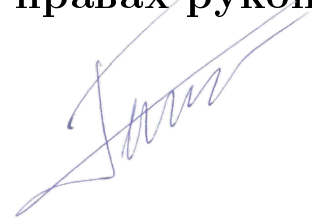


На правах рукописи



БЕЛЕВЦОВ Никита Сергеевич

**МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ
ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ
ДИФФУЗИОННЫХ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

Специальность:

**1.2.2. Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ**

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Уфа — 2023

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» на кафедре высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Научный руководитель: **Лукащук Станислав Юрьевич**
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Кризский Владимир Николаевич**
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
информатики и компьютерных технологий
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский горный
университет», г. Санкт-Петербург

Паровик Роман Иванович
доктор физико-математических наук
(Doctor of Sciences, Республика Узбекистан),
кандидат физико-математических наук
(Российская Федерация), доцент,
ведущий научный сотрудник лаборатории
математического моделирования физических
процессов ФГБУН «Институт космофизических
исследований и распространения радиоволн
Дальневосточного отделения Российской
академии наук», Камчатский край

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Уральский федеральный
университет имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина», г. Екатеринбург

Защита состоится «15» декабря 2023 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета 24.2.479.06 на базе ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте <https://uust.ru/>.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.479.06,
доктор технических наук, доцент

 Шерыхалина Н.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Моделирование процессов переноса вещества и энергии в сложных неоднородных средах является важной задачей математического моделирования. Диффузионные и волновые процессы в подобных средах в ряде случаев характеризуются аномальной кинетикой протекания, которая не подчиняется гауссовой статистике и может проявляться в виде эффектов памяти (нелокальность по времени) или дальних пространственных взаимодействий (нелокальность по пространству). Описание таких процессов с использованием интегралов и производных целого порядка зачастую является достаточно затруднительным и соответствующие математические модели имеют ряд недостатков.

Интегро-дифференцирование дробного порядка активно используется для моделирования аномальных явлений и процессов с нелокальными эффектами (см. работы А. М. Нахушева, В. В. Учайкина, В. Е. Тарасова, Р. Р. Нигматуллина, В. Е. Федорова, В. Г. Пименова, А. В. Псху, П. Н. Вабищевича, Р. Т. Сибатова, Р. И. Паровика, А. А. Алиханова, Ф. Майнарди, Л. Кафарелли, Ю. Лучко, Р. Метзлера, Р. Хилфера, Р. Горенфло, М. Ортигуера и др.) Применение этого аппарата позволяет описывать аномальную кинетику посредством использования феноменологических гипотез с дробно-дифференциальными операторами по времени или пространству. При этом нелокальность, порождаемая особенностями среды, описывается этими операторами, а сама среда моделируется как однородная. В настоящее время предложено множество дробно-дифференциальных математических моделей (ДДМ) различных процессов с аномальной кинетикой протекания, основанных на таком подходе.

Исследование ДДМ представляется особенно трудным в случае использования многомерных дробно-дифференциальных операторов. Понятие дробного интегро-дифференцирования в \mathbb{R}^n введено М. Риссом. Рассматриваемые в его работах многомерные операторы типа потенциала (потенциалы Рисса) являются обобщением понятия дробного интегрирования на случай многомерного пространства. При этом дробное дифференцирование в \mathbb{R}^n может быть записано в терминах дробной степени оператора Лапласа. Теория подобных операторов в дальнейшем была развита в работах О. Фростмана, И. М. Стейна, П. Лизоркина, С. Г. Самко, Б. С. Рубина и др.

Для многомерных ДДМ построение точных решений зачастую является невозможным, поэтому их численный анализ представляет собой важную практическую задачу. В силу нелокальности операторов дробного интегро-дифференцирования построение численных решений ДДМ классическими методами приводит к большому объему вычислительных операций. Для уменьшения объема вычислений в линейном случае могут быть использованы мультипольные методы. Основой для построения соответствующих алгоритмов являются факторизованные разложения фундаментальных решений рассматриваемых линейных уравнений. Важно отметить, что параллельные

версии таких алгоритмов обладают высокой эффективностью и масштабируемостью. Классическая теория мультипольных численных методов была разработана в работах В. В. Рохлина, Л. Грингарда, Н. А. Гумерова. Ранее мультипольный подход не находил своего применения для численного исследования многомерных ДДМ. Таким образом, является актуальной задача развития мультипольных методов для численного исследования математических моделей нелокальных процессов.

Основным **объектом моделирования** в работе выступают нестационарные и установившиеся процессы аномального переноса вещества и энергии в неограниченных неоднородных сложных средах, описываемые многомерными линейными дробно-дифференциальными моделями (ЛДДМ).

Цель и задачи исследования. *Целью* диссертационной работы является разработка мультипольных алгоритмов компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов, описываемых линейными многомерными дробно-дифференциальными математическими моделями.

Для достижения данной цели в работе были поставлены и решены следующие *задачи*.

1. Исследование свойств ЛДДМ нелокальных процессов диффузионного и волнового типов, полученных на основе феноменологического подхода.

2. Построение фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа.

3. Разработка и программная реализация численных алгоритмов компьютерного моделирования процессов диффузионного и волнового типов в нелокальных средах с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников.

4. Построение факторизованных мультипольных разложений фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца.

5. Разработка и программная реализация последовательных и параллельных мультипольных алгоритмов численного решения ЛДДМ.

6. Исследование эффективности разработанных численных алгоритмов для решения задач компьютерного моделирования нелокальных процессов различной физической природы.

Научная новизна.

1. На основе симметричных свойств нестационарных ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа показано, что такие модели обладают автомодельными решениями и решениями типа бегущих волн, построены примеры таких решений. Доказано, что для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца остается справедливой постановка условия излучения Зоммерфельда.

2. Построены фундаментальные решения многомерных дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца. Предложен и обоснован способ их приближенного вычисления с заданной точностью.

3. Предложен подход к моделированию нелокальных сред с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников, основанный на методе вспомогательных внутренних источников. На его основе разработаны численные алгоритмы решения стационарной и нестационарной задач нелокальной однофазной фильтрации с системой скважин и задачи рассеяния волн на непроницаемом объекте в нелокальной среде.

4. Предложен алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина–Барнса, на основе которого выполнена факторизация фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца, а также построены их мультипольные разложения в терминах функций Фокса. На основе прямых и асимптотических разложений функций Фокса из построенных мультипольных разложений предложены способы их приближенного вычисления.

5. Разработаны последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы численного решения многомерных ЛДДМ для вычислительных систем с общей и распределенной памятью.

6. Показано, что в ЛДДМ диффузионного типа уменьшение дробного показателя α приводит к более быстрому выходу системы на стационарный режим. Установлено, что в волновых ЛДДМ дробный показатель α оказывает влияние на волновой процесс только в ближней зоне источников возмущений.

Теоретическая и практическая значимость работы. Основные полученные в диссертации результаты носят теоретический характер. Методы и результаты работы могут быть использованы для аналитического и численного исследований многомерных ЛДДМ диффузионных и волновых процессов с потенциалом Рисса и с дробной степенью оператора Лапласа.

Разработанные численные алгоритмы, основанные на обобщении метода вспомогательных источников, могут использоваться для решения задач компьютерного моделирования нелокальных процессов в средах с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников.

Предложенный алгоритм факторизации применим к любым функциям, допускающим представление в виде контурного интеграла Меллина–Барнса.

Построенные точные частные решения рассматриваемых ЛДДМ могут быть использованы для тестирования алгоритмов их численного решения.

Разработанные последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы развивают мультипольный подход и распространяют его на случай многомерных ДДМ. Параллельные версии предложенных алгоритмов могут быть использованы для эффективного компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов.

Практическая значимость работы обуславливается возможностью использования предложенных подходов и разработанных алгоритмов при решении задач однофазной и многофазной фильтрации флюидов в неоднородных трещиновато-пористых средах с естественной трещиноватостью (актуально для нефтяного инжиниринга), задач распространения электромагнитных волн в средах с пространственной дисперсией (актуально для оптики

кристаллов и физики плазмы), а также задач обработки и интерпретации результатов применения электрических и электромагнитных методов для определения пластовых параметров (актуально в геофизике).

Методология и методы исследования. При решении поставленных в диссертации задач использовались базовые принципы математического моделирования, методы теории интегро-дифференцирования дробного порядка в \mathbb{R}^n , методы теории потенциала, теории интегральных преобразований и специальных функций, мультипольные методы и методы фундаментальных решений, технологии разработки последовательных и параллельных алгоритмов для высокопроизводительных вычислительных систем, а также основные принципы проведения вычислительных экспериментов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Автомодельные решения и решения типа бегущих волн для нестационарных ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа. Доказательство справедливости постановки условия излучения Зоммерфельда для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца. (Соответствует п. 1 паспорта специальности).

2. Фундаментальные решения дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца. (Соответствует п. 1 паспорта специальности).

3. Алгоритмы численного исследования ЛДДМ с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников, для проведения компьютерного моделирования процессов однофазной фильтрации в системе скважин и рассеяния волн на непроницаемом объекте. Способы вычисления функций влияния точечных источников в этих ДДМ. (Соответствует п. 2 паспорта специальности).

4. Алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса. Факторизованные мультипольные разложения фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца. Способ вычисления функций Фокса из построенных фундаментальных решений и их мультипольных разложений. (Соответствует п. 2 паспорта специальности).

5. Последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы компьютерного моделирования ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа. (Соответствует п. 2 паспорта специальности).

6. Программные реализации разработанных мультипольных алгоритмов на языке программирования C++ в виде комплекса программ компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов. (Соответствует п. 3 паспорта специальности).

7. Результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие эффективность разработанных алгоритмов, проведенные на основе предложенного набора тестовых задач. (Соответствует п. 2 паспорта специальности).

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических дока-

зательств сформулированных утверждений, тестированием разработанных программных реализаций предложенных алгоритмов, а также сравнением результатов вычислительных экспериментов с построенными точными частными решениями рассматриваемых модельных задач.

Результаты диссертации представлялись на следующих всероссийских и международных научных конференциях: «Мавлютовские чтения» (г. Уфа, 2015–2018 г.г.); «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, 2016–2018 г.г.); «International conference on mathematical modelling in applied sciences (ICMMAS'17, ICMMAS'19)» (г. Санкт-Петербург, 2017 г., г. Белгород, 2019 г.); «Лобачевские чтения-2018» (г. Казань, 2018 г.); «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения» (г. Санкт-Петербург, 2018 г.); «Актуальные проблемы науки и техники» (г. Уфа, 2018–2022 г.г.); «Актуальные проблемы прикладной математики» (г. Нальчик, 2018 г.); «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2019)» (г. Калининград, 2019 г.); «International conference on numerical analysis and applied mathematics (ICNAAM'19)» (Греция, 2019 г.); «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения» (г. Уфа, 2020 г.); «Уфимская осенняя математическая школа–2022» (г. Уфа, 2022 г.).

Результаты диссертации опубликованы в 26 научных работах, основными являются [1–3, 6–18]. Получены два свидетельства о регистрации программы для ЭВМ [4, 5]. Работы [1–3] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК, работы [6–9] — в зарубежных рецензируемых журналах, индексируемых в международной реферативной базе данных Web of Science.

В работах, выполненных в соавторстве, научному руководителю С. Ю. Лукашуку принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю Н. С. Белевцову — численные и аналитические исследования, точные формулировки и доказательства результатов. Все основные результаты диссертации получены лично автором. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0042 между Минобрнауки РФ, ФГБОУ ВПО «УГАТУ» и ведущим учёным Н.Х. Ибрагимовым по теме «Математическое моделирование и групповой анализ дифференциальных уравнений» (2011-2015 гг.) и проекта 1.3103.2017/ПЧ госзадания Минобрнауки РФ на тему «Математическое и компьютерное моделирование процессов фильтрации в неоднородных коллекторах нефтегазовых месторождений на основе мелко-дифференциального подхода» (2017-2019 гг.).

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. Объем диссертации составляет 149 страниц, в том числе 7 таблиц и 50 рисунков. Список литературы состоит из 146 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, проводится анализ степени ее разработанности, формулируются цели и задачи работы, перечисляются методы исследования, приводятся выносимые на защиту положения, отмечается их научная новизна, степень достоверности, теоретическая и практическая значимость. Приводятся сведения об апробации работы, публикациях и личном вкладе автора.

Первая глава посвящена исследованию математических моделей нелокальных процессов, построенных с использованием феноменологических гипотез, включающих многомерные дробно-дифференциальные операторы.

В §1 рассматриваются модели с дробной степенью оператора Лапласа, определяемой в терминах преобразования Фурье \mathcal{F} как

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}(|\mathbf{k}|^\alpha (\mathcal{F}u)(\mathbf{k}))(\mathbf{x}), \quad \alpha > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

и с потенциалом Рисса, который в \mathbb{R}^n определяется в виде

$$R^\alpha u(\mathbf{x}) = \frac{2^{-\alpha}\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-\alpha}} d\mathbf{y}, \quad \alpha \neq n, n+2, \dots \quad (2)$$

Рассматриваемый подход заключается в использовании феноменологических гипотез с нелокальными дробно-дифференциальными по пространству операторами и классических законов сохранения. При этом натурная неоднородная среда заменяется модельной однородной, но с нелокальными эффектами, описываемыми

пространственными дробными интегро-дифференциальными операторами (1) или (2), а порядок дробного интегро-дифференцирования может быть определен из результатов натуральных экспериментов (см. рис. 1).

Например, для задачи однофазной фильтрации флюида в среде с нелокальными эффектами в качестве феноменологической гипотезы используется дробно-дифференциальное обобщение закона фильтрации Дарси

$$\mathbf{u} = -(k_\alpha/\mu) \nabla (R^\alpha p), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (3)$$

где μ – вязкость флюида; k_α – дробно-дифференциальный аналог проницаемости пористой среды; p – давление; \mathbf{u} – вектор скорости фильтрующегося флюида. Подстановка (3) в классическое уравнение неразрывности для сжимаемого флюида в пористой среде приводит к ЛДДМ однофазной фильтрации

$$p_t = \varkappa_\alpha \Delta R^\alpha p + q, \quad (4)$$

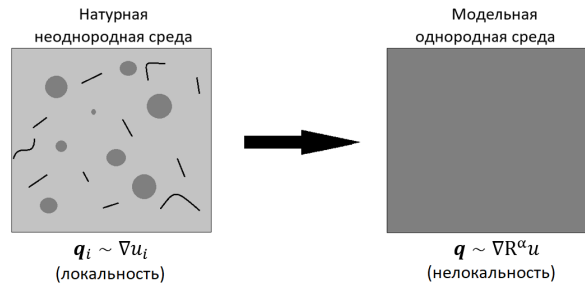


Рис. 1: Схема моделирования аномальных процессов в неоднородных средах

где t – время; \varkappa_α – дробно-дифференциальный аналог коэффициента пьезопродности; q – приведенная плотность объемных источников.

С использованием феноменологического подхода на основе системы уравнений Максвелла и обобщения материального уравнения в работе также построена ДДМ распространения электромагнитных волн.

В §2 для ДДМ (4) в \mathbb{R}^2 при $q = 0$ на группе преобразований растяжения и вращения построено автомодельное решение в терминах функций Фокса:

$$u(r, t) = \mathbb{H}_{1,2}^{1,1} \left[\frac{t^{\frac{2}{\alpha-2}} r^2}{4} \middle| \begin{array}{l} (1, \frac{2}{2-\alpha}) \\ (0, 1), (0, 1) \end{array} \right], \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для ЛДДМ распространения волн

$$u_{tt} = -a_\alpha^2 (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u, \quad u = u(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

получено дисперсионное соотношение $|\mathbf{k}|^\alpha = \omega^2/a_\alpha^2$, справедливое в случае распространения плоских или цилиндрических волн, а также выражения для фазовой $v_\Phi^\alpha = \omega^{1-2/\alpha} a_\alpha^{2/\alpha}$ и групповой $\mathbf{v}_g^\alpha = (\alpha/2) v_\Phi^\alpha \mathbf{n}$ скоростей плоской монохроматической волны, где \mathbf{k} – волновой вектор, а ω – частота. Тем самым доказано, что (5) является моделью диспергирующей среды.

В §3 для дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = f(\mathbf{x}), \quad \alpha \in (1, 2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

показано, что уравнение (6) допускает группы преобразований растяжения и вращения, на основе которых строится фундаментальное решение

$$G_{\alpha,n}^P(\mathbf{x}) = C_{\alpha,n}^P |\mathbf{x}|^{\alpha-n}, \quad C_{\alpha,n}^P = 2^{-\alpha} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma((n-\alpha)/2) / \Gamma(\alpha/2). \quad (7)$$

Доказаны утверждения о виде фундаментальных решений для дробно-дифференциальных обобщений двух видов уравнения Гельмгольца.

Утверждение 1. *Фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца*

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u + \omega^2 u = f(\mathbf{x}), \quad \alpha \in (1, 2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

имеет вид

$$G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) = C_0 J_0 \left[(\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}} |\mathbf{x}| \right] + C_{\alpha,n}^{H^+} (\pi |\mathbf{x}|)^{1-\frac{n}{2}} \delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) = \mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2}{4} \middle| \begin{array}{l} (1 - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (\frac{n}{4} - \frac{1}{2}, 1), (1 - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{n}{4}, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{array} \right].$$

Здесь $C_0 \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная, $C_{\alpha,n}^{H^+} = (\omega^2)^{\frac{2+n}{2\alpha}-1} 2^{-\frac{n}{2}} (\alpha)^{-1}$, $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$ – функция Фокса, а $J_\mu(z)$ – функция Бесселя первого рода.

Для уравнения (8) также доказано, что расходящиеся волны удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (u_r - iku) = 0$, $r = |\mathbf{x}|$.

Утверждение 2. *Фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения модифицированного уравнения Гельмгольца*

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u - \omega^2 u = f(\mathbf{x}), \quad \alpha \in (1, 2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (10)$$

имеет вид

$$G_{\alpha,n}^{H^-}(\mathbf{x}) = C_{\alpha,n}^{H^-} (\pi|\mathbf{x}|)^{1-\frac{n}{2}} \times \\ \times \mathbb{H}_{1,3}^{2,1} \left[\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2}{4} \left| \begin{matrix} (1 - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (\frac{n-2}{4}, 1), (\frac{2\alpha-2-n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{2-n}{4}, 1) \end{matrix} \right. \right], \quad C_{\alpha,n}^{H^-} = \frac{(\omega^2)^{\frac{2+n-2\alpha}{2\alpha}}}{2^{\frac{n}{2}} \pi \alpha}. \quad (11)$$

Фундаментальные решения (функции влияния) (7), (9) и (11) позволяют записать решения уравнений (6), (8) и (10) в виде интеграла свертки

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi}) G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (12)$$

Вторая глава посвящена разработке численных методов исследования ЛДДМ, допускающих постановку в терминах функций влияния точечных источников различной интенсивности. Введение системы вспомогательных точечных источников позволяет моделировать требуемые условия на границах внутренних включений различной природы.

В §4 решается задача моделирования однофазной двумерной фильтрации в неограниченном пласте с пятиточечной системой скважин в среде с пространственной нелокальностью. Постановка задачи после введения системы вспомогательных источников имеет вид

$$p_t + \kappa_{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} p = \sum_{j=1}^{N_d} a_j(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{d,j}) + \sum_{j=1}^{N_n} b_j(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n,j}), \quad (13)$$

$$p|_{t=0} = p_{pl}, \quad p|_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} = p_{pl}, \quad (14)$$

где $a_j (j = 1, \dots, N_d)$, $b_j (j = 1, \dots, N_n)$ – интенсивности вспомогательных источников с координатами $\mathbf{x}_{d,j}$, $\mathbf{x}_{n,j}$, соответствующих добывающей и нагнетательным скважинам, p_{pl} – пластовое давление, $\delta(\mathbf{z})$ – дельта-функция. Значения a_j , b_j определяются из условий

$$p|_{S_{n,i}} = p_n, \quad i = 1, \dots, 4, \quad p|_{S_d} = p_d, \quad (15)$$

где $S_{n,i}$, S_d – границы зон забоя нагнетательных и добывающей скважин радиусов r_n и r_d , а p_n , p_d – давления на этих скважинах, соответственно.

Применение к (13)–(15) преобразования Лапласа \mathcal{L}_t по времени приводит к задаче для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца вида (10). Ее решение в пространстве изображений записывается как

$$\bar{p}^*(s, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_d} a_j^* G_{\alpha,2}^{H^-} (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{d,j}|) + \sum_{j=1}^{N_n} b_j^* G_{\alpha,2}^{H^-} (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n,j}|),$$

где $G_{\alpha,2}^{H^-}(z)$ – фундаментальное решение (11), $\bar{p}^*(s, \mathbf{x}) = \mathcal{L}_t(\bar{p}(t, \mathbf{x}))(s, \mathbf{x})$, \bar{p} – безразмерное давление.

Разработаны алгоритмы численного решения задач установившейся и нестационарной фильтрации для модели (13)–(15) и предложены способы вычисления функций Фокса из соответствующих фундаментальных решений.

Предложен критерий сравнения результатов вычислительных экспериментов при различных α и одинаковых массовых расходах и давлениях на

скважинах. Показано, что аналог коэффициента пьезопроводности \varkappa_α и коэффициент пьезопроводности $\varkappa = \varkappa_2$ в этом случае связаны линейно.

На рис. 2 приведены поля безразмерных давлений \bar{p} , являющиеся решением задачи установившейся фильтрации. Видно, что с уменьшением α уменьшается интенсивность поля и растет «влияние» добывающей скважины, что соответствует супердиффузионному режиму фильтрации при $\alpha < 2$.

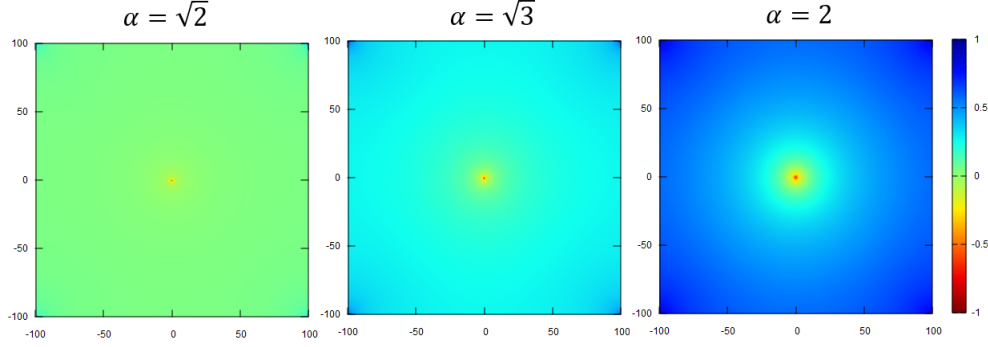


Рис. 2: Поля безразмерного давления \bar{p} в системе пяти скважин

Для нестационарного случая решена задача определения приведенного массового расхода $\bar{G}(t)$ при разных α . Приближенные представления для определения зависимости приведенного массового расхода от времени, а также соответствующие графики представлены в диссертации.

В §5 решается двумерная задача рассеяния волн на одиночной сфере в неоднородной среде, моделируемая ЛДДМ (5). В случае гармонических монохроматических волн такая модель сводится к уравнению (8).

На границе сферы ставится условие $u_n = 0$, для выполнения которого вводится система вспомогательных точечных источников. Модель рассеяния в этом случае принимает вид

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u + k^\alpha u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \sum_{j=1}^N a_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad \alpha \in (1, 2), \quad (16)$$

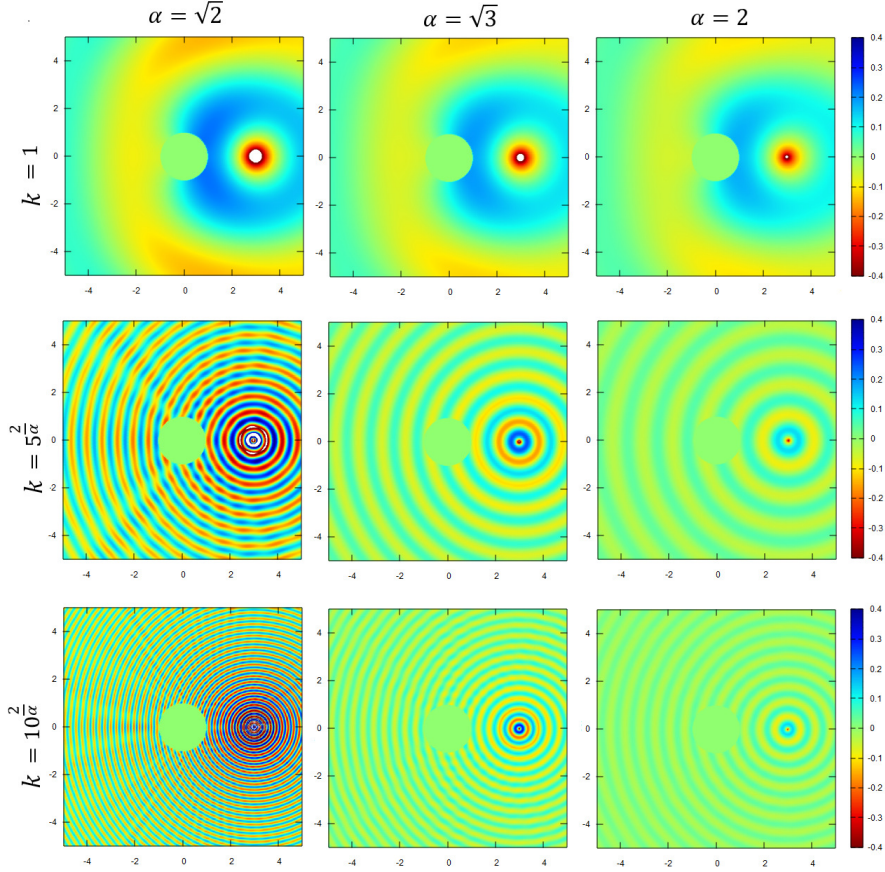
где k – волновое число, \mathbf{x}_s – координата источника колебаний единичной интенсивности, a_j – интенсивности источников, расположенных в точках \mathbf{x}_j , а N – количество вспомогательных источников.

Решение задачи рассеяния имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N a_j G_{\alpha,2}^{H+}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|), \quad (17)$$

где $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ – волновое поле, порожденное источником колебаний, $G_{\alpha,2}^{H+}(z)$ – фундаментальное решение (9).

Разработан алгоритм численного решения задачи рассеяния, реализующий вычисление (17). Проведено численное исследование влияния параметров α и k на решение рассматриваемой задачи. На рис. 3 представлены решения (17) при разных значениях α и k . При $k = 5^{\frac{2}{\alpha}}$ и $k = 10^{\frac{2}{\alpha}}$ наблюдается дифракционная картина. В случае $k = 1$ уменьшение α приводит к большему влиянию точечного источника на характер рассеяния волнового фронта.

Рис. 3: Решение (17) при разных значениях α и k

В третьей главе решается задача факторизации фундаментальных решений (7), (9) и (11) и построения их мультипольных разложений.

В §6 предлагается способ построения факторизованных разложений для функций $g(z)$, $z = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma}$, $r < R$, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{K}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad \mathcal{K}_{p,q}^{m,n}(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s)},$$

где $0 < n < p$, $0 < m < q$, $A_j, B_j > 0$, а \mathcal{L} – контур интегрирования, разделяющий полюса функций $\Gamma(b_j + B_j s)$ и $\Gamma(1 - a_j - A_j s)$. Доказано, что для таких $g(z)$ справедливо факторизованное разложение

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{\cos[(n-2m)\gamma]}{m!(n-m)!} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{K}_{p,q}^{m,n}(s) \frac{\Gamma(\frac{s}{2} + m) \Gamma(\frac{s}{2} + n - m)}{\Gamma^2(\frac{s}{2}) R^s} ds. \quad (18)$$

На основе (18) построены мультипольные разложения фундаментальных решений (7), (9) и (11). Например, для (11) в \mathbb{R}^2 справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть даны k узлов \mathbf{x}_i с полярными координатами (r_i, ψ_i) , $i = 1, \dots, k$, причем $r_i < a$, $0 < a < \infty$. Тогда для любой точки \mathbf{x} с координатами (R, φ) такой, что $R > a$, справедливо разложение

$$\begin{aligned} \Phi_{H^-}(R, \varphi, k) &\equiv \sum_{i=1}^k q_i G_{\alpha, 2}^{H^-}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \\ &= C_{\alpha, 2}^{H^-} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n R^{-n} H_{1, 3}^{2, 1} \left[\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (n - m, 1), (m, 1) \end{matrix} \right] \times \\ &\quad \times [M_n^m(r_i, \psi_i, k) \cos(n - 2m)\varphi + N_n^m(r_i, \psi_i, k) \sin(n - 2m)\varphi], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$M_n^m(r_i, \psi_i, k) = \frac{(-1)^m}{m!(n - m)!} \sum_{i=1}^k q_i r_i^n \cos(n - 2m)\psi_i, \quad (20)$$

$$N_n^m(r_i, \psi_i, k) = \frac{(-1)^m}{m!(n - m)!} \sum_{i=1}^k q_i r_i^n \sin(n - 2m)\psi_i. \quad (21)$$

Аналогичные утверждения о виде мультипольных разложений для фундаментальных решений (7) и (9) представлены в диссертации.

В §7 даны способы численного расчета функций $H_{1, 3}^{2, 1}(z)$ и $H_{2, 4}^{2, 1}(z)$, основанные на их прямых и асимптотических разложениях.

Для $H_{2, 4}^{2, 1}(z)$ доказано, что ее асимптотическое разложение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} H_{2, 4}^{2, 1} \left[z \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1), (0, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{matrix} \right] &\sim \\ &\sim \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(1 + \frac{k\alpha}{2}) z^{-1 - \frac{k\alpha}{2}}}{\Gamma(-\frac{k\alpha}{2}) \Gamma(k + \frac{1}{2}) \Gamma(-k + \frac{1}{2})} + Y_0(2\sqrt{z}), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $Y_0(z)$ – функция Бесселя второго рода. Подобное представление позволяет значительно ускорить численный расчет функций $H_{2, 4}^{2, 1}(z)$.

В четвертой главе приводятся разработанные последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы численного решения ЛДДМ (6), (8), (10) и результаты их верификации.

Для вычисления интеграла (12) используются кубатурные формулы

$$u(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^N q_i G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad q_i = c_i f(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i. \quad (22)$$

Нахождение численного решения уравнений (6), (8) и (10) по кубатурам (22) требует порядка $\mathcal{O}(N^2)$ вычислительных операций. Для уменьшения количества операций в §8 предлагается использование мультипольного подхода.

В мультипольных методах используется иерархический подход к разбиению расчетной области. На каждом уровне такой иерархической структуры определяется схема взаимодействия, по которой взаимодействия между подобластями расчетной области вычисляются посредством мультипольных раз-

ложений. Благодаря учету взаимодействий между подобластями достигается значительное уменьшение количества вычислительных операций.

Предложен следующий мультипольный алгоритм.

1. На уровнях $l = l_2, \dots, l_{max}$ для каждой ячейки i , содержащей k_i^l кубатурных узлов \mathbf{x}_i определяется схема взаимодействия L_i^l и вычисляются мультипольные взаимодействия $\Phi(\mathbf{x}, k_i^l)$ вида (19) рассматриваемой ячейки с узлами \mathbf{x}_i с каждой расчетной точкой \mathbf{x} , лежащих в ячейках L_i^l .

2. Вычисляются локальные взаимодействия $\Lambda_I^{l_{max}}(\mathbf{x})$ между всеми кубатурными узлами и расчетными точками, лежащими в соседних ячейках на уровне l_{max} по прямым кубатурным формулам вида (22).

3. Решение в точке \mathbf{x} представляется как

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{l=2}^{l_{max}} \sum_{j \in L_x^l} \Phi(\mathbf{x}, k_j^l) + \Lambda_I^{l_{max}}(\mathbf{x}),$$

где L_x^l – схема взаимодействия для ячейки с точкой \mathbf{x} на уровне l .

Для максимально возможного $l_{max} = \log_{2^n}(N)$, суммарное количество операций алгоритма равно $3^n(2^n - 1)Np^n \log_{2^n}(N) + 3^n N$. Таким образом, алгоритм требует порядка $\mathcal{O}(N \log N)$ вычислительных операций.

Мультипольные методы обладают хорошей масштабируемостью с точки зрения параллельных вычислений. Разработан гибридный MPI+OpenMP параллельный мультипольный алгоритм, распараллеливание вычислений в котором обеспечивается принципом геометрического параллелизма и параллельным вычислением конечных сумм в мультипольных разложениях.

В §9 приводится описание разработанного комплекса программ компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов с использованием мультипольного подхода, а также выполняется построение точных частных решений рассматриваемых ЛДДМ, используемых для отладки и тестирования этого комплекса.

В §10 приводятся результаты тестовых расчетов, демонстрирующие эффективность предложенных алгоритмов.

В таблице 1 представлены результаты построения численного решения уравнения (6) при $\alpha = \sqrt{2}$ и $f(\mathbf{x}) = e^{-5|\mathbf{x}|^2}$. Здесь p – количество членов ряда по n в (19), t_{dir} – время расчета по (22), t_{mult} – время расчета мультипольным алгоритмом, Δ_m – абсолютная погрешность вычислений, N – количество кубатурных узлов, а $S = t_{dir}/t_{mult}$ – ускорение алгоритма.

Таблица 1: Результаты вычислительных экспериментов последовательного алгоритма

N	l_{max}	p	t_{dir}, c	t_{mult}, c	Δ_m	S
400	4	4	0.026	0.015	$3.82 \cdot 10^{-4}$	1.733
2500	5	4	0.852	0.151	$2.02 \cdot 10^{-4}$	5.642
10000	6	4	11.13	0.672	$2.01 \cdot 10^{-4}$	16.57
40000	7	4	171.1	3.243	$1.52 \cdot 10^{-4}$	52.76
250000	8	4	6731	25.71	$1.95 \cdot 10^{-4}$	261.9

Результаты вычислительных экспериментов для OpenMP алгоритма приведены в таблице 2. Здесь t_{mult} – время расчета последовательным алгоритмом, t_{mult}^{omp} – время расчета OpenMP алгоритмом, $S = t_{mult}/t_{mult}^{omp}$ – ускорение алгоритма. Видно, что ускорение немонотонно зависит от l_{max} при фиксированном N и достигает максимума при больших N . Представленные расчеты проводились на шестиядерном процессоре Intel Xeon CPU E5-1650.

Таблица 2: Результаты вычислительных экспериментов OpenMP алгоритма

N	l_{max}	t_{mult} , с	t_{mult}^{omp} , с	S
2500	4	0.173	0.072	2.402
	5	0.151	0.069	2.188
	6	0.187	0.081	2.308
10000	5	0.913	0.313	2.916
	6	0.672	0.273	2.461
	7	0.954	0.296	3.222
40000	6	3.791	1.015	3.734
	7	3.241	0.941	3.446
	8	3.895	1.184	3.289
250000	7	31.47	7.287	4.318
	8	25.71	5.843	4.399
	9	27.92	6.142	4.545

Таблица 3: Результаты вычислительных экспериментов MPI алгоритма

n_p	1	2	4	8	16	32	64	128
t_n^{mpi} , с	1270	638.2	330.7	170.1	88.87	50.11	35.44	24.38
S_n	1	1.989	3.841	7.466	14.29	25.35	35.83	52.08
E_n	1	0.994	0.960	0.933	0.890	0.792	0.559	0.406

Вычислительные эксперименты для MPI версии параллельного алгоритма (см. таблицу 3) проводились на вычислительном кластере университета при $N = 10^6$. Здесь n_p – количество узлов кластера, t_n^{mpi} – время расчета параллельным MPI алгоритмом, $S_n = t_1^{mpi}/t_n^{mpi}$ – ускорение алгоритма, а $E_n = S_n/n_p$ – эффективность. С ростом количества узлов наблюдается рост ускорения, однако эффективность при этом падает в силу особенностей декомпозиции расчетной области и увеличения числа пересылок между узлами.

В качестве примера модельной задачи решалась задача построения кривой восстановления давления (КВД) для ДДМ однофазной фильтрации (4) в системе пяти скважин. Такая модель описывается задачей Коши вида

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = -\varkappa_\alpha (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{p}, \quad \bar{p}(0, \mathbf{x}) = p_c(\mathbf{x}, \alpha),$$

где $p_c(\mathbf{x}, \alpha)$ – поле давлений, соответствующее предельному случаю установившегося фильтрационного течения.

На рис. 4 представлены графики КВД при разных α . С уменьшением α увеличивается скорость восстановления давления в добывающей скважине, что соответствует супердиффузионному режиму. Полученные результаты могут быть использованы для идентификации параметров модели α и \varkappa_α .

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают эффективность разработанных мультипольных алгоритмов.

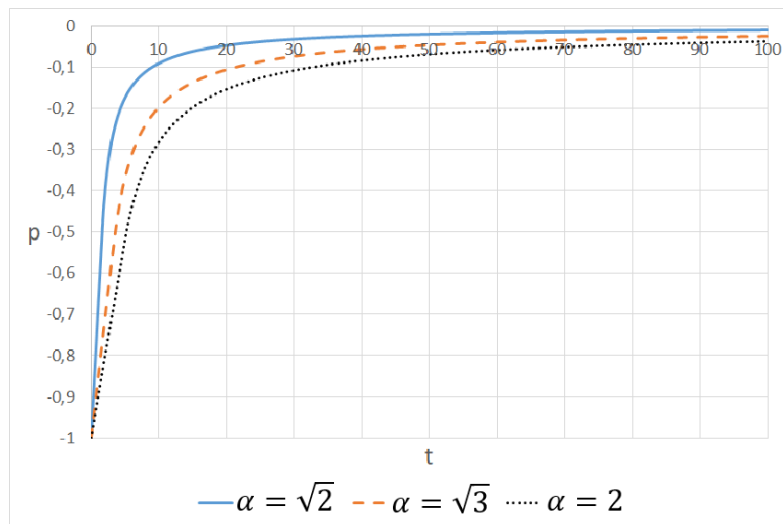


Рис. 4: Эволюция давления на контуре добывающей скважины

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты исследования сводятся к следующему.

1. Установлено, что нестационарные ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа обладают автомодельными решениями и решениями типа бегущих волн, построены примеры таких решений. Доказана справедливость постановки условия излучения Зоммерфельда для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца.

2. Доказаны утверждения о виде фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа в \mathbb{R}^n .

3. Разработаны алгоритмы компьютерного моделирования процессов диффузионного и волнового типов в средах с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников. Выполнены их программные реализации на языке программирования C++, с использованием которых решены задачи моделирования однофазной фильтрации с системой скважин и рассеяния волн на непроницаемом объекте. Показано, что в задаче фильтрации при неизменных давлениях и массовых расходах на скважинах уменьшение дробного показателя α приводит к более быстрому выходу на стационарный режим. Для задачи рассеяния установлено, что изменение α оказывает влияние на волновой процесс только в ближней зоне источника возмущения.

4. Предложен алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса. С его использованием выполнена факторизация и построены мультипольные разложения фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца. Предложены способы вычисления значений функций Фокса из соответствующих фундаментальных решений и их мультипольных разложений.

5. Разработаны последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы численного решения ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа.

Проведены оценки количества вычислительных операций последовательных алгоритмов и эффективности параллельных алгоритмов. Выполнены программные реализации этих алгоритмов на языке программирования C++ с использованием стандартов OpenMP и MPI.

6. Построен ряд точных частных решений рассматриваемых ЛДДМ для верификации разработанных алгоритмов. Проведена серия вычислительных экспериментов, показывающая применимость и эффективность этих алгоритмов для построения численных решений многомерных ЛДДМ. Показано, что использование параллельного мультипольного алгоритма позволяет на 4 порядка сократить время расчета по сравнению с классическими алгоритмами при количестве расчетных узлов $\sim 10^6$. Решена модельная задача построения кривой восстановления давления на контуре добывающей скважины для ЛДДМ однофазной фильтрации, результаты которой могут быть использованы для идентификации параметров модели.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. *Белевцов, Н. С.* Об одной дробно-дифференциальной модификации модели нелетучей нефти / Н. С. Белевцов // Математика и математическое моделирование. — 2021. — Т. 6. — С. 13–27.

2. *Belevtsov, N. S.* Factorization of the fundamental solution to fractional Helmholtz equation / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, No. 1. — P. 57–62.

3. *Белевцов, Н. С.* Мультипольный алгоритм численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца / Н. С. Белевцов // Вычислительные методы и программирование. — 2021. — Т. 22. — С. 109–120.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

4. *Белевцов, Н. С.* Быстрый метод мультиполей для решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона / Н. С. Белевцов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019614633 от 09.04.2019.

5. *Белевцов, Н. С.* Мультипольный метод численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца / Н. С. Белевцов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021661816 от 15.07.2021.

Публикации в изданиях, индексируемых в международных реферативных базах Web of Science и Scopus

6. *Belevtsov, N. S.* Lie group analysis of 2-dimensional space-fractional model for flow in porous media / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2018. — Vol. 41, No. 18. — P. 9123–9133.

7. *Belevtsov, N. S.* Symmetry group classification and conservation laws of the nonlinear fractional diffusion equation with the Riesz potential / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Symmetry. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 178.

8. *Belevtsov, N. S.* Numerical algorithms for a fractional generalization of the Poisson equation / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // AIP Conference Proceedings. — AIP Publishing LLC. — 2020. — Vol. 2293, No. 1. — P. 420051.

9. *Belevtsov, N. S.* A fast algorithm for fractional Helmholtz equation with application to electromagnetic waves propagation / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Applied Mathematics and Computation. — 2022. — Vol. 416. — P. 126728.

Публикации в остальных изданиях, материалы конференций

10. *Belevtsov, N. S.* Symmetry properties of linear fractional filtration equation with the Riesz potential / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences (ICMMAS'17). — 2017. — P. 291-292.

11. *Белевцов, Н. С.* Алгоритм численного решения стационарного уравнения фильтрации с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов, С. Ю. Лукашук // Лобачевские чтения 2018: материалы Семнадцатой молодежной научной школы-конференции. — 2018. — Т.56. — С. 52–55.

12. *Белевцов, Н. С.* О симметричной редукции уравнения фильтрации с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов // Молодежный Вестник УГАТУ. — 2018. — Т. 2., № 19. — С. 21–25.

13. *Белевцов, Н. С.* Параллельный алгоритм численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона / Н. С. Белевцов, С. Ю. Лукашук // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2019): труды международной конференции. — 2019. — С. 165–174.

14. *Belevtsov, N. S.* The general solution of a fractional Bessel equation / N. S. Belevtsov // International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences (ICMMAS'19). — 2019. — P. 129–130.

15. *Belevtsov, N. S.* Multipole expansion of the fundamental solution of a fractional degree of the Laplace operator / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya «Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory». — 2020. — Vol. 176. — P. 26–33.

16. *Белевцов, Н. С.* Исследование дробно-дифференциальной модели однофазной фильтрации с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов, С. Ю. Лукашук // Многофазные системы. — 2020. — Т. 2. — С. 14.

17. *Белевцов, Н. С.* Моделирование однофазной фильтрации в среде с пространственной нелокальностью / Н. С. Белевцов, С. Ю. Лукашук // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». — 2022. — Т. 2. — С. 302–304.

18. *Белевцов, Н. С.* Дробно-дифференциальная модель линейной двухфазной фильтрации / Н. С. Белевцов // Молодежный Вестник УГАТУ. — 2023. — Т. 1., № 27. — С. 104–108.