

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



30 АУНГ

**НЕРАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА**

Специальность 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
– д.ф.–м.н., профессор Гладков С.О.

Москва – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. Некоторые основные сведения из теории, необходимые для решения поставленной задачи	11
1.1 Вывод уравнения непрерывности из закона сохранения количества вещества	11
1.2 Диссипативная функция	13
1.3 Уравнение Навье – Стокса – его вывод из закона сохранения энергии	19
1.4 Сила сопротивления Стокса	21
Глава 2. Сила Стокса в виде функции от числа Кнудсена.....	55
2.1 Уравнение Навье – Стокса в высших приближениях по неоднородностям	56
2.3. Анализ полученной зависимости и ее графическое представление	80
2.4 Приложение к мезоскопическим системам	81
2.5. Численное решение уравнения Навье – Стокса в конечно – разностном виде с учетом бигармонического слагаемого	85
Глава 3. Течение по каналам и трубам произвольного сечения.....	93
3.1 Течение Пуазейля	93
3.2 О ламинарном течении по трубам и каналам произвольного сечения	96
3.2.1. Течение по трубе произвольного сечения. Общий подход	97
3.2.2. Течение по каналам произвольной формы	101
3.3 Общая формула для вычисления расхода через произвольное сечение	105
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	107
Список литературы	109

ВВЕДЕНИЕ

С помощью теории неравновесного статистического распределения в диссертации дается подробный вывод уравнения Навье – Стокса с точностью до бигармонического слагаемого в правой части, и с его учетом в диссертации приводится подробное вычисление силы сопротивления, справедливое для случая малых частиц. Отмечается важность этого неоднородного слагаемого для случая сравнительно небольшого размера шаров, имеющее вполне конкретные практические приложения в нанотехнологиях.

Общая характеристика работы

Актуальность. Благодаря развитию в настоящее время теоретических и экспериментальных исследований в области гидродинамики, возникает необходимость исследования их различных свойств, в частности, кинетических, связанных с изучением движения малых частиц в жидкостях и газах, когда соответствующие поправки к уравнению Навье – Стокса становятся чрезвычайно важны в условиях, если длина свободного пробега молекул континуума оказывается сравнимой с размером частицы.

В этом направлении существует множество теоретических работ (их список приведен в диссертации), так или иначе пересекающимися с нашей задачей. Однако, надо отметить, что при решении задач, связанных с вычислением поправок к ряду физических параметров по числу Кнудсена, вычисления ведутся без учета неоднородного бигармонического слагаемого, входящего в уравнение Навье – Стокса, введение которого строго обосновано и впервые найдено в настоящей диссертации. Его учет, как, впрочем, и слагаемых более высоких порядков по оператору Лапласа весьма важен при изучении физических свойств наносистем.

Цель работы:

1. С помощью методов теории неравновесной статистической физики решить задачу физической кинетики с помощью получения для мезо – и макроскопических систем обобщенное уравнение Навье – Стокса с учетом следующих по оператору Лапласа слагаемых в его правой части.
2. Вычислить силу сопротивления для шара, обтекаемого стационарным вязким потоком с учетом найденного неоднородного бигармонического слагаемого в правой части обобщенного уравнения Навье – Стокса.

Объект исследования: гидродинамические неравновесные системы в классических ньютоновских жидкостях и газах для числа Кнудсена меньше или порядка единицы ($K < 1$).

Предмет исследования: сферические наночастицы, обтекаемые стационарным потоком вязкой жидкости.

Новизна работы заключается в том, что:

1. С помощью теории неравновесного статистического распределения дан вывод обобщенного уравнения Навье – Стокса в виде ряда по степеням оператора Лапласа;
2. Предложен алгоритм решения задачи о вычислении поправок к силе сопротивления с учетом этих дополнительных неоднородных слагаемых;
3. Приведено подробное решение задачи о вычислении силы Стокса в виде ряда по числу Кнудсена.

Практическая значимость

Выполненные в работе вычисления, основанные на применении теории неравновесного статистического распределения, позволяют учесть в уравнении Навье – Стокса дополнительные неоднородные слагаемые по оператору Лапласа, играющие важную роль в деле практического изучения

движения наночастиц в жидкостях и газах, когда соответствующие поправки важны в условиях, когда длина свободного пробега молекул континуума оказывается сравнимой с размером тела. Это, в частности, оказывается чрезвычайно важным в деле изучения свойств наночастиц.

Практическое использование проведенных исследований диктуется прежде всего возможностью непосредственного приложения полученных аналитическим методом решений к конкретным техническим задачам и, в частности, в нанотехнологиях, где с необходимостью используются потоки наночастиц, проходящих сквозь газовый или жидкий континуум.

Научные результаты и основные положения, выносимые на защиту:

1. С помощью классического кинетического уравнения Больцмана найдены дополнительные неоднородные добавки к правой части уравнения Навье – Стокса, позволяющие впервые применять его для наносистем.
2. Получено обобщение формулы Стокса в виде ряда по числу Кнудсена, играющей важную роль при описании физических свойств малых частиц.
3. Аналитически получена сила сопротивления, действующая на сферическую наночастицу с учетом дополнительных неоднородностей в уравнении Навье – Стокса.

Достоверность полученных результатов

В процессе аналитического исследования поставленных задач была использована хорошо проверенная на практике методика решения, основанная на применении классического кинетического уравнения Больцмана. Этот подход имеет массу приложений, и используется в огромном количестве оригинальных публикаций множества авторов, как в нашей стране, так и за рубежом. Полученные с его помощью теоретические результаты находят

экспериментальное подтверждение в различных научных исследовательских центрах. Именно этим хорошо зарекомендовавшим себя апробированным методом неравновесного статистического распределения в диссертации была решена задача вычисления неоднородных добавок к правой части уравнения Навье – Стокса.

Апробация работы

Все основные результаты диссертации докладывались на конференциях:

1. С.О. Гладков, Зо Аунг. Об одной модели турбулентности// Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность НеЗаТеГиУс' 2020, 31 марта -3 апреля 2020, Звенигород, Академический пр-д, вл. 1. С. 42.
2. С.О. Гладков, Зо Аунг. О поправках к уравнению Навье–Стокса// Всероссийская конференция с международным участием "Теория управления и математическое моделирование" СТММ2020', 15–19 июня 2020, Ижевск, Удмуртский государственный университет, С. 270-271, ISBN 978–5–4312–0790–7.
3. С.О. Гладков, Зо Аунг. К вопросу модификации уравнения Навье-Стокса при учете дополнительных неоднородных слагаемых в высших порядках по длине свободного пробега// VII-я Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» СПФМН-2020', 4-5 декабря 2020, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, С. 244-247, ISBN 978-5-99290923-4.
4. С.О. Гладков, Зо Аунг. К вопросу о поправках к уравнению Навье – Стокса// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики 2020, 7-9 декабря 2020, Воронежский Государственный Университет, С. 1486-1490.
5. С.О. Гладков, Зо Аунг. О поправках к уравнению Навье-Стокса// II Всероссийская научная конференция «Актуальные проблемы математики и информационных технологий» 2021, 5-7 февраля 2021, Дагестанский государственный университет.
6. С.О. Гладков, Зо Аунг. К вопросу обобщения уравнения Навье–Стокса на случай малых частиц// Перспективная элементная база микро- и нанoeлектроники с использованием современных достижений теоретической физики 2021, 20–23 апреля 2021, Московский государственный областной университет, С. 77-91. ISSN 2072-8387.
7. С.О. Гладков, Зо Аунг. О возможных поправках к уравнению Навье-Стокса по числу Кнудсена// Всероссийская конференция молодых

- учёных-механиков 2021, 3-12 сентября 2021, Сочи, пансионат МГУ "Буревестник", С. 63. ISBN 978-5-19-011642-7.
8. С.О. Гладков, Зо Аунг. К теории течения жидкостей по каналам произвольного сечения// VII-я Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2021)', 18-21 ноября 2021, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, С. 476-481. ISBN 978-5-9929-1076-6.
 9. С.О. Гладков, Зо Аунг. О бигармонических поправках к уравнению Навье – Стокса// 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ 2021, 29 ноября – 3 декабря 2021, Московский физико-технический институт (МФТИ), С. 312-316. ISBN 978-5-7417-0785-2.
 10. С.О. Гладков, Зо Аунг. К теории стационарного течения жидкостей по трубам произвольного сечения// Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (АППМИМ-2021), 13-15 декабря 2021, Воронежский Государственный Университет, С. 1402-1406. ISBN 978-5-6045486-6-0.
 11. С.О. Гладков, Зо Аунг. О силе Стокса в высших порядках по длине свободного пробега// Международная научная конференция молодых учёных «Наука на благо человечества – 2022», 18-29 апреля 2022, Московский государственный областной университет.
 12. С.О. Гладков, Зо Аунг. О неоднородных поправках к уравнению Навье - Стокса// VIII-я Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» СПФМН-2022', 5 – 6 декабря 2022, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, С. 386-392.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 3 научные работы, в том числе одна работа в журнале, индексируемом в международной базе данных Scopus, две работы в журналах, входящих в базу данных RSCI.

Объем и структура диссертации

Структура диссертации состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 117 страницы машинописного текста. Список литературы насчитывает 100 источник.

Основное содержание диссертации

Первая глава диссертации посвящена анализу основных гидродинамических уравнений и их аналитическому выводу, исходя из основных законов сохранения.

В первом разделе первой главы представлен подробный вывод уравнения непрерывности, исходя из закона сохранения количества протекающей жидкости. Этот вывод учитывает траекторию движения выделенного элемента объема жидкости, и позволяет в общем случае вывести искомое уравнение.

Во втором разделе первой главы приведены аналитические подробности получения диссипативной функции, играющей чрезвычайно важную роль при выводе основного уравнения гидродинамики, исходя из закона сохранения полной мощности системы.

В третьем разделе этой же главы продемонстрирована методика получения уравнения Навье – Стокса, исходя из условия сохранения полной мощности системы при условии, что температура постоянная. При этом выводе очень важную роль играет знание диссипативной функции, которой посвящен предыдущий раздел первой главы. Вывод уравнения осуществлен в рамках упрощающего предположения, что жидкость считается несжимаемой. Если учесть сжимаемость жидкости, то уравнение выводится более сложным путем, но его вид, как и должно быть, не изменяется.

Последний раздел первой главы было решено посвятить подробному анализу и выводу закона Стокса, который нам необходим для решения поставленной задачи о вычислении поправок по числу Кнудсена к силе Стокса. Все приведенные выкладки в этом разделе описаны очень подробно с соответствующими комментариями и выводами. Последнее значительно упрощает решение нашей задачи, и делает ее вполне понятной с точки зрения математического описания.

Вторая глава диссертации посвящена решению основной проблемы, поставленной в настоящей работе, и сводится к следующим основным разделам.

В первом разделе второй главы с помощью метода кинетического уравнения Больцмана находятся неоднородные поправки к уравнению Навье – Стокса, первая из которых представляет собой отрицательное бигармоническое по оператору Лапласа слагаемое с коэффициентом порядка числа Кнудсена в квадрате. Показывается, что следующие поправки по неоднородностям должны иметь вид соответственно кубического слагаемого по оператору Лапласа, идущего со знаком «плюс», затем идет его четвертая степень со знаком «минус» и т.д..

Во втором разделе второй главы подробно описано решение основной задачи поставленной в диссертации, и с помощью подробно описанного в первой главе четвертого раздела метода вычисления, найдены поправки к силе Стокса в виде ряда по числу Кнудсена. Проведенный последующий анализ полученного результата позволил утверждать, что в случае относительно больших размеров обтекаемых тел эти поправки, как и должно быть, малы и ими можно пренебречь. Однако, при уменьшении размеров тела число Кнудсена может стать сравнимым с единицей, и соответствующие поправки к силе Стокса должны будут играть существенную роль в гидродинамическом сопротивлении, что не позволяет ими пренебречь. Важность этих поправок существенна в случае довольно мелких частиц из нано диапазона, соответствующего по порядку величины $10^{-5} - 10^{-7}$ см.

Третий раздел второй главы посвящен численному анализу полученной во втором разделе общей формулы для сопротивления, и ее графической интерпретации.

Последний, четвертый раздел включает в себя общие рассуждения об области практического приложения полученного результата, и его

применимости к малым частицам из нано диапазона. Здесь же обсуждается и возможность учета в уравнении Навье – Стокса всего бесконечного ряда неоднородных поправок по оператору Лапласа, где в качестве упрощающего фактора этот ряд аппроксимируется рядом геометрической прогрессии. Это позволяет сделать качественную оценку для силы Стокса, и привести ее обобщенное выражение с учетом всех возможных поправок по неоднородностям.

Третья глава диссертации включает в себя анализ также весьма важного в практическом отношении вопроса об исследовании течения жидкостей по каналам и трубам произвольного сечения.

В первом разделе третьей главы приведено подробное решение классической задачи Пуазейля, основываясь на результатах которой во втором и третьем разделах изложен общий подход к решению подобного рода задач в случае, когда сечение канала или трубы произвольное. При этом считается, что движение жидкости обусловлено постоянным градиентом давления.

Во втором разделе третьей главы решена задача о вычислении распределения скоростей по перпендикулярным разрезам труб и каналов произвольного сечения. Приведена общая формула для вычисления зависимости $v_z(x, y)$ в виде функции от формы контуров сечений. В качестве примеров того, как «работает» общая формула, приведен расчет зависимости $v_z(x, y)$ для случая кругового сечения трубы и для случая, когда сечение представляет собой пересечение двух зеркальных парабол. Здесь же рассмотрен также пример, когда сечение канала имеет вид произвольного треугольника.

В третьем, последнем разделе получена общая формула для вычисления расхода жидкости при ее течении через произвольные сечения труб и каналов. Продемонстрирована «работа» общей формулы на конкретном примере канала, сечение которого имеет вид произвольного треугольника.

Глава 1. Некоторые основные сведения из теории, необходимые для решения поставленной задачи

1.1 Вывод уравнения непрерывности из закона сохранения количества вещества

В этом параграфе мы подробно остановимся на выводе уравнения непрерывности, который будет нам необходим при дальнейшем изложении в рамках решения поставленной в настоящей диссертации задачи, а именно для вычисления поправок к силе Стокса в виде ряда по числу Кнудсена.

В самом деле, если исходить из условия сохранения количества вещества, а именно

$$m = \int_V \rho(t, \mathbf{r}) dV = \text{const}, \quad (1.1)$$

где $\rho(t, \mathbf{r})$ – плотность континуума, t – время, \mathbf{r} – радиус – вектор, проведенный из начала координат в точку наблюдения, конец которого совпадает с элементом объема dV (см. рис. 1), а V – полный объем, занимаемый жидкостью.

Дифференцируя уравнение (1.1), получаем

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \mathbf{r}) dV = 0. \quad (1.2)$$

В силу фиксированности объема V мы имеем право перенести линейный оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ под знак интеграла. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \mathbf{r}) dV &= \lim_{\max \Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{d}{dt} \rho(t, \mathbf{r}_i) \Delta V_i(t) = \\ &= \lim_{\max \Delta V_i \rightarrow 0} \left\{ \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \rho \right) \Delta V_i(t) + \rho \frac{d}{dt} \Delta V_i \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

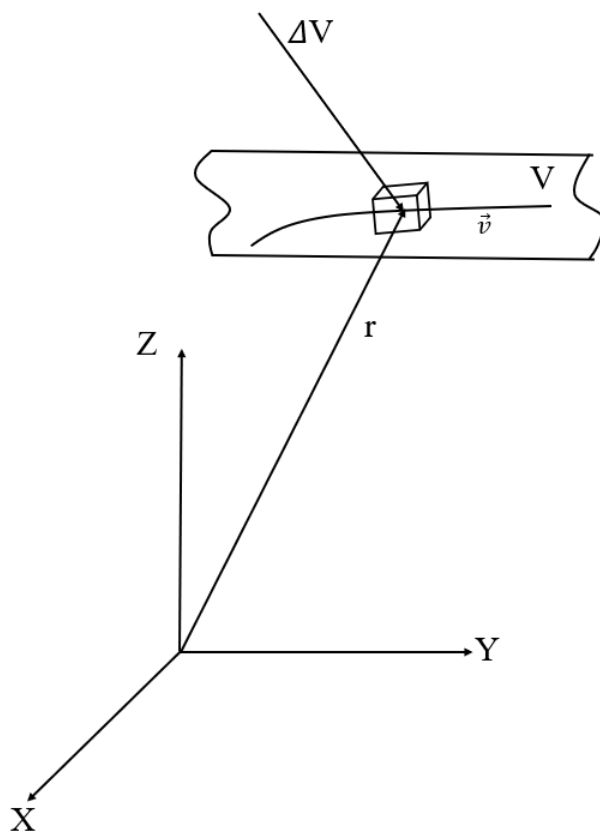


Рис.1. Схематическое изображение траектории движения выделенного элемента жидкости

Учитывая траекторию движения выделенного элемента объема жидкости (см. рис.1), производная от второго слагаемого в (1.3) может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Delta V_i &= \frac{d}{dt} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i = \frac{d}{dt} [x_i(t) - x_{0i}(t)] [y_i(t) - y_{0i}(t)] [z_i(t) - z_{0i}(t)] = \\
 &= [\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{0i}(t)] [y_i(t) - y_{0i}(t)] [z_i(t) - z_{0i}(t)] + [x_i(t) - x_{0i}(t)] [\dot{y}_i(t) - \dot{y}_{0i}(t)] [z_i(t) - z_{0i}(t)] + \\
 &+ [x_i(t) - x_{0i}(t)] [y_i(t) - y_{0i}(t)] [\dot{z}_i(t) - \dot{z}_{0i}(t)] = \\
 &= [v_{xi}(t) - v_{0xi}(t)] [y_i(t) - y_{0i}(t)] [z_i(t) - z_{0i}(t)] + [x_i(t) - x_{0i}(t)] [v_{yi}(t) - v_{0yi}(t)] [z_i(t) - z_{0i}(t)] + \\
 &+ [x_i(t) - x_{0i}(t)] [y_i(t) - y_{0i}(t)] [v_{zi}(t) - v_{0zi}(t)] = \\
 &= \Delta v_{xi} \Delta y_i \Delta z_i + \Delta v_{yi} \Delta x_i \Delta z_i + \Delta v_{zi} \Delta x_i \Delta y_i = \frac{\Delta v_{xi}}{\Delta x_i} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i + \frac{\Delta v_{yi}}{\Delta y_i} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i + \frac{\Delta v_{zi}}{\Delta z_i} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i = \\
 &= \left(\frac{\Delta v_{xi}}{\Delta x_i} + \frac{\Delta v_{yi}}{\Delta y_i} + \frac{\Delta v_{zi}}{\Delta z_i} \right) \Delta V_i
 \end{aligned}$$

Или после перехода к пределу имеем

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta z_i \rightarrow 0}} \frac{d}{dt} \Delta V_i = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta z_i \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta v_{xi}}{\Delta x_i} + \frac{\Delta v_{yi}}{\Delta y_i} + \frac{\Delta v_{zi}}{\Delta z_i} \right) \Delta V_i = \text{div} v dV. \quad (1.4)$$

Подставляя результат (1.4) в формулу (1.3), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \mathbf{r}) dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) dV + \int_V \rho \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

Откуда в силу условия $dV \neq 0$ мы немедленно приходим к искомому уравнению непрерывности, выражающему собой закон сохранения количества массы вещества [1] – [90]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.5)$$

В случае несжимаемой жидкости, что подразумевает малость изменения основного объема V в результате внешнего воздействия, то есть, когда выполнено условие

$$\delta V \ll V, \quad (1.6)$$

мы имеем право уравнение (1.5) несколько упростить, и представить его в виде [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.7)$$

Уравнение (7) будет нам необходимо при дальнейшем решении.

В следующем параграфе мы остановимся на таком важном понятии, как диссипативная функция.

1.2 Диссипативная функция

Как правило, если речь заходит о выводе основных динамических уравнений механики, гидродинамики или теории упругости вычисления основываются на применении принципа сохранения потока искомого вектора через некоторую абстрактную поверхность, что автоматически приводит к правильному дивергентному виду нестационарных уравнений движения.

Однако, если воспользоваться подходом, предложенным, например, в работе [66], эти уравнения можно довольно просто получить и с помощью диссипативной функции.

В случае гидродинамических задач, о которых ниже пойдет речь, ее можно получить следующим образом.

Действительно, с целью оценки силы вязкого сопротивления с помощью определения диссипативной функции, можно воспользоваться общим алгоритмом решения подобных задач. Следуя приведенному в [66] алгоритму, представим силу сопротивления в виде:

$$F_f = \frac{\dot{Q}}{u}. \quad (1.8)$$

где \dot{Q} – диссипативная функция.

В случае несжимаемой жидкости диссипативную функцию можно представить как

$$\dot{Q} = \eta \int_V \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right)^2 dV. \quad (1.9)$$

При учете эффекта сжимаемости формула (1.9) легко обобщается и на этот случай. В результате ее можно записать следующим образом (ср. с [1]):

$$\dot{Q} = \eta \int_V \left[\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right)^2 + \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \right] dV + \zeta \int_V (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dV, \quad (1.10)$$

где ζ – вторая вязкость, δ_k^i – символ Кронекера.

Исходя из закона сохранения полной мощности системы, а именно, используя уравнение $\dot{E} + \dot{Q} = 0$, где кинетическая энергия $E = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV$, и учитывая формулу (1.10), мы немедленно приходим к уравнению Навье – Стокса (подробный вывод для случая несжимаемой жидкости приведен в работе [41]):

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (1.11)$$

В случае несжимаемой жидкости формулу (1.9) удобно представить в несколько иной форме, воспользовавшись правилом интегрирования по частям. В результате

$$\dot{Q} = \eta \int_V \frac{\partial}{\partial x^k} \left(v^i \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right) dV - \eta \int_V \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} dV. \quad (1.12)$$

Первое слагаемое в (1.12) с помощью формулы Гаусса можно преобразовать к виду

$$\int_S \left(v^i \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right) dS^k,$$

где S – поверхность сферы.

Благодаря эффекту «залипания» этот интеграл автоматически исчезает.

При решении задачи Стокса, когда внешняя граница отсутствует, необходимо обратить внимание на один весьма тонкий эффект. Когда мы говорим о классической задаче Стокса, распределение скоростей дается формулой (см. [1])

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} \right) + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \left(\frac{3b}{r^2} - a \right), \quad (1.13)$$

где $a = \frac{3R}{4}$, $b = \frac{R^3}{4}$.

С помощью решения (1.13) покажем строго, как можно получить формулу для диссипативной функции $\dot{Q} = 6\pi\eta Ru^2$. Для этого воспользуемся формулой (1.12), которую преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \eta \int_S \left(v^i \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right) dS^k - \eta \int_V \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} dV = \\ &= 2\pi\eta \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_0^\pi \left(v^i \frac{\partial v^i}{\partial r} \right) \sin \theta d\theta - 2\pi R^2 \eta \int_0^\pi \left(v^i \frac{\partial v^i}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \sin \theta d\theta - \eta \int_V \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} dV. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Второе слагаемое в правой части автоматически исчезает в силу эффекта «залипания» на границе сферы, а первое слагаемое с учетом решения (1.13), должно быть преобразовано с последующим переходом к пределу $r \rightarrow \infty$ следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\pi\eta \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_0^\pi \left(v^i \frac{\partial v^i}{\partial r} \right) \sin \theta d\theta &= 2\pi\eta \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_0^\pi \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi\eta u^2 \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_0^\pi \left(\frac{2a}{r^2} \cos^2 \theta + \frac{a}{r^2} \sin^2 \theta \right) \sin \theta d\theta = 2\pi\eta u^2 a \int_0^\pi (2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{16\pi}{3} \eta a u^2 \end{aligned}$$

С учетом формулы (1.13) отсюда следует, что

$$\frac{16\pi}{3} \eta a u^2 = 4\pi\eta R u^2 .$$

Поэтому формула (1.14) для диссипативной функции немедленно приводит к следующему соотношению

$$\dot{Q} = 4\pi\eta R u^2 - \eta \int_V \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} dV . \quad (1.15)$$

Чтобы теперь вычислить фигурирующее здесь второе слагаемое, следует вспомнить (см. ниже раздел 1.4), что в случае задачи Стокса мы имеем право записать

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{rotrot} [f(r)\mathbf{u}] = \mathbf{u} + \text{graddiv} [f(r)\mathbf{u}] - \mathbf{u} \Delta f(r) .$$

При действии на этот вектор скорости оператора Лапласа получаем

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \text{graddiv} [f(r)\mathbf{u}] - \mathbf{u} \Delta^2 f(r) .$$

Но так как функция $f(r)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению, то отсюда следует, что

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \text{graddiv} [f(r)\mathbf{u}] . \quad (1.16)$$

Учитывая теперь явное решение $f(r) = ar + \frac{b}{r}$ и тот факт, что $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ имеем из (1.16)

$$\Delta \text{graddiv} \mathbf{u} f_1 = a \text{graddiv} \mathbf{u} \Delta r = 2a \text{graddiv} \left(\frac{\mathbf{u}}{r} \right) = -\frac{2a}{r^3} \left(\mathbf{u} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right).$$

Поэтому второе слагаемое в выражении (1.15) преобразуется к виду

$$\dot{Q}^* = -\eta \int_V \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} dV = 2a\eta \int_V \left[\mathbf{u} \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} \right) + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \left(\frac{3b}{r^2} - a \right) \right] \cdot \left(\mathbf{u} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right) \frac{dV}{r^3}.$$

Вводя сферические координаты и раскрывая произведение, после приведения подобных находим

$$\dot{Q}^* = 4\pi a\eta \int_R^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[u^2 (1 - 3\cos^2 \theta) - \frac{u^2}{r} \left(a + \frac{b}{r^2} \right) + \frac{u^2 \cos^2 \theta}{r^3} \left(5a - \frac{3b}{r^2} \right) \right]. \quad (1.17)$$

С учетом того, что

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}$$

после интегрирования по угловой переменной первое слагаемое в квадратных скобках (которое, казалось бы, должно было привести к логарифмической расходимости по радиальной координате r) автоматически исчезает, и в итоге с учетом явных выражений для фигурирующих в (1.17) коэффициентов

$a = \frac{3}{4}R$, $b = \frac{R^3}{4}$, приходим к следующему ответу:

$$\dot{Q}^* = 16\pi a\eta u^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{r^2} \right) = 2\pi\eta R u^2. \quad (1.18)$$

Подставляя результат (1.18) в формулу (1.15), находим окончательное выражение для диссипативной функции в задаче Стокса:

$$\dot{Q} = 6\pi\eta R u^2. \quad (1.19)$$

Таким образом, в соответствии с определением (1.8), сила сопротивления, как и должно быть, представляет собой силу Стокса:

$$F_s = 6\pi\eta R u . \quad (1.20)$$

Приведенный выше подробный алгоритм вычисления диссипативной функции позволяет нам выявить некоторые общие закономерности чисто вычислительного характера, свойственные именно решению Стокса.

Как мы только что показали (формула (1.20)), при решении конкретных задач из теории обтекания тел, мы каждый раз должны вычислять диссипативную функцию по приведенному выше алгоритму. При этом, согласно формуле (1.20), при использовании формулы Гаусса, необходимо преобразовывать интеграл по объему в интеграл по поверхности, и каждый интеграл по поверхности должен вычисляться отдельно. Совершенно понятно, что наименьшее число поверхностных интегралов возникает при использовании выражения (1.20) для диссипативной функции. Если же использовать формулу, приведенную в [1]:

$$\dot{Q} = \frac{\eta}{2} \int_V \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta_k^i \operatorname{div} \mathbf{v} \right)^2 dV + \zeta \int_V (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dV , \quad (1.21)$$

то в результате ее применения будут появляться дополнительные поверхностные интегралы и риск ошибиться возрастет.

Таким образом, на наш взгляд, формула (1.20) является вполне работоспособной, и ее можно всегда применять для вычисления диссипативной функции \dot{Q} . Безусловно можно также применять и формулу (1.21), но при этом следует помнить, что возникающие в результате преобразования с помощью формулы Гаусса все поверхностные интегралы следует отдельно вычислять в пределе $r \rightarrow \infty$.

1.3 Уравнение Навье – Стокса – его вывод из закона сохранения энергии

Чтобы получить уравнение Навье – Стокса при $T = const$ следует воспользоваться уравнением сохранения полной мощности системы (см. [39]):

$$\dot{E} + \dot{Q} = 0. \quad (1.22)$$

При этом вывод, как мы сейчас в этом убедимся, оказывается совсем тривиальным. В самом деле, для полной внутренней энергии жидкости имеем

$$E = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV + \int_V P dV, \quad (1.23)$$

где ρ – плотность жидкости, а P – давление.

Диссипативная функция для несжимаемой жидкости ($div \mathbf{v} = 0$) согласно [1] есть

$$\dot{Q} = \frac{\eta}{2} \int_V (\mathbf{v}_{i,k} + \mathbf{v}_{k,i})^2 dV, \quad (1.24)$$

где везде далее ковариантные производные в (1.24) мы будем заменять на обычные частные производные.

Вычислим полную производную по времени от энергии (1.23). Имеем для нее

$$\dot{E} = \frac{1}{2} \int_V [(\dot{\rho} v^2 + 2\rho \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}) dV + \rho v^2 d\dot{V}] + \int_V (\dot{P} dV + P d\dot{V}). \quad (1.25)$$

Поскольку

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho, \quad (1.26)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (1.27)$$

$$\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P, \quad (1.28)$$

$$d\dot{V} = dV div \mathbf{v}, \quad (1.29)$$

то, подставляя (1.26) – (1.29) в выражение (1.25), немедленно получаем

$$\begin{aligned}
 \dot{E} &= \frac{1}{2} \int_V [(\dot{\rho} v^2 + 2\rho \mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) dV + \rho v^2 d\dot{V}] + \int_V (\dot{P} dV + P d\dot{V}) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) v^2 + 2\rho \mathbf{v} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \rho v^2 \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV + \\
 &+ \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P + P \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) v^2 + 2\rho \mathbf{v} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \right] dV + \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}(P \mathbf{v}) \right) dV.
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Подчеркнем, что формула (1.29) является свойством именно гидродинамических задач (см. раздел. 1.1), поскольку каждый элемент объема жидкости может двигаться по своей собственной траектории в пространстве.

Первое слагаемое в правой части (1.30) автоматически исчезает в силу закона сохранения количества вещества (уравнение непрерывности):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{1.31}$$

Кроме того, во всех гидродинамических задачах, как правило, считается, что давление не зависит явно от времени, поэтому можно считать, что $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. В случае же несжимаемой жидкости из уравнения (1.31) следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{1.32}$$

А, значит, формула (1.30) приводится к довольно простому виду

$$\dot{E} = \int_V \mathbf{v} \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla P \right] dV. \tag{1.33}$$

Что касается диссипативной функции (19), то мы ее перепишем в несколько ином виде, воспользовавшись правилом интегрирования по частям с помощью теоремы Гаусса. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\eta}{2} \int_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right)^2 dV = \eta \int_V \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right)^2 + \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right) dV = \eta \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(v_i \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right) - \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \right] dV + \\ &+ \eta \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(v_i \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right) - \mathbf{v} \cdot \text{grad div} \mathbf{v} \right] dV. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Первые интегралы в квадратных скобках сразу же исчезают при переходе к поверхностным интегралам, и с учетом уравнения (1.32) мы приходим к такому простому выражению

$$\dot{Q} = V = -\eta \int_V \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} dV. \quad (1.35)$$

Подставляя (1.33) и (1.35) в уравнение (1.22), получаем:

$$\int_V \mathbf{v} \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla P - \eta \Delta \mathbf{v} \right] dV = 0. \quad (1.36)$$

Поскольку $\mathbf{v} \neq 0$, то отсюда мы немедленно приходим к уравнению Навье – Стокса для случая несжимаемой жидкости.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (1.37)$$

Что и требовалось.

1.4 Сила сопротивления Стокса

С целью дальнейшего приложения к решению нашей задачи о вычислении поправок к силе Стокса по числу Кнудсена, в этом разделе мы приведем подробное вычисление силы гидродинамического сопротивления, при стационарном обтекании шара потоком несжимаемой жидкости, которую впервые нашел Дж. Г. Стокс в 1854 году.

Из физических рассуждений, приведенных, например, в монографии Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [1], следует различать два случая: 1. Когда гидродинамический поток обтекает неподвижный шар и 2. Когда шар движется с постоянной скоростью в континууме. В обоих случаях, однако, формула оказывается той же самой.

Мы будем рассматривать задачу о неподвижном шаре, на который натекает стационарный поток несжимаемой жидкости, движущийся с постоянной скоростью \mathbf{u} .

С этой целью запишем основные гидродинамические уравнения в виде следующей системы

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

В стационарном случае она упрощается и переходит в такую

$$\begin{cases} \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (1.39)$$

Поскольку течение вокруг шара не потенциальное ($\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$), то в области пограничного слоя толщиной δ , превышающей, но сравнимой по порядку величины с длиной свободного пробега молекул, обтекание имеет ламинарный характер, и число Рейнольдса в этой области мало, благодаря неравенству

$$R = \frac{u\delta}{\nu} \ll 1, \quad (1.40)$$

где ν – кинематическая вязкость.

В силу условия (1.40) уравнения (1.39) принимают еще более простой вид

$$\begin{cases} \nabla P = \eta \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

Из нижнего уравнения (1.41) следует, что мы имеем право искать решение таким образом

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} [f(r)\mathbf{u}], \quad (1.42)$$

где радиальную функцию $f(r)$ следует найти.

Для этого возьмем операцию *rot* от верхнего уравнения (1.41), а именно от уравнения

$$\nabla P = \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (1.43)$$

В силу коммутации линейных операторов *rot* и Δ в результате имеем

$$\Delta \text{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (1.44)$$

Из (1.41) следует, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{rot} \text{rot} [f(r) \mathbf{u}] = \mathbf{u} + \text{grad} \text{div}(f \mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f.$$

Но так как

$$\text{rot} \text{grad} \equiv 0,$$

то

$$\text{rot} \mathbf{v} = -\text{rot}(\mathbf{u} \Delta f) = -[\Delta \nabla f \times \mathbf{u}]. \quad (1.45)$$

Подставляя (1.45) в уравнение (1.44), получаем

$$[\Delta^2 \nabla f \times \mathbf{u}] = 0. \quad (1.46)$$

Для произвольно направленных векторов \mathbf{u} и ∇f условие (1.46) может быть выполнено только когда

$$\nabla \Delta^2 f = \Delta^2 \nabla f = 0. \quad (1.47)$$

Проекция уравнения (1.47) на декартовы координаты x, y, z дает

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \Delta^2 f = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \Delta^2 f = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \Delta^2 f = 0. \end{cases} \quad (1.48)$$

Решение этих уравнений приводит к единственной возможности

$$\Delta^2 f = const .$$

Полагая константу равной нулю, имеем

$$\Delta^2 f = 0. \quad (1.49)$$

В сферических координатах радиальная часть оператора Лапласа есть

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right).$$

Поэтому уравнение (1.49) дает

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) \right) \right] = 0.$$

Отсюда прямым интегрированием находим, что

$$f(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 r^2 + C_4, \quad (1.50)$$

где $C_{1,2,3,4}$ – константы интегрирования.

Из условия, что скорость на бесконечном удалении от шара должна стремиться к постоянной скорости потока u согласно решению (1.42), константу C_3 следует положить равной нулю, как и константу C_4 , которая никакого влияния на все последующие решения не оказывает. В результате, введя новые обозначения для констант

$$\begin{aligned} a &= C_1, \\ b &= C_2 \end{aligned}$$

из (1.50) найдем

$$f(r) = ar + \frac{b}{r}. \quad (1.51)$$

Если подставить теперь решение (1.51) в определение скорости (1.42), то получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{rot rot} [f(r)\mathbf{u}] = \text{grad div} \mathbf{u} - \mathbf{u} \Delta f = \text{grad}(\nabla f \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f. \quad (1.52)$$

Так как решение $\frac{C}{r}$ является фундаментальным для уравнения Лапласа, то

$$\Delta \frac{1}{r} \equiv 0. \quad (1.53)$$

С учетом известной формулы векторного анализа

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = [\mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b}] + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + [\mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a},$$

где в нашем случае

$$\mathbf{a} = \nabla f, \quad \mathbf{b} = \mathbf{u} = \text{const},$$

то есть

$$\text{grad}(\nabla f \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla f \quad (1.54)$$

с учетом явного решения (1.51), а также формул (1.53) и (1.54), находим из (1.52)

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla f - \mathbf{u} \Delta f = \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \left(ar + \frac{b}{r} \right) - \mathbf{u} a \Delta r. \quad (1.55)$$

Приведем подробное вычисление выражения (1.55). Действительно, последнее слагаемое в (1.55) преобразуется к виду

$$\Delta r = \text{div grad} r = \text{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{3}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{2}{r}, \quad (1.56)$$

а первое дает

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \left(ar + \frac{b}{r} \right) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{a\mathbf{r}}{r} - \frac{b\mathbf{r}}{r^3} \right) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(a - \frac{b}{r^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{u}}{r} \left(a - \frac{b}{r^2} \right) - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \left(a - \frac{3b}{r^2} \right). \quad (1.57)$$

С учетом (1.56) и (1.57) формула (1.55) преобразуется таким образом

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{r} \left(a - \frac{b}{r^2} \right) - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \left(a - \frac{3b}{r^2} \right) - \frac{2a\mathbf{u}}{r} = \mathbf{u} \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} \right) - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \left(a - \frac{3b}{r^2} \right). \quad (1.58)$$

Из решения (1.58) легко найти константы a и b .

Действительно, согласно граничному условию «залипания» скорости на поверхности сферы

$$\mathbf{v}|_{r=R} = 0 \quad (1.59)$$

в силу независимости векторов \mathbf{u} и \mathbf{r} из решения (1.58) следуют два линейных алгебраических уравнения

$$\begin{cases} 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} = 0, \\ a - \frac{3b}{R^2} = 0. \end{cases} \quad (1.60)$$

Решение системы (1.60) есть

$$a = \frac{3R}{4}, \quad b = \frac{R^3}{3}. \quad (1.61)$$

Согласно решению (1.58) вектор скорости с учетом (1.61) будет таким

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) - \frac{3R\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{4r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (1.62)$$

Для вычисления силы сопротивления нам будут необходимы проекции вектора скорости на подвижный единичный базис сферической системы координат, который мы обозначим как $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$.

Проекция скорости на орт \mathbf{e}_r дает

$$v_r = u \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right), \quad (1.63)$$

а проекция на орт \mathbf{e}_θ

$$v_\theta = -u \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right). \quad (1.64)$$

В последнем выражении знак «минус» приводит к автоматическому выполнению уравнения непрерывности.

Для вычисления силы сопротивления нам следует воспользоваться формулой

$$dF_i = \sigma_{ik} dS^k, \quad (1.65)$$

где dS^i – проекции элемента поверхности на оси координат подвижного базиса $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$, а σ_{ik} представляет собой тензор вязких напряжений. Его выражение (см. [1]) имеет вид

$$\sigma_{ik} = \eta (v_{i,k} + v_{k,i}) - P \delta_{ik}, \quad (1.66)$$

где символическое обозначение $v_{i,k}$ означает ковариантную производную. В ортонормированном базисе, о котором мы сейчас говорим, ее выражение таково

$$v_{i,k} = \frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \Gamma_{sik} v_s. \quad (1.67)$$

Более подробно об ортонормированных базисах можно посмотреть, например, в работах [21] – [30], а также в монографии [88].

Таким образом, с учетом определения (1.67) формулу (1.66) можно записать следующим образом

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - 2\Gamma_{sik} v_s \right) - P \delta_{ik}. \quad (1.68)$$

Чтобы вычислить необходимое для дальнейших вычислений давление P , вернемся к формуле (1.43) и с учетом (1.52) представим ее так

$$\nabla P = \eta \Delta [\text{grad}(\nabla f \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f] = \nabla [\eta \Delta (\nabla f \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f] = \nabla [\eta \Delta (\nabla f \cdot \mathbf{u})] - \mathbf{u} \Delta^2 f.$$

В соответствии с (1.49) последнее слагаемое в правой части можно опустить, и мы приходим к равенству

$$\nabla P = \nabla [\eta \Delta (\nabla f \cdot \mathbf{u})].$$

«Убирая» знак градиента, имеем отсюда

$$P = P_0 + \eta \Delta (\nabla f \cdot \mathbf{u}), \quad (1.69)$$

где постоянную интегрирования мы обозначили через P_0 . По физическому смыслу P_0 представляет собой давление на бесконечном удалении от обтекаемого шара.

Если теперь подставить сюда решение (1.51), то найдем

$$P = P_0 + \eta \Delta (\nabla f \cdot \mathbf{u}) = P_0 + \eta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Delta f) = P_0 + \eta \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \Delta \left(ar + \frac{b}{r} \right) \right) = P_0 + a\eta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Delta r). \quad (1.70)$$

Δr мы вычислили выше и согласно (1.56) $\Delta r = \frac{2}{r}$. Поэтому из (1.70) следует, что

$$P = P_0 + 2a\eta \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) = P_0 - 2a\eta \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^3}$$

И с учетом явного выражения из (1.61) для a окончательно имеем

$$P = P_0 - \frac{3\eta R (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{2r^3}. \quad (1.71)$$

Таким образом, в нашем распоряжении теперь имеются все необходимые формулы для вычисления силы Стокса.

С этой целью возвращаемся снова к формуле (1.65), и находим проекцию силы на ось z , по которой направлена скорость потока \mathbf{u} . Для этого умножаем обе стороны равенства (1.65) на k^i , где \mathbf{k} – единичный орт в направлении оси z .

Тогда

$$dF_z = k^i dF_i = k^i \sigma_{ik} dS^k$$

Откуда

$$F_z = \int_{\Sigma} k^i \sigma_{ik} dS^k. \quad (1.72)$$

Как видно из формулы (1.72), интегрирование по поверхности шара означает, что тензор вязких напряжений должен быть вычислен при значении $r = R$.

То есть формулу (1.72) следует понимать, как

$$F_z = \int_{\Sigma} k^i \sigma_{ik}|_{r=R} dS^k. \quad (1.73)$$

Поскольку интегрирование ведется по поверхности шара, то единственная составляющая элемента поверхности будет

$$dS_r = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta. \quad (1.74)$$

Поскольку мы «работаем» в сферической системе координат, то единичный вектор \mathbf{k} должен быть разложен по базису $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$. Имеем для него

$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta. \quad (1.75)$$

С учетом (1.74) и (1.75) получаем из соотношения (1.73)

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{\Sigma} k^i \sigma_{ik}|_{r=R} dS^k = 2\pi R^2 \int_0^\pi k^i \sigma_{ir}|_{r=R} \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 \left(\int_0^\pi k^r \sigma_{rr}|_{r=R} \sin \theta d\theta + \int_0^\pi k^\theta \sigma_{\theta r}|_{r=R} \sin \theta d\theta \right) = \\ &= 2\pi R^2 \left(\int_0^\pi \sigma_{rr}|_{r=R} \cos \theta \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sigma_{\theta r}|_{r=R} \sin^2 \theta d\theta \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Формула (1.76) является основной рабочей формулой при вычислении силы вязкого сопротивления Стокса.

Нам осталось вычислить только две составляющие тензора σ_{ik} это σ_{rr} и $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$.

Согласно определению (1.68) имеем для них

$$\sigma_{rr} = 2\eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \Gamma_{srr} v_s \right) - P$$

Поскольку же все Γ_{irr} равны нулю, то на границе сферы мы приходим к следующему соотношению

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} - P|_{r=R}. \quad (1.77)$$

Если воспользоваться теперь решениями (1.63) и (1.71), то получим отсюда

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} - P|_{r=R} = 2\eta u \cos \theta \left(\frac{3R}{2r^2} - \frac{3R^3}{2r^4} \right) \Big|_{r=R} - P_0 + \frac{3\eta R u \cos \theta}{2r^2} \Big|_{r=R} = \frac{3\eta u \cos \theta}{2R} - P_0 \quad (1.78)$$

Аналогично имеем

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial x^\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x^r} - 2\Gamma_{sr\theta} v_s \right)$$

Но поскольку (см. [51] – [53])

$$\partial x^r = \partial r, \quad \partial x^\theta = r \partial \theta,$$

то отсюда

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - 2\Gamma_{rr\theta} v_r - 2\Gamma_{\theta r\theta} v_\theta \right). \quad (1.79)$$

Так как $\Gamma_{rr\theta} = 0$, $\Gamma_{\theta r\theta} = \frac{1}{r}$ получим из (1.79)

$$\sigma_{r\theta}|_{r=R} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{2v_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}. \quad (1.80)$$

Мы учли здесь, что на границе шара обе компоненты скорости исчезают.

Подставив сюда решения (1.63) и (1.64), находим

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}|_{r=R} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \\ &= \eta \left(-\frac{u \sin \theta}{r} \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) - u \sin \theta \left(\frac{3R}{4r^2} + \frac{3R^3}{4r^4} \right) \right) \Big|_{r=R} = -\frac{3\eta u \sin \theta}{2R}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Таким образом, подставляя результаты (1.78) и (1.81) в общее выражение (1.76), находим

$$\begin{aligned}
 F_z &= 2\pi R^2 \left(\int_0^\pi \sigma_{rr} \Big|_{r=R} \cos \theta \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sigma_{\theta r} \Big|_{r=R} \sin^2 \theta d\theta \right) = \\
 &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \left[\left(\frac{3\eta u \cos \theta}{2R} - P_0 \right) \cos \theta + \frac{3\eta u \sin^2 \theta}{2R} \right] \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \left[\left(\frac{3\eta u}{2R} - P_0 \cos \theta \right) \right] \sin \theta d\theta = \\
 &= 3\pi \eta u R \int_0^\pi \sin \theta d\theta - 2\pi P_0 R^2 \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta.
 \end{aligned}$$

Первый интеграл здесь равен двум, а второй равен нулю. В результате мы приходим к знаменитой формуле Стокса:

$$F_z = 6\pi \eta R u. \quad (1.82)$$

И хотя результат (1.82) приводится во всех учебниках и классических монографиях, посвященных гидродинамике, мы привели подробный вывод этой формулы с той лишь целью, чтобы при решении нашей конкретной задачи у нас перед глазами был алгоритм необходимых для этого чисто формальных вычислений.

В качестве еще одного примера рассмотрим такую задачу. Пусть имеется сферическое тело, окруженное тонкой пористой мембраной бесконечно малой толщины. При этом возникает вполне закономерный вопрос, как вычислить силу сопротивления в этом случае? Чтобы ответить на него, стоит предварительно вспомнить, что исследование свойств пористых тел при их обтекании (или движении) в вязком континууме ведется уже сравнительно давно, и продолжаются в настоящее время. Надо заметить, что важную роль при решении этой задачи играет постановка соответствующих граничных условий, поскольку в зависимости от них будет меняться и ответ. Совершенно ясно, что чувствительность окончательного результата для разных граничных условий будет приводить и к качественно иным результатам.

Будем считать шар неподвижным, а обтекающий его поток стационарным. Традиционно – скорость потока \mathbf{u} , а его динамическая вязкость – η . Также, как и в задаче Стокса, будем рассматривать пограничную область вблизи внешней части мембраны.

Решение задачи мы проиллюстрируем для случая трех качественно различных граничных условий (см. ниже).

Эту задачу мы можем решить, воспользовавшись стационарными уравнениями Навье – Стокса и уравнением непрерывности. Действительно, имеем:

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (1.83)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.84)$$

В пограничной области, ширину которой обозначим как δ , в приближении Стокса скорость обтекаемого потока близка к «залипанию».

Это означает, что число Рейнольдса Re должно быть мало, и в пограничном слое должно выполняться неравенство

$$Re = \frac{u\delta}{\nu} \ll 1, \quad (1.85)$$

где ν – кинематическая вязкость.

Толщину пограничного слоя можно оценить, как $\delta = \frac{2R}{\sqrt{Re^*}}$. В приближении (1.85) уравнение (1.83) существенно упрощается и в итоге мы приходим к более простой линейной системе уравнений, полученной Стоксом:

$$\nabla P = \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (1.86)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.87)$$

Считая шар жидким, для области под мембраной, вместо уравнений (1.86), (1.87) имеем

$$\nabla P' = \eta' \Delta \mathbf{v}', \quad (1.88)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad (1.89)$$

Для жидкости в шаре переменные будем обозначать штрихом, по возможности избегая такого же обозначения для производной.

Поскольку в мембране, толщину которой предполагаем очень малой, должен выполняться закон Дарси, то имеем:

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\eta} \nabla P, \quad (1.90)$$

где k – коэффициент пористости.

Формула (1.90) «работает» в том случае, если мембранный фильтр направлен из континуума внутрь сферы. Если же наоборот, из сферы в континуум, то

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\eta'} \nabla P'. \quad (1.91)$$

Обе приведенные возможности (1.90) и (1.91) эквивалентны, поэтому сейчас мы ограничимся только анализом случая (1.90).

Несколько возможных граничных условий мы сформулируем немного ниже, и рассмотрим три разных примера решения уравнений (1.86) – (1.90).

Начало координат удобно выбрать в центре шара, а решение уравнения (1.86) будем искать в виде, учитывающим специфику «просачивания», то есть

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} [f(r) \mathbf{u}] - \frac{k}{\eta} \nabla P, \quad (1.92)$$

где радиальная функция $f(r)$ должна быть найдена.

Стоит заметить, что последнее слагаемое в формуле (1.92) является сугубо математическим предположением, которое будет оправдано последующими рассуждениями.

Далее, поскольку согласно уравнениям (1.86) и (1.87) давление должно удовлетворять еще и уравнению Лапласа

$$\Delta P = 0, \quad (1.93)$$

то решение, записанное в форме (1.92), удовлетворяется автоматически, как и уравнение непрерывности (1.87).

После применения операции *rot* к левой и правой частям уравнения (1.86), находим, что

$$\Delta \text{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (1.94)$$

После подстановки в (1.94) решения в виде (1.92), мы получаем

$$\nabla \Delta^2 f = 0. \quad (1.95)$$

В результате взятия первого интеграла от уравнения (1.95), полученную константу, как и в решении Стокса, можно положить равной нулю. В результате мы приходим к бигармоническому уравнению:

$$\Delta^2 f = 0. \quad (1.96)$$

Его решение, на бесконечности удовлетворяющее условию $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{v} = \mathbf{u}$, позволяет записать нам следующее выражение для радиальной функции f

$$f = ar + \frac{b}{r}, \quad (1.97)$$

где две введенные константы интегрирования a, b мы найдем после постановки соответствующих граничных условий.

Подстановка решения (1.97) в (1.96) и (1.92) с учетом (1.96) приводит нас к следующему выражению для скорости

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{grad} \text{div} \mathbf{u} (f - k \Delta f). \quad (1.98)$$

Если теперь воспользоваться решением (1.97) из (1.98) следует, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} + \frac{2ak}{r^3} \right) - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \left(a - \frac{3b}{r^2} + \frac{6ak}{r^2} \right). \quad (1.99)$$

Поскольку расстояние r отсчитывается от центра сферы, то в сферическом базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ компоненты скорости можно записать следующим образом

$$\begin{cases} v_r = u \cos \theta \left(1 - \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r^3} - \frac{4ak}{r^3} \right), \\ v_\theta = -u \sin \theta \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} + \frac{2ak}{r^3} \right), \\ v_\varphi = 0. \end{cases} \quad (1.100)$$

Для давления согласно уравнению (1.86), после подстановки в него соотношения (1.92), получаем

$$\nabla P = \eta \Delta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.101)$$

Откуда

$$P = P_0 + \eta \Delta \operatorname{div} (f \mathbf{u}), \quad (1.102)$$

где P_0 – давление на бесконечности.

С учетом решения (1.97) отсюда имеем

$$P = P_0 - \frac{2\eta a u \cos \theta}{r^2}. \quad (1.103)$$

Для жидкости внутри сферы решение можно искать в виде

$$\mathbf{v}' = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (f' \mathbf{u}). \quad (1.104)$$

После его подстановки в уравнение $\Delta \operatorname{rot} \mathbf{v}' = 0$, мы приходим к следующему уравнению для интересующей нас функции f' , а именно:

$$\nabla \Delta^2 f' = 0. \quad (1.105)$$

Его конечное в нуле решение, впервые найденное Рибчинским в 1911 году, можно записать в виде

$$f' = \frac{Ar^2}{4} + \frac{Br^4}{8}, \quad (1.106)$$

где A и B новые константы интегрирования.

Фигурирующие в (1.106) множители $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ введены просто из соображений удобства.

В соответствии с решением (1.106) распределение скоростей во внутренней области сферы согласно (1.104) будет

$$\mathbf{v}' = \mathbf{u}(5kB - A - 2Br^2) + Br(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}). \quad (1.107)$$

В проекциях на сферический базис $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ скорость \mathbf{v}' согласно (1.107) можно представить как

$$\begin{cases} v'_r = u \cos \theta (5kB - A - 2Br^2), \\ v'_\theta = -u \sin \theta (5kB - A - 2Br^2), \\ v'_\varphi = 0. \end{cases} \quad (1.108)$$

Поэтому давление внутри сферы будет подчиняться закону

$$P' = P_0 + \eta' \mathbf{u} \cdot \Delta \nabla f'. \quad (1.109)$$

Если теперь подставить в (1.109) зависимость (1.106), то найдем

$$\begin{aligned} P' &= P_0 + \eta' \Delta (\mathbf{u} \cdot \nabla f') = P_0 + \frac{\eta'}{2} \Delta [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(A + Br^2)] = \\ &= P_0 + \frac{\eta'}{2} \left\{ \text{div} [\mathbf{u}(A + Br^2) + 2Br(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})] \right\} = P_0 + 5B\eta'ur \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Все полученные выше решения мы должны теперь «сшить» друг с другом на границе мембраны, то есть при значении радиуса шара $r = R$, с учетом условия непрерывности обоих динамических переменных, а именно скорости и давления.

Поскольку в нашем распоряжении имеются четыре константы интегрирования a, b, A, B , то необходимых для их однозначного определения условий также должно быть четыре.

Рассмотрим три возможности.

$$1. \quad v_{\theta}|_{r=R+0} = 0, \quad v'_{\theta}|_{r=R-0} = 0, \quad \sigma'_{r\theta}|_{r=R-0} = \sigma_{r\theta}|_{r=R+0}, \quad v'_r|_{r=R-0} = v_r|_{r=R+0} \quad (1.111)$$

Как видно, касательные составляющие скорости на поверхности подчиняются условию «залипания», а радиальные просто «сшиваются».

С учетом решений (1.100), (1.108), (1.110) и в соответствии с (1.111) получаем следующую систему четырех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} + \frac{2ak}{R^3} = 0, \\ (5k - 2R^2)B - A = 0, \\ \lambda \left(1 - \frac{a}{R} - \frac{7b}{R^3} + \frac{14ak}{R^3} \right) = B(R^2 + 5k) - A, \\ 1 - \frac{2a}{R} + \frac{2b}{R^3} - \frac{4ak}{R^3} = (5k - R^2)B - A. \end{cases} \quad (1.112)$$

где параметр

$$\lambda = \frac{\eta}{\eta'}.$$

Из уравнений (1.112) следует, что

$$\begin{cases} a = \frac{R(3-2\lambda)}{2(2-\lambda)}, \\ b = \frac{R^3 \left[1 + \frac{2k}{R^2}(3-2\lambda) \right]}{2(2-\lambda)}, \\ A = \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \left(\frac{5k}{R^2} - 2 \right), \\ B = \frac{\lambda}{R^2(2-\lambda)}. \end{cases} \quad (1.113)$$

Согласно (1.103) давление

$$P = P_0 - \frac{\eta Ru \cos \theta}{r^2} \left(\frac{3-2\lambda}{2-\lambda} \right). \quad (1.114)$$

Если мы теперь воспользуемся определением для силы сопротивления через параметры a, b в соответствии с общей формулой, которую можно найти, исходя из решения (1.100), а именно

$$F = \frac{8\pi\eta Ru}{3} \left(\frac{4a}{R} - \frac{3b}{R^3} \right), \quad (1.115)$$

то согласно решениям (1.113), находим

$$F = 6\pi\eta Ru \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)} \left[1 - \frac{8\lambda}{9} - \frac{2k}{R^2} \left(1 - \frac{2\lambda}{3} \right) \right]. \quad (1.116)$$

Согласно формуле (1.116) в частных случаях, имеем.

1. При $\lambda \rightarrow 0$, мы получаем обобщенную формулу Стокса при учете тонкой мембранной оболочки

$$F = 6\pi\eta Ru \left(1 - \frac{2k}{R^2} \right). \quad (1.117)$$

Как видно из (1.117), с ростом величины пористости сопротивление резко уменьшается.

2. В случае $k = 0$ приходим к классической формуле Стокса:

$$F = 6\pi\eta Ru.$$

3. Из (1.116) следует, что параметр λ не должен превышать $\frac{9}{8}$. Поэтому, если положить, например $\lambda = 1$, то приходим к следующей формуле для сопротивления:

$$F = \frac{4\pi}{3} \eta Ru \left(1 - \frac{6k}{R^2} \right). \quad (1.118)$$

Поэтому при учете мембранной оболочки для случая граничных условий (1.111) сила сопротивления в сравнении с силой Стокса будет иметь тенденцию к резкому спаду.

4. $k=0$, то есть мембрана отсутствует. Тогда сила сопротивления в зависимости от параметра λ будет вести себя следующим образом:

$$F = 6\pi\eta Ru \frac{\left(1 - \frac{8\lambda}{9}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)}. \quad (1.119)$$

Согласно (1.119) при $\lambda \rightarrow \infty$ сила сопротивления довольно резко возрастает и становится такой $F = \frac{32\pi}{3}\eta Ru$. Понятно, что приведенное значение физически не возможно, а это, в свою очередь, означает, что не запрещенные значения параметра λ могут принадлежать только сегменту: $0 \leq \lambda \leq \frac{9}{8}$.

Проанализирует теперь еще одну возможную гипотетическую ситуацию, которую будем просто считать возможным дополнительным предельным случаем.

Поэтому граничную задачу сформулируем теперь следующим образом:

$$2. \quad v_r|_{r=R+0} = 0, \quad v'_r|_{r=R-0} = 0, \quad P'|_{r=R-0} = P|_{r=R+0}, \quad v'_\theta|_{r=R-0} = v_\theta|_{r=R+0} \quad (1.120)$$

Как видно из формулировки (1.120), здесь в отличие от предыдущей граничной задачи ситуация обратная – обе касательные компоненты скорости на границе области контакта «сшиваются», а радиальные, наоборот, исчезают.

Остановимся на этом случае подробнее.

Согласно (1.120) мы приходим в результате к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A = (5k - R^2)B, \\ 1 - \frac{2a}{R} + \frac{2b}{R^3} - \frac{4ak}{R^3} = 0, \\ (5k - 2R^2)B - A = 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} + \frac{2ak}{R^3}, \\ B = -\frac{2a\lambda}{5R^3}. \end{cases} \quad (1.121)$$

Очевидно, что ее решение будет таким

$$\begin{cases} a = \frac{3R}{4\left(1 + \frac{\lambda}{5}\right)}, \\ b = \frac{R^3\left(1 - \frac{2\lambda}{5} + \frac{6k}{R^2}\right)}{4\left(1 + \frac{\lambda}{5}\right)}, \\ B = -\frac{3\lambda}{10R^2\left(1 + \frac{\lambda}{5}\right)}, \\ A = \frac{3\left(1 - \frac{5k}{R^2}\right)\lambda}{10\left(1 + \frac{\lambda}{5}\right)}. \end{cases} \quad (1.122)$$

Найденные значения констант согласно (1.122) позволяют нам записать теперь общее выражение для силы сопротивления вязкого шара в соответствии с граничными условиями (1.120). Действительно, благодаря общему выражению (1.115) в результате имеем

$$F = \frac{6\pi\eta Ru}{\left(1 + \frac{\lambda}{5}\right)} \left(1 + \frac{2\lambda}{15} - \frac{2k}{R^2}\right). \quad (1.123)$$

В случае, если $\lambda \rightarrow 0$, из (1.123) следует, что

$$F = 6\pi\eta Ru \left(1 - \frac{2k}{R^2}\right). \quad (1.124)$$

Если $\lambda \rightarrow \infty$, то из (1.123) получаем

$$F = 4\pi\eta Ru . \quad (1.125)$$

Формула (1.125) в точности совпадает с результатом, полученным Рибчинским, который подробно описан в монографии [1] на стр. 99.

Однако, формула (1.123) является обобщением этого результата на тот случай, когда жидкий шар окружает тонкая мембрана.

Проанализируем теперь следующий пример граничных условий:

$$3. \quad v'_r|_{r=R-0} = v_r|_{r=R+0}, \quad v'_\theta|_{r=R-0} = v_\theta|_{r=R+0}, \quad P'|_{r=R-0} = P|_{r=R+0}, \quad \sigma'_{r\theta}|_{r=R-0} = \sigma_{r\theta}|_{r=R+0}. \quad (1.126)$$

В отличие от двух предыдущих граничных условий, здесь мы учитываем «сшивку» на границе контакта и касательных, и нормальных компонент скорости.

Тензор вязких напряжений, фигурирующий в условиях (1.126), в общем случае криволинейных координат может быть определен, как

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - 2\Gamma^l_{ik} v_l \right), \quad (1.127)$$

где Γ^l_{ik} – символ Кристоффеля второго рода.

Объективности ради следует отметить, что использовать непрерывность касательных компонент тензора σ_{ik} (последнее соотношение в (1.126)) было предложено, например, в монографии [1] к задаче Рибчинского. Однако, условия (1.126) несколько отличаются от граничных условий, которые рассмотрел Рибчинский, хотя частично и совпадают с граничными условиями, рассмотренными в случае 2.

Поэтому, благодаря решения (1.100) и (1.108), и учитывая общую формулу (1.127), находим, следовательно

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}|_{r=R+0} &= \frac{\eta u \sin \theta}{R} \left(1 - \frac{a}{R} - \frac{7b}{R^3} + \frac{14ak}{R^3} \right), \\ \sigma'_{r\theta}|_{r=R-0} &= \frac{\eta' u \sin \theta}{R} [B(R^2 + 5k) - A]. \end{aligned} \quad (1.128)$$

В результате система уравнений (1.126) принимает такой вид

$$\begin{cases} 5kB - A - BR^2 = 1 - \frac{2a}{R} + \frac{2b}{R^3} - \frac{4ak}{R^3}, \\ 5kB - A - 2BR^2 = 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} + \frac{2ak}{R^3}, \\ 5BR = -\frac{2a\lambda}{R^2}, \\ 5kB - A + BR^2 = \lambda \left(1 - \frac{a}{R} - \frac{7b}{R^3} + \frac{14ak}{R^3} \right). \end{cases} \quad (1.129)$$

Алгебраические уравнения (1.129) нетрудно решить и их решение приводит нас к следующему ответу

$$\begin{cases} a = \frac{15R}{2(10-7\lambda)}, \\ b = \frac{5R^3}{2(10-7\lambda)} \left(1 + \frac{6k}{R^2} - \frac{2\lambda}{5} \right), \\ A = \frac{3\lambda(4-5k)}{10-7\lambda}, \\ B = -\frac{3\lambda}{(10-7\lambda)R^2}. \end{cases} \quad (1.130)$$

В соответствии с общим выражением (1.115), силу сопротивления можно тогда описать следующей формулой

$$F = \frac{6\pi\eta Ru}{1-0,7\lambda} \left(1 + \frac{2\lambda}{15} - \frac{2k}{R^2} \right). \quad (1.131)$$

В предельных соотношениях отсюда имеем.

1. Если $\lambda \rightarrow 0$ (тонкая мембрана окружает твердую фазу с вязкостью, стремящейся к бесконечности, $\eta' \rightarrow \infty$), то из (1.131) следует формула, формально совпадающая с формулами (1.117) и (1.124):

$$F = 6\pi\eta Ru \left(1 - \frac{2k}{R^2} \right). \quad (1.132)$$

2. В том случае, если $\lambda = 1$ (шар состоит из той же жидкости, что и жидкость, обтекающая его), сопротивление сильно возрастает, и описывается согласно соотношению

$$F = 20\pi\eta Ru \left(\frac{17}{15} - \frac{2k}{R^2} \right). \quad (1.133)$$

Таким образом, как видно из (1.133), тонкая пористая мембрана сильно уменьшает силу сопротивления. Физически это вполне понятно. Если же мембрана отсутствует, то сила сопротивления будет резко возрастать, и шар фактически остановится, то есть не будет двигаться. В самом деле, если предположить, что в воду попала другая капля воды, то понятно, что она тут же исчезнет. Формула (1.133) этому факту как раз и соответствует.

Обратим также внимание, что результаты (1.132) и (1.133) были получены из граничных условий (1.126). Поэтому в соответствии с общей формулой (1.131), приведенная зависимость должна иметь особенность при значении $\lambda = \frac{10}{7}$.

Тут стоит отметить, что такое поведение силы сопротивления и полная за него ответственность целиком «лежат» на граничных условиях (1.126). В случае граничных условий (1.120) подобной особенности, как мы убедились выше, не наблюдается.

Если все же исходить из решения (1.131), то, видимо, должна существовать какая – то предельная вязкость, а именно

$$\eta'_{cr} = 0,7\eta. \quad (1.134)$$

Казалось бы, что при условии (1.134) шарик вообще не должен двигаться.

Все три случая, проанализированные выше, означают лишь одно. С точки зрения физики условия (1.120) наиболее реальны, однако, окончательную точку можно будет поставить только лишь после проведения соответствующих экспериментов. В частности, из эксперимента можно будет

вполне однозначно установить и «правильные» граничные условия, которые должны привести к качественно правильному результату в каждом отдельном случае.

Некоторые из возможных задач можно сформулировать, например, так:

1. Бесконечно тонкая мембрана;
2. Мембрана конечной толщины;
3. Чисто пористый шар (или какое – то другое пористое тело);
4. Квадратичный закон фильтрации;
5. Потенциальное течение при обтекании пористых тел;
6. Потенциальное обтекание жидкой капли, окруженной мембраной.

И т.д.

Если параметр λ устремить к бесконечности в общей формуле (1.131), то мы приходим в результате к отрицательному значению для силы сопротивления, а именно

$$F = -\frac{8\pi\eta Ru}{7}.$$

Подобный результат, на наш взгляд, не дает ясной физической трактовки.

Обратим внимание и на следующий важный момент. Все выше рассмотренные граничные условия, не исчерпывают и другие возможности. Действительно, в первом и третьем случаях мы предположили, что касательные компоненты тензора вязких напряжений являются непрерывными величинами на границе мембраны. А во втором случае использовалось условие непрерывности давления. При этом из рассмотрения вовсе нельзя исключать, например, также и возможность «скачка» градиента давления на границе, хотя само давление может изменяться и непрерывно.

Если ввести в рассмотрение новый параметр, а именно коэффициент поверхностного натяжения α , то условие на границе можно сформулировать и, например, таким образом:

$$4\pi R^2 \left(\frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=R-0} - \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=R+0} \right) = \alpha n_r. \quad (1.135)$$

С помощью тензора вязких напряжений, ориентируясь на монографию [1], в случае произвольной формы поверхности контакта, граничную задачу при учете неоднородности сил поверхностного натяжения можно сформулировать тогда и в виде уже несколько иного равенства. То есть, следуя [1], имеем

$$\left[(\sigma_{1ik} - \sigma_{2ik}) n_k + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i + \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \right]_{\Sigma_r} = 0, \quad (1.136)$$

где $R_{1,2}$ – главные радиусы кривизны.

Еще один пример, который можно также привести в качестве логического продолжения начатой темы, такой.

Предположим, что имеется некоторая сферическая полость радиуса H , в центр которой мы помещаем шар радиуса R . В радиальном направлении по отношению к его центру в эту полость направляется стационарный поток жидкости благодаря перепаду давлений слева и справа от полости, вытекающий так же симметрично с другой стороны. Считаем, что поток жидкости, как и в задаче Стокса, ламинарный, и мы рассматриваем область, пограничную с шаром, в которой число Рейнольдса мало.

Подчеркнем, что рассматриваемый пример похож на задачу Стокса, но с той лишь разницей, что обтекаемый шар «зажат» в конечном объеме с некоторым зазором $\delta = H - R$. Этот факт является самым главным в этом примере.

Когда внешний радиус трубы H стремится к радиусу шара R , сила вязкого сопротивления будет уменьшаться, а сила сухого сопротивления, наоборот, за счет трения о стенки трубы, сильно возрастать. Последнее вполне понятно, если мы примем во внимание закон сохранения полной суммарной мощности рассматриваемой системы, следуя работе [66]. А именно

$$\dot{E} + \dot{Q}_{\text{вязк.}} + \dot{Q}_{\text{сх.}} = 0, \quad (1.137)$$

где E – полная кинетическая энергия потока, $\dot{Q}_{\text{вязк.}}$ – диссипативная функция вязкого континуума, $\dot{Q}_{\text{сх.}}$ – диссипативная функция сухого трения.

Из (1.137) видно, что, если один из механизмов диссипации уменьшается, другой должен возрасти. При этом вязко – жидкостное сопротивление, обязанное внутримолекулярному взаимодействию, по мере приближения к твердой границе должно постепенно переходить во взаимодействие между слоями жидкости вблизи твердой границы, а именно, в сухое трение.

Чтобы проанализировать подробнее эту задачу, воспользуемся опять – таки уравнением

$$\nabla P = \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (1.138)$$

и уравнением непрерывности

$$\text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.139)$$

Решение этих уравнений, благодаря их линейности, можно искать в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{rotrot} [f_1(r) \mathbf{u}] + \text{rotrot} [f_2(r) \mathbf{u}], \quad (1.140)$$

где радиальные (в силу центральной симметрии задачи) функции $f_{1,2}(r)$ следует найти.

Поскольку $\Delta \text{rot} \mathbf{v} = 0$, то с учетом (1.140), имеем отсюда

$$\begin{aligned} \Delta rot \{ rotrot [f_1(r)\mathbf{u}] + rotrot [f_2(r)\mathbf{u}] \} &= \Delta rot \{ \nabla \nabla \cdot (f_1\mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f_1 + \nabla \nabla \cdot (f_2\mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f_2 \} = \\ &= -\Delta rot \{ \mathbf{u} (\Delta f_1 + \Delta f_2) \} = \Delta^2 [\mathbf{u}, \nabla (f_1 + f_2)] = 0 \end{aligned}$$

Или

$$\Delta^2 [\mathbf{u}, \nabla (f_1 + f_2)] = [\mathbf{u}, \nabla \Delta^2 f_1] + [\mathbf{u}, \nabla \Delta^2 f_2] = 0.$$

Благодаря независимости функций f_1 и f_2 сразу же приходим к двум уравнениям:

$$[\mathbf{u}, \nabla \Delta^2 f_1] = 0$$

$$[\mathbf{u}, \nabla \Delta^2 f_2] = 0.$$

Откуда

$$\nabla \Delta^2 f_1 = 0,$$

$$\nabla \Delta^2 f_2 = 0.$$

Их первые интегралы будут

$$\Delta^2 f_1 = A = const,$$

$$\Delta^2 f_2 = C_1 = const.$$

Полагая согласно [1], $A=0$, мы приходим к двум бигармоническим уравнениям

$$\Delta^2 f_1 = 0 \tag{1.141}$$

и

$$\Delta^2 f_2 = C_1. \tag{1.142}$$

Уравнение (1.141) приводит нас к обычному решению Стокса, а именно к уже знакомой зависимости $f_1 = ar + \frac{b}{r}$. Решение же уравнения (1.142) должно

учитывать возможное влияние внешней границы. Скорость течения в области между сферами должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\mathbf{v}|_{r=R} = \mathbf{v}|_{r=H} = 0. \quad (1.143)$$

Учет константы C_1 в уравнении (1.142) необходим нам для получения правильного решения. Это требование очень сильно отличает уравнение (1.142) от уравнения (1.141).

Поскольку радиальная часть оператора Лапласа имеет вид $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}$, то результат решения уравнения (1.142) можно представить как

$$f_2(r) = \frac{C_1}{120} r^4 + \frac{C_2}{6} r^2 + \frac{C_3}{2} r + \frac{C_4}{r} + C_5, \quad (1.144)$$

где $C_{2,3,4,5}$ – константы интегрирования.

Если сравнить теперь решение (1.144) с решением уравнения (1.141), можно сразу же заключить, что

$$C_3 = C_4 = C_5 = 0. \quad (1.145)$$

Это значит, что решение (1.144) можно записать в единственном виде

$$f_2(r) = cr^4 + gr^2, \quad (1.146)$$

где для сокращения записи мы ввели новые обозначения: $c = \frac{C_1}{120}$, $g = \frac{C_2}{6}$.

Если теперь подставить решение (1.146) в формулу (1.140) получаем:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} - 16cr^2 - 4g \right) + \mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \left[\frac{1}{r^3} \left(\frac{3b}{r^2} - a \right) + 8c \right]. \quad (1.147)$$

Очевидно, что если $c = g = 0$ мы придем к обычному решению Стокса.

Исходя из граничных условий (1.143) и благодаря независимости обоих слагаемых в решении (1.147), мы автоматически приходим к четырем алгебраическим уравнениям:

$$\begin{cases} 1-4g = \frac{a}{R} + \frac{b}{R^3} + 16cR^2, \\ 1-4g = \frac{a}{H} + \frac{b}{H^3} + 16cH^2, \\ \frac{1}{R^3} \left(\frac{3b}{R^2} - a \right) + 8c = 0, \\ \frac{1}{H^3} \left(\frac{3b}{H^2} - a \right) + 8c = 0. \end{cases} \quad (1.148)$$

Из двух нижних уравнений следует, что $a = \frac{3b}{R^2}k$, где коэффициент

$$k = \frac{1-t^5}{1-t^3}, \quad (1.149)$$

причем параметр

$$t = \frac{R}{H} \leq 1. \quad (1.150)$$

Следовательно,

$$c = -\frac{1}{8R^3} \left(\frac{3b}{R^2} - a \right) = -\frac{3b}{8R^5} (1-k). \quad (1.151)$$

Чтобы удовлетворить двум верхним уравнениям системы (1.148), необходимо считать, что $g = 0$. В результате получаем

$$\frac{R^2}{H^2} = \frac{1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}}{1 - \frac{a}{H} - \frac{b}{H^3}}$$

И, значит,

$$b = \frac{R^3}{4k} \left(\frac{1-t^2}{1-t^3} \right). \quad (1.152)$$

Поэтому

$$a = \frac{3R}{4} \left(\frac{1-t^2}{1-t^3} \right), \quad (1.153)$$

$$c = \frac{1}{16R^2} \left[1 - \frac{1+3k}{4k} \left(\frac{1-t^2}{1-t^3} \right) \right] > 0. \quad (1.154)$$

Значит, если воспользоваться теперь общим решением (1.147), скорость между сферами должна распределяться по закону

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} - 16cr^2 \right) + \mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \left[\frac{1}{r^3} \left(\frac{3b}{r^2} - a \right) + 8c \right], \quad (1.155)$$

в которой все коэффициенты даются выражениями (1.152) – (1.154).

В случае, если $H \rightarrow \infty$, решение (1.155) переходит в решение Стокса.

Возвращаясь к уравнению (1.138), мы немедленно получаем, что

$$P = P_0 - \frac{2\eta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r^3} (a - 20cr^3),$$

где константу P_0 следует считать просто атмосферным давлением.

Таким образом, после несложных упрощений, полагая, что $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) = ur \cos \theta$, отсюда следует

$$P = P_0 - \frac{3\eta Ru \cos \theta}{2r^2} \left(A - \frac{5r^3}{3R^3} B \right), \quad (1.156)$$

где введено такое сокращение

$$\begin{cases} A = \frac{1+t}{1+t+t^2}, \\ B = 1 - \frac{1+3k}{4k} A. \end{cases} \quad (1.157)$$

Чтобы теперь найти силу сопротивления, мы можем воспользоваться общим алгоритмом, описанным выше, исходя из определения тензора вязких напряжений. В самом деле, представляя силу в виде ее проекции на ось потока, как

$F_f = \int_{S_1+S_2} k^i \sigma_{ik} n^k dS$, где единичный вектор \mathbf{k} ориентирован вдоль направления движения потока \mathbf{u} , которое удобно выбрать в качестве оси z . Векторный элемент поверхности $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, где \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности, dS – элемент площади. S_1, S_2 – площади поверхностей внутренней и внешней сфер соответственно. Исходя из определения тензора вязких напряжений, а именно $\sigma_{ik} = \eta(v_{i,k} + v_{k,i}) - P\delta_{ik}$, где ковариантная производная в случае ортонормированного базиса есть

$$v_{i,k} = \frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^s v_s, \quad (1.158)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

В соответствии с (1.155) и (1.156) имеем

$$\begin{cases} v_r = u \cos \theta \left(1 - \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r^3} - 8cr^2 \right), \\ v_\theta = -u \sin \theta \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} - 16cr^2 \right), \\ P = P_0 - \frac{3\eta R(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{2r^3} \left(A - \frac{5r^3}{3R^3} B \right). \end{cases} \quad (1.159)$$

В случае шара у нас имеется только одна компонента проекции вектора поверхности, а именно $dS^r = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$. Это означает, что силу сопротивления можно записать как

$$\begin{aligned} F_f = 2\pi R^2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) \Big|_{r=R} \sin \theta d\theta - \\ - 2\pi H^2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) \Big|_{r=H} \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (1.160)$$

где компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} - P, \\ \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta}{r} \right).\end{aligned}\tag{1.161}$$

Если подставить сюда явные выражения (1.159), находим, что

$$\begin{cases} \sigma_{rr}|_{r=R} = -P_0 + \eta u \cos \theta \left(\frac{4a + 1,5AR}{R^2} - \frac{12b}{R^4} - 32cR - \frac{3B}{2R} \right), \\ \sigma_{r\theta}|_{r=R} = \eta u \sin \theta \left(1 - \frac{a}{R} - \frac{7b}{R^3} + 8cR^2 \right), \\ \sigma_{rr}|_{r=H} = -P_0 + \eta u \cos \theta \left(\frac{4a + 1,5AH}{H^2} - \frac{12b}{H^4} - 32cH - \frac{3B}{2H} \right), \\ \sigma_{r\theta}|_{r=H} = \eta u \sin \theta \left(1 - \frac{a}{H} - \frac{7b}{H^3} + 8cH^2 \right).\end{cases}\tag{1.162}$$

Если, наконец, учесть, что $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$, $\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}$, после

интегрирования по угловой переменной, мы приходим к такому общему выражению для силы сопротивления

$$\begin{aligned}F_f &= \frac{4\pi}{3} \eta u R \left[\frac{4a}{R} + \frac{3A}{2} - \frac{12b}{R^3} - (32cR^2 + 1,5B) - 2 \left(1 - \frac{a}{R} - \frac{7b}{R^3} + 8cR^2 \right) \right] + \\ &+ (R \rightarrow H)\end{aligned}\tag{1.163}$$

Принимая теперь во внимание формулы (1.152) – (1.154) и (1.157), приходим к следующей зависимости:

$$F_f = 6\pi \eta u R \xi(t).\tag{1.164}$$

где

$$\xi(t) = 1 - \frac{5t^2}{12} \left(\frac{1+t}{1+t+t^2} \right) \left[t \frac{1-t^2}{1-t^5} + \frac{32}{5(1+t)} \right].\tag{1.165}$$

В предельном случае, когда $H \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$), $\xi(t) \rightarrow 1$, мы приходим к закону Стокса. Если же $H \rightarrow R$ ($t \rightarrow 1$), функция $\xi(t) \rightarrow 0$.

Таким образом, если внешняя сфера «прилипает» к поверхности внутреннего обтекаемого шара, сила вязкого сопротивления исчезает, плавно переходя в энергию сухого трения.

Сказанное означает, что если $H \rightarrow R$ ($t \rightarrow 1$) зависимость силы вязкого сопротивления должна иметь вид

$$F_f \sim \eta u (H - R), \quad (1.166)$$

где разность $H - R$ соответствует линейному размеру пограничного слоя δ .

Силу вязкого сопротивления можно найти и с помощью вычисления диссипативной функции. В самом деле,

$$F_f = \frac{\dot{Q}}{u}. \quad (1.167)$$

где \dot{Q} – диссипативная функция.

Для несжимаемой жидкости согласно (1.9) $\dot{Q} = \eta \int_V \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right)^2 dV$.

Распределение же скоростей дается решением (1.13), что приводит нас к ответу (1.19), согласно которому диссипативная функция оказывается равной $\dot{Q} = 6\pi\eta Ru^2$. И, следовательно, сила Стокса согласно (1.167), как и должно быть будет определяться классической формулой $F_s = 6\pi\eta Ru$.

Основываясь на приведенном выше подробном алгоритме вычисления диссипативной функции, мы можем выявить некоторые важные закономерности чисто вычислительного характера, которые свойственные именно решению Стокса.

Однако, в рассматриваемом нами примере использование общей формулы для диссипативной функции, а именно

$$\dot{Q} = \frac{\eta}{2} \int_V \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta_k^i \operatorname{div} \mathbf{v} \right)^2 dV + \zeta \int_V (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dV, \quad (1.168)$$

ориентируясь на алгоритм получения формулы (1.19), позволяет нам вычислить ее и в более общем случае, а именно, когда $c \neq 0$, то есть, используя решение (1.155).

Например, действие оператора Лапласа на вектор скорости, используя решение (1.155), можно представить тогда в виде

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= \Delta \nabla \nabla \cdot [f_1(r) \mathbf{u}] + \Delta \nabla \nabla \cdot [f_2(r) \mathbf{u}] - \mathbf{u} \Delta^2 f_1(r) - \mathbf{u} \Delta^2 f_2(r) = \\ &= \Delta \nabla \nabla \cdot [f_1(r) \mathbf{u}] + \Delta \nabla \nabla \cdot [f_2(r) \mathbf{u}] - 120c \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Поэтому, опираясь на общую формулу (1.168) и полагая в ней $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, для случая не бесконечного объема, как в задаче Стокса, а для конечного, пример которого мы сейчас рассматриваем, диссипативную функцию можно записать, как

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -\eta \int_V \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} dV = \\ &= -\eta \int_V \left\{ \mathbf{u} \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} - 16cr^2 \right) + \mathbf{r} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \left[\frac{1}{r^3} \left(\frac{3b}{r^2} - a \right) + 8c \right] \right\} \times \\ &\times \left[\Delta \nabla \nabla \cdot [f_1(r) \mathbf{u}] + \Delta \nabla \nabla \cdot [f_2(r) \mathbf{u}] - 120c \mathbf{u} \right] dV \end{aligned} \quad (1.169)$$

Дальнейшие вычисления не сложно осуществить, воспользовавшись методикой описанной выше.

Глава 2. Сила Стокса в виде функции от числа Кнудсена

В этой главе мы подробно остановимся на некоторых тонкостях не только физического, но и чисто математического характера, что является неотъемлемой частью при решении любых задач из области теоретической физики. Теоретическая гидродинамика не является исключением и решаемые в ней задачи нередко оказываются чрезвычайно сложными. Ниже мы остановимся на подробном вычислении поправок к уравнению Навье – Стокса, и вычислим дополнительное слагаемое к правой части уравнения, которое, как увидим далее, имеет вид бигармонической по оператору Лапласа поправки.

При анализе первоисточников, посвященных гидродинамической теории жидкостей и газов выяснилась одна интересная деталь. Дело в том, что мы не нашли во всем множестве оригинальных статей и книг из этого направления (см., к примеру, литературу [38] – [49]), где бы приводилось уточнение уравнения Навье – Стокса в виде дополнительных слагаемых, учитывающих неоднородность среды. Поскольку эти добавки формально являются поправками к уравнению Н-С по числу Кнудсена, формально определяемому как $Kn = \frac{l}{L}$, где l – длина свободного пробега молекул жидкости или газа, а L – линейный размер тела, то для сравнительно больших тел они всегда малы, и ими можно пренебречь.

Однако, если речь заходит о наночастицах, исследование физических свойств которых в настоящее время является весьма актуальным, учет неоднородных слагаемых в уравнении Н-С становится необходимым.

Их размер лежит в диапазоне $10^{-5} - 10^{-7}$ см, и когда речь заходит о такого порядка размерах, классической формулой Стокса для шара воспользоваться довольно проблематично, поскольку в этом случае длина свободного пробега молекул жидкости (или газа) оказывается сравнимой с диаметром наночастицы (наночастицы мы считаем сферическими).

Именно в этой связи и была поставлена задача, как вычислить поправку к силе Стокса в виде функции от числа Кнудсена.

Для ответа на поставленный вопрос, мы воспользуемся хорошо проверенным, как теорией, так и практикой, методом кинетического уравнения Больцмана (см. монографии [22] – [31], [47], [65]), и в подробностях остановимся на выводе уравнения Навье – Стокса. При этом мы учтем все дополнительные слагаемые с точностью до членов порядка l_p^3 по длине свободного пробега l_p , где \mathbf{p} – импульс молекулы.

2.1 Уравнение Навье – Стокса в высших приближениях по неоднородностям

Решение задачи мы начнем с классического кинетического уравнения Больцмана, которое запишем в стандартном виде (см. [21], [34]):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = L(f), \quad (2.1)$$

где $f = f(t, \mathbf{p}, \mathbf{r})$ – искомая функция распределения, \mathbf{v} – скорость молекул, \mathbf{F} – сила действующая на частицу, \mathbf{p} – ее импульс, а $L(f)$ – интеграл столкновений.

Без правой части уравнение (2.1) представляет собой уравнение Лиувилля, решение которого формально можно представить с помощью дельта – функции, а точнее как

$$\tilde{f} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t)),$$

где $\mathbf{r}_0(t)$ – траектория частицы, $\mathbf{p}_0(t) = m\dot{\mathbf{r}}_0(t)$ – ее импульс, m – масса. «Точка» означает дифференцирование по времени.

С учетом интеграла столкновений уравнение Больцмана сильно усложняется благодаря его нелинейному характеру, и его решение так просто, как для уравнения Лиувилля, найти нельзя.

Именно поэтому наиболее распространенным методом его решения является так называемое «тау – приближение», позволяющее записать интеграл столкновений в линеаризованном виде. Это сильно упрощает его вид, сводя интегро – дифференциальное уравнение Больцмана к линейному дифференциальному уравнению в частных производных, которое также является весьма сложным, однако, вполне решаемым благодаря некоторым разработанным для этой цели математическим методам.

Традиционно решение уравнения (2.1) будем искать в виде ряда

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots , \quad (2.2)$$

где квазиравновесная функция распределения

$$f_0 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon(p) - pV}{T}} , \quad (2.3)$$

а фигурирующий здесь нормировочный множитель

$$Z = \int \bar{f} d\Gamma = \int e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}} d\Gamma , \quad (2.4)$$

где элемент фазового объема

$$d\Gamma = d^3 p dV ,$$

равновесная функция распределения в (2.4)

$$\bar{f} = f_0|_{V=0} ,$$

$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия молекулы, а интегрирование ведется по всему импульсному пространству. Элемент его объема есть

$$d^3 p = dp_x dp_y dp_z ,$$

а элемент объема декартового пространства

$$dV = dx dy dz .$$

Постоянная Больцмана k_B здесь и далее считается равной единице.

Вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ представляет собой в общем виде неоднородную и нестационарную скорость гидродинамического потока, который увлекает за собой молекулы жидкости.

Функции f_1, f_2, f_3, \dots представляют собой интересующие нас поправки к квазиравновесной функции распределения, которые нам следует найти. Что касается интеграла столкновений, то в «тау – приближении» его всегда записывают в виде:

$$L\{f\} \approx -\frac{\delta f}{\tau_p},$$

где $\delta f = f - f_1 - f_2 - \dots$ представляет собой малое отклонение от квазиравновесной функции распределения. Наличие в знаменателе времени релаксации и породило название «тау – приближения».

В соответствии с этим правую часть уравнения (2.1) представим в приближении времени релаксации, как

$$L(f) \approx -\frac{f_0 - f_1 - f_2 - \dots}{\tau_p}, \quad (2.5)$$

где f_0 – это квазиравновесная функция распределения, а τ_p – время между столкновениями молекул.

Прежде, чем переходить к поиску поправок в (2.5), нам следует записать общий принцип получения уравнений движения в случае, если $T \neq 0$.

Для получения уравнения движения удобно воспользоваться принципом сохранения полной мощности системы, аналогично тому, как это было сделано, например, в работах [32], [61], а именно, исходя из уравнения

$$\dot{E} + \dot{Q} = 0, \quad (2.6)$$

где полную энергию потока жидкости можно представить в виде

$$E = \frac{1}{Z} \int \left[\varepsilon(p) + \frac{mV^2}{2} \right] f d\Gamma.$$

Дифференцируя, имеем отсюда

$$\dot{E} = \frac{1}{Z} \int \varepsilon(p) \dot{f} d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \bar{f} d\Gamma. \quad (2.7)$$

Диссипативная функция есть

$$\dot{Q} = T\dot{S}, \quad (2.8)$$

где S – энтропия.

В случае, если $T \neq 0$ уравнение (2.6) не годится, и нам следует записать вместо него уравнение в виде

$$\dot{F} = \frac{d}{dt}(E - TS) = 0, \quad (2.9)$$

где $F = E - TS$ – свободная энергия Гиббса.

При $T = const$ имеем отсюда

$$\dot{E} - \dot{Q} = 0. \quad (2.10)$$

Согласно [48] энтропию неравновесного классического больцмановского газа можно записать как

$$S = -\frac{1}{Z} \int f \ln \left(\frac{f}{e} \right) d\Gamma. \quad (2.11)$$

Если теперь подставить определение (2.11) в (2.8), то получим

$$\dot{Q} = -\frac{T}{Z} \int \dot{f} \ln f d\Gamma. \quad (2.12)$$

Если же теперь подставить (2.7) и (2.12) в (2.10), найдем

$$\frac{1}{Z} \int \left[\varepsilon(p) + T \ln f \right] \dot{f} d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \bar{f} d\Gamma = 0. \quad (2.13)$$

Следуя (2.5), имеем

$$\dot{f} = L(f) \approx -\frac{f_0 - f_1 - f_2 - \dots}{\tau_p}$$

Поэтому из (2.13) получаем

$$\frac{1}{Z} \int [\varepsilon(p) + T \ln(f_0 - f_1 - f_2 - \dots)] \frac{(f_0 - f_1 - f_2 - \dots)}{\tau_p} d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{v} \nabla \bar{f} d\Gamma = 0 \quad (2.14)$$

Чтобы найти поправку n -ого порядка к квазиравновесной функции распределения, мы воспользуемся результатами работы [40], и представим ее в виде

$$f_n = (-1)^n \tau_p^n \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right]^n f_0. \quad (2.15)$$

Для логарифма, фигурирующего в уравнении (2.13), воспользуемся следующим хорошо известным соотношением

$$\ln(1 + \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\lambda^k}{k}. \quad (2.16)$$

Поскольку нас интересует только решение с точностью до $n = 2$, то, согласно формуле (2.15), имеем

$$f_1 = -\tau_p (\dot{f}_0 + \mathbf{v} \cdot \nabla f_0), \quad (2.17)$$

$$f_2 = \tau_p^2 (\ddot{f}_0 + 2\mathbf{v} \cdot \nabla \dot{f}_0 + (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 f_0). \quad (2.18)$$

Точки над f_0 в (2.17) и (2.18) означают частные производные по времени соответствующего порядка.

Если теперь составить относительные величины $\frac{f_1}{f_0}$ и $\frac{f_2}{f_0}$, то с учетом явных выражений (2.17), (2.18), а также (2.3), после простых действий найдем

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\tau_p}{T} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})). \quad (2.19)$$

В силу того, что мы интересуемся дополнительными по параметру $\frac{l}{2R}$ слагаемыми, формулу (2.19) следует записать с точностью до членов порядка v^2 .

Поэтому согласно (2.3) имеем

$$f_0 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon(p) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}}{T}} \approx \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}} \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}}{T} \right) = \bar{f} \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}}{T} \right). \quad (2.20)$$

А, значит,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\tau_p}{T} \bar{f} \left((\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \right) \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}}{T} \right) = \\ &= \frac{\tau_p}{T} \bar{f} \left(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})) \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}}{T} + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})^2}{T} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

По тому же алгоритму находим

$$\frac{f_2}{f_0} = \frac{\tau_p^2}{T} \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2}{T} - \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) - v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right]. \quad (2.22)$$

И с учетом (2.20) получаем

$$\begin{aligned} f_2 &\approx \bar{f} \frac{\tau_p^2}{T} \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2}{T} - \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) - v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} - \right. \\ &\left. - \left(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

С помощью (2.21) и (2.23) уравнение (2.14) тогда можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \left\{ \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})}{T} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + \right. \\
& + \tau_p^2 \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2}{T} - \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) - v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} - \right. \\
& \left. \left. - \left(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} \right] \right\}^2 d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \bar{f} d\Gamma = 0.
\end{aligned}
\tag{2.24}$$

Возводя в квадрат выражение в фигурных скобках (2.24), с точностью до членов порядка V^2 имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \left\{ (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})}{T} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + \right. \\
& + \tau_p \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2}{T} - (\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) - 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) - v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} - \right. \\
& \left. \left. - \left(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{T} \right] \right\} d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \bar{f} d\Gamma = \\
& = \frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \left\{ (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2 + \tau_p^2 \left[(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}})^2 + 4(\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}))^2 + \left(v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \right] + \right. \\
& + 2(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \left[\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) - \tau_p \left((\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) + 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right) \right] - \\
& - 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \tau_p \left[(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) + 2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right] + 2\tau_p^2 (\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) \left(2\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) + v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right) + \\
& \left. + 4\tau_p^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})) v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right\} d\Gamma + \frac{m}{Z} \int \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}} \bar{f} d\Gamma = 0.
\end{aligned}$$

При интегрировании по импульсам все слагаемые, содержащие нечетные степени компонент импульса автоматически исчезают. Поэтому, оставляя здесь только квадратичные слагаемые по импульсам, имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \left\{ \frac{m \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})^2 + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}))^2 + \tau_p^2 \left[(\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}})^2 + 4(\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}))^2 + \left(v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \right] - \right. \\
& \left. - 2\tau_p (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \left[\left((\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) + v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right) \right] - 4\tau_p (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})) (\mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{V}})) + 2\tau_p^2 (\mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) v_i v_k \frac{\partial^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})}{\partial x_i \partial x_k} \right\} d\Gamma = 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

В соотношении (2.25) интегрирование по импульсам удобно проводить в сферических координатах. С этой целью необходимо ввести следующие преобразования

$$\begin{cases} p_x = p \sin \theta \cos \varphi, \\ p_y = p \sin \theta \sin \varphi, \\ p_z = p \cos \theta, \end{cases}$$

а, значит, якобиан перехода будет таким

$$I = p^2 \sin \theta .$$

При этом область изменения обоих угловых аргументов будет принадлежать следующим сегментам:

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi ,$$

Что касается переменного «радиуса», то он определен на полусегменте, а именно:

$$0 \leq p < \infty .$$

Как следствие, у нас возникает интегрирование по телесному углу $dO = \sin \theta d\theta d\varphi$.

При возведении в квадрат подынтегрального выражения в (2.21) у нас появляются усреднения от произведений, как четных степеней импульса, так и нечетных.

Как выше было упомянуто, все средние от нечетного произведения импульсов будут равны нулю, а отличными от нуля оказываются только средние вида

$$\overline{P_i P_k}, \quad \overline{P_i P_k P_l P_n}, \quad \overline{P_i P_k P_l P_n P_m P_s},$$

где черта сверху означает усреднение по угловым переменным, которое в развернутом виде можно записать следующим образом:

$$\overline{p_1 p_k p_l p_n p_m p_s p_r \dots} = \frac{P^{2N}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{p_1 p_k p_l p_n p_m p_s p_r \dots}_{2N} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Нетрудно проверить, что при этом должны «работать» следующие вполне очевидные правила усреднения

$$\begin{aligned} \overline{p_i p_k} &= \frac{1}{3} \delta_{ik} P^2, \\ \overline{p_i p_k p_l p_n} &= \frac{P^4}{15} (\delta_{ik} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{kl}), \\ \overline{p_i p_k p_l p_n p_m p_s} &= \frac{P^6}{105} [\delta_{ik} (\delta_{ln} \delta_{ms} + \delta_{lm} \delta_{ns} + \delta_{ls} \delta_{nm}) + \delta_{il} (\delta_{kn} \delta_{ms} + \delta_{km} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{nm}) + \\ &+ \delta_{in} (\delta_{kl} \delta_{ms} + \delta_{km} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{ml}) + \delta_{im} (\delta_{kl} \delta_{ns} + \delta_{kn} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{nl}) + \delta_{is} (\delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{km} \delta_{nl})], \end{aligned} \quad (2.26)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

В результате несложных, но довольно громоздких преобразований, с учетом правила усреднения (2.26), уравнение (2.25) приводится к следующему виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \left\{ \frac{mTV\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + \frac{p^2}{3} (\dot{\mathbf{V}} - \tau_p \ddot{\mathbf{V}})^2 + \frac{p^4}{15m^2} \left[(\operatorname{div}\mathbf{V})^2 + \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right] + \right. \\ + \frac{4\tau_p^2 p^4}{15m^2} \left[(\operatorname{div}\dot{\mathbf{V}})^2 + \left(\frac{\partial \dot{V}_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial \dot{V}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{V}_k}{\partial x_i} \right] - \frac{2\tau_p p^4}{15m^2} (\dot{\mathbf{V}} \cdot \Delta \mathbf{V} + 2\dot{\mathbf{V}} \cdot \operatorname{graddiv}\mathbf{V}) - \\ - \frac{4\tau_p p^4}{15m^2} \left[\operatorname{div}\mathbf{V} \operatorname{div}\dot{\mathbf{V}} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{V}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{V}_k}{\partial x_i} \right] + \frac{2\tau_p^2 p^4}{15m^2} (\ddot{\mathbf{V}} \cdot \Delta \mathbf{V} + 2\ddot{\mathbf{V}} \cdot \operatorname{graddiv}\mathbf{V}) + \\ \left. + \frac{4\tau_p^2 p^6}{105m^4} \left(\Delta \mathbf{V} \cdot \operatorname{graddiv}\mathbf{V} + (\operatorname{graddiv}\mathbf{V})^2 + \frac{\partial^2 V_n}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 V_k}{\partial x_i \partial x_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{4} (\Delta \mathbf{V})^2 \right) \right\} p^2 dp d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $d\Omega = dx dy dz$ – элемент объема жидкости.

Для преобразования уравнения (2.27) удобно воспользоваться методом интегрирования по частям. Это интегрирование осуществляется с помощью теоремы Гаусса. Главная идея, которая здесь преследуется, заключается в том, чтобы выделить в явном виде скорость \mathbf{V} .

В качестве примера имеем

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 d\Omega = \int_{\Sigma_{\Omega}} \operatorname{div} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) - \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} d\Omega.$$

Считая, что интеграл по поверхности исчезает благодаря граничному условию $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_{\Omega}} = 0$, где \mathbf{n} – нормаль к поверхности, получаем из (2.27)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \left\{ \frac{m T \mathbf{V} \dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + \frac{p^2}{3} (\dot{\mathbf{V}} - \tau_p \ddot{\mathbf{V}})^2 - \frac{p^4}{15 m^2} \mathbf{V} \cdot (\Delta \mathbf{V} + 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}) - \right. \\ & - \frac{4 \tau_p^2 p^4}{15 m^2} \dot{\mathbf{V}} \cdot (\Delta \dot{\mathbf{V}} + 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{V}}) + \frac{2 \tau_p p^4}{15 m^2} \mathbf{V} \cdot (\Delta \dot{\mathbf{V}} + 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{V}}) + \frac{2 \tau_p^2 p^4}{15 m^2} \mathbf{V} \cdot (\Delta \ddot{\mathbf{V}} + 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \ddot{\mathbf{V}}) + \\ & \left. + \frac{4 \tau_p^2 p^6}{35 m^4} \mathbf{V} \cdot \left(\Delta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{1}{4} \Delta^2 \mathbf{V} \right) \right\} p^2 dp d\Omega = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Второе и четвертое слагаемые в квадратных скобках также легко преобразовать с помощью интегрирования по частям. Однако, эта операция должна быть сделана уже не по координатам, а по времени, несмотря на тот факт, что явное интегрирование по t в (2.28) отсутствует. Этот прием становится вполне понятен, если вспомнить, что любое уравнение движения получается с помощью применения классического действия Лагранжа [178], которое включает в себя интегрирование по времени.

Действительно, для второго слагаемого, например, имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{V}} - \tau_p \ddot{\mathbf{V}})^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{V}}^2 - 2\dot{\mathbf{V}} \cdot \ddot{\mathbf{V}} \tau_p + \ddot{\mathbf{V}}^2 \tau_p^2) dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{V}}^2 dt - 2\tau_p \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{V}} \cdot \ddot{\mathbf{V}} dt + \tau_p^2 \int_{t_0}^{t_1} \ddot{\mathbf{V}}^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}}) dt - \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt - 2\tau_p \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt + 2\tau_p \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt + \\
& + \tau_p^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{V}} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt - \tau_p^2 \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{V}} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt.
\end{aligned}$$

Таким образом, интегралы от полных производных по времени приводят просто к несущественным константам, которые можно не учитывать, и в результате находим

$$\int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{V}} - \tau_p \ddot{\mathbf{V}})^2 dt = - \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt + 2\tau_p \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt - \tau_p^2 \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{V}} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt.$$

Последний интеграл здесь можно также проинтегрировать еще раз по частям и в результате получим

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{V}} - \tau_p \ddot{\mathbf{V}})^2 dt = - \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt + 2\tau_p \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt - \tau_p^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{V}}) dt + \tau_p^2 \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{(4)}) dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{V} \cdot (-\ddot{\mathbf{V}} + 2\tau_p \ddot{\mathbf{V}} + \tau_p^2 \mathbf{V}^{(4)}) dt.
\end{aligned}$$

Точно по той же схеме преобразуются и остальные слагаемые в (2.28). Имеем в результате, вынося общий множитель \mathbf{V} за скобку

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Z} \int \frac{\tau_p \bar{f}}{T} \mathbf{V} \cdot \left\{ \frac{mT\dot{\mathbf{V}}}{\tau_p} + \frac{p^2}{3} (-\ddot{\mathbf{V}} + 2\tau_p \ddot{\mathbf{V}} + \tau_p^2 \mathbf{V}^{(4)}) - \frac{p^4}{15m^2} (\Delta \mathbf{V} + 2graddiv\mathbf{V}) + \right. \\
& \left. + \frac{2\tau_p p^4}{15m^2} (\Delta \dot{\mathbf{V}} + 2graddiv\dot{\mathbf{V}}) + \frac{2\tau_p^2 p^4}{5m^2} (\Delta \ddot{\mathbf{V}} + 2graddiv\ddot{\mathbf{V}}) + \frac{4\tau_p^2 p^6}{35m^4} \left(\Delta graddiv\mathbf{V} + \frac{1}{4} \Delta^2 \mathbf{V} \right) \right\} p^2 dp d\Omega = 0.
\end{aligned}$$

Этот интеграл может быть равен нулю только если равно нулю выражение в фигурных скобках. Как итог, мы приходим к обобщенному уравнению Навье – Стокса

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} + \frac{\overline{p^2 \tau_p}}{3mT} (-\ddot{\mathbf{V}} + 2\tau_p \ddot{\mathbf{V}} + \tau_p^2 \mathbf{V}^{(4)}) - \frac{\overline{p^4 \tau_p}}{15m^3 T} (\Delta \mathbf{V} + 2g \text{grad} \text{div} \mathbf{V}) + \\ + \frac{2\overline{\tau_p^2 p^4}}{15m^3 T} (\Delta \dot{\mathbf{V}} + 2g \text{grad} \text{div} \dot{\mathbf{V}}) + \frac{2\overline{\tau_p^3 p^4}}{5m^3 T} (\Delta \ddot{\mathbf{V}} + 2g \text{grad} \text{div} \ddot{\mathbf{V}}) + \frac{4\overline{\tau_p^3 p^6}}{35m^5 T} \left(\Delta g \text{grad} \text{div} \mathbf{V} + \frac{1}{4} \Delta^2 \mathbf{V} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Черта сверху в уравнении (2.29) означает усреднение по импульсам молекул.

Считая жидкость несжимаемой, то есть, полагая $\text{div} \mathbf{V} = 0$, а также пренебрегая высшими производными по времени, что вполне позволительно в рамках выполнения условия $\delta t \gg \bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ – среднее время релаксации, отсюда немедленно следует искомое уравнение

$$\dot{\mathbf{V}} = \nu \Delta \mathbf{V} - \nu^2 \tau_1 \Delta^2 \mathbf{V}, \quad (2.30)$$

При этом кинематическая вязкость ν и время релаксации τ^* определяются с помощью следующих несобственных интегралов

$$\begin{aligned} \nu = \frac{\overline{p^4 \tau_p}}{15m^3 T} = \frac{1}{15m^3 T Z_0} \int_0^\infty \tau_p p^6 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp, \\ \nu^2 \tau_1 = \frac{\overline{\tau_p^3 p^6}}{35m^5 T} = \frac{1}{35m^5 T Z_0} \int_0^\infty \tau_p^3 p^8 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp, \end{aligned} \quad (2.31)$$

Нормировочный множитель, стоящий в знаменателе, определяется как

$$Z_0 = \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp. \quad (2.32)$$

Добавив в уравнение (2.30) член с градиентом давления, окончательно находим

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V} - \nu^2 \tau_1 \Delta^2 \mathbf{V}. \quad (2.33)$$

С помощью найденного уравнения (2.33) мы можем теперь вычислить интересующие нас поправки к силе Стокса в виде некоторого ряда по числу Кнудсена.

2.2 Сила Стокса, как функция от числа Кнудсена

Чтобы решить поставленную задачу, мы поступим также, как и при решении классической задачи Стокса, а именно будем считать гидродинамический поток стационарным, движущимся с постоянной скоростью \mathbf{u} , который ламинарно обтекает неподвижный шар радиуса R .

При этом уравнение (2.33) существенно упрощается, и принимает значительно более простой вид

$$\nabla P = \eta(\Delta \mathbf{V} - \nu \tau_1 \Delta^2 \mathbf{V}), \quad (2.34)$$

По традиции (см. [1]) будем искать скорость в единственно возможном виде (доказательство этого утверждения подробно приведено в работе [41])

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} + \text{rotrot}(f(r)\mathbf{u}). \quad (2.35)$$

где $f(r)$ – искомая функция.

Если взять операцию rot от обеих частей уравнения (2.34), получим с учетом (2.35)

$$(1 - \nu \tau_1 \Delta) \Delta^2 [\nabla f \times \mathbf{u}] = 0$$

Это уравнение автоматически сводится к такому

$$(1 - \nu \tau_1 \Delta) \Delta^2 f = 0. \quad (2.36)$$

Если ввести сокращенное обозначение

$$\psi = (1 - \nu \tau_1 \Delta) f, \quad (2.37)$$

то мы немедленно получаем отсюда

$$\Delta^2 \psi = 0. \quad (2.38)$$

Для его радиального решения имеем

$$\psi = ar + \frac{b}{r}, \quad (2.39)$$

где константы интегрирования a и b следует найти.

Если подставить теперь решение (2.39) в уравнение (2.37), то мы придем к уравнению

$$(1 - \nu\tau_1\Delta)f = ar + \frac{b}{r}. \quad (2.40)$$

В силу радиальной зависимости функции f , в операторе Лапласа следует оставить только радиальную часть, то есть записать его в виде

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}.$$

В результате мы приходим к обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f'' + \frac{2}{r} f' - \frac{f}{\bar{l}^2} = -\frac{1}{\bar{l}^2} \left(ar + \frac{b}{r} \right), \quad (2.41)$$

где штрихи указывают на дифференцирование по радиальной координате r .

Здесь введен новый параметр $\bar{l} = \sqrt{\nu\tau^*}$, который по физическому смыслу и по размерности представляет собой некоторую эффективную длину свободного пробега молекул жидкости.

Решим вначале однородное уравнение, положив правую часть в уравнении (2.41) равной нулю.

Тогда

$$\bar{f}'' + \frac{2}{r} \bar{f}' - \frac{\bar{f}}{\bar{l}^2} = 0.$$

Это уравнение удобно решить с помощью перехода к новой функции с помощью простой подстановки

$$\bar{f} = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad (2.42)$$

где для удобства решения введен безразмерный аргумент по правилу

$$x = \frac{r}{l}. \quad (2.43)$$

В результате находим

$$x^2 y'' + xy' - \left(\frac{1}{4} + x^2 \right) y = 0. \quad (2.44)$$

Это уравнение представляет собой не что иное, как уравнение Бесселя от мнимого аргумента. Легко проверить, что решение этого уравнения можно представить в виде следующей суперпозиции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} (C_1 e^{-x} + C_2 e^x), \quad (2.45)$$

где $C_{1,2}$ – константы интегрирования.

Следовательно, согласно (2.42) имеем для интересующей нас функции

$$\bar{f} = \frac{1}{x} (C_1 e^{-x} + C_2 e^x). \quad (2.46)$$

Чтобы найти решение неоднородного уравнения, будем считать теперь константы $C_{1,2}$ функциями от x , и с помощью метода вариации постоянных, приходим к следующей системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1' \frac{e^{-x}}{x} + C_2' \frac{e^x}{x} = 0, \\ C_1' \left(\frac{e^{-x}}{x} \right)' + C_2' \left(\frac{e^x}{x} \right)' = - \left(\frac{a}{l} x + \frac{b}{xl^2} \right). \end{cases}$$

Немного громоздкие преобразования позволяют нам прийти к следующему решению

$$f = \frac{1}{x} (C_1 e^{-x} + C_2 e^x) + Ax + \frac{B + 2A}{x}, \quad (2.47)$$

где новые постоянные были введены по правилам

$$A = a\bar{l}, \quad B = \frac{b}{\bar{l}}. \quad (2.48)$$

Совершенно понятно, что физическим смыслом может обладать лишь решение, которое приводит к выполнению условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} = \mathbf{u}.$$

Это позволяет считать, что $C_2 = 0$.

Поэтому после перехода к обычным размерностям имеем из (2.47)

$$f(r) = \frac{C_1}{r} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} + ar + \frac{b + 2a\bar{l}^2}{r}. \quad (2.49)$$

Далее, в соответствии с определением скорости (2.35), после подстановки в нее решения (2.49), в результате несложного дифференцирования, получаем

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} \left(1 + \frac{f'}{r} - \frac{2a}{r} - \frac{C_1}{\bar{l}^2} \frac{e^{-\frac{r}{\bar{l}}}}{r} \right) + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{r} \left(\frac{f'}{r} \right)'. \quad (2.50)$$

Поскольку на поверхности шара должно выполняться условие «залипания» скорости, то есть

$$\mathbf{V}|_{\Sigma_V} = 0,$$

то в силу независимости обоих слагаемых в решении (2.50) мы приходим к двум следующим уравнениям

$$\begin{cases} 1 + \frac{f'(R)}{R} - \frac{2a}{R} - \frac{C_1}{\bar{l}^2} \frac{e^{-\frac{R}{\bar{l}}}}{R} = 0, \\ \left(\frac{f'}{r} \right)' \Big|_{r=R} = 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

Согласно решению (2.49), простое дифференцирование функции $f(r)$ позволяет нам переписать систему (2.51) таким образом

$$\begin{cases} \frac{a}{R} + \frac{b+2a\bar{l}^2}{R^3} + \frac{C_1}{R^3} e^{-\frac{R}{\bar{l}}} \left(1 + \frac{R}{\bar{l}} + \frac{R^2}{\bar{l}^2}\right) = 0, \\ \frac{a}{3R} - \frac{b+2a\bar{l}^2}{R^3} - \frac{C_1}{R^3} e^{-\frac{R}{\bar{l}}} \left(1 + \frac{R}{\bar{l}} + \frac{R^2}{3\bar{l}^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим в результате интересующие нас решения

$$\begin{cases} a = \frac{3R}{4\left(1 - \frac{6\bar{l}^2}{R^2}\right)} + \frac{3C_1 e^{-\frac{R}{\bar{l}}}}{R^3\left(1 - \frac{6\bar{l}^2}{R^2}\right)} \left(1 + \frac{R}{\bar{l}} + \frac{R^2}{\bar{l}^2}\right), \\ b = \frac{R^3}{4} - C_1 e^{-\frac{R}{\bar{l}}} \left(1 + \frac{R}{\bar{l}} + \frac{R^2}{2\bar{l}^2}\right) - 2a\bar{l}^2. \end{cases}$$

Что касается константы C_1 , то из соображений размерности и, исходя из условия того, что в предельном случае константы a и b должны совпадать с решением Стокса, согласно которому $a = \frac{3R}{4}$, а $b = \frac{R^3}{4}$, то единственное возможное ее значение может быть только $C_1 = \bar{l}^3$.

Поэтому окончательно получаем

$$\begin{cases} a = \frac{3R}{4\left(1 - \frac{6\bar{l}^2}{R^2}\right)} + \frac{3\bar{l}^3 e^{-\frac{R}{\bar{l}}}}{R^3\left(1 - \frac{6\bar{l}^2}{R^2}\right)} \left(1 + \frac{R}{\bar{l}} + \frac{R^2}{\bar{l}^2}\right), \\ b = \frac{R^3}{4} - \bar{l}^3 e^{-\frac{R}{\bar{l}}} \left(1 + \frac{R}{\bar{l}} + \frac{R^2}{2\bar{l}^2}\right) - 2a\bar{l}^2. \end{cases} \quad (2.52)$$

Если ввести здесь число Кнудсена

$$K = Kn = \frac{\bar{l}}{R},$$

то в итоге мы придем к двум следующим однопараметрическим решениям

$$\begin{cases} a = \frac{3R}{4(1-6K^2)} \left[1 + 4Ke^{-\frac{1}{K}} (K^2 + K + 1) \right], \\ b = \frac{R^3}{4} \left[1 - Ke^{-\frac{1}{K}} \left(K^2 + K + \frac{1}{2} \right) - \frac{2a}{R} K^2 \right]. \end{cases} \quad (2.53)$$

Согласно уравнению (2.34) и с учетом решения (2.49) можно также найти и распределение давления вблизи поверхности шара в виде функции координат.

Действительно, с учетом (2.53) имеем

$$\nabla P = \eta (\Delta \mathbf{V} - \nu \tau_1 \Delta^2 \mathbf{V}).$$

Но поскольку

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} + \text{gr} \text{div} (f(r)\mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f,$$

то отсюда следует, что

$$\nabla P = \eta (\Delta \text{gr} \text{div} (f(r)\mathbf{u}) - \nu \tau_1^* \Delta^2 \text{gr} \text{div} (f(r)\mathbf{u})) - \eta \mathbf{u} (1 - \nu \tau_1^* \Delta) \Delta^2 f.$$

В силу уравнения (2.36) последнее слагаемое здесь исчезает, и мы получаем

$$\nabla (P - \eta (1 - \nu \tau_1 \Delta) \Delta \text{div} (f(r)\mathbf{u})) = 0.$$

Откуда немедленно следует, что

$$P = P_0 + \eta (1 - \nu \tau_1 \Delta) \Delta \text{div} (f(r)\mathbf{u}),$$

где P_0 – давление на бесконечном удалении от шара.

Согласно уравнению (2.40) можно, следовательно, записать, что

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \eta (1 - \nu \tau_1 \Delta) \Delta \text{div} (f(r)\mathbf{u}) = P_0 + \eta \Delta \text{div} \left(\mathbf{u} \left(ar + \frac{b}{r} \right) \right) = \\ &= P_0 + \eta \text{div} \left(\mathbf{u} \Delta \left(ar + \frac{b}{r} \right) \right) = P_0 + \eta a \text{div} (\mathbf{u} \Delta r). \end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь тождеством $\Delta \frac{1}{r} = 0$.

Так как $\Delta r = \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2}{r}$, то окончательно находим

$$P = P_0 - 2\eta \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})}{r^3} a = P_0 - \frac{3\eta \bar{R}}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})}{r^3}, \quad (2.54)$$

где перенормированный радиус с учетом числа Кнудсена есть

$$\bar{R} = R \frac{\left[1 + 4Ke^{-\frac{1}{K}} (K^2 + K + 1) \right]}{(1 - 6K^2)}.$$

Найденные решения (2.50), (2.53) и (2.54) позволяют ответить на главный вопрос, поставленный вначале статьи. Напомним, что речь идет о том, как зависит сила сопротивления сферического объекта от числа Кнудсена, в том практически важном случае, когда речь заходит о наночастицах.

В соответствии с общим алгоритмом решения, намеченным Стокса и подробно приведенному в монографии [1] (см. также работу [56]), нам следует найти проекцию силы сопротивления на ось z , направленную вдоль скорости потока \mathbf{u} .

Это удобнее всего сделать с помощью тензора вязких напряжений Максвелла, который для случая несжимаемой жидкости в любых ортонормированных криволинейных координатах может быть записан в виде

$$\sigma_{ik} = \eta (V_{i,k} + V_{k,i}) - P \delta_{ik}, \quad (2.55)$$

где ковариантная производная вводится согласно определению (см. [34]):

$$V_{i,k} = \frac{\partial V_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^s V_s, \quad (2.56)$$

где Γ_{ik}^s – символ Кристоффеля второго рода.

Поскольку задача решается в сферических координатах, то удобно использовать мгновенных ортонормированный базис, выбранный в

произвольной точке на поверхности неподвижного шара. Пусть это будет базис $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$.

Разложение элемента силы по базису $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ будет

$$d\mathbf{F} = dF_r \mathbf{e}_r + dF_\theta \mathbf{e}_\theta + dF_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.57)$$

Это означает, что проекцию элемента силы (2.57) на направление движения потока следует определить с помощью скалярного произведения:

$$dF_z = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{k},$$

где \mathbf{k} – единичный вектор, направленный вдоль скорости, то есть

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{u}}{u}.$$

Следовательно, ее проекцию, согласно представлению (2.57), можно представить как

$$dF_z = dF_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k}).$$

Поскольку же

$$dF_i = \sigma'_{ik} df^k,$$

где df^i – элемент проекции площади, то полную силу сопротивления, испытываемую шаром в потоке вязкой жидкости, можно тогда найти с помощью формулы

$$F_c = \int_{\Sigma_V} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k}) \sigma'_{ik} df^k. \quad (2.58)$$

В выражении (2.58) следует выбрать лишь одну проекцию элемента площади – радиальную, то есть df^r , которая равна ковариантной df_r (в ортонормированном базисе ковариантные и контравариантные компоненты векторов и тензоров тождественно совпадают (см., к примеру, монографию [67], а также работы [45] – [47])).

В этой связи формула (2.58) существенно упрощается, и мы получаем из нее

$$F_c = \int_{\Sigma_V} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k}) \sigma'_{ir} df_r = \int_{\Sigma_V} [(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{k}) \sigma'_{rr} + (\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{k}) \sigma'_{\theta r}] df_r = 2\pi R^2 \int_0^\pi (\cos \theta \sigma'_{rr} - \sin \theta \sigma'_{\theta r}) \sin \theta d\theta, \quad (2.59)$$

где было автоматически учтено, что подынтегральная функция не зависит от полярного угла φ .

В соответствии с определениями (2.55) и (2.56), имеем

$$\sigma_{rr} = 2\eta V_{r,r} - P, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \eta (V_{r,\theta} + V_{\theta,r}). \quad (2.60)$$

Согласно (2.56) ковариантные производные можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} V_{r,r} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} - \Gamma_{rr}^s V_s = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \\ V_{r,\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \Gamma_{r\theta}^s V_s = \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \Gamma_{r\theta}^\theta V_\theta, \\ V_{\theta,r} &= \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \Gamma_{r\theta}^s V_s = \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \Gamma_{r\theta}^\theta V_\theta. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Поскольку $\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$ (подробности см. в работах [61] – [63], в которых продемонстрирован несложный алгоритм и метод вычисления любых тензоров и символов Кристоффеля, автоматически приводящий к правильным размерностям, как геометрических, так и физических величин), то с помощью (2.59) – (2.61) найдем

$$\begin{aligned} F_c &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \left(\cos \theta \left(2\eta \frac{\partial V_r}{\partial r} - P \right) \Big|_{r=R} - \sin \theta \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{2V_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R} \right) \sin \theta d\theta = \\ &= -2\pi R^2 P_0 \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta + \frac{3\pi}{R^3} \eta \bar{R} \int_0^\pi (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) \cos \theta \sin \theta d\theta + \\ &+ 2\pi \eta R^2 \int_0^\pi \left(2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{2V_\theta}{r} \right) \sin \theta \right) \Big|_{r=R} \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi u \eta \bar{R} + 2\pi \eta R^2 \int_0^\pi \left(2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{2V_\theta}{r} \right) \sin \theta \right) \Big|_{r=R} \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Нам остается вычислить лишь компоненты скорости V_r, V_θ в базисе $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$. Возвращаясь к решениям (2.49) и (2.50), находим

$$\begin{aligned}
V_r &= u \cos \theta \left[\left(1 + \frac{f'}{r} - \frac{2a}{r} - \frac{C_1 e^{-\frac{r}{\bar{l}}}}{\bar{l}^2 r} \right) + r \left(\frac{f'}{r} \right)' \right] = \\
&= u \cos \theta \left[\left(1 - \frac{C_1}{r^3} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - \frac{C_1}{r^2 \bar{l}} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - \frac{b+2a\bar{l}^2}{r^3} - \frac{a}{r} - \frac{C_1}{\bar{l}^2} \frac{e^{-\frac{r}{\bar{l}}}}{r} \right) + \frac{3C_1}{r^3} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} + \frac{3C_1}{r^2 \bar{l}} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} + \frac{C_1}{r \bar{l}^2} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - \frac{a}{r} + 3 \frac{b+2a\bar{l}^2}{r^3} \right] = \\
&= 2u \cos \theta \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{l}^3}{r^3} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} + \frac{\bar{l}^2}{r^2} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} + \frac{b+2a\bar{l}^2}{r^3} - \frac{a}{r} \right), \\
V_\theta &= -u \sin \theta \left(1 + \frac{f'}{r} - \frac{2a}{r} - \frac{C_1}{\bar{l}^2} \frac{e^{-\frac{r}{\bar{l}}}}{r} \right) = -u \sin \theta \left(1 - \frac{C_1}{r^3} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - \frac{C_1}{r^2 \bar{l}} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - \frac{b+2a\bar{l}^2}{r^3} - \frac{a}{r} - \frac{C_1}{\bar{l}^2} \frac{e^{-\frac{r}{\bar{l}}}}{r} \right) = \\
&= -u \sin \theta \left[1 - \left(\frac{\bar{l}^3}{r^3} + \frac{\bar{l}^2}{r^2} + \frac{\bar{l}}{r} \right) e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - \frac{b+2a\bar{l}^2}{r^3} - \frac{a}{r} \right],
\end{aligned} \tag{2.63}$$

где константы a, b определены уже известными нам решениями (2.53) и учтено, что $C_1 = \bar{l}^3$.

Зная решение (2.63), не составит большого труда и вычисление интеграла, входящего в формулу (2.62).

Действительно, простое дифференцирование компонент скорости, согласно их определениям (2.63), дает

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_r}{\partial r} &= 2u \cos \theta \left(-\frac{3\bar{l}^3}{r^4} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - \frac{\bar{l}^2}{r^3} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - \frac{2\bar{l}^2}{r^3} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - \frac{\bar{l}}{r^2} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} - 3 \frac{b+2a\bar{l}^2}{r^4} + \frac{a}{r^2} \right) \\
\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} &= -\frac{2u \sin \theta}{r} \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{l}^3}{r^3} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} + \frac{\bar{l}^2}{r^2} e^{-\frac{r}{\bar{l}}} + \frac{b+2a\bar{l}^2}{r^3} - \frac{a}{r} \right) \\
\frac{\partial V_\theta}{\partial r} &= -u \sin \theta \left[\left(\frac{3\bar{l}^3}{r^4} + \frac{2\bar{l}^2}{r^3} + \frac{\bar{l}}{r^2} \right) e^{-\frac{r}{\bar{l}}} + \left(\frac{\bar{l}^2}{r^3} + \frac{\bar{l}}{r^2} + \frac{1}{r} \right) e^{-\frac{r}{\bar{l}}} + 3 \frac{b+2a\bar{l}^2}{r^4} + \frac{a}{r^2} \right]
\end{aligned}$$

В результате выражение (2.62) приводится к следующему компактному виду

$$F_c = 2\pi\eta u \bar{R} + 2\pi\eta R^2 \left(2J_1(K) \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta - J_2(K) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right), \quad (2.64)$$

где функции от числа Кнудсена есть

$$\begin{aligned} J_1(K) &= \frac{1}{R} \left[\frac{a}{R} (1 - 6K^2) - \frac{3b}{R^3} - K (1 + 3K + 3K^2) e^{-\frac{1}{K}} \right], \\ J_2(K) &= \frac{1}{R} \left[1 + \frac{a}{R} (1 - 14K^2) - \frac{7b}{R^3} - (1 + 4K + 6K^2 + 6K^3) e^{-\frac{1}{K}} \right]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Для интегралов по угловой переменной, фигурирующих в формуле (2.64), имеем

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \\ S_2 &= \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Поэтому формула (2.64) приводит нас к следующему промежуточному ответу

$$F_c = 2\pi u \bar{R} \eta \left[1 + \frac{4}{3} \psi(K) \right], \quad (2.66)$$

где новая функция от числа Кнудсена

$$\psi(K) = \frac{3a}{R} \left(1 + \frac{2K^2}{3} \right) - 1 + \frac{b}{R^3} + (1 + 2K) e^{-\frac{1}{K}}. \quad (2.67)$$

Если теперь подставить сюда явные определения параметров согласно (2.53), а именно

$$a = \frac{3R}{4(1 - 6K^2)} \left[1 + 4K e^{-\frac{1}{K}} (K^2 + K + 1) \right], \quad b = \frac{R^3}{4} \left[1 - K e^{-\frac{1}{K}} \left(K^2 + K + \frac{1}{2} \right) - \frac{2a}{R} K^2 \right],$$

и учесть определение «радиуса» \bar{R} из (2.54), окончательно получим искомую формулу для силы Стокса с учетом поправок по числу Кнудсена:

$$F_c = 6\pi u \eta R f(K), \quad (2.68)$$

где новая функция определена следующим образом:

$$f(K) = \frac{\left[1 + 4Ke^{-\frac{1}{K}}(K^2 + K + 1)\right]}{(1 - 6K^2)} \times \left[\frac{(1 + 0.5K^2)}{(1 - 6K^2)} \left[1 + 4Ke^{-\frac{1}{K}}(K^2 + K + 1)\right] + \frac{e^{-\frac{1}{K}}}{9} \left(4 - \frac{15}{2}K - K^2 - K^3\right) \right]. \quad (2.69)$$

2.3. Анализ полученной зависимости и ее графическое представление

Если переписать формулу (2.68) в относительном по силе Стокса виде, то есть, как

$$\frac{F_c}{6\pi\eta R} = f(K), \quad (2.70)$$

ее не трудно проанализировать графически с помощью программы Maple – 17.

В результате зависимость $f(K)$, которая фактически соответствует зависимости силы сопротивления от числа Кнудсена, проиллюстрирована на рис. 2, из которого отчетливо прослеживается физически очевидная закономерность, а именно с уменьшением линейного размера тела сила сопротивления для него резко возрастает.

Этим фактором нельзя пренебрегать, когда речь идет о малых частицах из нано – диапазона.

Как видим из решения (2.69), оно справедливо только до значений $K < \frac{1}{\sqrt{6}}$. По большому счету это ограничение хорошо коррелирует с условием $\bar{l} \leq R$.

В обратном предельном случае, то есть при $\bar{l} > R$, нано – частица фактически представляет собой молекулу, но только несколько большего размера,

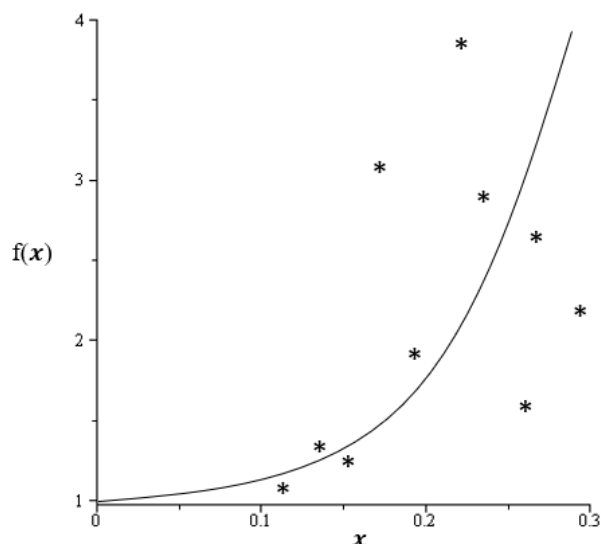


Рис. 2. Графическая интерпретация зависимости (2.69). Видно, что с уменьшением размера частиц сила сопротивления довольно резко возрастает. «Звездочки» - эксперимент.

которая также может совершать броуновские блуждания в пространстве, сталкиваясь с обычными молекулами.

2.4 Приложение к мезоскопическим системам

Общие формулы (2.68) и (2.69) отвечают на поставленный вопрос о зависимости силы Стокса от соотношения между длиной свободного пробега молекул жидкости (или газа) и линейным размером тела, представляющим в нашем случае шар.

Как это было видно из предыдущего текста, основной идеей расчета был учет в уравнении Навье – Стокса дополнительных слагаемых по оператору Лапласа. Этот шаг был «оборван» на бигармоническом операторе Δ^2 , хотя его можно было бы продолжить и дальше, учтя члены $\Delta^3, \Delta^4, \dots$.

При этом, согласно приближенному уравнению (2.30), оно должно быть переписано в виде

$$\dot{\mathbf{V}} = \nu \Delta \mathbf{V} - \nu^2 \tau_1 \Delta^2 \mathbf{V} + \nu^3 \tau_2 \Delta^3 \mathbf{V} - \nu^4 \tau_3 \Delta^4 \mathbf{V} + \dots, \quad (2.71)$$

где τ_1, τ_2, \dots – некоторые эффективные времена «релаксации», определяемые по правилам (2.31).

Оборвав уравнение (2.71) на бигармоническом слагаемом, мы, казалось бы, в каком – то смысле «обокрали» себя в плане пренебрежения дополнительными по числу Кнудсена слагаемыми.

Однако, если сравнить все слагаемые в правой части уравнения (2.71), то мы имеем право привести следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 v\Delta\mathbf{V} &\sim -\frac{v}{L^2}\mathbf{V}, \\
 v^2\tau_1\Delta^2\mathbf{V} &\sim \frac{v^2\tau_1}{L^4}\mathbf{V}, \\
 v^3\tau_2\Delta^3\mathbf{V} &\sim -\frac{v^3\tau_2}{L^6}\mathbf{V}, \\
 &\dots \\
 v^n\tau_{n-2}\Delta^n\mathbf{V} &\sim (-1)^n \frac{v^n\tau_{n-2}}{L^{2n}}\mathbf{V}.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

То есть соотношение между членами правой части уравнения (2.71), мы имеем право написать в виде следующего ряда

$$\dot{\mathbf{V}} \approx \left(-\frac{v}{L^2} + \frac{v^2\tau_1}{L^4} - \frac{v^3\tau_2}{L^6} + \dots + (-1)^n \frac{v^n\tau_{n-2}}{L^{2n}} + \dots \right) \mathbf{V}. \tag{2.73}$$

Поскольку по порядку величины времена «релаксации» $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ сопоставимы между собой, уравнение (2.73) можно переписать следующим образом, используя свойства геометрической прогрессии

$$\dot{\mathbf{V}} \approx -\frac{v}{L^2} \left(1 - \frac{v\tau_1}{L^2} + \frac{v^2\tau_2}{L^4} - \dots + (-1)^n \frac{v^{n-1}\tau_{n-2}}{L^{2n-2}} + \dots \right) \mathbf{V} \sim -\frac{v}{L^2} \frac{\mathbf{V}}{1 + \frac{v\bar{\tau}}{L^2}}, \tag{2.74}$$

где $\bar{\tau}$ – некоторое среднее время релаксации.

Фактически результат (2.68) «оборван» на втором слагаемом правой части уравнения (2.74), который соответствует приближению

$$\frac{l^2}{L^2} = Kn^2 < 1. \tag{2.75}$$

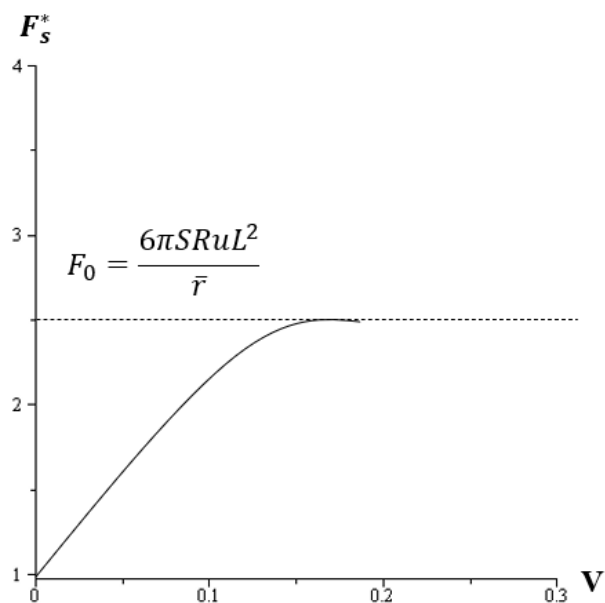


Рис. 3. Зависимость силы сопротивления от кинематической вязкости континуума. Очевидно, что с увеличением вязкости сила сопротивления должна выходить на «насыщение»

Если бы мы учли последующие поправки по числу Кнудсена, то они были бы порядка Kn^{2n} , что для целых значений $n > 1$ означает его малость, то есть $Kn^{2n} \ll 1$.

Именно поэтому приведенное решение (2.68), (2.69) может считаться почти точным и применительно к наночастицам его вполне можно использовать в качестве основного расчетного выражения, ограничившись в уравнении Навье – Стокса лишь бигармоническим по оператору Лапласа слагаемым.

Поэтому, когда речь заходит об исследовании движения наночастиц в вязком континууме, силу сопротивления, испытываемую ими, можно вычислять, используя решение (2.68) и притом, согласно оценке (2.74), с весьма хорошей точностью.

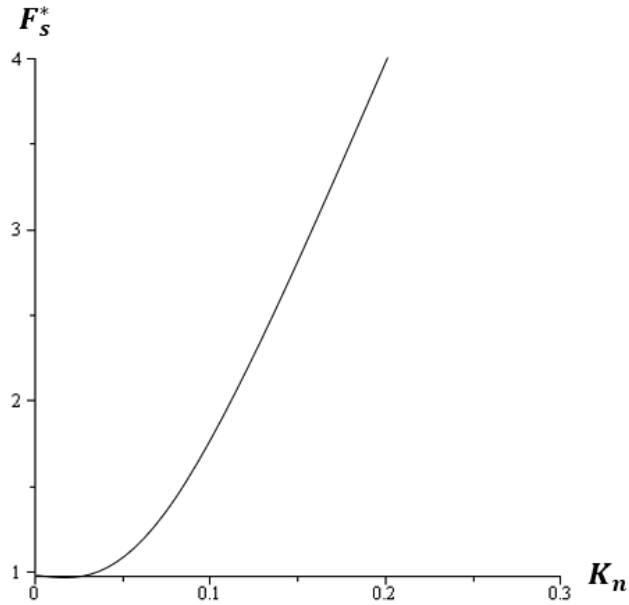


Рис. 4. Зависимость силы сопротивления от числа Кнудсена. Как и следовало ожидать, рисунок 4 качественно не отличается от рисунка 1 (по оси абсцисс мы ввели обозначение числа Кнудсена не как K , а как Kn)

При этом, мы можем, согласно полученной оценке (2.74), представить уравнение Навье – Стокса в виде следующего приближенного уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu^* \Delta \mathbf{V}, \quad (2.76)$$

где с учетом ряда геометрической прогрессии эффективная кинематическая вязкость определена, как

$$\nu^* = \frac{\nu}{1 + \frac{\nu \bar{v}}{L^2}}. \quad (2.77)$$

По большому счету, формула (2.77) позволяет нам представить силу Стокса и в виде следующей формулы

$$F_s^* = 6\pi\rho\nu^*Ru = \frac{6\pi\eta Ru}{1 + \frac{\nu \bar{v}}{L^2}}. \quad (2.78)$$

Зависимость (2.78) в виде функции от кинематической вязкости и числа Кнудсена проиллюстрирована на рис. 3, 4.

2.5. Численное решение уравнения Навье – Стокса в конечно – разностном виде с учетом бигармонического слагаемого

Этот раздел несколько пересекается с предыдущим, но мы решили посвятить его отдельному изучению уравнения Навье – Стокса, которое можно свести к конечно – разностному, введя параметр масштаба длины L . Физическая суть этого параметра вполне прозрачна. Дело в том, что когда речь идет о ламинарном течении, то масштаб характерных изменений скорости натекающего на шар потока должен быть порядка $2R$, то есть $L \geq 2R$. В том случае, если мы рассматриваем зону турбулентности протяженностью l , то масштаб характерных изменений параметров должен быть сравним тогда с размером зоны турбулентности.

Но в обоих случаях в зависимости от масштаба изменения параметров мы можем переписать уравнение Навье – Стокса в конечно – разностном виде. Это мы уже делали выше, но проделаем и сейчас. Действительно, согласно (2.72) в случае одномерного движения

$$\nu \Delta V \sim -\frac{\nu}{L^2} V, \quad \nu^2 \tau_1 \Delta^2 V \sim \frac{\nu^2 \tau_1}{L^4} V. \quad (2.79)$$

Поэтому уравнение (2.33) преобразуется в такое

$$\dot{V} - \frac{V^2}{L} = \frac{P - P_0}{\rho L} - \frac{\nu V}{L^2} - \frac{\nu^2 \tau_1 V}{L^4}. \quad (2.80)$$

Если ввести скорость

$$v_0 = \sqrt{\frac{P_0 - P}{\rho}}, \quad (2.81)$$

то уравнение (2.80) приводится к виду

$$\dot{V} = \frac{V^2 - V_0^2}{L} - \frac{\nu}{L^2} \left(1 + \frac{\nu \tau_1}{L^2} \right) V. \quad (2.82)$$

Если теперь ввести безразмерные переменные

$$y = \frac{V}{V_0}, \quad \tau = \frac{V_0 t}{L} \quad (2.83)$$

и параметр

$$\mu = \frac{\beta}{\text{Re}}, \quad (2.84)$$

где число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{V_0 L}{\nu}, \quad (2.85)$$

а коэффициент

$$\beta = 1 + \frac{\nu \tau_1}{L^2}, \quad (2.86)$$

уравнение (2.82) приводится к такому виду

$$y' = y^2 - \mu y - 1. \quad (2.87)$$

Его решение можно найти непосредственно, поскольку это простое уравнение с разделяющимися переменными с параметром μ .

В самом деле, задав начальное условие

$$y(0) = 0, \quad (2.88)$$

получаем из (2.87)

$$\tau = \int_0^y \frac{dy}{y^2 - \mu y - 1} = \frac{1}{y_1 - y_2} \left(\ln \left| \frac{y - y_1}{y - y_2} \right| - \ln \frac{y_1}{y_2} \right), \quad (2.89)$$

где

$$y_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1}. \quad (2.90)$$

Откуда с учетом (2.90) имеем

$$y(\tau) = \frac{y_1 y_2 (1 - e^{\tau\sqrt{\mu^2+4}})}{y_2 - y_1 e^{\tau\sqrt{\mu^2+4}}} = \frac{1 - e^{\tau\sqrt{\mu^2+4}}}{\frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1} - \left(\frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1}\right) e^{\tau\sqrt{\mu^2+4}}} =$$

$$= \frac{e^{\tau\sqrt{\mu^2+4}} - 1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1} (1 + e^{\tau\sqrt{\mu^2+4}}) - \frac{\mu}{2} (e^{\tau\sqrt{\mu^2+4}} - 1)}.$$

Или окончательно

$$y(\tau, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1} \operatorname{cth} \left(\tau \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + 1} \right) - \frac{\mu}{2}}. \quad (2.91)$$

Зависимость (2.91) иллюстрируют рисунки 5 – 7, на которых отчетливо прослеживается тенденция к уменьшению функции $y(\tau, \mu)$ от значений параметра μ .

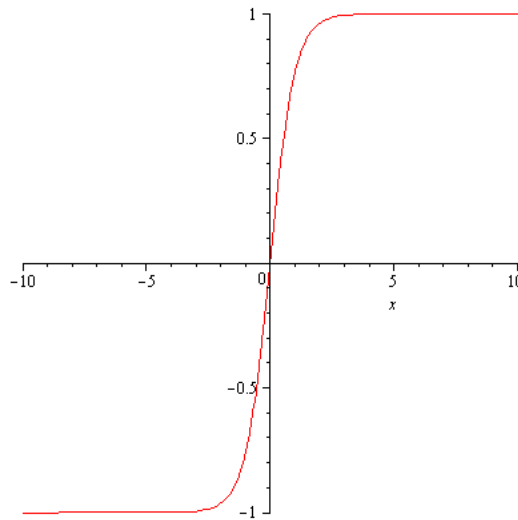


Рис.5. $\mu = 0$

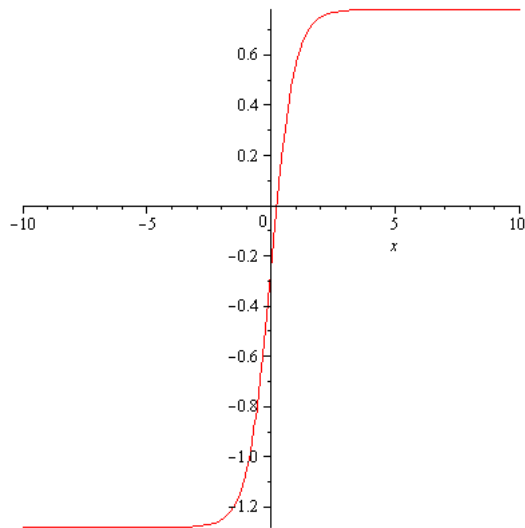


Рис.6. $\mu = 0,5$

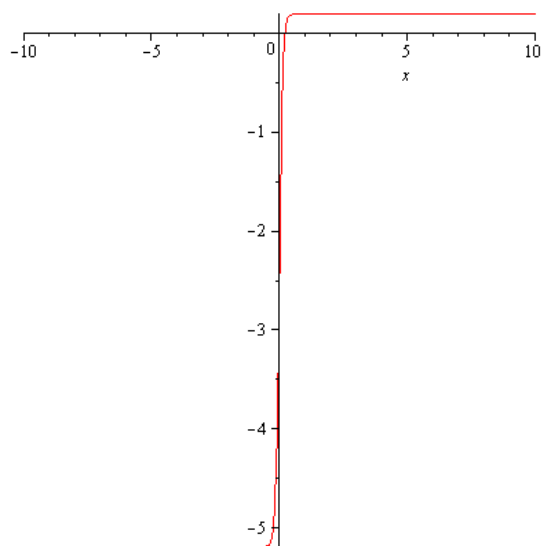


Рис.7. $\mu = 5$

Согласно определению (2.84), большие числа Рейнольдса соответствуют малым значениям μ , а малые числа Рейнольдса – большим значениям μ . Поскольку y представляет собой безразмерную скорость, то ее поведение существенно зависит от масштабов неоднородностей L .

В самом деле, с учетом (2.84) – (2.86) имеем

$$\mu(L) = \frac{v}{V_0 L} \left(1 + \frac{v\tau_1}{L^2} \right). \quad (2.92)$$

Поэтому решение (2.91) можно записать, как

$$y(\tau, a, b) = \frac{1}{\sqrt{a^2(1+b)^2 + 1} \operatorname{cth}\left(\tau \sqrt{a^2(1+b)^2 + 1}\right) - a(1+b)}, \quad (2.93)$$

где параметры

$$a = \frac{v}{2V_0 L}, \quad b = \frac{v\tau_1}{L^2}$$

Зависимость y от параметров a, b показана на рисунках 8 – 11. На них схематически изображены случаи, когда неоднородности малы и велики.

Если неоднородность мала, что формально можно представить в виде неравенства $L \ll \frac{v}{V_0}$, из (2.93) следует, что скорость должна будет экспоненциально быстро уменьшаться до нуля.

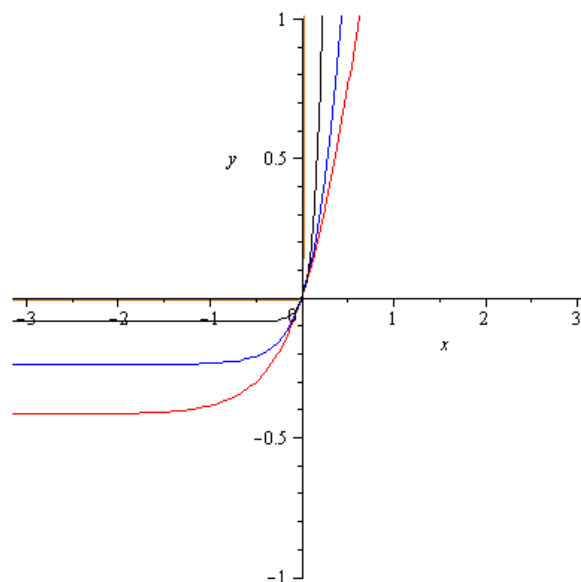


Рис.8. Зависимость (2.93). Здесь параметры такие: $a=1, b=0, b=1, b=5, b=100$.

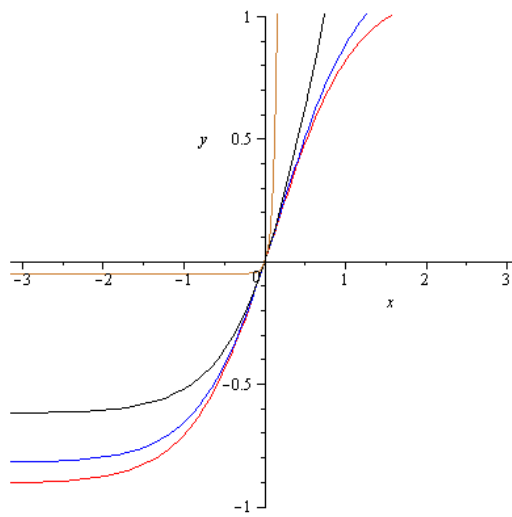


Рис.9. Зависимость (2.93) при $a=0.1$, $b=0$, $b=1$, $b=5$, $b=100$.

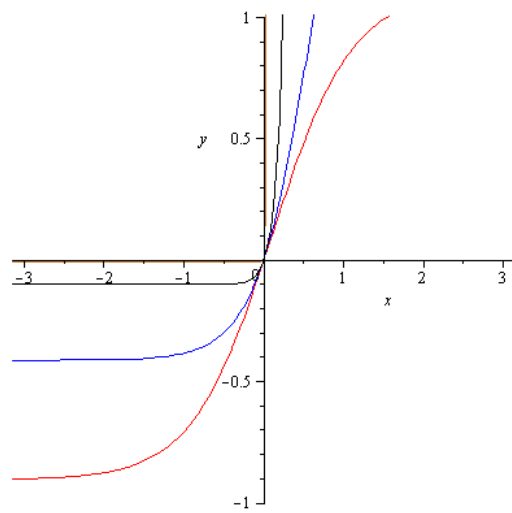


Рис. 10. Зависимость (2.93) при $b=0.1$, $a=0.1$, $a=1$, $a=5$, $a=100$.

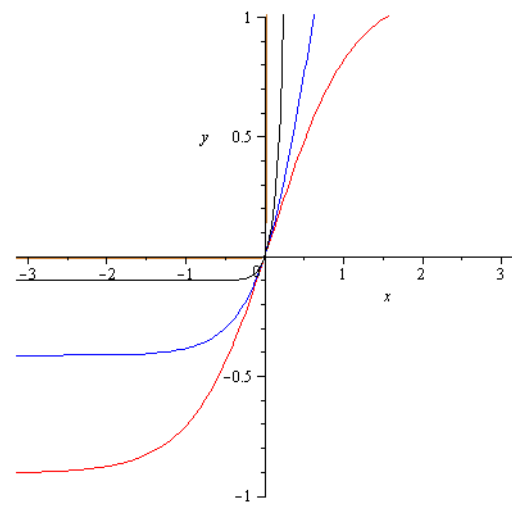


Рис. 11. Зависимость (2.93) при $b=1$, $a=0.1$, $a=1$, $a=5$, $a=100$.

В обратном предельном случае, если неоднородности велики, то есть $L \gg \frac{V}{V_0}$, решение (2.93) показывает, что скорость течения длительное время будет оставаться практически постоянной и равной V_0 .

Заметим, что уравнение (2.87) очень похоже на логистическое уравнение Ферхюльста, однако, в отличие от модели «хищник – жертва», когда в начальной стадии эволюции концентрация «жертв» растет, оно описывает обратную ситуацию, а именно уменьшение интересующего нас параметра, роль которого в рассмотренном выше случае играет скорость потока.

Заканчивая вторую главу, стоит еще раз обратить внимание на ряд некоторых важных моментов

1. Приведен строгий и подробный вывод уравнения Навье – Стокса, используя кинетическое уравнение Больцмана, позволившего учесть все последующие поправки по числу Кнудсена;
2. Показано, что в первом приближении они приводят к бигармоническому по оператору Лапласа дополнительному слагаемому к правой части основного уравнения гидродинамики;
3. Найдено решение полученного обобщенного уравнения Навье – Стокса для задачи обтекания шара потоком вязкой жидкости с учетом дополнительного бигармонического по оператору Лапласа слагаемого;
4. Получены соответствующие решения, которые описывают распределения скорости и давления вблизи поверхности шара с учетом дополнительных поправок по числу Кнудсена;
5. Дан подробный алгоритм решения задачи о вычислении поправки к силе сопротивления Стокса с учетом бигармонического оператора.
6. Приведено строгое обоснование возможности «обрыва» бесконечного ряда слагаемых по числу Кнудсена для высших поправок по оператору Лапласа.

7. Дана общая оценочная формула для силы Стокса (2.78) с учетом всего бесконечного ряда по неоднородностям континуума вида Δ^{2n} , где $n \in [1, \infty)$.

Глава 3. Течение по каналам и трубам произвольного сечения

В этой главе мы рассмотрим решение еще одной важной в практическом отношении задачи, суть которой сводится к оценке расхода жидкости при ее течении по каналам и трубам произвольного сечения. Классической задачей в этой прикладной области по праву считается решение Пуазейля, которое было им найдено в конце девятнадцатого века. Поскольку это решение относится к классическим результатам, мы приведем его решение в следующем разделе, как необходимый и достаточный результат при решении нашей задачи.

3.1 Течение Пуазейля

Впервые аналитическое решение задачи о течении жидкости по трубе кругового сечения было предложено Пуазейлем. Задача, которую он решил, ставилась следующим образом [1].

Предположим, что к концам трубы приложен постоянный градиента давления. Выберем ось цилиндрической трубы кругового сечения в качестве оси z цилиндрической системы координат, и будем искать решение уравнения Навье – Стокса в стационарном случае, когда поток жидкости движется с постоянной скоростью.

В стационарном случае для несжимаемой жидкости уравнение Навье – Стокса имеет вид [1]

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (3.1)$$

Для полноты системы к нему следует добавить еще и уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1) и (3.2) образуют полную замкнутую систему гидродинамических уравнений, из решения которых можно найти интересующее нас распределение скоростей.

Поскольку при течении потока вдоль оси z скорость имеет единственную компоненту v_z , то ее вектор можно представить как

$$\mathbf{v} = (0, 0, v_z(r)). \quad (3.3)$$

По условию задачи градиент давления также имеет только z -компоненту, и его можно записать в виде

$$\nabla P = \left(0, 0, \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \text{const}. \quad (3.4)$$

В силу зависимости (3.3) уравнение (3.2) выполняется автоматически, поскольку

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Проекция уравнения (3.1) на ось z дает

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \Delta v_z. \quad (3.5)$$

Но так как

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z = \left(v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z(r) = 0,$$

то уравнение (3.5) сводится к такому

$$\Delta v_z = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial z} = -a = \text{const}. \quad (3.6)$$

В силу лишь радиальной зависимости скорости v_z от r в операторе Лапласа в цилиндрической системе координат следует оставить только радиальную часть, а именно

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right).$$

Поэтому уравнение (3.6) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d v_z}{dr} \right) = -a.$$

Первый интеграл дает

$$r \frac{d v_z}{dr} = -\frac{ar^2}{2} + C_1,$$

где C_1 – константа интегрирования.

После второго интегрирования имеем

$$v_z = -\frac{ar^2}{4} + C_1 \ln r + C_2, \quad (3.7)$$

где C_2 – еще одна константа интегрирования.

Поскольку при $r=0$ решение должно быть конечным, то в (3.7) следует положить $C_1 = 0$.

Что касается константы C_2 , то она может быть найдена из условия «залипания» скорости на внутренней границе трубы, то есть из граничного условия

$$v_z \Big|_{r=R} = 0.$$

В результате из (3.7) имеем

$$C_2 = \frac{aR^2}{4}. \quad (3.8)$$

С учетом (3.8) решение (3.7) можно тогда записать следующим образом

$$v_z = \frac{a}{4} (R^2 - r^2).$$

И с учетом (3.6)

$$v_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} (R^2 - r^2). \quad (3.9)$$

Решение (3.9) и представляет собой решение Пуазейля.

Благодаря решению (3.9) нетрудно вычислить и расход жидкости в единицу времени. Действительно, согласно определению (см., например, [1]) имеем

$$Q = \int_S \rho v_z dS, \quad (3.10)$$

где S – площадь поперечного сечения, через которое протекает поток жидкости, движущийся со скоростью v_z .

Считая плотность потока однородной с учетом решения (3.9) имеем

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\rho}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_S (R^2 - r^2) dS = -\frac{\rho}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_0^R \int_0^{2\pi} (R^2 - r^2) r dr d\varphi = \\ &= -\frac{\pi\rho}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = -\frac{\pi\rho}{8\eta} \frac{\partial P}{\partial z} R^4. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Формулы (3.9) и (3.11) позволяют нам поставить задачу более общую, чем у Пуазейля, и рассмотреть случай, когда сечения каналов и труб произвольные. Несмотря на такой, казалось бы, абстрактный характер проблемы, ее решение может быть весьма полезным для более точного учета расхода жидкости при изучении, например, природного течения рек.

Кроме того, на наш взгляд, эта задача представляет и чисто академический интерес.

3.2 О ламинарном течении по трубам и каналам произвольного сечения

Решаемую далее задачу мы посвятим аналитическому описанию гидродинамического течения жидкостей по трубам и каналам произвольного сечения под действием постоянного градиента давления, представляющим собой физический фактор ускорения течений. Исходя из общих принципов гидродинамики вязких жидкостей, вполне реально найти распределение скорости по сечениям произвольной формы, и в качестве примеров далее будут рассмотрены два частных случая, когда канал представляет собой

кусочно-гладкий контур в виде произвольного треугольника и прямоугольника.

Поскольку далее речь пойдет об исследовании течения жидкости, как по трубам, так и по каналам, то изложение материала удобно разбить на две отдельные части.

В первой части будет рассмотрено течение потока несжимаемой жидкости по трубам произвольного сечения, а во второй части мы проанализируем течение по каналам открытого типа.

3.2.1. Течение по трубе произвольного сечения. Общий подход

Предположим, что сечение горизонтально лежащей трубы имеет кусочно – гладкую форму, проиллюстрированную на рис. 12. Ось z декартовой системы координат направим перпендикулярно плоскости рисунка, по которой направим и приложенный к обоим концам трубы постоянный градиент давления.

Предположим, что при $y \geq 0$ верхняя часть контура описывается зависимостью $y_1 = y_1(x_1)$, а нижняя часть контура при $y \leq 0$ – зависимостью $y_2 = y_2(x_2)$.

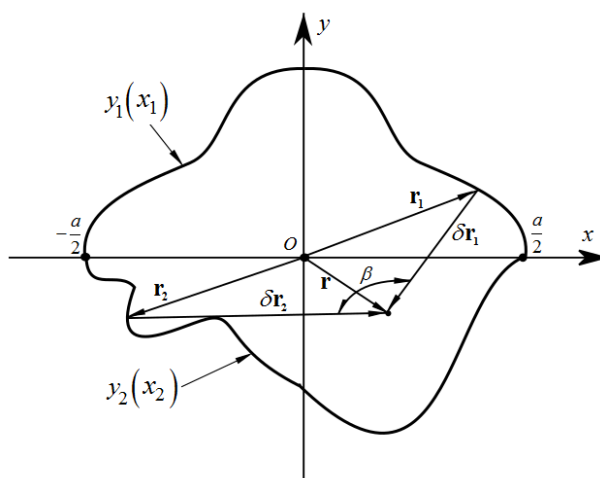


Рис. 12. Схематическое изображение сечения произвольной формы горизонтально лежащей трубы.

Для вычисления распределения скорости потока жидкости по плоскости сечения трубы, нам необходимо будет воспользоваться общими принципами гидродинамической теории вязких жидкостей. С этой целью мы воспользуемся уравнением Навье – Стокса, которое в случае несжимаемой жидкости можно записать в уже знакомом нам виде (1.37), то есть

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (3.12)$$

где ρ – плотность жидкости, P – давление, η – динамическая вязкость.

Поскольку решается стационарная задача, то скорость потока согласно рис. 1 следует искать в единственно возможном виде

$$\mathbf{v} = (0, 0, v_z(x, y)). \quad (3.13)$$

Благодаря зависимости (3.13) в уравнении (3.12) автоматически тогда исчезает субстанциональная производная, и его можно переписать в значительно более простой форме, как

$$\Delta v_z = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial z} = const. \quad (3.14)$$

Для зависимости (3.13) уравнение непрерывности $div \mathbf{v} = 0$ выполняется автоматически.

Граничную задачу для уравнения (3.14) сформулируем очевидным образом в виде условий «залипания» жидкости на внутреннем контуре трубы C

$$v_z \Big|_{y=y_1(x_1)} = v_z \Big|_{y=y_2(x_2)} = 0. \quad (3.15)$$

Согласно двумерному уравнению Пуассона (3.14) для постоянной правой части решение, конечное в нуле может иметь только квадратичный по

независимым аргументам x, y вид. Это первое условие. А второе условие должно быть связано с выполнением равенств (3.15).

Как показано на рис. 12, введем два независимых вектора $\delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ и $\delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1(x_1))$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2(x_2))$, а радиус – вектор \mathbf{r} – это текущий вектор в ограниченной области D сечения контура, в который включается и все множество точек на контуре C .

На языке этих двух независимых векторов мы можем представить решение поставленной задачи в виде их скалярного произведения.

Действительно, поскольку

$$\mathbf{v} = G[\delta \mathbf{r}_1 \times \delta \mathbf{r}_2],$$

где G – некоторая пока не определенная константа, то

$$v_z = G|\delta \mathbf{r}_1||\delta \mathbf{r}_2|\sin \beta,$$

где угол β показан на рис. 12.

С другой стороны, этот же угол можно определить и из уравнения

$$\cos \beta = \frac{(\delta \mathbf{r}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_2)}{|\delta \mathbf{r}_1||\delta \mathbf{r}_2|}.$$

Это означает, что решение задачи можно представить в общем виде, как

$$v_z = G \operatorname{tg} \beta (\delta \mathbf{r}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_2). \quad (3.16)$$

Или, раскрывая явно скалярное произведение, имеем

$$v_z = G \operatorname{tg} \beta [(x_1 - x)(x_2 - x) + (y_1(x_1) - y)(y_2(x_2) - y)]. \quad (3.17)$$

Подставив функцию (3.17) в уравнение (3.14), немедленно получим, что

$$G \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Таким образом, интересующее нас решение (3.17) можно представить, как

$$v_z = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} [(x_1 - x)(x_2 - x) + (y_1(x_1) - y)(y_2(x_2) - y)]. \quad (3.18)$$

Что касается расхода жидкости, текущей по трубе произвольного сечения, то его можно вычислить с помощью формулы:

$$Q = \iint_D v_z(x, y) dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} v_z(x, y) \Big|_{x_1=x_2=x} dy. \quad (3.19)$$

Если подставить сюда общее решение (3.18), в котором согласно (3.19) первое слагаемое в квадратных скобках попросту исчезает, после элементарного интегрирования мы придем к следующему выражению

$$Q = -\frac{1}{24\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_{-a}^a (y_2(x) - y_1(x))^3 dx. \quad (3.20)$$

Проанализируем теперь, как «работают» формулы (3.18) и (3.20) на конкретных примерах.

В качестве первого примера возьмем сечение в виде окружности, уравнение которой будет

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Но поскольку $x_2 = -x_1$, то

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - x_1^2}. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в (3.18), немедленно находим

$$v_z(x, y) = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} [(x - x_1)(x + x_1) + (y_1(x_1) - y)(-y_1(x_1) - y)] = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} (x^2 + y^2 - a^2). \quad (3.22)$$

Как и должно быть, мы пришли к решению Пуазейля (ср. с (3.9)).

Согласно же (3.20) расход жидкости тогда будет

$$Q = -\frac{1}{3\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^2 dx = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (3.23)$$

Рассмотрим теперь другой пример. Предположим, что форма трубы «скомпанована» из двух сопряженных парабол. Это означает, что $x_2 = -x_1$, а уравнения их зеркально – отраженных контуров будут

$$y_{1,2} = \pm \left(h - \frac{x_1^2}{2b} \right). \quad (3.24)$$

Тогда в соответствии с (3.18) получаем

$$v_z(x, y) = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} (x^2 - x_1^2 + y^2 - y_1^2(x_1)) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \left(x_1^2 + \left(h - \frac{x_1^2}{2b} \right)^2 - x^2 - y^2 \right). \quad (3.25)$$

Где, напомним, $y_1(x_1)$ это все множество точек контура.

Расход жидкости вычислим, исходя из общей формулы (3.20). Если теперь подставить (3.24) в формулу (3.20), и положить $x_1 = x$, то получим

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{3\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_{-a}^a \left(h - \frac{x^2}{2b} \right)^3 dx = -\frac{2}{3\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_0^a \left(h^3 - \frac{3h^2x^2}{2b} + \frac{3hx^4}{4b^2} - \frac{x^6}{8b^3} \right) dx = \\ &= -\frac{2}{3\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \left(ah^3 - \frac{h^2a^2}{2b} + \frac{3ha^5}{20b^2} - \frac{a^7}{56b^3} \right). \end{aligned}$$

А поскольку эффективная длина $a = \sqrt{2bh}$, то отсюда немедленно следует

$$Q = -\frac{32h^3\sqrt{2bh}}{105\eta} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (3.26)$$

Таким образом, с помощью предложенного выше алгоритма, нетрудно будет найти распределение скоростей для любого вида сечения, а затем вычислить важный в чисто практическом плане расход жидкости в единицу времени.

3.2.2. Течение по каналам произвольной формы

Прежде, чем переходить к этому вопросу, вначале стоит остановиться на простом примере, и проанализировать случай, когда сечение горизонтального канала имеет вид произвольного треугольника с заданными длинами сторон a, b, c . Соответствующие углы при его вершинах мы будем обозначать, как A, B, C (см. рис. 13), а также будем считать, что сторона длиной a является свободной.

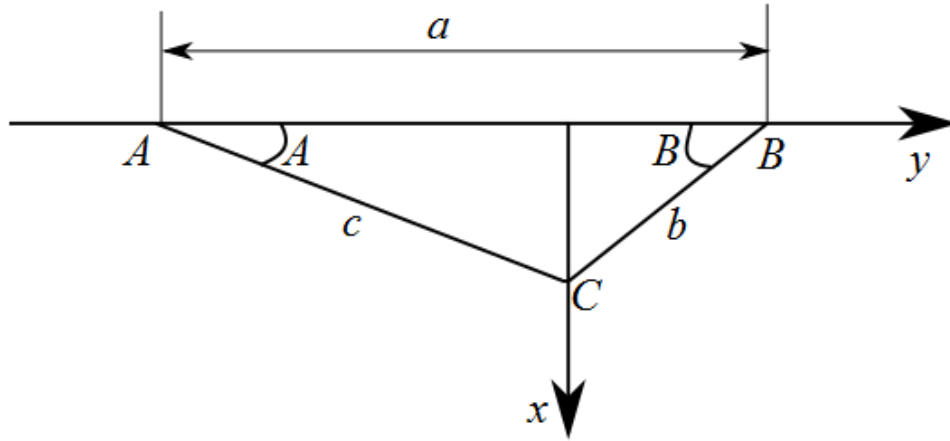


Рис.13. Сечение открытого канала в виде треугольника произвольной формы.

Решение уравнения (3.14)

Для его решения нам необходимо вначале сформулировать граничную задачу. Как видно из рис. 6, на сторонах треугольника BC и AC должны быть выполнены следующие условия «залипания»

$$\begin{cases} v_z \Big|_{y=\frac{a}{2}-xctgB} = 0, \\ v_z \Big|_{y=-\frac{a}{2}+x\left(\frac{a}{b\sin B}-ctgB\right)} = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

В соответствии с (3.27) будем искать решение уравнения (3.14) в виде

$$v_z = G \left\{ \left[y + \frac{a}{2} - x \left(\frac{a}{b\sin B} - ctgB \right) \right] \left(y - \frac{a}{2} + xctgB \right) \right\}, \quad (3.28)$$

где константу G следует определить. С этой целью подставим решение (3.28) в уравнение (3.14).

После простого дифференцирования мы немедленно получаем, что

$$G = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\sin^2 B}{1 - \frac{a}{b} \cos B}. \quad (3.29)$$

И, значит, решение будет

$$v_z(x, y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\sin^2 B}{1 - \frac{a}{b} \cos B} \left\{ \left[y + \frac{a}{2} - x \left(\frac{a}{b\sin B} - ctgB \right) \right] \left(y - \frac{a}{2} + xctgB \right) \right\}. \quad (3.30)$$

Благодаря найденной зависимости (3.30) нетрудно вычислить и расход жидкости Q по каналу. Согласно определению, расход

$$Q = \iint_D v_z(x, y) dx dy.$$

Поэтому, подставив сюда решение (3.30), и используя профиль треугольника, показанный на рис. 6, получим

$$Q = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\sin^2 B}{1 - \frac{a}{b} \cos B} \int_0^{b \sin B} dx \int_{y_1}^{y_2} (y - y_1)(y - y_2) dy,$$

где

$$y_1 = \frac{a}{2} - x \operatorname{ctg} B, \quad y_2 = -\frac{a}{2} + x \left(\frac{a}{b \sin B} - \operatorname{ctg} B \right). \quad (3.31)$$

Или

$$Q = -\frac{1}{6\eta} \frac{\sin^2 B}{1 - \frac{a}{b} \cos B} \frac{\partial P}{\partial z} \int_0^{b \sin B} (y_2 - y_1)^3 dx, \quad (3.32)$$

где $y_{1,2}$ задаются уравнениями (3.31).

Формула (3.32) приведена только с той целью, чтобы показать ее тождественность с общим решением (3.20). Их отличие, как видим, лишь в коэффициенте перед градиентом давления.

После простого интегрирования получаем из (3.32)

$$Q = -\frac{1}{480\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{a^3 b \sin^3 B}{1 - \frac{a}{b} \cos B}. \quad (3.33)$$

В том случае, если сечение канала представляет собой равносторонний треугольник, для которого $a = b$, $B = 60^\circ$ из формулы (3.33) будет следовать, что

$$Q = -\frac{\sqrt{3}}{640\eta} \frac{\partial P}{\partial z} a^4. \quad (3.34)$$

(ср. с [1] стр. 83, задача 3).

Если же треугольник равнобедренный, то из (3.33) получим

$$Q = -\frac{1}{960\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{a^3 (4b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{2b^2 - a^2}. \quad (3.35)$$

Что касается примеров таких течений, то их можно легко обнаружить, как у Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица в монографии Гидродинамика т. 6, так и в более специфической книге, написанной в свое время академиком СССР В.В. Шулейкиным [100].

Канал произвольного сечения

Для общего случая канала произвольного сечения в соответствии с геометрией рис. 14 решение можно записать в том же виде, что и для замкнутого сечения, а именно в виде (3.18), то есть

$$v_z = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} [(x_1 - x)(x_2 - x) + (y_1(x_1) - y)(y_2(x_2) - y)]. \quad (3.36)$$

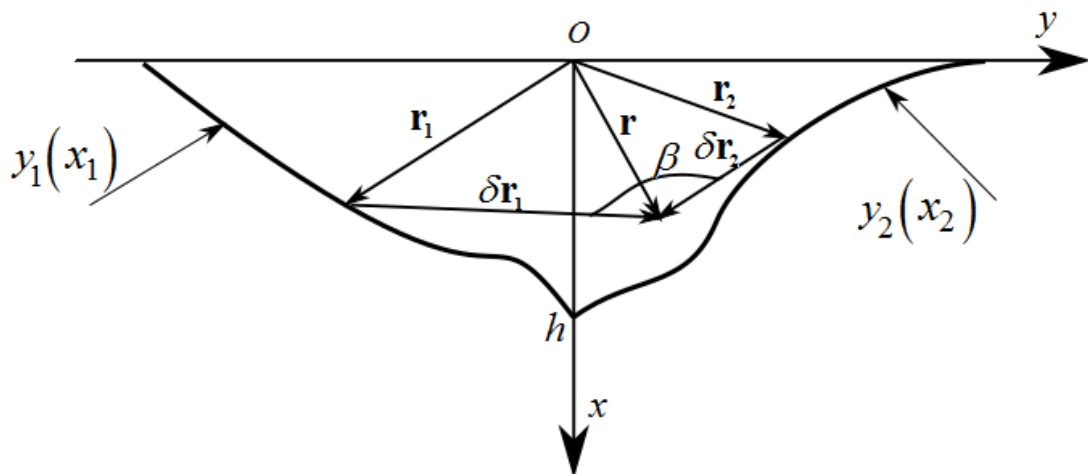


Рис. 14. Схематическое изображение открытого канала произвольного сечения

Разница здесь лишь в том, что сторона $x=0$ является свободной, а радиус – вектора r_1, r_2 пробегают множество значений соответственно на нижней и верхней сторонах контура в направлении оси y до значения $x=0$ согласно рис.3, в которой функция $x(y)$ достигает наибольшего значения.

3.3 Общая формула для вычисления расхода через произвольное сечение

Для вычисления расхода жидкости в соответствии с общим решением (3.36) следует воспользоваться также общей формулой:

$$Q = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_0^h dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (y_1 - y)(y_2 - y) dy = -\frac{1}{24\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_0^h dx (y_2(x) - y_1(x))^3. \quad (3.37)$$

Если нижняя часть сечения канала представляет собой непрерывную кривую $y(x)$, то значение $x = h$ является точкой минимума этой функции. Если же сечение представляет собой кусочно – гладкую кривую, то это будут две разные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Проанализируем теперь как «работают» формулы (3.36) и (3.37) на одном конкретном примере (см. также работу [33]).

Для уже рассмотренного выше сечения канала в виде произвольного треугольника в качестве функций y_1 и y_2 выбираем уравнения его сторон AC и BC , то есть

$$\begin{cases} y_1 = \left(\frac{a}{b \sin B} - ctgB \right) (x - b \sin B), \\ y_2 = -ctgB (x - b \sin B). \end{cases}$$

Поэтому, расход жидкости согласно (3.37) будет

$$Q = \frac{1}{24\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \int_0^{b \sin B} dx (y_2(x) - y_1(x))^3 = -\frac{1}{640\eta} \frac{\partial P}{\partial z} ab(a^2 + b^2) \sin B. \quad (3.38)$$

Заметим, что в решении (3.38) было записано симметричное выражение, в котором стороны a и b поменяли местами, и взяли их полусумму, то есть

$$Q = \frac{F(a,b) + F(b,a)}{2}$$

В заключение этой главы отметим несколько важных моментов.

1. Предложено решение общей задачи о нахождении распределения скоростей в каналах и трубах произвольного сечения в виде функции от независимых координат x, y ;
2. Приведен общий алгоритм вычисления расхода жидкости при ее течении по каналам и трубам произвольного сечения;
3. На конкретных примерах сечений с заданными аналитически контурами продемонстрированы конкретные решения, и найдены соответствующие расходы жидкости Q ;

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение диссертации хотелось бы остановиться на краткой формулировке основных полученных в ней результатах.

Однако, вначале хочется сказать несколько слов о том выбранном в ней направлении исследования, которое фактически и легло в ее основу.

При изучении массы литературных источников и оригинальных статей [1] – [12], [34] – [48] мы не обнаружили в них решение тех задач, которые фактически и подсказали нам ряд нерешенных проблем теоретического характера. В конечном итоге это и послужило основой для написания настоящей диссертации.

Первая задача, которая была решена в ней, и подробно изложена во второй главе, связана с обобщением уравнения Навье – Стокса на малые частицы. В частности, это уравнение будет «работать» и для наночастиц, интерес к свойствам которых в настоящее время охватывает чрезвычайно широкую аудиторию исследователей во всем мире. Основным достижением этой главы является учет дополнительных неоднородностей в основном уравнении гидродинамики, чего ранее сделано не было. Более того, в работе был продемонстрирован общий алгоритм получения любого количества неоднородных по оператору Лапласа слагаемых, учесть которые можно путем аппроксимации этого ряда к ряду геометрической прогрессии.

Вторая задача, решенная в диссертации и описанная подробно в третьей главе, связана с обобщением «симметричного» решения Пуазейля на трубы и каналы произвольного сечения. Общее решение, найденное выше, позволяет вычислять расход жидкости при течении по каналам и трубам произвольных сечений, что, на наш взгляд, важно для практического приложения полученного результата, позволяющего более точно находить расход жидкости, аппроксимировав контуры сечений аналитическими функциями.

Основные же результаты диссертации, если придерживаться строгости формального изложения, можно сформулировать в виде следующих четырех пунктов:

1. С помощью метода неравновесного статистического распределения, основанного на решении кинетического уравнения Больцмана, дан подробный вывод уравнения Навье – Стокса с точностью до произвольного количества слагаемых к его правой части по оператору Лапласа с целью его применения для описания гидродинамических свойств, например, наночастиц.
2. Показано, что учет дополнительных неоднородных по оператору Лапласа слагаемых в правой части уравнения Навье – Стокса представляется знакоперевающимся рядом по числу Кнудсена для обобщения на случай, когда длина свободного пробега становится сравнимой с размером наночастицы.
3. Дано обобщение формулы Стокса при произвольных числах Кнудсена.
4. Найдена общая формула для вычисления скорости потока в сечении трубы (или канала) произвольного вида.
5. Получена общая формула для вычисления расхода жидкости, текущей по трубам и каналам произвольного сечения.

Благодарности

В заключении работы хочу выразить искреннюю признательность и благодарность моему научному руководителю профессору Сергею Октябрьновичу Гладкову за доброжелательное отношение к моей работе, за постоянные консультации и за помощь в преодолении языкового барьера и исправления грамматических и синтаксических ошибок, которые были допущены в процессе написания настоящей диссертации. Хочу также выразить большую благодарность доценту кафедры № 311 МАИ, к.ф.-м.н Богдановой Софье Борисовне за помощь, оказанную ей в процессе графического оформления диссертации.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука. 1988. 733 с.
2. Дорфман А.Л., Численное решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в разветвляющемся канале при задании перепадов давления между ответвлениями. – в сб. Численные методы механики сплошной среды, том 10, № 7, Новосибирск, 1979, с. 52.
3. Патрашев А.Н. и др. Прикладная гидромеханика. Л.: Военмориздат. 1979. 605 с.
4. Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И., Федяевский К.К. Гидромеханика. -Л.: Судостроение, 1982. 455 с.
5. Карякин В.Е., Карякин Ю. Е. Расчет течений вязкой жидкости в плоских каналах произвольной формы. – в сб. Численные методы механики сплошной среды, том 17, № 5, Новосибирск, 1986, с. 98.
6. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение. 1987. 460 с.
7. Штеренлихт Д.В. Гидравлика. М.: Энергоатомиздат. 1991. КН.1. 351 С., КН.2. 367с.
8. Штеренлихт Д.В., Алышев В.М., Яковлева Л.В. Гидравлические расчёты. М.: Колос. 1992. 287 с.
9. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра. 1993. 416с.
- 10.Захаров Ю.Н. Градиентные методы решения задач гидродинамики, Новосибирск, Наука, 2004, 239с.
- 11.Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. В 2-х т. - М., ГИТТЛ, 1933-1935.
- 12.Ламб Г. Гидродинамика. - М., ГИТТЛ, 1947.
- 13.Христианович С.А., Гальперин В.Г., Миллионщиков М.Д., Симонов Л.А. Прикладная газовая динамика. - М., ЦАГИ, 1948.
- 14.Жуковский Н.Е. Собрание сочинений. Том. 2. Гидродинамика. - М., ГИТТЛ, 1949.

15. Липман Г.В., Пакет А.Е. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости. - М., ИЛ, 1949.
16. Слѣзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М., ГИТТЛ, 1955.
17. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. - М., Физматгиз, 1959.
18. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. - М., ГИИЛ, 1963
19. Серрин Д. Математические основы классической механики жидкости. - М., ГИИЛ, 1963
20. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х ч. - М., Физматлит, 1963.
21. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. - М., Мир, 1964.
22. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. В 2-х ч. - М., Наука, 1965-1967.
23. Рауз Х. Механика жидкости. - М., Стройиздат, 1967.
24. Седов Л.И. Механика сплошной среды . В 2-х т. - М., Наука, 1970.
25. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. - М., Наука, 1971.
26. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М., МГУ, 1971-1990.
27. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. - М., Высшая школа, 1972.
28. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. - М., Мир, 1973.
29. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. - М., Наука, 1973.
30. Мейз Д. Теория и задачи механики сплошных сред. - М., Мир, 1974.
31. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. - М., Мир, 1975.
32. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. - Л., Гидрометеиздат, 1975.
33. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. В 2-х ч. - Новосибирск, НГУ, 1976-1977

34. Христианович С.А. Механика сплошной среды. - М., Наука, 1981.
35. Зельдович Я.Б. Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика. - М., Наука, 1984.
36. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика сплошных сред. - М., Физический факультет МГУ, 1998.
37. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М., Дрофа, 2003.
38. Gladkov S.O. The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave. Solid State Communications. 1995. V. 94. N9. PP.789 – 791.
39. Гладков С.О. О конвективном движении газа в цилиндрическом объеме. Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 12. СС. 71 – 75.
40. Гладков С.О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра. ЖТФ. 2018. Т. 88. В. 3. СС. 377 – 341.
41. Gladkov S.O. About one method of calculation in the arbitrary curvilinear basis of the Laplace operator and curl of the vector function. Applied Mathematics and Nonlinear Science. 2021. V.7. N2. P. 1-9.
42. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир. 1973. 244 с.
43. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. Т. 10. М.: Наука. 1979. 527 с.
44. Резибуа П., Де Лернер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир. 1980. 423 с.
45. Коновалова Н.И., Мартынов С.И. Обтекание двух сфер нестационарным потоком вязкой жидкости. Вестник СамГУ – естественнонаучная серия. 2008. №3(62). С. 246 – 260.
46. Гладков С.О. Об одном доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса. Известия вузов. Физика. 2018. Т. 61. В. 6. С. 103-105.

- 47.Гладков С.О., Зо Аунг. О поправках к силе Стокса по числу Кнудсена. Известия вузов. Физика. 2020. Т. 63. В. 12. С. 68-81.
- 48.Гладков С.О. К вопросу о силе Стокса в условиях стационарного вращения шара. Известия вузов. Физика. 2022. Т. 65. В.5. С. 88-94.
49. Гладков С.О., Зо Аунг. К вопросу о течении жидкостей в трубах и каналах произвольного сечения. Инженерная физика. 2021. №10. С. 27-36. DOI: 10.25791/infizik.10.2021.1230.
- 50.Гладков С.О., Зо Аунг. О поправках к силе Стокса по числу Кнудсена. Известия вузов. Физика. 2021. Т. 63. В. 12. С. 68-81.
- 51.Гладков С.О., Зо Аунг. Об уточнении уравнения Навье - Стокса применительно к наночастицам. Вестник МГОУ. Серия: физика – математика. 2021. В. 1. С. 77-91.
- 52.Гладков С.О., Зо Аунг. К вопросу о течении жидкостей в трубах и каналах произвольного сечения. Инженерная физика. 2021. В. 10. С. 27-36.
- 53.Gladkov S.O and Zaw Aung, Regarding corrections to the Stokes force in the Knudsen number, Russ. Phys. J. 2021. V. 63, No. 12. P. 2122-2140.
- 54.Gladkov S.O and Zaw Aung, To the question of calculation of amendments to the Navier – Stokes equation, J. Phys.: *Conf. Ser.* **1902** 012004 (2021).
- 55.Гладков С.О., Зо Аунг. Об одной модели турбулентности// Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность НеЗаТеГиУс' 2020, 31 марта -3 апреля 2020, Звенигород, Академический пр-д, вл. 1. С. 42.
- 56.Гладков С.О., Зо Аунг. О поправках к уравнению Навье–Стокса// Всероссийская конференция с международным участием "Теория управления и математическое моделирование" СТММ2020', 15–19 июня 2020, Ижевск, Удмуртский государственный университет, С. 270-271, ISBN 978–5–4312–0790–7.
- 57.Гладков С.О., Зо Аунг. К вопросу модификации уравнения Навье-Стокса при учете дополнительных неоднородных слагаемых в высших

- порядках по длине свободного пробега// VII-я Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» СПФМН-2020', 4-5 декабря 2020, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, С. 244-247, ISBN 978-5-99290923-4.
- 58.Гладков С.О., Зо Аунг. К вопросу о поправках к уравнению Навье – Стокса// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики 2020, 7-9 декабря 2020, Воронежский Государственный Университет, С. 1486-1490.
- 59.Гладков С.О., Зо Аунг. О поправках к уравнению Навье-Стокса// II Всероссийская научная конференция «Актуальные проблемы математики и информационных технологий» 2021, 5-7 февраля 2021, Дагестанский государственный университет.
- 60.Гладков С.О., Зо Аунг. К вопросу обобщения уравнения Навье–Стокса на случай малых частиц// Перспективная элементная база микро- и нанoeлектроники с использованием современных достижений теоретической физики 2021, 20–23 апреля 2021, Московский государственный областной университет, С. 77-91. ISSN 2072-8387.
- 61.Гладков С.О., Зо Аунг. О возможных поправках к уравнению Навье-Стокса по числу Кнудсена// Всероссийская конференция молодых учёных-механиков 2021, 3-12 сентября 2021, Сочи, пансионат МГУ "Буревестник", С. 63. ISBN 978-5-19-011642-7.
- 62.Гладков С.О., Зо Аунг. К теории течения жидкостей по каналам произвольного сечения// VII-я Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2021)', 18-21 ноября 2021, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева, С. 476-481. ISBN 978-5-9929-1076-6.
- 63.Гладков С.О., Зо Аунг. О бигармонических поправках к уравнению Навье – Стокса// 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ 2021,

- 29 ноября – 3 декабря 2021, Московский физико-технический институт (МФТИ), С. 312-316. ISBN 978-5-7417-0785-2.
- 64.Гладков С.О., Зо Аунг. К теории стационарного течения жидкостей по трубам произвольного сечения// Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (АППМИМ-2021), 13-15 декабря 2021, Воронежский Государственный Университет, С. 1402-1406. ISBN 978-5-6045486-6-0.
- 65.Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Ленинград. Наука. 1975. 592 с.
- 66.Гладков С.О. Об одном методическом подходе при выводе основных физических уравнений. Физическое образование в вузах. 2021. Т. 27. № 2. С. 5 – 12.
- 67.Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. 1967. 664 с.
- 68.Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- 69.Черчиньяни К. О методах решения уравнения Больцмана // Неравновесные явления: Уравнение Больцмана. М.: Мир, 1986. С. 132–204.
- 70.Баранцев Р. Г. Аналитические методы в динамике разреженных газов // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1981. Т. 14. С. 3–65.
- 71.Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // Comm. Pure Appl. Math. 1949. V. 2, N 4. P. 331–407.
- 72.Леонтович М. А. Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // Журн. эксперим. и теор. физики. 1935. Т. 5, № 3–4. С. 211–231.
- 73.Grunbaum F. A. Propagation of chaos for the Boltzmann equation // Arch. Rational Mech. Anal. 1971. V. 42, N 5. P. 3329–3334.

74. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
75. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.
76. Snider L. F. Quantum-mechanical modified Boltzmann equation for generate internal state // J. Chem. Phys. 1960. V. 32. P. 1051–1060.
77. Чо С., Уленбек Дж. Кинетическая теория явлений в плотных газах // Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. М.: Мир, 1965. С. 189–280.
78. McCourt F. R. W. Nonequilibrium phenomena in polyatomic gases. Oxford; New York; Tokio: Oxford Univ. Press, 1995.
79. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.
80. Шлихтинг Х. Теория пограничного слоя. 2004. Springer. ISBN 978-3-540-66270-9. 346 с.
81. Гладков С.О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра. ЖТФ. 2018. Т. 88. В. 3. С. 337 – 341.
82. Гладков С.О., Богданова С.Б. Об аналитических решениях квазиклассического кинетического уравнения высших порядков теории возмущений по времени релаксации. Известия вузов. Физика. 2018. Т. 61. В. 5. С. 28 – 35.
83. Bhatt B.S. Flow past a porous spherical shell using the Brinkman model. J. Phys. D. Appl. Phys. 1994. V.27. N 1. P. 37 – 41.
84. Padmavathi B.S., Amaranth T., Palaniappan D. Stokes flow about a porous spherical particle. Arch. Mech. 1994. V. 46. N1/2. P. 191 – 199.

85. Valladares R.M., Goldstein P., Calles A. Simulation of the motion of a sphere through a viscous fluid. *Revista Mexicana de Fisica*. 2003. V. 49. N2. P. 166 – 174.
86. Hsu H.J., Huang L.H., Hsieh P.C. A re-investigation of the low Reynolds number uniform flow past a porous spherical shell. *Intern. J. Numer. Anal. Mech. Geomech.* 2004. V.28. P. 1427 – 1439.
87. Rubinow S.I., Keller J.B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. V. 11. N3. P. 447 – 459.
88. Allen H.S. M.A. B.Sc. The motion of a sphere in a viscous fluid. *Philosophical Magazine*. 2009. V.50. Iss. 306. P. 519 – 534.
<https://doi.org/10.1080/14786440009463941>
89. Шаповалов В.М. Обтекание полупроницаемой частицы вязкой жидкостью. *ПМТФ*. 2009. Т. 50. В. 4. С. 48 – 53.
90. Kotsev T. Viscous flow around spherical particles in different arrangements. *MATEC Web of Conference* 2018. V. 145. 03008.
<https://doi.org/10.1051/matecconf/201814503008>
91. Ramasamy Selvi, Pankaj Shukla, Филиппов А.Н. Обтекание жидкой сферы, заполненной неньютоновской жидкостью и внедренной в пористую среду. *Коллоидный журнал*. 2020. Т. 82. В. 2. С. 195 – 203.
92. Fonseca I., Hidalgo H.C., Maza D. Motion of a sphere in a viscous fluid towards a wall confined versus unconfined conditions. *Granular Matter*. 2022. V. 24. P. 42 – 54. <https://doi.org/10.1007/s10035-021-01203-5>.
93. Верещагин А.С., Долгушев С.В. Медленное обтекание полого пористого шара вязкой несжимаемой жидкостью. *ПМТФ*. 2011. Т. 52. В. 3. С. 92 – 101.

94. Ландау Л.Д., Лифшиц Л.М. Статистическая физика. Т. 5. М.: Наука. 2002. 596 с.
95. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т.1. М.: Наука. 2001. 208 с.
96. Шахов Е.М. Течение разряженного газа в трубе конечной длины. Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2000. Т. 40. В. 4. С. 647 – 655.
97. Гладков С.О. Сборник задач по теоретической и математической физике. М.: Физматлит. 2010. 488 с.
98. Савельев И.В. Курс общей физики. Книга 1. Механика. М.: Наука. 1998. 336 с.
99. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука. 1989. 335 с.
100. Шулейкин В.В. Физика моря. М.: Издательство АН СССР. 1953. 989 с.