отношении вопроса об изучении течения жидкостей по каналам и трубам произвольного сечения.

В первом разделе третьей главы приведено подробное решение классической задачи Пуазейля, основываясь на результатах которой во втором и третьем разделах изложен общий подход к решению подобного рода задач в случае, когда сечение канала или трубы произвольное. При этом считается, что движение жидкости обусловлено постоянным градиентом давления.

Решение Пуазейля, как известно, имеет вид

$$\mathrm{v}_z = -\frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}\left(R^2 - r^2\right). \quad (17)$$

Благодаря решению (17) нетрудно вычислить и расход жидкости в единицу времени. Действительно, исходя из определения (см. [1])

$$Q = \int_S \rho\, \mathrm{v}_z\, dS\,, \quad (18)$$

где $S-$ площадь поперечного сечения, через которое протекает поток жидкости, движущийся со скоростью v_z, с учетом (15) имеем

$$Q = -\frac{\pi\rho}{8\eta}\frac{\partial P}{\partial z}R^4. \quad (19)$$

Во втором разделе третьей главы решена задача о вычислении распределения скоростей по перпендикулярным разрезам труб и каналов произвольного сечения. Как показано на рис. 3, мы можем представить в виде «пересечения» двух независимых функций. То есть при $y \geq 0$ верхняя часть контура описывается зависимостью $y_1 = y_1\left(x_1\right)$, а при $y \leq 0$ – зависимостью $y_2 = y_2\left(x_2\right)$.

Решение уравнения Навье – Стокса

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}\right] = -\nabla P + \eta\Delta\mathbf{v} \quad (20)$$

можно согласно рис. 3 можно искать в единственно возможном виде

$$\mathbf{v} = \left(0, 0, \mathrm{v}_z\left(x, y\right)\right). \quad (21)$$

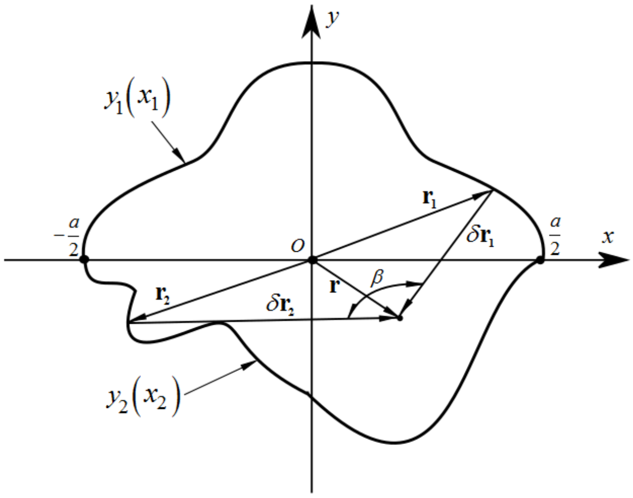

Рис. 3. Схематическое представление произвольного сечения трубы

Это сильно упрощает уравнение (18), которое приводится к виду

$$\Delta \mathrm{v}_z = \frac{1}{\eta}\frac{\partial P}{\partial z} = const\,. \tag{22}$$

Граничная задача для уравнения (22) формулируется в виде условий «залипания» жидкости на внутреннем контуре трубы C, то есть

$$\mathrm{v}_z\big|_{y=y_1(x_1)} = \mathrm{v}_z\big|_{y=y_2(x_2)} = 0\,. \tag{23}$$

В итоге вычислений мы приходим к следующему общему решению

$$\mathrm{v}_z = \frac{1}{4\eta}\frac{\partial P}{\partial z}\Big[(x_1 - x)(x_2 - x) + \big(y_1(x_1) - y\big)\big(y_2(x_2) - y\big)\Big]. \tag{24}$$

В качестве примеров того, как «работает» общая формула, приведен расчет зависимости $\mathrm{v}_z(x, y)$ для случая кругового сечения трубы и для случая, когда сечение представляет собой пересечение двух зеркальных парабол.

В третьем, последнем разделе получена общая формула для вычисления расхода жидкости при ее течении через произвольные сечения труб и каналов.

С помощью (24) формула для вычисления расхода жидкости в общем случае имеет вид

$$Q = -\frac{1}{24\eta}\frac{\partial P}{\partial z}\int_{-a}^{a}\big(y_2(x) - y_1(x)\big)^3\,dx\,. \tag{25}$$

В этом же разделе продемонстрирована «работа» общей формулы на конкретном примере канала, сечение которого имеет вид произвольного треугольника.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. С помощью метода неравновесного статистического распределения, основанного на решении кинетического уравнения Больцмана, дан подробный вывод уравнения Навье – Стокса с точностью до произвольного количества слагаемых к его правой части по оператору Лапласа с целью его применения для описания гидродинамических свойств, например, наночастиц.
2. Показано, что учет дополнительных неоднородных по оператору Лапласа слагаемых в правой части уравнения Навье – Стокса представляется знакочередующимся рядом по числу Кнудсена для обобщения на случай, когда длина свободного пробега становится сравнимой с размером наночастицы.
3. Дано обобщение формулы Стокса при произвольных числах Кнудсена.
4. Найдена общая формула для вычисления скорости потока в сечении трубы (или канала) произвольного вида.
5. Получена общая формула для вычисления расхода жидкости, текущей по трубам и каналам произвольного сечения.

По теме диссертации опубликованы следующие работы

В журналах, входящих в международную реферативную базу данных Scopus

1. Gladkov S.O., Zaw Aung. To the question of calculation of amendments to the Navier – Stokes equation // Journal of Physics: Conference Series. 2021. V. 1902. 012004.

В журналах, входящих в базу данных RSCI

2. Гладков С.О., Зо Аунг О поправках к силе Стокса по числу Кнудсена // Известия высших учебных заведений. Физика. 2020. Т. 63. № 12. С. 68-81.

3. Гладков С.О., Зо Аунг К вопросу о течении жидкостей в трубах и каналах произвольного сечения // Инженерная физика. 2021. № 10. С. 27-36.

В журналах, входящих в РИНЦ

4. Гладков С.О., Зо Аунг О кинетическом подходе при учёте неоднородностей высших порядков в уравнении Навье-Стокса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2023. № 1. С. 17-26.

5. Гладков С.О., Зо Аунг Об уточнении уравнения Навье-Стокса применительно к наночастицам // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2021. № 1. С. 77-91.

6. Гладков С.О., Зо Аунг К вопросу о поправках к уравнению Навье – Стокса // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. сборник трудов Международной научной конференции. ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет». Воронеж, 2021. С. 1486-1490.

7. Зо Аунг, Гладков С.О. К теории течения жидкостей по каналам произвольного сечения // В сборнике: Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Под общей редакцией Т.Н. Можаровой. Орел, 2021. С. 476-481.

8. Гладков С.О., Зо Аунг О поправках к уравнению Навье – Стокса // В сборнике: Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы II Всероссийской конференции, приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета. 2021. С. 60-62.

9. Зо Аунг, Гладков С.О. К вопросу модификации уравнения Навье-Стокса при учете дополнительных неоднородных слагаемых в высших порядках по длине свободного пробега // В сборнике: Современные проблемы физико-математических наук. Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Под общей редакцией Т.Н. Можаровой. г. Орел, 2020. С. 244-247.

10. Гладков С.О., Зо Аунг О поправках к уравнению Навье-Стокса // В сборнике: Теория управления и математическое моделирование. Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 2020. С. 274-275.