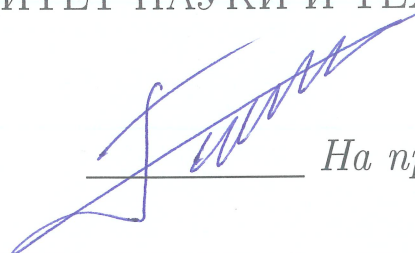


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования.

«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»



*На правах рукописи*

БЕЛЕВЦОВ Никита Сергеевич

**МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ  
ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ  
ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ  
ДИФФУЗИОННЫХ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д-р физ.-мат. наук, доцент  
Лукащук Станислав Юрьевич

Уфа – 2023

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>		<b>3</b>
<b>Глава 1</b>	<b>Моделирование нелокальных диффузионных и волновых процессов</b>	<b>15</b>
§1	Математические модели с многомерными дробно-дифференциальными операторами	15
§2	Некоторые свойства нелокальных дробно-дифференциальных по пространству моделей	23
§3	Фундаментальные решения дробно-дифференциальных аналогов уравнений эллиптического типа	33
<b>Глава 2</b>	<b>Моделирование нелокальных процессов с использованием метода вспомогательных источников</b>	<b>48</b>
§4	Моделирование однофазной фильтрации в среде с пространственной нелокальностью	49
§5	Моделирование рассеяния волн на одиночной сфере	67
<b>Глава 3</b>	<b>Построение мультипольных разложений</b>	<b>81</b>
§6	Факторизация фундаментальных решений	82
§7	Численный расчет функций Фокса	98
<b>Глава 4</b>	<b>Мультипольные алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных моделей</b>	<b>106</b>
§8	Мультипольные алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца	107
§9	Комплекс программ компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов с использованием мультипольного подхода	115
§10	Результаты тестовых расчетов	122
<b>Заключение</b>		<b>135</b>
<b>Список литературы</b>		<b>137</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность и степень разработанности темы исследования**

Моделирование процессов переноса вещества и энергии в сложных неоднородных средах является важной задачей математического моделирования. Диффузионные и волновые процессы в подобных средах в ряде случаев характеризуются аномальной кинетикой протекания, которая не подчиняется нормальной (гауссовой) статистике и может проявляться в виде эффектов памяти (нелокальность по времени) или дальних пространственных взаимодействий (нелокальность по пространству) [1–6]. Данные эффекты возникают в гидродинамике [1, 2, 6, 7], электродинамике [8, 9], классической и квантовой механике [10, 11], физике плазмы [12] и во многих других областях [13, 14].

Интегро-дифференцирование дробного порядка [15, 16] активно используется для описания аномальных явлений и процессов с эффектами пространственной и временной нелокальности. Применение этого аппарата позволяет описывать аномальную кинетику в сложных неоднородных средах посредством использования феноменологических гипотез с дробно-дифференциальными операторами по времени или пространству. При этом нелокальность, порождаемая структурными особенностями среды, описывается этими операторами, в то время как сама среда моделируется как однородная. В настоящее время предложено множество дробно-дифференциальных математических моделей (ДДМ) различных процессов с аномальной кинетикой протекания и численных методов их исследования (см., например, работы А. М. Нахушева [17], В. В. Учайкина [18], В. Е. Тарасова [9, 14], Р. Р. Нигматуллина [19, 20], В. Е. Федорова [21], В. Г. Пименова [22–24], А. В. Псху [25, 26], П. Н. Вабищевича [27], Р. Т. Сибатова [28], Р. И. Паровика [29, 30], А. А. Алиханова [31], Ю. Лучко [5], Ф. Майнарди [3, 4], Л. Кафарелли [7, 32], Р. Метцлера [6], Р. Хилфера [33], Р. Горенфло [34], М. Ортигуера [35] и др.). Отметим, что наиболее изученными на данный момент являются ДДМ с дробно-дифференциальными операторами по времени [6, 33, 36, 37]. Существенно менее изучены ДДМ с многомерными операторами дробного интегро-дифференцирования по пространственным переменным. К исследованию таких моделей

проявляют активный интерес многие научные группы [7, 34, 35, 38].

Предпосылки использования дробного интегро-дифференцирования возникли с самого зарождения дифференциального исчисления у Г. Лейбница, П. Лапласа, Ж. Фурье и Л. Эйлера. Развитие теории дробного исчисления функций одной переменной принято связывать с работами Н. Абеля, Ж. Лиувилля, Б. Римана, Ж. Адамара, Г. Вейля, А. Маршо, А. Н. Герасимова, М. Капуто, и др. Подробный обзор хронологии развития теории интегро-дифференцирования дробного порядка приведен в монографии [15].

Понятие дробного интегро-дифференцирования функций многих переменных введено М. Риссом [39, 40]. Рассматриваемые в его работах многомерные операторы типа потенциала (известные с тех пор как потенциалы Рисса) являются обобщением понятия дробного интегрирования на случай многомерного пространства. При этом одним из обобщений понятия дробного дифференцирования в  $\mathbb{R}^n$  является дробная степень оператора Лапласа [15]. Теория потенциалов Рисса и дробной степени оператора Лапласа в дальнейшем была развита, например, в работах О. Фростмана [41], И. М. Стейна [42], П. Лизоркина [43], С. Г. Самко [44, 45], Л. Кафарелли [32], М. Ортигуера [35], Б. С. Рубина [46] и др. Эти операторы использовались для описания явлений и процессов в сложных неоднородных средах с аномальной кинетикой протекания в работах [8, 9, 34, 38, 47–53]. В монографии [54] приведено описание основных свойств дробной степени оператора Лапласа, а также продемонстрированы некоторые ДДМ, содержащие этот оператор. В работе [55] представлен обзор существующих на данный момент методов численного решения ДДМ с дробной степенью оператора Лапласа. Для множества классических уравнений математической физики были предложены обобщения с использованием данного оператора, такие как, например, дробно-дифференциальные обобщения уравнения Пуассона [56], уравнения Гельмгольца [48], уравнения реакции-диффузии [57], уравнения Кана-Хиларда [58], уравнения фильтрации [59, 60], уравнения Шредингера [61], и других. Отметим, что ДДМ с потенциалом Рисса являются существенно менее исследованными, чем ДДМ с положительной дробной степенью оператора Лапласа.

Хорошо известно, что исследование линейных математических моделей

диффузионных и волновых процессов в ряде случаев может быть редуцировано к исследованию дифференциальных уравнений эллиптического типа, таких как, например, уравнения Пуассона и уравнения Гельмгольца [62]. Эти уравнения являются ключевыми в теории потенциала (см. [63–65]). Многие многомерные линейные дробно-дифференциальные модели (ЛДДМ) таким же образом могут быть редуцированы к дробно-дифференциальным аналогам уравнений эллиптического типа.

Одним из мощных инструментов для исследования ЛДДМ является теория интегральных преобразований. Методы интегральных преобразований Фурье, Лапласа и Меллина [66] позволяют находить точные решения линейных дробно-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также выполнять построение их фундаментальных решений (функций влияния). Например, с использованием преобразований Фурье и Меллина в работе [48] построено фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа в трехмерном пространстве, а в работе [56] – фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона с потенциалом Рисса. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов (дробно-дифференциальных операторов в том числе) позволяют записать решение соответствующих неоднородных уравнений в интегральном виде.

Точные решения ДДМ зачастую представляются через функции Миттаг-Леффлера, Райта и Фокса (см., например, монографию [16]). При этом важно уметь выполнять численный расчет подобных функций для возможности проведения компьютерного моделирования. В монографии [67] рассмотрены функции Миттаг-Леффлера и Райта, а также продемонстрирована их связь с интегро-дифференцированием дробного порядка. В работах [68, 69] разработаны алгоритмы вычисления значений этих функций. Основные определения, представления и свойства функций Фокса, а также их связь с дробным исчислением подробно изложены в монографии [70]. Важно отметить, что для функций Фокса в настоящее время не существует универсального алгоритма их вычисления. Тем не менее для некоторых частных видов этих функций может быть определена процедура их численного расчета, основанная на ис-

пользовании прямых и асимптотических разложений.

В ряде случаев математические модели процессов переноса вещества и энергии могут быть записаны в терминах функций влияния точечных источников. Решения таких моделей являются линейной комбинацией соответствующих фундаментальных решений и для их численного исследования может быть эффективно использован метод вспомогательных источников (метод фундаментальных решений) [71, 72]. Изначально этот метод был разработан для решения стационарных задач теории потенциала, однако в дальнейшем был модифицирован и для решения ряда нестационарных задач диффузионных и волновых процессов [73–75]. Тем не менее, метод вспомогательных источников никогда ранее не находил своего применения для численного исследования многомерных ДДМ.

В силу того, что построение аналитических решений большинства ДДМ с дробными интегро-дифференциальными операторами по пространственным переменным является невозможным, методы и алгоритмы их численного анализа представляют собой большой интерес для математического моделирования соответствующих процессов. В настоящее время численные методы решения уравнений с дробно-дифференциальными операторами по пространственным переменным достаточно активно развиваются разными научными группами (см., например, сравнительный обзор [55]). При этом важно отметить, что в соответствующих работах зачастую используются различные определения пространственных дробно-дифференциальных операторов, и до сих пор в научной среде отсутствует консенсус относительно их «правильного» определения. Тем не менее, многие из этих определений являются эквивалентными друг другу на достаточно «хороших» классах функций, которые в большинстве случаев и используются при математическом моделировании. Такая множественность позволяет использовать огромное разнообразие классических численных методов, обобщаемых на случай дробно-дифференциальных уравнений. Наиболее развитым среди соответствующих численных методов является класс конечно-разностных методов: в работах [76, 77] конечно-разностный подход применен для исследования дробно-дифференциальных по пространству моделей диффузионного типа с дробной сте-

пению оператора Лапласа; в работах [22–24] использована конечно-разностная аппроксимация типа Грюнвальда-Летникова для одномерных дробно-дифференциальных по пространству уравнений и систем диффузионного типа с функциональным запаздыванием; в [27] конечно-разностная аппроксимация построена для дробных степеней эллиптических дифференциальных операторов; в работе [78] предложен численный алгоритм аппроксимации дробной степени оператора Лапласа, основанный на комбинации конечно-разностной аппроксимации и квадратурной формулы для получения дискретного сверточного представления решения. Важно отметить, что конечно-разностные методы решения многомерных ДДМ достаточно трудозатратны в силу большого объема вычислений, обусловленного нелокальностью операторов дробного интегро-дифференцирования. В настоящее время также развиваются конечно-элементные методы [79, 80] и конечно-объемные методы [81] решения многомерных ДДМ. Для спектрального представления дробной степени оператора Лапласа в работе [82] предложен, так называемый, метод спектрального элемента. В [79] показано, что вычислительная сложность адаптивного конечно-элементного алгоритма составляет  $\mathcal{O}(N \log^4 N)$ , что при больших  $N$  более эффективно, чем конечно-разностные методы. Существуют и стохастические методы численного решения многомерных ДДМ, так называемые методы «случайного блуждания по сферам» (Walk-on-Spheres method) [83]. Несмотря на существующие вышеперечисленные методы, разработка новых эффективных численных алгоритмов исследования многомерных ДДМ остается важной задачей.

Как было сказано ранее, численный анализ многомерных ДДМ приводит к большому количеству вычислительных операций. Для уменьшения объема вычислений и сокращения времени расчета могут быть использованы, например, мультипольные методы, позволяющие уменьшить вычислительную сложность построения численного решения рассматриваемых уравнений с  $\mathcal{O}(N^2)$  операций до  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Классическая теория мультипольных методов была построена, развита и применена для нахождения численных решений классических уравнений математической физики, таких как уравнения Пуассона, Гельмгольца, теплопроводности и многих других в работах

В. В. Рохлина и Л. Грингарда [84–87]. В монографии Н. А. Гумерова [62] представлено подробное описание быстрого метода мультиполей для трехмерного уравнения Гельмгольца. В работах [88–90] предложены параллельные версии классических мультипольных алгоритмов, демонстрирующие их высокую эффективность и масштабируемость. В настоящее время мультипольный подход активно используется в различных областях науки и техники для моделирования диффузионных и волновых процессов [91–94]. Однако ни последовательные, ни параллельные мультипольные методы не использовались для построения численных решений дробно-дифференциальных уравнений с дробной степенью оператора Лапласа или с потенциалом Рисса.

Мультипольные методы тесно связаны с теорией факторизации [95, 96], потому что в их основе лежит использование факторизованных мультипольных разложений фундаментальных решений рассматриваемых уравнений. Фундаментальные решения классических уравнений математической физики, как и их факторизованные разложения, достаточно хорошо известны (см., например, [97, 98]), чего нельзя сказать про многомерные дробно-дифференциальные уравнения. Поэтому задача построения факторизованных мультипольных разложений фундаментальных решений дробно-дифференциальных уравнений является первичной при разработке мультипольных методов численного исследования соответствующих ЛДДМ.

Для верификации численных алгоритмов исследования рассматриваемых многомерных ДДМ могут быть использованы их точные частные решения. Один из способов построения таких решений связан с использованием методов интегральных преобразований (см. [16]). Другим мощным аппаратом для этого может послужить групповой анализ дифференциальных уравнений. Групповой анализ был создан в работах С. Ли и в дальнейшем развит в работах Л. В. Овсянникова, П. Олвера, Н. Х. Ибрагимова [99–103]. В работах [104–107] основные методы группового анализа были обобщены на случай дробно-дифференциальных уравнений с производными Римана–Лиувилля и Капуто, что обуславливает их применимость к исследованию ДДМ. Знание симметрий уравнений позволяет строить их инвариантно-групповые решения. В работах автора [108, 109] было предложено обобщение основных мето-



дов группового анализа для поиска симметрий многомерных дробно-дифференциальных уравнений с потенциалом Рисса. Тем не менее симметричные свойства ранее не использовались для построения инвариантно-групповых решений таких уравнений.

Таким образом, основным **объектом моделирования** в работе выступают нестационарные и установившиеся процессы аномального переноса вещества и энергии в неограниченных неоднородных сложных средах, описываемые многомерными линейными дробно-дифференциальными моделями (ЛДДМ). При этом из проведённого обзора следует, что является актуальной **задача** развития численно-аналитических методов исследования математических моделей указанных видов процессов, в основу которых могут быть положены метод фундаментальных решений и мультипольные методы.

### **Цель и задачи исследования**

*Целью* диссертационной работы является разработка мультипольных алгоритмов компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов, описываемых линейными многомерными дробно-дифференциальными математическими моделями.

Для достижения данной цели в работе были поставлены и решены следующие *задачи*.

1. Исследование свойств ЛДДМ нелокальных процессов диффузионного и волнового типов, полученных на основе феноменологического подхода.

2. Построение фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа.

3. Разработка и программная реализация численных алгоритмов компьютерного моделирования процессов диффузионного и волнового типов в нелокальных средах с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников.

4. Построение факторизованных мультипольных разложений фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца.

5. Разработка и программная реализация последовательных и парал-

лельных мультипольных алгоритмов численного решения ЛДДМ.

6. Исследование эффективности разработанных численных алгоритмов для решения задач компьютерного моделирования нелокальных процессов различной физической природы.

### **Научная новизна**

1. На основе симметричных свойств нестационарных ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа показано, что такие модели обладают автомодельными решениями и решениями типа бегущих волн, построены примеры таких решений. Доказано, что для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца остается справедливой постановка условия излучения Зоммерфельда.

2. Построены фундаментальные решения многомерных дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца. Предложен и обоснован способ их приближенного вычисления с заданной точностью.

3. Предложен подход к моделированию нелокальных сред с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников, основанный на методе вспомогательных внутренних источников. На его основе разработаны численные алгоритмы решения стационарной и нестационарной задач нелокальной однофазной фильтрации с системой скважин и задачи рассеяния волн на непроницаемом объекте в нелокальной среде.

4. Предложен алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина–Барнса, на основе которого выполнена факторизация фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца, а также построены их мультипольные разложения в терминах функций Фокса. На основе прямых и асимптотических разложений функций Фокса из построенных мультипольных разложений предложены способы их приближенного вычисления.

5. Разработаны последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы численного решения многомерных ЛДДМ для вычислительных систем с общей и распределенной памятью.

6. Показано, что в ЛДДМ диффузионного типа уменьшение дробного показателя  $\alpha$  приводит к более быстрому выходу системы на стационарный

режим. Установлено, что в волновых ЛДДМ дробный показатель  $\alpha$  оказывает влияние на волновой процесс только в ближней зоне источников возмущений.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Основные полученные в диссертации результаты носят теоретический характер. Методы и результаты работы могут быть использованы для аналитического и численного исследований многомерных ЛДДМ диффузионных и волновых процессов с потенциалом Рисса и с дробной степенью оператора Лапласа.

Разработанные численные алгоритмы, основанные на обобщении метода вспомогательных источников, могут использоваться для решения задач компьютерного моделирования нелокальных процессов в средах с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников.

Предложенный алгоритм факторизации применим к любым функциям, допускающим представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса.

Построенные точные частные решения рассматриваемых ЛДДМ могут быть использованы для тестирования алгоритмов их численного решения.

Разработанные последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы развивают мультипольный подход и распространяют его на случай многомерных ДДМ. Параллельные версии предложенных алгоритмов могут быть использованы для эффективного компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов.

Практическая значимость работы обуславливается возможностью использования предложенных подходов и разработанных алгоритмов при решении задач однофазной и многофазной фильтрации флюидов в неоднородных трещиновато-пористых средах с естественной трещиноватостью (актуально для нефтяного инжиниринга), задач распространения электромагнитных волн в средах с пространственной дисперсией (актуально для оптики кристаллов и физики плазмы), а также задач обработки и интерпретации результатов применения электрических и электромагнитных методов для определения пластовых параметров (актуально в геофизике).

### **Методология и методы исследования**

При решении поставленных в диссертации задач использовались базовые

принципы математического моделирования, методы теории интегро-дифференцирования дробного порядка в  $\mathbb{R}^n$ , методы теории потенциала, теории интегральных преобразований и специальных функций, мультипольные методы и методы фундаментальных решений, технологии разработки последовательных и параллельных алгоритмов для высокопроизводительных вычислительных систем, а также основные принципы проведения вычислительных экспериментов.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Автомодельные решения и решения типа бегущих волн для нестационарных ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа. Доказательство справедливости постановки условия излучения Зоммерфельда для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца. (Соответствует п. 1 паспорта специальности).

2. Фундаментальные решения дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца. (Соответствует п. 1 паспорта специальности).

3. Алгоритмы численного исследования ЛДДМ с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников, для проведения компьютерного моделирования процессов однофазной фильтрации в системе скважин и рассеяния волн на непроницаемом объекте. Способы вычисления функций влияния точечных источников в этих ДДМ. (Соответствует п. 2 паспорта специальности).

4. Алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса. Факторизованные мультипольные разложения фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца. Способ вычисления функций Фокса из построенных фундаментальных решений и их мультипольных разложений. (Соответствует п. 2 паспорта специальности).

5. Последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы компьютерного моделирования ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа. (Соответствует п. 2 паспорта специальности).

6. Программные реализации разработанных мультипольных алгоритмов на языке программирования C++ в виде комплекса программ компьютерно-

го моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов. (Соответствует п. 3 паспорта специальности).

7. Результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие эффективность разработанных алгоритмов, проведенные на основе предложенного набора тестовых задач. (Соответствует п. 2 паспорта специальности).

### **Степень достоверности и апробация результатов**

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических доказательств сформулированных утверждений, тестированием разработанных программных реализаций предложенных алгоритмов, а также сравнением результатов вычислительных экспериментов с построенными точными частными решениями рассматриваемых модельных задач.

Результаты диссертации обсуждались на семинарах научно-исследовательской лаборатории «Групповой анализ математических моделей естествознания, техники и технологий» (ФГБОУ ВО УГАТУ, 2015–2019 г.г.) и докладывались на следующих конференциях:

- Всероссийская молодежная научная конференция «Мавлютовские чтения» (г. Уфа, 2015 – 2018 г.г., [110–112]),
- Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, 2016 – 2018 г.г., [113, 114]),
- Международная конференция «International conference on mathematical modelling in applied sciences (ICMMAS'17)» (г. Санкт – Петербург, 2017 г., [115]),
- Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2018» (г. Казань, 2018 г., [116, 117]),
- Международная конференция «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения» (г. Санкт – Петербург, 2018 г., [118]),
- Всероссийская зимняя школа-семинар магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Актуальные проблемы науки и техники» (г. Уфа, 2018 – 2022 г. г., [119–121]),
- IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы при-

- кладной математики» (г. Нальчик, 2018 г., [122]),
- Международная конференция «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2019)» (г. Калининград, 2019, [123]),
  - Международная конференция «International conference on mathematical modelling in applied sciences (ICMMAS'19)» (г. Белгород, 2019 г., [124]),
  - Международная конференция «International conference on numerical analysis and applied mathematics (ICNAAM'19)» (Родос, Греция, 2019 г., [125]),
  - VII Российская конференция с международным участием «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения» (г. Уфа, 2020 г., [126]),
  - Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2022» (г. Уфа, 2022 г., [127]).

Результаты диссертации опубликованы в 26 научных работах. Также получены два свидетельства о регистрации программы для ЭВМ [128, 129]. Из научных работ три опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК [130–132] и четыре работы — в зарубежных рецензируемых журналах [108, 109, 125, 133], индексируемых в международной реферативной базе данных Web of Science.

В работах, выполненных в соавторстве, научному руководителю С. Ю. Лукачку принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю Н. С. Белевцову — численные и аналитические исследования, точные формулировки и доказательства результатов. Все основные результаты диссертации получены лично автором. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0042 между Минобрнауки РФ, ФГБОУ ВПО «УГАТУ» и ведущим учёным Н.Х. Ибрагимовым по теме «Математическое моделирование и групповой анализ дифференциальных уравнений» (2011-2015 гг.) и проекта 1.3103.2017/ПЧ госзадания Минобрнауки РФ на тему «Математическое и компьютерное моделирование процессов фильтрации в неоднородных коллекторах нефтегазовых месторождений на основе дробно-дифференциального подхода» (2017-2019 гг.).

## Глава 1

# МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

### §1 Математические модели с многомерными дробно-дифференциальными операторами

**1.1 Феноменологический подход к моделированию нелокальных процессов.** В последние годы моделирование разнообразных диффузионных и волновых процессов в сложных неоднородных сплошных средах является предметом активного изучения. Рассматриваемые на макроскопическом уровне процессы переноса вещества и энергии в таких средах часто обладают аномальной кинетикой протекания, что характеризуется отклонениями от гауссовой статистики. Например, процессы фильтрации флюидов в трещиновато-пористых средах могут обладать субдиффузионным или супердиффузионным характером протекания за счет присутствия в среде разнообразных ловушек и трещин [7, 51]. Другим примером нелокальных процессов может служить движение частиц в плазме, происходящее по законам аномальной диффузии (см. [12]) за счет наличия неоднородного и постоянно меняющегося магнитного поля.

Существуют различные подходы к моделированию процессов в сложных неоднородных средах. Одним из них является представление сложной среды как совокупности простых, процессы в которых описываются уравнениями с производными и интегралами целого порядка. Например, на подобном подходе основаны модели двойной пористости [134], в которых неоднородная среда условно «разбивается» на две среды: одна состоит из пористых блоков, а другая – из системы трещин, разделяющей эти блоки. Главными трудностями применения этого подхода являются необходимость учитывать достаточно большое количество параметров моделируемой среды, что не всегда возможно в реальных условиях, а также необходимость эффективно описы-

вать характер взаимодействия совокупности простых сред при условии, что границы раздела этих сред почти всегда неизвестны. Более того, не для всех сложных сред возможно подобное разбиение на простые составляющие.

Альтернативным является подход, основанный на использовании дробного интегро-дифференцирования. Обоснованием использования данного математического аппарата для моделирования процессов переноса с аномальной кинетикой является их рассмотрение с точки зрения случайного блуждания макроскопических частиц [6]. При случайных блужданиях аномальность процесса проявляется в расходимости первого момента функции плотности распределения случайного времени между двумя последовательными скачками частицы или в расходимости второго момента функции плотности распределения для длины скачка. Если у этих функций распределения оказываются конечными моменты дробных порядков, то, в соответствии с теорией случайного блуждания с непрерывным временем Монролла-Вейса [6], это приводит к появлению в макроскопическом уравнении операторов дробного интегро-дифференцирования по временной или пространственной переменным.

Подход с использованием дробно-дифференциальных операторов по времени, моделирующих эффекты степенной памяти, является достаточно хорошо развитым и на данный момент предложено и исследовано множество математических моделей, полученных на его основе. Для исследования нелокальных по пространству процессов могут быть использованы математические модели с многомерными дробными интегро-дифференциальными операторами по пространственным переменным, такие как дробная степень оператора Лапласа или потенциал Рисса [15, 55].

Дробное интегро-дифференцирование функций многих переменных может быть представлено в виде дробной степени оператора Лапласа  $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$  [15], определяемой в терминах преобразования Фурье  $\mathcal{F}$  как

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}(|\mathbf{k}|^{\alpha}(\mathcal{F}u)(\mathbf{k}))(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

Отрицательные степени  $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$ ,  $Re(\alpha) > 0$  являются потенциалом Рисса



[15], который определяется в виде

$$R^\alpha u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-\alpha}} d\mathbf{y}, \quad \alpha \neq n, n+2, n+4, \dots, \quad (1.2)$$

где

$$\gamma_n(\alpha) = 2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}.$$

В настоящее время модели с операторами (1.1) и (1.2) являются предметом активного изучения.

Феноменологический подход, на основе которого выполняется построение исследуемых в диссертации математических моделей, заключается в использовании феноменологических гипотез с нелокальными дробно-дифференциальными по пространству операторами, например  $\mathbf{q} \sim \nabla R^\alpha u$ , и классических законов сохранения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (1.3)$$

В этом случае феноменологическая связь между вектором плотности потока  $\mathbf{q}$  и функцией  $u$  является дробно-интегро-дифференциальной. При этом полагается, что вся нелокальность, создаваемая сложной структурой среды, будет моделироваться именно за счет этих операторов. Сама среда в этом случае полагается однородной, что позволяет значительно уменьшить требуемое для моделирования количество параметров, а также исключает необходимость учитывать взаимодействие разнородных частей среды между собой, что во многом решает главные трудности подхода, упомянутого выше. Однако обоснование применимости феноменологического подхода в каждом случае должно опираться на данные натуральных экспериментов.

Таким образом, основной идеей используемого в диссертации подхода для моделирования процессов аномального переноса вещества и энергии в неоднородных средах является представление натурной неоднородной среды модельной однородной, но с нелокальными эффектами, описываемыми пространственными дробными интегро-дифференциальными операторами (см. рисунок 1.1). Порядок дробного интегро-дифференцирования может быть

при этом определен из результатов натуральных экспериментов.

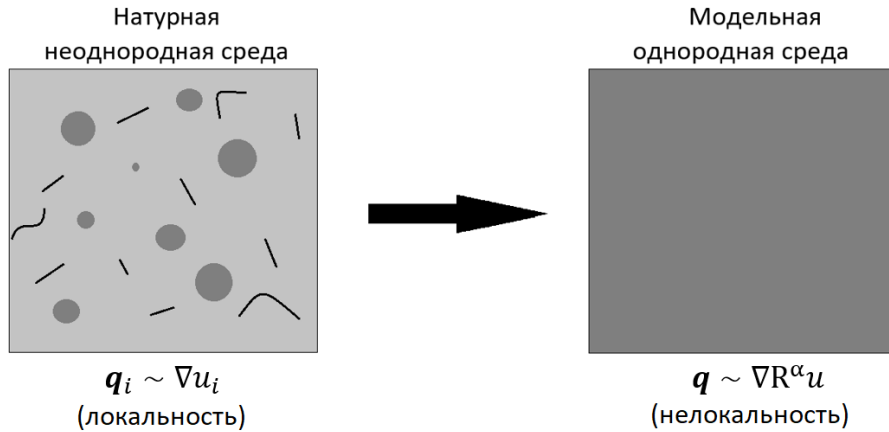


Рисунок 1.1: Схема моделирования аномальных процессов в неоднородных средах

Далее феноменологический подход, использующий дробное интегро-дифференцирование по пространству, будет проиллюстрирован рядом математических моделей диффузионных и волновых процессов.

**1.2 Дробно-дифференциальная модификация модели однофазной фильтрации.** Рассмотрим процесс однофазной фильтрации флюида в неоднородной трещиновато-пористой среде с эффектами пространственной нелокальности. Подобная нелокальность, вызванная различными дальними взаимодействиями, может наблюдаться, например, в нефтяных пластах с естественной трещиноватостью [47, 51, 52]. Одним из способов построения моделей фильтрации флюида в подобных нелокальных средах является использование феноменологических гипотез с дробно-дифференциальными операторами.

В рамках рассматриваемого в работе подхода трещиновато-пористая среда усредненно представляется как однородная изотропная сжимаемая пористая среда со степенной нелокальностью, приводящей к следующей дробно-дифференциальной модификации закона фильтрации Дарси:

$$\mathbf{u} = -\frac{k_\alpha}{\mu} \nabla (R^\alpha p), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (1.4)$$

Здесь

$\mathbf{u}$  – вектор скорости фильтрующегося флюида,  $m/c$ ;

$k_\alpha$  – дробно-дифференциальный аналог проницаемости среды,  $m^\alpha$ ;

$\mu$  – вязкость флюида,  $Па \cdot c$ ;

$R^\alpha$  – потенциал Рисса (1.2);

$p$  – давление,  $Па$ .

Закон фильтрации (1.4) позволяет описывать процессы супердиффузионного переноса вещества. В предельном случае  $\alpha = 0$  данная модель совпадает с классическим законом фильтрации Дарси.

Будем полагать, что уравнение неразрывности для рассматриваемого процесса, как и в случае классической однофазной фильтрации, имеет вид

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = Q, \quad (1.5)$$

где

$\phi = \phi(p)$  – пористость среды;

$\rho = \rho(p)$  – плотность флюида,  $кг/м^3$ ;

$Q$  – плотность объемных источников,  $кг/(м^3 \cdot c)$ ;

$t$  – время,  $c$ .

Пренебрегая, как и в классическом случае, нелинейными слагаемыми по градиенту  $p$  (см., например, [135]), уравнение (1.5) может быть приведено к виду

$$c_t \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\phi} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{Q}{\rho\phi}, \quad (1.6)$$

где

$c_t = c_\phi + c_f = const$  – полная сжимаемость,  $Па^{-1}$ ;

$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$  – сжимаемость флюида,  $Па^{-1}$ ;

$c_\phi = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}$  – сжимаемость породы,  $Па^{-1}$ .

Тогда подстановка (1.4) в (1.6) приводит к дробно-дифференциальному обобщению уравнения однофазной фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa_\alpha \Delta R^\alpha p + q, \quad (1.7)$$

где

$\varkappa_\alpha = \frac{k_\alpha}{\phi \mu c_t}$  – дробно-дифференциальный аналог коэффициента пьезопроводности для рассматриваемой среды,  $м^{2-\alpha}/c$ ;

$q = \frac{Q}{\rho\phi c_t}$  – приведенная плотность объемных источников,  $Па/с$ .

С учетом известного (см. [15]) соотношения

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} (R^\alpha p) = \Delta R^\alpha p = -(-\Delta)^{1-\frac{\alpha}{2}} p, \quad (1.8)$$

справедливого для функций  $p \in \Phi$ , где  $\Phi$  – пространство Лизоркина (см. [15, 43]), уравнение (1.7) может быть записано в терминах дробной степени оператора Лапласа (1.1) как

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\varkappa_\alpha (-\Delta)^{1-\frac{\alpha}{2}} p + q. \quad (1.9)$$

Если рассмотреть задачу Коши для уравнения (1.9) с начальным условием

$$p(0, \mathbf{x}) = p_0,$$

то выполнение дискретизации по времени приводит к дробно-дифференциальному обобщению уравнения Гельмгольца в пределах каждого временного шага:

$$(-\Delta)^{1-\frac{\alpha}{2}} p_{k+1} + \frac{1}{\varkappa_\alpha \Delta t_k} p_{k+1} = \frac{p_k}{\varkappa_\alpha \Delta t_k} + \frac{q_{k+1}}{\varkappa_\alpha}. \quad (1.10)$$

Таким образом, численное решение уравнения (1.9) можно найти, последовательно решая уравнение (1.10) на каждом временном шаге.

**1.3 Дробно-дифференциальная модификация модели распространения электромагнитных волн.** Хорошо известно, что распространение электромагнитных волн описывается системой уравнений Максвелла (см., например, [136])

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathcal{E} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathcal{H} &= -\mathcal{J}, \\ \operatorname{div} \mathcal{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь

$\mathcal{E}$  – напряженность электрического поля,  $V/m$ ;

$\mathcal{H}$  – напряженность магнитного поля,  $A/m$ ;

$\mathbf{D}$  – индукция электрического поля,  $Kл/м^2$ ;

$\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля,  $Тл$ ;

$\rho$  – плотность заряда внешних источников,  $Кл/м^3$ ;

$\mathcal{J}$  – плотность тока внешних источников,  $А/м^2$ .

Все поля в (1.11) зависят от пространственной координаты  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  и от времени  $t \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим распространение гармонической электромагнитной волны в среде с  $\mathcal{J} = 0$ ,  $\rho = 0$ . В этом случае применение преобразования Фурье по времени ( $\mathcal{F}_t u(t)$ ) ( $\omega$ ) к (1.11) приводит к системе

$$\begin{aligned} -i\omega\mathbf{B} + \text{rot}\mathbf{E} &= 0, \\ i\omega\mathbf{D} + \text{rot}\mathbf{H} &= 0, \\ \text{div}\mathbf{D} &= 0, \\ \text{div}\mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  – преобразованные по Фурье поля  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{B}$ , соответственно.

В классической линейной электродинамике материальные уравнения для электромагнитных полей, медленно изменяющихся в пространстве, являются линейными соотношениями вида (см., например, [136])

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{x}) = \varepsilon\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = \mu\mathbf{H}(\omega, \mathbf{x}), \tag{1.13}$$

где  $\varepsilon$  – тензор второго ранга диэлектрической проницаемости, а  $\mu$  – тензор второго ранга магнитной проницаемости. Положим, что рассматриваемая среда является изотропной, тогда  $\varepsilon$  и  $\mu$  являются скалярными величинами. Также будем считать, что  $\mu = \text{const}$ .

В работе [9] отмечено, что для полей, которые быстро изменяются в пространстве, должно учитываться дальнейшее взаимодействие удаленных точек  $\mathbf{x}'$ . Подобное влияние удаленных точек может быть вызвано, например, процессами аномального переноса в среде. Для описания такого влияния в [9] было предложено следующее дробно-дифференциальное обобщение материального

уравнения:

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (1.14)$$

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в неоднородной среде с  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \varepsilon_\alpha |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{\alpha-2-n}$ , порожденное внешним электромагнитным полем с вектором поляризации  $\mathbf{P}$ . Здесь  $n$  – размерность пространства,  $\varepsilon_\alpha = \text{const}$ , а параметр  $\alpha \in (1, 2)$  позволяет учитывать нелокальные свойства среды [9]. Отметим, что параметр  $\varepsilon_\alpha$  будет иметь дробную размерность. Материальное уравнение (1.14) в этом случае может быть модифицировано:

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon_\alpha |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{\alpha-2-n} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \mathbf{P}(\omega, \mathbf{x}). \quad (1.15)$$

Применение преобразования Фурье по пространству  $(\mathcal{F}_x u(\mathbf{x}))(\mathbf{k})$  к (1.12), (1.15) и второму соотношению в (1.13) приводит к системе

$$\begin{aligned} -\omega \hat{\mathbf{B}} + \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} &= 0, \\ \omega \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{H}} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{D}} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}} &= 0, \\ \hat{\mathbf{D}} &= \varepsilon_\alpha |\mathbf{k}|^{2-\alpha} \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{P}}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mu \hat{\mathbf{H}}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{P}}$  – преобразованные по Фурье поля  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{P}$ , соответственно.

Система (1.16) приводит к уравнению на  $\hat{\mathbf{E}}$ :

$$\frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}}] + \omega\varepsilon_\alpha |\mathbf{k}|^{2-\alpha} \hat{\mathbf{E}} = -\omega \hat{\mathbf{P}}. \quad (1.17)$$

Применив обратное преобразование Фурье по пространству  $(\mathcal{F}_k^{-1} u(\mathbf{k}))(\mathbf{x})$  к (1.17), получим

$$\frac{1}{\omega\mu} \text{rot rot } \mathbf{E} + \omega\varepsilon_\alpha (-\Delta)^{1-\frac{\alpha}{2}} \mathbf{E} = -\omega \mathbf{P}, \quad (1.18)$$

где  $(-\Delta)^{1-\frac{\alpha}{2}}$  – дробная степень оператора Лапласа (1.1).

Рассмотрим распространение плоскополяризованной монохроматической волны при  $\mathbf{E} = (0, 0, E_3(x_1, x_2))$ . Тогда  $\text{rotrot}\mathbf{E} = -\Delta E_3$ , а уравнение (1.18) переписывается в виде

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} F + k^2 F = -\omega^2 \mu_0 P, \quad (1.19)$$

где

$$F = (-\Delta)^{1-\frac{\alpha}{2}} E_3, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon_\alpha \mu}. \quad (1.20)$$

Уравнения (1.19) и (1.20) представляют собой неоднородные дробно-дифференциальные обобщения уравнений Гельмгольца и Пуассона, соответственно.

Отметим, что применение обратного преобразования Фурье  $(\mathcal{F}_\omega^{-1}u(\omega))(t)$  к (1.19) приводит к дробно-дифференциальному обобщению волнового уравнения

$$\varepsilon_\alpha \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2} = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{F} - \mu \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}, \quad (1.21)$$

где  $\bar{F} = (\mathcal{F}_\omega^{-1}F(\omega, \mathbf{x}))(t, \mathbf{x})$ , а  $\bar{P} = (\mathcal{F}_\omega^{-1}P(\omega, \mathbf{x}))(t, \mathbf{x})$ .

## §2 Некоторые свойства нелокальных дробно-дифференциальных по пространству моделей

В бакалаврской выпускной квалификационной работе автора, а также в работах [108] и [109] впервые основные алгоритмы группового анализа были обобщены для исследования симметричных свойств уравнений с многомерными дробно-дифференциальными операторами по пространственным переменным, такими как потенциал Рисса и дробная степень оператора Лапласа. В данном параграфе симметричные свойства дробно-дифференциальных уравнений, полученные в этих работах, будут использованы для анализа характерных свойств рассматриваемых в диссертации моделей.

**2.1 Дробно-дифференциальная модель однофазной фильтрации.** Рассмотрим процесс фильтрации флюида в неоднородной среде, описываемый линейной двумерной дробно-дифференциальной моделью однофаз-

ной фильтрации (1.7) при отсутствии объемных источников ( $q = 0$ ):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa_\alpha \Delta R^\alpha p, \quad p = p(t, x, y), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.1)$$

В работе [108] показано, что линейное однородное уравнение (2.1) допускает группу точечных преобразований поворота и, следовательно, имеет частное решение с радиальной симметрией  $p = u(t, r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa_\alpha \Delta_r R_r^\alpha u, \quad \Delta_r = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right). \quad (2.2)$$

Нетрудно показать, что данное уравнение допускает группу неравномерных растяжений

$$\bar{t} = e^{(2-\alpha)a} t, \quad \bar{r} = e^a r, \quad \bar{u} = e^a u,$$

где  $a$  – групповой параметр. Тогда соответствующее инвариантное решение будет представлять собой автомодельное решение рассматриваемого уравнения. Анзац этого решения имеет вид

$$u(t, r) = f(z), \quad z = rt^{\frac{1}{\alpha-2}}. \quad (2.3)$$

В предельном случае  $\alpha = 0$  представление (2.3) является видом автомодельного решения классического уравнения фильтрации. Подстановка (2.3) в (2.2) приводит к обыкновенному дробно-дифференциальному уравнению

$$-z f'(z) = (2 - \alpha) \Delta_z R_z^\alpha f(z), \quad \Delta_z = \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} \right). \quad (2.4)$$

В работе [46] доказано, что потенциал Рисса от радиальной функции может быть представлен в виде

$$R_z^\alpha f(z) = 2^{-\alpha} z^{1-\frac{n}{2}} \left[ I_{0+}^{\frac{\alpha}{2}} \eta^{\frac{n-\alpha}{2}-1} I_{-}^{\frac{\alpha}{2}} f(\eta) \right] (z^2), \quad (2.5)$$

где  $I_{0+}^{\frac{\alpha}{2}} f(\eta)$ ,  $I_{-}^{\frac{\alpha}{2}} f(\eta)$  – левосторонний и правосторонний дробные интегралы



типа Римана-Лиувилля [15], определяющиеся как

$$I_{0+}^{\alpha} f(\eta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta} \frac{f(\xi)}{(\eta - \xi)^{1-\alpha}} d\xi, \quad (2.6)$$

$$I_{-}^{\alpha} f(\eta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\eta}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - \eta)^{1-\alpha}} d\xi, \quad (2.7)$$

а  $n$  – размерность пространства, в нашем случае  $n = 2$ . В силу (2.5), уравнение (2.4) может быть записано как

$$-\frac{2^{\alpha} z f'(z)}{2 - \alpha} = \Delta_z \left[ I_{0+}^{\frac{\alpha}{2}} \eta^{-\frac{\alpha}{2}} I_{-}^{\frac{\alpha}{2}} f(\eta) \right] (z^2). \quad (2.8)$$

Для построения решения уравнения (2.8) может быть использовано преобразование Меллина [66]

$$f^*(s) = (\mathcal{M}f(z))(s) \equiv \int_0^{\infty} f(z) z^{s-1} dz. \quad (2.9)$$

В соответствии с [16], преобразование Меллина интегралов (2.6), (2.7) имеет вид

$$(\mathcal{M}I_{0+}^{\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(1 - \alpha - s)}{\Gamma(1 - s)} (\mathcal{M}f)(s + \alpha), \quad \operatorname{Re}(s + \alpha) < 1, \quad (2.10)$$

$$(\mathcal{M}I_{-}^{\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s + \alpha)} (\mathcal{M}f)(s + \alpha), \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (2.11)$$

Под действием преобразования Меллина (2.9) уравнение (2.8), с учетом представлений (2.10) и (2.11), принимает вид

$$\frac{2^{\alpha-1} s}{(\alpha - 2)} g(s) = \frac{\Gamma(2 - \frac{\alpha}{2} - s) \Gamma(s - 1)}{\Gamma(1 - s) \Gamma(s - 1 + \frac{\alpha}{2})} g\left(s - 1 + \frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.12)$$

где

$$g(s) = (\mathcal{M}f(z))(s), \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < 2 - \frac{\alpha}{2}.$$

Выполнив замену переменных

$$k(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} g(s)$$

в уравнении (2.12), получим

$$\frac{2^{\alpha-1}s}{(\alpha-2)} k(s) = k\left(s - 1 + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (2.13)$$

Сделаем теперь замену переменных

$$k(s) = Q(\xi), \quad s = \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \xi,$$

запишем уравнение (2.13) в виде

$$2^{\alpha-2}\xi Q(\xi) = Q(\xi + 1). \quad (2.14)$$

Обозначив

$$G(\xi) = \frac{2^{\xi(2-\alpha)} Q(\xi)}{\Gamma(\xi)},$$

получим уравнение со смещенным аргументом:

$$G(\xi) = G(\xi + 1).$$

Решение этого уравнения представляется периодической функцией

$$G(\xi) = \varphi(\xi),$$

где  $\varphi(\xi)$  – любая функция с периодом 1. Выполнив все обратные замены переменных, получим

$$g(s) = \frac{4^s \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{2s}{\alpha-2}\right)}{\Gamma(1-s)} \varphi\left(\frac{2s}{\alpha-2}\right), \quad (2.15)$$

где  $\varphi\left(\frac{2s}{\alpha-2}\right)$  – любая функция с периодом  $\frac{2}{\alpha-2}$ .

Положим теперь  $\varphi\left(\frac{2s}{\alpha-2}\right) = C_0 = const$ . Применяя обратное преобразо-

вание Меллина к (2.15), получим решение уравнения (2.8)

$$f(z) = C_0 \mathbb{H}_{1,2}^{1,1} \left[ \frac{z^2}{4} \middle| \begin{matrix} (1, \frac{2}{2-\alpha}) \\ (0, 1), (0, 1) \end{matrix} \right], \quad (2.16)$$

где  $\mathbb{H}_{1,2}^{1,1}(z)$  – функция Фокса [70].

В соответствии с заменой (2.3), автомодельное решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u(r, t) = C_0 \mathbb{H}_{1,2}^{1,1} \left[ \frac{t^{\frac{2}{\alpha-2}} r^2}{4} \middle| \begin{matrix} (1, \frac{2}{2-\alpha}) \\ (0, 1), (0, 1) \end{matrix} \right]. \quad (2.17)$$

В предельном случае  $\alpha = 0$ , решение (2.17) дается функцией

$$u(r, t) = C_0 \mathbb{G}_{1,2}^{1,1} \left[ \frac{r^2}{4t} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0, 0 \end{matrix} \right] \equiv C_0 \text{Ei} \left( -\frac{r^2}{4t} \right), \quad (2.18)$$

которая является автомодельным решением классического уравнения фильтрации. Здесь  $\mathbb{G}_{1,2}^{1,1}(z)$  – функция Мейера [137], а  $\text{Ei}(z)$  – интегральная показательная функция [138].

На рисунке 2.2 представлены графики автомодельного решения (2.16) в равномерных и полулогарифмических координатах при разных значениях параметра  $\alpha$ . Нетрудно заметить степенной характер поведения решения при стремлении аргумента к нулю, причем с увеличением  $\alpha$  возрастает и его величина. Отметим также, что для данного решения существует точка  $z \equiv z_0 \approx 0.65$ , которая является инвариантной относительно параметра  $\alpha$ : автомодельные решения при разных значениях  $\alpha$  пересекаются в этой точке. Более того, при прохождении этой точки у решений меняется характер зависимости от дробного параметра: при  $z < z_0$  решение увеличивается при уменьшении  $\alpha$ , а при  $z > z_0$  уменьшается.

**2.2 Дробно-дифференциальная модель распространения волн в неоднородной среде.** Рассмотрим процесс распространения волн в неоднородной среде, моделируемый дробно-дифференциальным обобщением двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a_\alpha^2 (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u, \quad u = u(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.19)$$

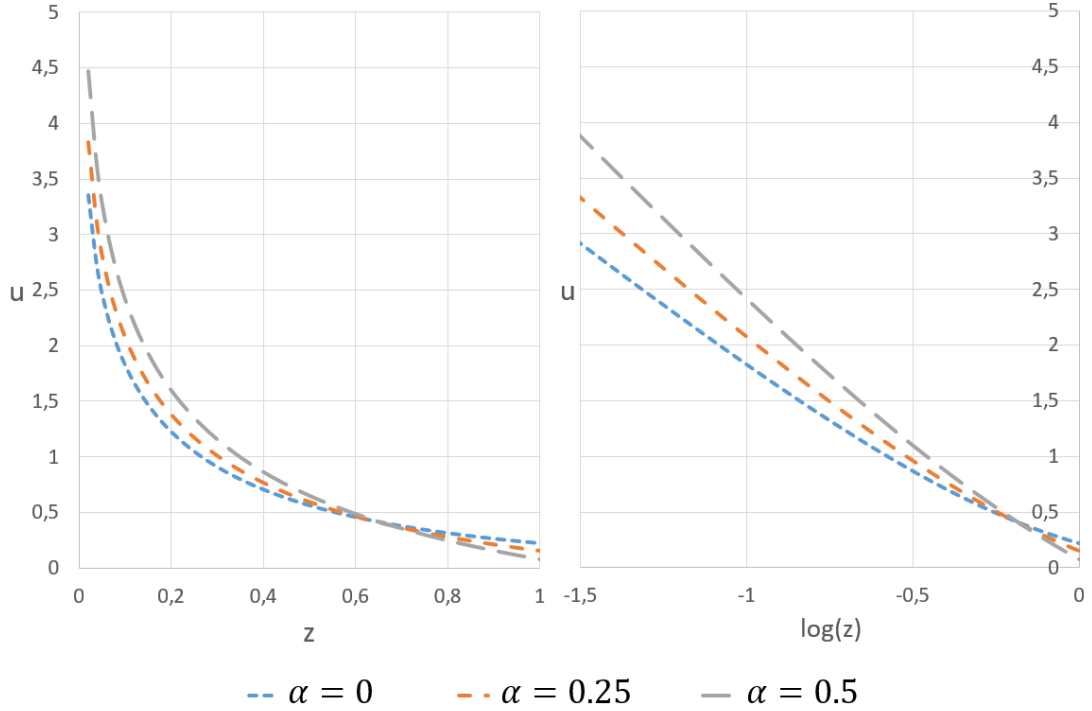


Рисунок 2.2: Автомоделное решение (2.16) дробно-дифференциального уравнения (2.1)

Подобное уравнение было получено, в частности, в разделе 1.3 в модели распространения электромагнитных волн, а также исследовалось, например, в работах [139, 140].

Заметим, что в отличие от классического волнового уравнения в уравнении (2.19) постоянная  $a_\alpha$ , характеризующая свойства среды, имеет дробную размерность и поэтому не является скоростью распространения волны. В связи с этим возникает задача определения взаимосвязи фазовой скорости волны с этой постоянной.

Нетрудно проверить, что уравнение (2.19) допускает группу преобразований переноса по временной и пространственной координатам:

$$\bar{t} = t + a_0, \quad \bar{x}_1 = x_1 + a_1, \quad \bar{x}_2 = x_2 + a_2. \quad (2.20)$$

Отметим, что характерной особенностью уравнений с дробной степенью оператора Лапласа или с потенциалом Рисса является именно допускаемость преобразований переноса по пространственным переменным, в то время как дробно-дифференциальные уравнения с дробными производными Римана-Лиувилля или Капуто, исследуемые, например, в работах [106, 107], таких

преобразований не допускают. Инвариантность уравнений (2.19) относительно (2.20) приводит к тому, что для рассматриваемого уравнения существует решение типа монохроматической плоской волны вида

$$u(t, \mathbf{x}) = Ae^{i\Phi}, \quad \Phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2), \quad (2.21)$$

где  $A = \text{const}$  – амплитуда волны,  $\Phi$  – фаза волны в плоской среде,  $\mathbf{k}$  – волновой вектор, а  $\omega$  – частота. На основе (2.21) может быть введена фазовая скорость распространения плоской волны  $v_\Phi^\alpha$ :

$$u(t, \mathbf{x}) = Ae^{i|\mathbf{k}|(v_\Phi^\alpha t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}, \quad (2.22)$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ , а  $v_\Phi^\alpha = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$ . Подстановка (2.22) в (2.19) приводит к выражению

$$\frac{\omega^2}{a_\alpha^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.23)$$

Вычислим теперь правую часть (2.23). Дробная степень оператора Лапласа  $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$  при  $\alpha > 0$  может быть записана как гиперсингулярный интеграл (см., например, [15, 44])

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_{2,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\Delta_y^2 f)(\mathbf{x})}{|\mathbf{y}|^{2+\alpha}} d\mathbf{y}, \quad (2.24)$$

где  $(\Delta_y^2 f)(\mathbf{x})$  – центрированная разность, определяемая как

$$(\Delta_y^2 f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - 2f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

а постоянная  $d_{2,2}(\alpha)$  может быть записана в виде

$$d_{2,2}(\alpha) = -2^{2-\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin^2 y_1}{|\mathbf{y}|^{2+\alpha}} d\mathbf{y}. \quad (2.25)$$

В силу (2.24), правую часть (2.23) можно записать как

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{d_{2,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})} - 2e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{|\mathbf{y}|^{2+\alpha}} d\mathbf{y} =$$

$$= e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{d_{2,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i(k_1 y_1 + k_2 y_2)} - 2 + e^{-i(k_1 y_1 + k_2 y_2)}}{|\mathbf{y}|^{2+\alpha}} d\mathbf{y}. \quad (2.26)$$

Выполним в подынтегральном выражении преобразование поворота:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \cos \beta + y_2 \sin \beta, \\ z_2 &= -y_1 \sin \beta + y_2 \cos \beta, \end{aligned}$$

где  $\sin \beta = \frac{k_2}{|\mathbf{k}|}$ ,  $\cos \beta = \frac{k_1}{|\mathbf{k}|}$ . Имеем

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{d_{2,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i|\mathbf{k}|z_1} - 2 + e^{i|\mathbf{k}|z_1}}{|\mathbf{z}|^{2+\alpha}} d\mathbf{z}. \quad (2.27)$$

Применив теперь замену вида  $\bar{y}_1 = \frac{|\mathbf{k}|z_1}{2}$ ,  $\bar{y}_2 = \frac{|\mathbf{k}|z_2}{2}$  к (2.27), получим

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{k}|^\alpha \frac{2^{\alpha-2}}{d_{2,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin^2 \bar{y}_1}{|\bar{\mathbf{y}}|^{2+\alpha}} d\bar{\mathbf{y}}. \quad (2.28)$$

Учитывая вид  $d_{2,2}(\alpha)$  из (2.25) и представление (2.28), окончательно получаем

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{k}|^\alpha. \quad (2.29)$$

Подстановка (2.29) в (2.23) приводит к дробно-дифференциальному обобщению дисперсионного соотношения

$$|\mathbf{k}|^\alpha = \frac{\omega^2}{a_\alpha^2}. \quad (2.30)$$

Исключая  $|\mathbf{k}|$  из выражения для фазовой скорости  $v_\Phi^\alpha$  в силу (2.30), получаем

$$v_\Phi^\alpha = \omega^{1-\frac{2}{\alpha}} a_\alpha^{2/\alpha}. \quad (2.31)$$

Таким образом, фазовая скорость волны в средах, описываемых уравнением (2.19), оказывается зависящей от частоты колебаний. Таким образом, уравнение (2.19) является моделью диспергирующей среды. В этом случае с увеличением частоты скорость неограниченно возрастает, что является, очевидно, нефизичным эффектом. При этом никаких ограничений на амплиту-

ду не возникает. Отсюда следует, что модель (2.19) с  $a_\alpha = \text{const}$  не является адекватной в случае высоких частот. Нетрудно также заметить, что в предельном случае  $\alpha = 2$  уравнение (2.30) совпадает с известным дисперсионным соотношением для классического волнового уравнения, при этом скорость  $v_\Phi = a_2$  не зависит от частоты колебаний.

В случае, когда рассматривается волновой пакет (цуг волн), может быть определена его групповая скорость  $\mathbf{v}_g^\alpha$ . Групповая скорость определяется градиентом частоты по волновому вектору  $\mathbf{k}$  как

$$\mathbf{v}_g^\alpha = \nabla_{\mathbf{k}} \omega. \quad (2.32)$$

Тогда, в силу соотношения (2.31), групповая скорость волнового пакета в рассматриваемой модели определяется как

$$\mathbf{v}_g^\alpha = \frac{\alpha}{2} a_\alpha |\mathbf{k}|^{\frac{\alpha}{2}-1} \mathbf{n} \equiv \frac{\alpha}{2} v_\Phi^\alpha \mathbf{n}. \quad (2.33)$$

В силу (2.33) выполняется условие  $|\mathbf{v}_g^\alpha| < v_\Phi^\alpha$ , а значит модель (2.19) описывает распространение волн в неоднородной среде с нормальной дисперсией.

Всегда существуют естественные ограничения на групповую скорость волнового пакета. Например, в случае распространения электромагнитной волны эта величина по модулю ограничена постоянной  $c$  – скоростью света. Тогда

$$|\mathbf{v}_g^\alpha| = \frac{\alpha}{2} \omega^{1-\frac{2}{\alpha}} a_\alpha^{2/\alpha} < c. \quad (2.34)$$

Отсюда получим ограничение на частоту волны  $\omega > \omega_{\min}$ , где

$$\omega_{\min} = \left( \frac{\alpha}{2c} \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} a_\alpha^{\frac{2}{2-\alpha}}. \quad (2.35)$$

В частности, в качестве такой минимальной частоты  $\omega_{\min}$  в однородной изотропной плазме выступает параметр  $\omega_p$  – плазменная частота. В этом случае может быть определена постоянная  $a_\alpha$  как

$$a_\alpha = \left( \frac{\alpha}{2c} \right)^{-\frac{\alpha}{2}} \omega_p^{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (2.36)$$

Рассмотрим снова уравнение (2.19), которое, в силу (1.8), может быть

записано как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_\alpha^2 \Delta R^{2-\alpha} u, \quad u = u(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.37)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (2.37) является инвариантным относительно преобразования поворота, что допускает частные решения этого уравнения радиального вида  $u = u(t, r)$ ,  $r = |\mathbf{x}|$ . В случае стоячей монохроматической волны это решение можно искать в виде

$$u(t, r) = A e^{-i\omega t} f(r). \quad (2.38)$$

Подстановка (2.38) в (2.37) приводит к одномерному обыкновенному дробно-дифференциальному уравнению

$$a_\alpha^2 \Delta_r R_r^{2-\alpha} f(r) + \omega^2 f(r) = 0, \quad (2.39)$$

где радиальные одномерные представления операторов  $\Delta_r$ ,  $R_r^{2-\alpha}$  даются выражениями (2.4) и (2.5).

Уравнение (2.39) может быть переписано в виде

$$\left( r \frac{d}{dr} \right)^2 R_r^{2-\alpha} f(r) + \frac{r^2 \omega^2}{a_\alpha^2} f(r) = 0, \quad (2.40)$$

что является дробно-дифференциальным обобщением уравнения Бесселя нулевого порядка.

Для построения решения уравнения (2.40) может быть использована процедура, основанная на использовании преобразования Меллина, аналогичная представленной в предыдущем разделе для уравнения (2.8). С ее использованием было получено

$$f(r) = J_0 \left[ \left( \frac{\omega^2}{a_\alpha^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} r \right], \quad (2.41)$$

где  $J_0(z)$  – функция Бесселя первого рода [141]. Стоит отметить, что отличие (2.41) от решения классического уравнения Бесселя в данном случае заключается лишь в аргументе функции, а в предельном случае  $\alpha = 2$  эти решения совпадают.



Таким образом, для стоячей цилиндрической волны в неоднородной среде, описываемой уравнением (2.37), справедливо

$$u(t, r) = Ae^{-i\omega t} J_0 \left[ \left( \frac{\omega^2}{a_\alpha^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} r \right]. \quad (2.42)$$

Так как  $J_0(r)$  достигает максимума в точке  $r = 0$  и  $J_0(0) = 1$ , то  $A$  представляет собой амплитуду волны. Сравнение с классическим случаем, а также с дробно-дифференциальным обобщением дисперсионного соотношения (2.30) дает основания полагать, что в (2.42) волновое число  $k = \left( \frac{\omega^2}{a_\alpha^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ . Определим, как обычно, фазовую скорость волны как  $v_\Phi^\alpha = \frac{\omega}{k}$ , тогда

$$v_\Phi^\alpha = \omega^{1-\frac{\alpha}{2}} a_\alpha^{2/\alpha}. \quad (2.43)$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае цилиндрической волны ее фазовая скорость подчиняется соотношению (2.31).

### §3 Фундаментальные решения дробно-дифференциальных обобщений уравнений эллиптического типа

**3.1 Дробно-дифференциальные обобщения уравнения Гельмгольца.** Классические уравнения Пуассона и Гельмгольца являются уравнениями эллиптического типа и позволяют моделировать различные стационарные и установившиеся процессы. Однако к исследованию этих уравнений могут быть сведены и многие нестационарные задачи диффузионного и волнового типов. В этом проявляется фундаментальный принцип единства и множественности математических моделей. Аналогичные рассуждения справедливы для дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = f(\mathbf{x}), \quad \alpha \in (1, 2), \quad (3.1)$$

дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u + \omega^2u = f(\mathbf{x}), \quad \alpha \in (1, 2), \quad (3.2)$$

и дробно-дифференциального обобщения модифицированного уравнения Гельмгольца

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u - \omega^2u = f(\mathbf{x}), \quad \alpha \in (1, 2). \quad (3.3)$$

Уравнения (3.1) – (3.3) позволяют моделировать стационарные и установившиеся процессы с аномальной кинетикой протекания в сложных неоднородных средах. При  $\alpha = 2$  уравнения (3.2) и (3.3) представляют собой классические уравнения Гельмгольца, которые играют важную роль в математическом моделировании ввиду большого числа приводящих к ним проблем (волновые процессы, диффузионные процессы и др.) Случай, когда перед вторым слагаемым в классическом уравнении Гельмгольца стоит знак плюс, связан, например, с описанием волновых процессов, а когда знак минус – с описанием процессов диффузионного типа.

Как и в случае классических задач математической физики с производными и интегралами целого порядка, множество нестационарных дробно-дифференциальных задач диффузионного и волнового типов могут быть сведены к решению уравнений (3.1), (3.2) и (3.3).

Рассмотрим для начала дробно-дифференциальное обобщение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -a^2 (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} v + f(\mathbf{x}), \quad \alpha \in (1, 2). \quad (3.4)$$

Подобное уравнение было получено в разделе 1.3 при построении модели распространения электромагнитных волн в неоднородной среде. Было показано, что применение преобразования Фурье по времени к (3.4) приводит к уравнению (3.2). Аналогичный переход для гармонических колебаний может быть совершен при  $f = 0$  посредством представления решения уравнения (3.4) в виде  $v(t, \mathbf{x}) = e^{-i\xi t}u(\mathbf{x})$ , где  $\xi$  – частота волны, что дает уравнение (3.2) с  $\omega = \frac{\xi}{a}$ ,  $f = 0$ .

Еще одним показательным примером может служить задача Коши для

дробно-дифференциального обобщения однородного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -a^2 (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} v, \quad (3.5)$$

$$v|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$

Применение преобразования Лапласа к (3.5)–(3.7) приводит к дробно-дифференциальному обобщению неоднородного уравнения Гельмгольца в пространстве изображений:

$$-a^2 (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} v^* - p^2 v^* = -\psi(\mathbf{x}) - p\varphi(\mathbf{x}), \quad (3.8)$$

что соответствует уравнению (3.2) при  $\omega^2 = \frac{p^2}{a^2}$ ,  $f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{a^2} (\psi(\mathbf{x}) + p\varphi(\mathbf{x}))$ .

Рассмотрим теперь дробно-дифференциальную модель однофазной фильтрации

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a^2 (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi + f(\mathbf{x}), \quad \alpha \in (1, 2). \quad (3.9)$$

Стационарные режимы этой модели, а также некоторых других нелокальных эволюционных моделей могут быть описаны дробно-дифференциальным обобщением уравнения Пуассона (3.1). В разделе 1.3 было показано, что дискретизация по времени нелокальной модели однофазной фильтрации, аналогичной (3.9), приводит к дробно-дифференциальному обобщению уравнения Гельмгольца (1.10). Отметим, что как и в случае дробно-дифференциального обобщения волнового уравнения, применение преобразования Лапласа к задаче Коши для уравнения (3.9) аналогичным образом приводит к дробно-дифференциальному обобщению модифицированного уравнения Гельмгольца.

На рисунке. 3.3 представлены примеры дробно-дифференциальных моделей, исследование которых в ряде частных случаев может быть сведено к анализу дробно-дифференциальных обобщений уравнения Гельмгольца (3.2) и (3.3).

Все перечисленные примеры математических моделей обуславливают чрезвычайную важность аналитического и численного исследований уравне-

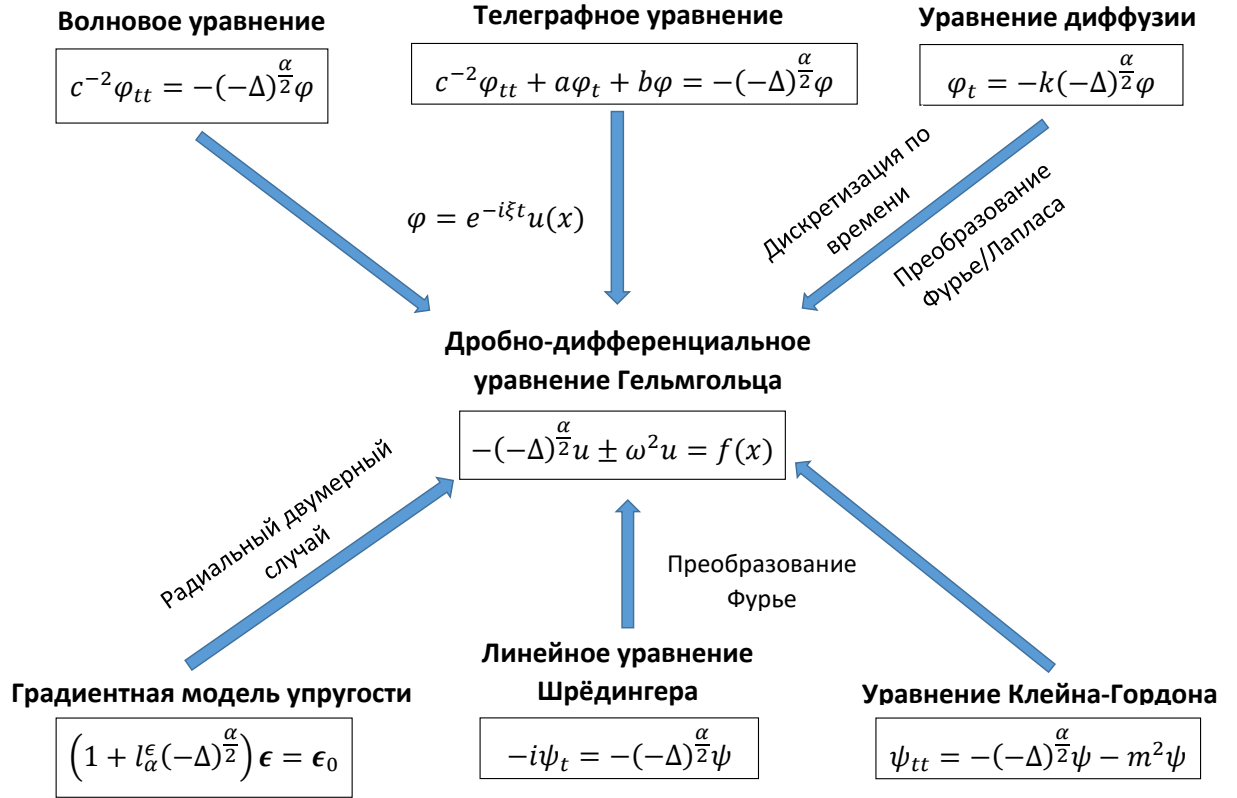


Рисунок 3.3: Примеры дробно-дифференциальных моделей, сводящихся к дробно-дифференциальным обобщениям уравнения Гельмгольца

ний (3.1) – (3.3). Одним из способов построения аналитических решений этих уравнений является их интегральное представление через свертку фундаментальных решений (функций влияния) с правой частью, чему и посвящена оставшаяся часть данной главы.

**3.2 Фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона.** Рассмотрим обобщение уравнения Пуассона (3.1) с дробной степенью оператора Лапласа в  $n$ -мерном пространстве. В работе автора [112] была построена алгебра Ли точечных симметрий для соответствующего дробно-дифференциального обобщения уравнения Лапласа с потенциалом Рисса в двумерном пространстве. В многомерном случае это уравнение записывается как

$$\Delta R^{2-\alpha}u = 0, \quad u = u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.10)$$

Вид соответствующей алгебры Ли дается следующим утверждением.

**Утверждение 3.1.** *Дробно-дифференциальное обобщение уравнения Лапласа (3.10) допускает бесконечномерную алгебру Ли точечных симметрий с базисом*

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, & X_{ij} &= x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ Z_1 &= x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, & Z_2 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_\infty^1 &= g(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

где  $g(\mathbf{x})$  — произвольное решение линейного уравнения

$$\Delta R^{2-\alpha} g = 0.$$

Приведенные в утверждении 3.1 симметрии позволяют методами группового анализа построить фундаментальное решение уравнения (3.1). Следуя алгоритму, представленному в [102], фундаментальное решение будем искать как решение уравнения

$$\Delta R^{2-\alpha} G_{\alpha,n} = \delta(\mathbf{x}), \quad G_{\alpha,n} = G_{\alpha,n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.11)$$

где  $\delta(\mathbf{x})$  — дельта-функция Дирака.

Уравнение (3.11) рассматривается как задача, обладающая фиксированной особой точкой в начале координат, где задана дельта-функция. Выделим из операторов, приведенных в утверждении 3.1, такие, которые оставляют инвариантной особую точку  $\mathbf{x} = 0$ , а также те, которые допускаются уравнением (3.11).

Операторы  $X_{ij}$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  оставляют инвариантной особую точку. Уравнение (3.11) допускает оператор вращения, однако операторы растяжения не допускаются по отдельности, поэтому будем рассматривать их линейную комбинацию вида  $Z_1 + (\alpha - n)Z_2$ . Получаем, что уравнение (3.11) допускает операторы

$$Z = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + (\alpha - n) G_{\alpha,n} \frac{\partial}{\partial G_{\alpha,n}}, \quad X_{ij} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (3.12)$$

Теперь найдем инвариантные решения уравнения (3.11) относительно

операторов (3.12). Оператор  $X_{ij}$  имеет два независимых инварианта:  $G_{\alpha,n}$  и  $r = |\mathbf{x}|$ . Оператор  $Z$ , записанный через эти инварианты, имеет вид

$$Z = r \frac{\partial}{\partial r} + (\alpha - n) G_{\alpha,n} \frac{\partial}{\partial G_{\alpha,n}}.$$

Решив уравнение  $Z(J(r, G_{\alpha,n})) = 0$ , получим следующий инвариант операторов (3.12):

$$J = G_{\alpha,n} r^{\alpha-n}.$$

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (3.1) представляется как

$$G_{\alpha,n} = C r^{\alpha-n}, \quad (3.13)$$

где постоянная  $C$  определяется посредством подстановки решения (3.13) в уравнение (3.11) и имеет вид

$$C = \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})}. \quad (3.14)$$

Таким образом показано, что фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона (3.1) может быть построено методами группового анализа.

В работе [56] было показано, что фундаментальное решение уравнения (3.1) в  $n$ -мерном случае имеет вид

$$G_{\alpha,n}^P(\mathbf{x}) = C_{\alpha,n}^P |\mathbf{x}|^{\alpha-n}, \quad C_{\alpha,n}^P = \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})}, \quad (3.15)$$

что совпадает с фундаментальным решением (3.13), полученным методами группового анализа. Отметим, что при  $\alpha = 2$  выполняется предельный переход функции (3.15) к фундаментальному решению классического уравнения Пуассона:

$$G_{2,n}^P(|\mathbf{x}|) = \frac{1}{(n-2)\omega_n |\mathbf{x}|^{n-2}}, \quad n \neq 2,$$

где  $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ .

Так как рассматриваемое дробно-дифференциальное уравнение являет-

ся линейным, то выполняется принцип линейной суперпозиции, и тогда решение неоднородного уравнения (3.1) может быть представлено в интегральном виде через свертку фундаментального решения (3.15) с правой частью:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi}) G_{\alpha,n}^P(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (3.16)$$

Отметим, что интеграл в правой части (3.16) будет сходиться, в частности, для всех функций  $f(\mathbf{x}) \in C(\mathbb{R}^n)$  таких, что

$$|f(\mathbf{x})| \leq \begin{cases} A = \text{const}, & |\mathbf{x}| \leq 1, \\ \frac{A}{|\mathbf{x}|^\gamma}, & |\mathbf{x}| > 1, \quad \gamma > \alpha. \end{cases} \quad (3.17)$$

**3.3 Фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца.** Рассмотрим дробно-дифференциальное обобщение уравнения Гельмгольца (3.2) в  $n$ -мерном пространстве. Условие конечности энергии системы приводит к естественному граничному условию

$$u(\mathbf{x}) \Big|_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} = 0. \quad (3.18)$$

Как и случае дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона, решение рассматриваемого уравнения в силу его линейности может быть представлено через свертку правой части с фундаментальным решением:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi}) G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.19)$$

Здесь  $G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x})$  – фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца (3.2), удовлетворяющее уравнению

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} G_{\alpha,n}^{H^+} + \omega^2 G_{\alpha,n}^{H^+} = \delta(\mathbf{x}), \quad (3.20)$$

где

$$G_{\alpha,n}^{H^+} = G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (1, 2).$$

Явные представления  $G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x})$  могут быть получены с использованием интегральных преобразований Фурье и Меллина, как это было сделано в [48]. В работе [133] впервые было построено такое фундаментальное решение в двумерном пространстве. В случае  $n$ -мерного пространства оно дается следующим утверждением.

**Утверждение 3.2.** *Фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца (3.2) может быть представлено в виде*

$$G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) = C_0 {}^0G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) + \delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

где

$${}^0G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) = J_0 \left[ (\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}} |\mathbf{x}| \right],$$

$$\begin{aligned} \delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) &= C_{\alpha,n}^{H^+} (\pi |\mathbf{x}|)^{1-\frac{n}{2}} \times \\ &\times H_{2,4}^{2,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2}{4} \left| \begin{array}{l} \left(1 - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \\ \left(\frac{n}{4} - \frac{1}{2}, 1\right), \left(1 - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4}, 1\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \end{array} \right. \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $C_0 \in \mathbb{C}$  – произвольная постоянная,  $C_{\alpha,n}^{H^+} = \frac{(\omega^2)^{\frac{2+n}{2\alpha}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \alpha}$ ,  $H_{2,4}^{2,1}(z)$  – функция Фокса, а  $J_\mu(z)$  – функция Бесселя первого рода.

**Доказательство.** Хорошо известно, что фундаментальное решение определяется с точностью до решения соответствующего однородного уравнения. Прямой подстановкой может быть доказано, что функция  $J_0 \left[ (\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}} |\mathbf{x}| \right]$  удовлетворяет однородному уравнению

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u + \omega^2 u = 0, \quad \alpha \in (1, 2),$$

и условию (3.18). Тогда фундаментальное решение  $G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x})$  может быть представлено как

$$G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) = C_0 J_0 \left[ (\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}} |\mathbf{x}| \right] + \delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}), \quad (3.22)$$

где  $\delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x})$  является решением неоднородного уравнения (3.20). Для получения его явного представления воспользуемся интегральными преобразова-



ниями Фурье и Меллина.

Применение к уравнению (3.20) прямого и обратного преобразований Фурье дает

$$\delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-i\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{x}}}{\omega^2 - |\boldsymbol{\tau}|^\alpha} d\boldsymbol{\tau}. \quad (3.23)$$

Функция  $(\omega^2 - |\boldsymbol{\tau}|^\alpha)^{-1}$  в (3.23) является радиальной, поэтому может быть использовано свойство преобразования Фурье (см., например, [15]):

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{x}} \psi(|\boldsymbol{\tau}|) d\boldsymbol{\tau} = \frac{|\mathbf{x}|^{1-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty k^{\frac{n}{2}} \psi(k) J_{\frac{n}{2}-1}(k|\mathbf{x}|) dk. \quad (3.24)$$

Применив его к (3.23), получим

$$\delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}|^{1-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{k^{\frac{n}{2}}}{\omega^2 - k^\alpha} J_{\frac{n}{2}-1}(k|\mathbf{x}|) dk. \quad (3.25)$$

Явное представление (3.25) может быть построено с использованием интегрального преобразования Меллина [66]

$$f^*(s) = (\mathcal{M}f(k))(s) \equiv \int_0^\infty f(k) k^{s-1} dk \quad (3.26)$$

и соответствующей теоремы о свертке (см. [66])

$$\mathcal{M} \left[ \int_0^\infty k^\beta f_1(xk) f_2(k) dk \right] (s) = f_1^*(s) f_2^*(1 + \beta - s). \quad (3.27)$$

Правая часть (3.25) является сверткой (3.27) функций

$$f_1(k) = J_{\frac{n}{2}-1}(k), \quad f_2(k) = \frac{1}{\omega^2 - k^\alpha}, \quad (3.28)$$

преобразования Меллина которых имеют вид (см. [66])

$$f_1^*(s) = \frac{2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)}, \quad (3.29)$$

$$f_2^*(s) = \frac{\pi}{\alpha} (\omega^2)^{\frac{s}{\alpha}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{\alpha}\right)}, \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < \alpha, \quad (3.30)$$

где  $\Gamma(s)$  – гамма-функция.

В силу (3.29), (3.30), применение обратного преобразования Фурье дает представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса:

$$\begin{aligned} \delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) &= C_{\alpha,n}^{H^+} (\pi|\mathbf{x}|)^{1-\frac{n}{2}} \times \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma\left(s + \frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+n}{2\alpha} - \frac{2s}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2+n}{2\alpha} + \frac{2s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2} - s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{2+n}{2\alpha} + \frac{2s}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{2+n}{2\alpha} - \frac{2s}{\alpha}\right)} \left(\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2}{4}\right)^{-s} ds, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{2}$ .

Интеграл в правой части (3.31) сходится при  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{2}$  и может быть переписан в терминах функций Фокса, представленных в (3.21).  $\square$

Важно отметить, что порядок главного члена асимптотического разложения для функции Фокса из (3.21) не зависит от  $\alpha$  и может быть записан в виде  $\left| \mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(\mathbf{x}^2) \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|}}\right)$ ,  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  (см. [70]). Отсюда следует, что для сходимости интеграла (3.19) достаточно, чтобы выполнялось  $f(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^\gamma}\right)$ ,  $\gamma > \frac{1}{2}$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

По аналогии с классическим уравнением Гельмгольца, из (3.21) следует, что условие (3.18) не является достаточным для обеспечения единственности решения рассматриваемого уравнения. Зоммерфельд доказал (см. [142]), что для расходящихся волн должно быть выполнено граничное условие

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sqrt{|\mathbf{x}|} \left( \frac{\partial u}{\partial |\mathbf{x}|} - iku \right) = 0, \quad (3.32)$$

которое также известно как условие излучения Зоммерфельда [142]. Условие (3.32) обеспечивает единственность и стремление к нулю на бесконечности для решения классического уравнения Гельмгольца.

Условие (3.32) может быть применено и к дробно-дифференциальному уравнению (3.2). Действительно, в соответствии с теоремой 1.9 из [70], асимптотическое разложение функции Фокса  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$  на бесконечности может быть

записано в виде

$$\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z) \sim \sqrt{\frac{1}{\pi\sqrt{z}}} \sin\left(2\sqrt{z} - \frac{\pi}{4}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.33)$$

что совпадает с асимптотическим разложением функции Бесселя  $Y_0(2\sqrt{z})$ . Следовательно асимптотическое разложение фундаментального решения дробно-дифференциального уравнения Гельмгольца (3.2) совпадает с асимптотическим разложением фундаментального решения классического уравнения Гельмгольца (см. [62]), что доказывает применимость условия (3.32) к уравнению (3.2). При решении уравнения (3.2) с условиями (3.18) и (3.32) произвольная постоянная в фундаментальном решении определяется как  $C_0 = -\frac{i}{4}$ .

**Замечание.** В предельном случае  $\alpha = 2$ ,  $n = 2$ , фундаментальное решение  $G_{2,2}^{H^+}(\mathbf{x})$  может быть записано через функции Ганкеля вида  $-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|)$  или  $\frac{i}{4}H_0^{(2)}(\omega|\mathbf{x}|)$ , которые являются фундаментальными решениями классического уравнения Гельмгольца [62].

В силу того, что  $u \in \mathbb{C}$ , полагаем, что решение уравнения (3.2) представляется в виде

$$u = u_R + iu_C.$$

В данном случае условие (3.32) может быть расщеплено на два граничных условия:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sqrt{|\mathbf{x}|} \left( \frac{\partial u_R}{\partial |\mathbf{x}|} + ku_C \right) = 0, \quad (3.34)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sqrt{|\mathbf{x}|} \left( \frac{\partial u_C}{\partial |\mathbf{x}|} - ku_R \right) = 0. \quad (3.35)$$

Решение (3.19) может быть также расщеплено как

$$u_R(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi})^\delta G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.36)$$

$$u_C(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi}) J_0(\omega|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) d\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.37)$$

**3.4 Фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения модифицированного уравнения Гельмгольца.** Рассмотрим теперь дробно-дифференциальное обобщение модифицированного уравнения Гельмгольца (3.3) в  $n$ -мерном пространстве с граничным условием на бесконечности (3.18). Фундаментальное решение рассматриваемого уравнения может быть найдено как решение уравнения

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} G_{\alpha,n}^{H^-}(\mathbf{x}) - \omega^2 G_{\alpha,n}^{H^-}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in (1, 2). \quad (3.38)$$

Решение уравнения (3.3) может быть при этом записано как

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi}) G_{\alpha,n}^{H^-}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (3.39)$$

Различные представления  $G_{\alpha,n}^{H^-}(\mathbf{x})$ , как и в случае ранее рассматриваемого уравнения, могут быть получены с использованием интегральных преобразований Фурье и Меллина.

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 3.3.** *Фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца (3.3) может быть представлено в виде*

$$G_{\alpha,n}^{H^-}(\mathbf{x}) = C_{\alpha,n}^{H^-} (\pi|\mathbf{x}|)^{1-\frac{n}{2}} \times \\ \times H_{1,3}^{2,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2}{4} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (\frac{n}{4} - \frac{1}{2}, 1), (1 - \frac{2+n}{2\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{n}{4}, 1) \end{matrix} \right], \quad (3.40)$$

$$\text{где } C_{\alpha,n}^{H^-} = \frac{(\omega^2)^{\frac{2+n}{2\alpha}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \pi \alpha}.$$

**Доказательство.** Для нахождения  $G_{\alpha,n}^{H^-}(x)$  воспользуемся прямым и обратным преобразованиями Фурье, применение которых к уравнению (3.38) приводит к

$$G_{\alpha,n}^{H^-}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}}}{|\boldsymbol{\tau}|^\alpha + \omega^2} d\boldsymbol{\tau}. \quad (3.41)$$

Так как  $(|\boldsymbol{\tau}|^\alpha + \omega^2)^{-1}$  является радиальной функцией, то можно использовать свойство преобразования Фурье (3.24), применение которого к уравнению (3.41) приводит к интегральному представлению фундаментального решения вида

$$G_{\alpha,n}^{H^-}(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}|^{1-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{k^{\frac{n}{2}}}{k^\alpha + \omega^2} J_{\frac{n}{2}-1}(k|\mathbf{x}|) dk, \quad (3.42)$$

где  $J_\mu(z)$  — функция Бесселя первого рода.

Для доказательства (3.40), воспользуемся интегральным преобразованием Меллина (3.26) и теоремой о свертке (3.27). Интеграл в правой части (3.42) является сверткой (3.27) функций

$$f_1(k) = J_{\frac{n}{2}-1}(k), \quad f_2(k) = \frac{1}{k^\alpha + \omega^2}, \quad (3.43)$$

преобразование Меллина которых имеет вид [66]

$$f_1^*(s) = \frac{2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)}, \quad (3.44)$$

$$f_2^*(s) = \frac{1}{\alpha} (\omega^2)^{\frac{s}{\alpha}-1} \Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right), \quad 2 - \alpha < \operatorname{Re}(s) < \frac{3}{2}. \quad (3.45)$$

После замены переменных  $\frac{s}{2} \rightarrow s$ , обратное преобразование Меллина дает представление фундаментального решения в виде контурного интеграла Меллина–Барнса:

$$G_{\alpha,n}^{H^-}(\mathbf{x}) = C_{\alpha,n}^{H^-} (\pi|\mathbf{x}|)^{1-\frac{n}{2}} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4} - \frac{1}{2} + s\right) \Gamma\left(\frac{2+n}{2\alpha} - \frac{2s}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2+n}{2\alpha} + \frac{2s}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4} - s\right)} \left(\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} |\mathbf{x}|^2}{4}\right)^{-s} ds, \quad (3.46)$$

где  $1 - \frac{\alpha}{2} < \gamma < \frac{3}{4}$ . Данный интеграл является сходящимся и может быть представлен в виде (3.40).  $\square$

**Замечание.** При  $\alpha = 2$ ,  $n = 2$  функция (3.40) совпадает с фундамен-

тальным решением модифицированного уравнения Гельмгольца [62] и представляется через модифицированную функцию Бесселя второго рода:

$$G_{2,2}^{H^-}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} K_0(\omega|\mathbf{x}|).$$

Важно отметить, что и в этом случае порядок главного члена асимптотического разложения для функции Фокса из (3.40) не зависит от  $\alpha$  и может быть записан в виде  $\left| H_{1,3}^{2,1}(\mathbf{x}^2) \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right)$ ,  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  (см. [70]). Отсюда следует, что для сходимости интеграла (3.39) достаточно, чтобы выполнялось  $f(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^\gamma}\right)$ ,  $\gamma > -1$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

В разделе 3.1 было показано, что в некоторых частных случаях исследование дробно-дифференциальных математических моделей диффузионных и волновых процессов может быть сведено к анализу дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона (3.1) и Гельмгольца (3.2), (3.3). Построенные фундаментальные решения этих уравнений позволяют выписывать интегральные представления их решений в виде свертки полученных фундаментальных решений с правой частью. При этом важно отметить, что сходимость этих интегралов обеспечивается ограничениями на функции в правой части уравнений.

При моделировании различных процессов влияние некоторых физических объектов может быть описано в терминах точечных источников определенной интенсивности. Например, при исследовании пластовых систем с добывающими и нагнетательными скважинами влияние этих скважин иногда может быть описано в терминах точечных стоков или источников с заданной интенсивностью. В случае математических моделей, исследование которых может быть сведено к анализу уравнений (3.1), (3.2) или (3.3), подобные источники моделируются слагаемыми вида  $a_j \delta(x - x_j)$  в правой части рассматриваемых уравнений. Здесь  $a_j$  – интенсивности точечных источников, а  $x_j$  – координаты источников. В этом случае интегральные представления решений могут быть переписаны в виде линейной комбинации соответствующих фундаментальных решений. Для уравнений (3.2) и (3.3) при этом важна возможность численного расчета функций Фокса из (3.21) и (3.40).

Когда правые части рассматриваемых уравнений являются непрерывными функциями, возникает задача численного интегрирования (3.16), (3.19) и (3.39). Применение классических кубатурных формул в этом случае приводит к вычислительной сложности порядка  $\mathcal{O}(N^2)$  при  $N$  кубатурных узлах и такому же по порядку количеству расчетных точек, что вызывает существенные временные затраты при больших  $N$ . Таким образом, возникает задача построения более эффективных способов численного интегрирования соответствующих интегральных представлений решений.

Решению задач, упомянутых выше, посвящены следующие главы диссертации.

## Глава 2

# МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Построенные в предыдущей главе фундаментальные решения дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца позволяют решать задачи моделирования, которые допускают постановку в терминах функций влияния точечных источников различной интенсивности. Решения подобных задач представляются в виде линейной комбинации фундаментальных решений рассматриваемых уравнений. Вычисление фундаментального решения (3.15) дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона не представляет трудности. Численный расчет функций Фокса  $H_{24}^{21}(z)$  и  $H_{13}^{21}(z)$  из фундаментальных решений (3.21) и (3.40) является достаточно нетривиальной задачей. По этой причине одной из главных задач данной главы является разработка и апробация алгоритмов расчета этих функций.

В силу нелокальности многомерных дробно-дифференциальных операторов по пространственным переменным, таких как дробная степень оператора Лапласа (1.1) или потенциал Рисса (1.2), постановка внутренних граничных условий для задач, описываемых дробно-дифференциальными уравнениями с этими операторами, принципиально невозможна. Однако при исследовании подобных задач могут быть использованы основные идеи метода вспомогательных источников (метода фундаментальных решений), позволяющие, посредством ввода системы вспомогательных точечных источников заранее неопределенной интенсивности, требовать выполнения определенных условий на контурах, соответствующих реальным границам моделируемых областей.

В данной главе рассматриваются две задачи, для решения которых используются обобщения основных идей метода вспомогательных источников, а также предлагаются способы вычисления функций Фокса  $H_{24}^{21}(z)$  и  $H_{13}^{21}(z)$  из фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений классиче-



ского и модифицированного уравнений Гельмгольца. Первой задачей является моделирование процесса однофазной фильтрации в системе пяти скважин, а второй – моделирование рассеяния электромагнитных волн в средах с эффектами пространственной нелокальности.

## §4 Моделирование однофазной фильтрации в среде с пространственной нелокальностью

**4.1 Постановка задачи.** Рассмотрим классическую двумерную задачу об однофазной фильтрации в неограниченном пласте с пятиточечной системой скважин, состоящей из четырех нагнетательных скважин и одной добывающей (см. рисунок 4.1). В качестве основного уравнения модели однофазной фильтрации рассматривается дробно-дифференциальное уравнение фильтрации, полученное в разделе 1.2:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa_\alpha (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} p + q, \quad p = p(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in (1, 2). \quad (4.1)$$

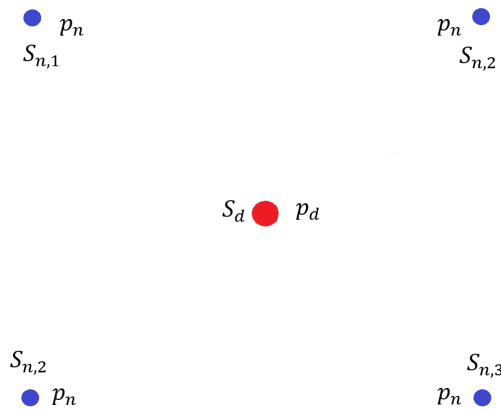


Рисунок 4.1: Пятиточечная система скважин. Здесь  $S_d$  – забойная область добывающей скважины,  $S_{n_i}$  – забойные области нагнетательных скважин,  $p_d$  – забойное давление на добывающей скважине,  $p_n$  – забойное давление на нагнетательных скважинах

Для уравнения (4.1) начальные условия могут быть поставлены классическим образом в виде заданного распределения давления в начальный момент времени. В дальнейшем будем полагать, что это давление всюду по-

стоянно и равно пластовому  $p_{pl}$ :

$$p|_{t=0} = p_{pl}. \quad (4.2)$$

В качестве внешнего граничного условия для (4.1) в этом случае естественно использовать условие

$$p|_{|x| \rightarrow \infty} = p_{pl}. \quad (4.3)$$

В силу нелокальности дробной степени оператора Лапласа постановка внутренних граничных условий для уравнения (4.1) оказывается принципиально невозможной. По этой причине в рассматриваемой задаче скважины моделируются как некоторая совокупность точечных источников, интенсивности которых находятся исходя из условий обеспечения заданной величины забойных давлений на круговых контурах, соответствующих границам скважин:

$$p|_{S_{n,i}} = p_n, \quad i = 1, \dots, 4, \quad p|_{S_d} = p_d, \quad (4.4)$$

где  $S_{n,i}$ ,  $S_d$  – зоны забоя нагнетательных и добывающей скважин радиусов  $r_n$  и  $r_d$ , а  $p_n$ ,  $p_d$  – забойные давления на этих скважинах и их контурах, соответственно.

Введение системы вспомогательных источников в областях, ограниченных круговыми контурами, соответствующими забойным зонам скважин, приводит к добавлению в правую часть (4.1) слагаемых вида  $c(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Каждое такое слагаемое моделирует влияние точечного источника с интенсивностью  $c(t)$ , расположенного в точке с координатами  $\mathbf{y}$ , соответствующими местоположению скважин.

Подобный подход, основанный на введении системы вспомогательных источников, использует основные идеи метода фундаментальных решений (см., например, [71, 73–75]). В этом методе решение задачи ищется как линейная суперпозиция функций влияния, определяемых фундаментальными решениями рассматриваемых дифференциальных уравнений. Данная суперпозиция должна соответствовать введенной системе вспомогательных источников. Чаще всего этот метод применяется для моделирования процессов,

описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа, так как определение интенсивностей  $c(t)$ , зависящих от времени, является достаточно нетривиальной задачей. Именно поэтому в следующих разделах будут рассматриваться процедуры решения стационарной и нестационарной задач однофазной фильтрации, сводящихся к решению дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца, соответственно.

Для удобства дальнейших расчетов выполним замену переменных вида  $p = P\bar{p} + p_{pl}$ ,  $P = const$  в (4.1)–(4.4), что приводит к уравнению

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = -\varkappa_\alpha (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{p} + \bar{q} \quad (4.5)$$

с однородными краевыми условиями

$$\bar{p}|_{t=0} = 0, \quad \bar{p}|_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} = 0. \quad (4.6)$$

Здесь  $\bar{q}$  имеет вид

$$\bar{q} = \sum_{j=1}^{N_d} a_j(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{d,j}) + \sum_{j=1}^{N_n} b_j(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n,j}),$$

где  $a_j$  ( $j = 1, \dots, N_d$ ) – интенсивности вспомогательных источников, соответствующих добывающей скважине,  $b_j$  ( $j = 1, \dots, N_n$ ) – соответствующих нагнетательным скважинам,  $\mathbf{x}_{d,j}$ ,  $\mathbf{x}_{n,j}$  – координаты этих источников. Коэффициенты  $a_j(t)$ ,  $b_j(t)$  определяются из условий

$$\bar{p}|_{S_{n,i}} = \bar{p}_n, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \bar{p}|_{S_d} = \bar{p}_d, \quad (4.7)$$

где  $\bar{p}_n = \frac{p_n - p_{pl}}{P}$ ,  $\bar{p}_d = \frac{p_d - p_{pl}}{P}$ .

**4.2 Алгоритм решения задачи установившейся однофазной фильтрации.** Рассмотрим предельный случай установившегося фильтрационного течения. Тогда (4.5)–(4.7) принимает вид

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{p} = \bar{q}, \quad (4.8)$$

$$\bar{p}|_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.9)$$

где  $\bar{q}$  определяется из условий

$$\bar{p}|_{S_{n,i}} = \bar{p}_n, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \bar{p}|_{S_d} = \bar{p}_d. \quad (4.10)$$

Отметим, что при  $\bar{q} = 0$  задача (4.8)–(4.10) имеет только тривиальное решение.

Система (4.8)–(4.10) описывает предельное стационарное распределение поля давлений в пласте в системе пяти скважин. Уравнение (4.8) является дробно-дифференциальным обобщением уравнения Пуассона, которое исследовалось в разделе 3.2.

Введение системы вспомогательных источников с неизвестными заранее интенсивностями на некотором достаточно малом расстоянии  $\varepsilon$  от круговых контуров, соответствующих границам скважин (см. рисунок 4.2), позволяет записать правую часть в (4.8) как

$$\bar{q} = \sum_{j=1}^{N_d} a_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{d,j}) + \sum_{j=1}^{N_n} b_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n,j}), \quad (4.11)$$

где  $a_j$  ( $j = 1, \dots, N_d$ ) – интенсивности вспомогательных источников, соответствующих добывающей скважине,  $b_j$  ( $j = 1, \dots, N_n$ ) – соответствующих нагнетательным скважинам,  $\mathbf{x}_{d,j}$ ,  $\mathbf{x}_{n,j}$  – координаты этих источников.

В этом случае решение задачи (4.8)–(4.10) может быть представлено как

$$\bar{p}(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}) * G_{\alpha,2}^P(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^{N_d} a_j G_{\alpha,2}^P(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{d,j}|) + \sum_{j=1}^{N_n} b_j G_{\alpha,2}^P(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n,j}|), \quad (4.12)$$

где  $G_{\alpha,2}^P(z)$  – фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона (4.8), которое дается формулой (3.15).

Таким образом, для построения численного решения задачи (4.8)–(4.10) предлагается следующий **алгоритм**.

- 1) Задаются  $N_n + N_d$  точек  $\mathbf{y}_{n,l}$  и  $\mathbf{y}_{d,k}$  на контурах, соответствующих границам скважин, для определения неизвестных коэффициентов  $a_j$ ,  $b_j$ . Значения контурных давлений определяются условиями (4.10).
- 2) Составляется система линейных алгебраических уравнений относительно

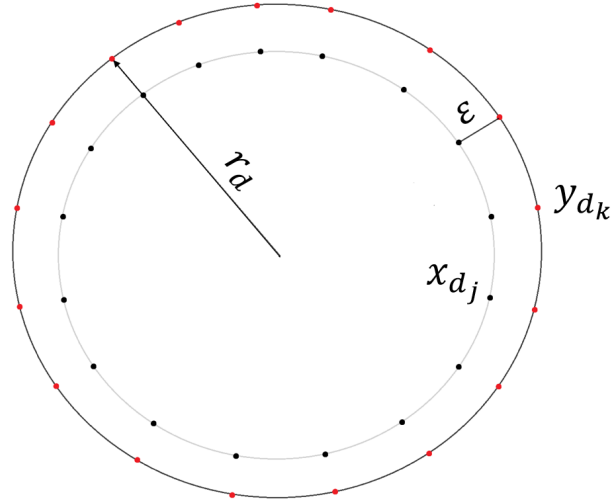


Рисунок 4.2: Пример моделирования добывающей скважины вспомогательными источниками. Здесь  $r_d$  – радиус добывающей скважины,  $\varepsilon$  – расстояние от вспомогательных источников до контура, соответствующего границе скважины,  $\mathbf{x}_{d,j}$  – координаты вспомогательных источников,  $\mathbf{x}_{d,k}$  – координаты точек на контуре

но интенсивностей вспомогательных источников  $a_j$ ,  $b_j$  путем подстановки давлений в заданных точках в уравнение (4.12). Полученная система имеет вид

$$\bar{p}_d = \sum_{j=1}^{N_d} a_j G_{\alpha,2}^P(|\mathbf{y}_{d,k} - \mathbf{x}_{d,j}|) + \sum_{j=1}^{N_n} b_j G_{\alpha,2}^P(|\mathbf{y}_{d,k} - \mathbf{x}_{n,j}|), \quad k = 1, \dots, N_d, \quad (4.13)$$

$$\bar{p}_n = \sum_{j=1}^{N_d} a_j G_{\alpha,2}^P(|\mathbf{y}_{n,l} - \mathbf{x}_{d,j}|) + \sum_{j=1}^{N_n} b_j G_{\alpha,2}^P(|\mathbf{y}_{n,l} - \mathbf{x}_{n,j}|), \quad l = 1, \dots, N_n. \quad (4.14)$$

- 3) Решается система (4.13), (4.14) для определения неизвестных интенсивностей  $a_j$ ,  $b_j$ .
- 4) Выполняется подстановка найденных интенсивностей в (4.12) и находится приближенное решение рассматриваемой задачи в любой точке  $\mathbf{x}$ .

Найденные интенсивности вспомогательных источников  $a_j$  позволяют определить массовый расход на добывающей скважине в установившемся ре-

жиме:

$$G_p = \rho \phi c_t P \varkappa_\alpha \bar{G}_p, \quad \bar{G}_p = \sum_{j=1}^{N_d} a_j. \quad (4.15)$$

Важно отметить, что значение коэффициента пьезопроводности  $\varkappa_\alpha$  обычно известно лишь в предельном случае  $\alpha = 2$ . При  $\alpha \neq 2$  этот коэффициент может быть найден из результатов натуральных экспериментов.

**4.3 Алгоритм решения нестационарной задачи однофазной фильтрации.** Одним из классических подходов к моделированию нестационарных задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями параболического типа, является использование интегрального преобразования Лапласа по времени, позволяющее свести эти уравнения к уравнениям эллиптического типа. Именно этот подход используется в данном разделе для построения алгоритма решения нестационарной задачи (4.5)–(4.7).

Под действием преобразования Лапласа  $\mathcal{L}$  система (4.5)–(4.7) принимает вид

$$s\bar{p}^* = -\varkappa_\alpha (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{p}^* + \bar{q}^*, \quad \bar{p}^* = \bar{p}^*(s, \mathbf{x}), \quad (4.16)$$

$$\bar{p}^*|_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.17)$$

где

$$\bar{p}^*(s, \mathbf{x}) \equiv \mathcal{L}[\bar{p}(t, \mathbf{x})](s, \mathbf{x}) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{p}(t, \mathbf{x}) dt,$$

а  $\bar{q}^*$  определяется из условий

$$\bar{p}^*|_{S_{n,i}} = \frac{\bar{p}_n}{s}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \bar{p}^*|_{S_d} = \frac{\bar{p}_d}{s}. \quad (4.18)$$

Здесь  $\bar{p}^*(s, \mathbf{x})$  представляет собой поле давлений  $\bar{p}$  в пространстве изображений.

Уравнение (4.16) является дробно-дифференциальным обобщением уравнения Гельмгольца, фундаментальное решение которого было построено в разделе 3.4 и имеет вид (3.40).

Для построения решения системы (4.16)–(4.18), как и в рассмотренной ранее стационарной задаче, будет использоваться подход, основанный на иде-

ях метода вспомогательных источников. В этом случае решение рассматриваемой задачи может быть записано как

$$\bar{p}^*(s, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_d} a_j^* G_{\alpha,2}^{H^-} (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{d,j}|) + \sum_{j=1}^{N_n} b_j^* G_{\alpha,2}^{H^-} (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n,j}|), \quad (4.19)$$

где  $G_{\alpha,2}^{H^-}(z)$  – фундаментальное решение уравнения (4.16),  $a_j^*$  ( $j = 1, \dots, N_d$ ) – интенсивности вспомогательных источников, соответствующих добывающей скважине, а  $b_j^*$  ( $j = 1, \dots, N_n$ ) – интенсивности вспомогательных источников, соответствующих нагнетательным скважинам.

Вычисление неизвестных интенсивностей вспомогательных источников в (4.19) выполняется по алгоритму, аналогичному предложенному в предыдущем разделе для стационарной задачи. Главным отличием от предыдущего алгоритма в этом случае является необходимость вычисления функций Фокса в фундаментальных решениях  $G_{\alpha,2}^{H^-}(z)$ , для которых отсутствует универсальный алгоритм нахождения их значений. В данном разделе предлагается подход, основанный на использовании прямого и асимптотического разложений функции  $H_{1,3}^{2,1}(z)$  в фундаментальном решении  $G_{\alpha,2}^{H^-}(z)$ .

В соответствии с [70], для функций Фокса из  $G_{\alpha,2}^{H^-}(z)$  справедливо разложение вида

$$H_{1,3}^{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}(k+1)\right) \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(k+1)\right) \frac{(-z)^k}{k!k!} + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}(k+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}(k+1)\right)} (-1)^k z^{\frac{\alpha}{2}(k+1)-1}. \quad (4.20)$$

Для возможности численного расчета ряды по  $k$  в (4.20) заменяются конечными суммами вида  $\sum_{k=0}^{N_p}$ .

На рисунке 4.3 представлены графики погрешности вычисления  $H_{1,3}^{2,1}(z)$  при  $\alpha = \sqrt{2}$  и различном количестве членов разложения (4.20). Погрешность  $\Delta$  вычислялась в виде

$$\Delta = \lg \left| \bar{H}_{1,3}^{2,1}(z) - \tilde{H}_{1,3}^{2,1}(z) \right|.$$

Здесь  $\bar{H}_{1,3}^{2,1}(z)$  – значение функции Фокса, вычисленное по первым 1000 членам разложения (4.20), а  $\tilde{H}_{1,3}^{2,1}(z)$  – по первым  $N_p$  членам этого разложения. При этом нетрудно заметить рост рассматриваемой погрешности с ростом аргумента  $z$ . Поэтому при больших значениях аргумента предлагается использование асимптотического разложения.

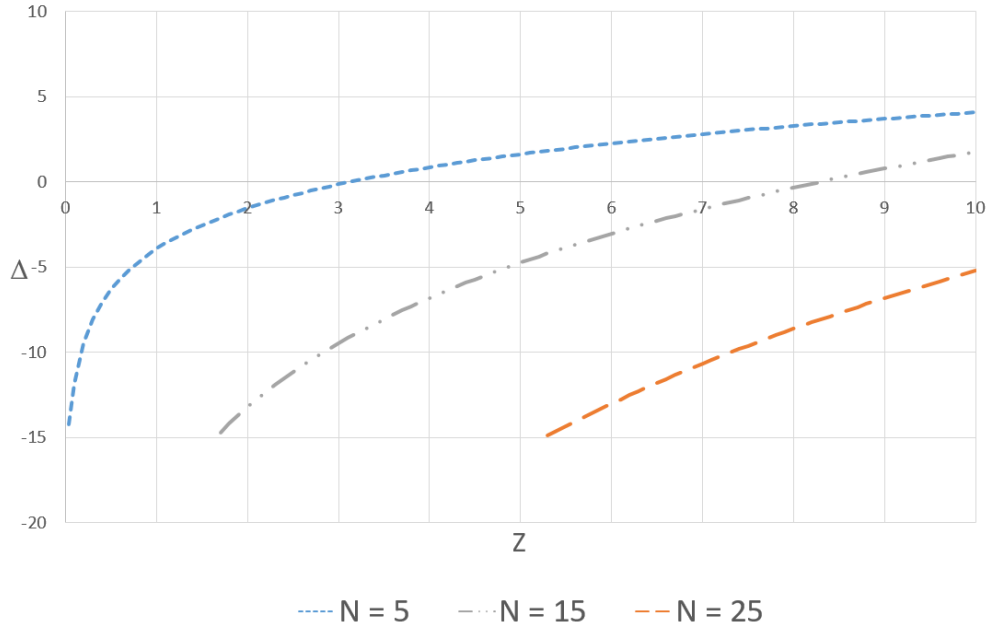


Рисунок 4.3: Погрешность вычисления функций  $H_{1,3}^{2,1}$  при  $\alpha = \sqrt{2}$  и различном количестве членов ряда прямого разложения

Асимптотическое разложение функции Фокса  $H_{1,3}^{2,1}(z)$  представляется как (см. [70])

$$H_{1,3}^{2,1}(z) \sim \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{k\alpha}{2}\right)} (-1)^k z^{-1 - \frac{k\alpha}{2}}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (4.21)$$

Как и в случае прямого разложения, при численном расчете ряд в (4.21) заменяется на конечную сумму  $\sum_{k=0}^{N_a}$ .

Для практических целей возможно использование простой стыковки прямого и асимптотического разложений функции  $H_{1,3}^{2,1}(z)$ . Возможность этого демонстрируется на рисунке 4.4 и в таблице 4.1. При данных расчетах вычислялись  $N_p = 25$  членов в прямом разложении (4.20) и  $N_a = 9$  членов в асимптотическом разложении (4.21).

С учетом проведенных вычислительных экспериментов, для численного



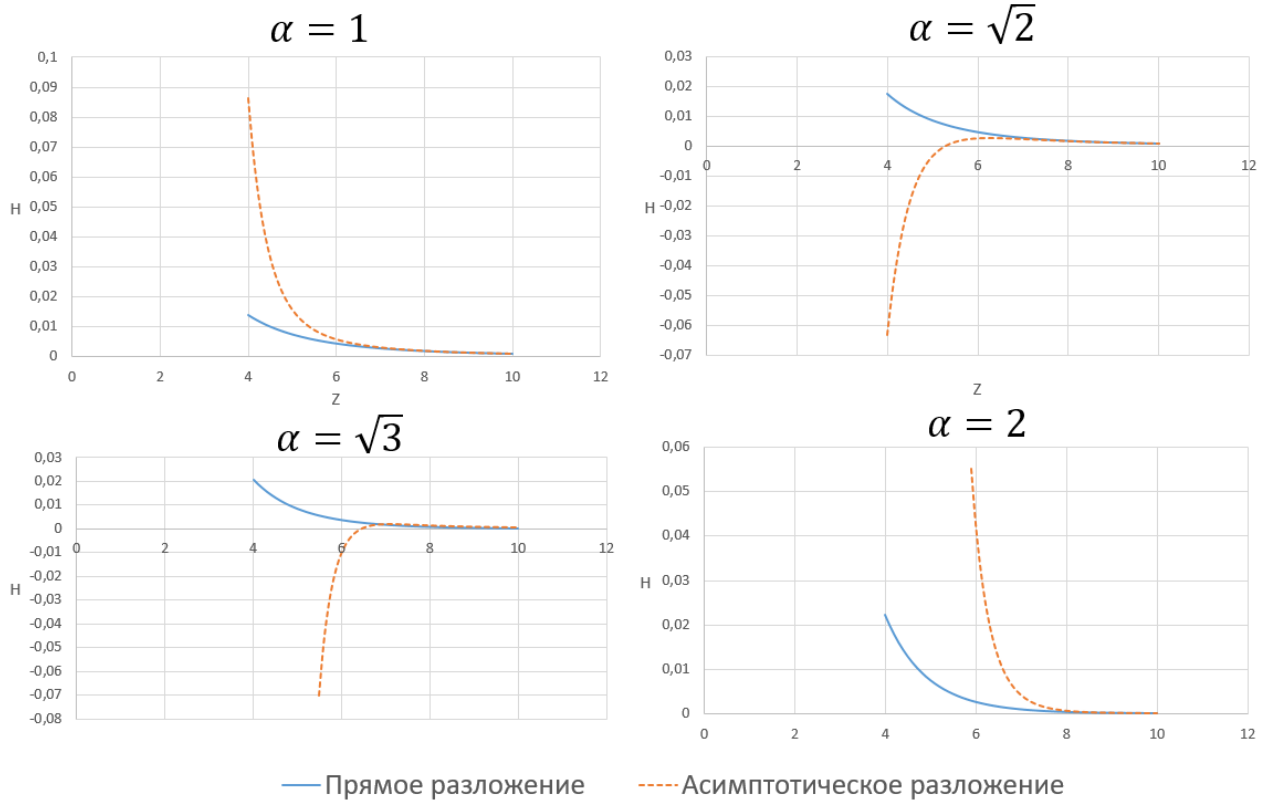


Рисунок 4.4: Стыковка прямого и асимптотического разложений функции  $H_{1,3}^{2,1}(z)$

Таблица 4.1: Значения разложений функций  $H_{1,3}^{2,1}(z)$  в точке  $z = 8$

	Прямое разложение	Асимптотическое разложение
$\alpha = 1$	0.001824675	0.001899397
$\alpha = \sqrt{2}$	0.001596048	0.001597574
$\alpha = \sqrt{3}$	0.001054172	0.001027944
$\alpha = 2$	0.000352802	0.000375468

расчета фундаментального решения  $G_{\alpha,2}^{H^-}(z)$  предлагается

- при  $z \in [0, z_0)$  использовать разложение (4.20) с  $N_p = 25$ ,
- при  $z \in [z_0, \infty)$  использовать разложение (4.21) с  $N_a = 9$ .

Как можно видеть из таблицы 4.1, при  $z_0 = 8$  предложенный способ позволяет достичь точности вычислений порядка  $10^{-5}$ . Для увеличения точности может быть выбрана точка  $z_0 > 8$ , при этом важно отметить, что может понадобиться использование большего количества членов ряда  $N_p$  прямого разложения.

Предложенный алгоритм построения решения системы (4.16)-(4.18) поз-

воляет определять поле давлений  $\bar{p}$  задачи (4.5)-(4.7) в пространстве изображений. При этом, в соответствии с предельной теоремой (см., например, [66]), справедливо:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\bar{p}^*(s, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t, x), \quad (4.22)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\bar{G}^*(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{G}(t), \quad (4.23)$$

где  $\bar{G}^* = \sum_{j=1}^{N_d} a_j^*$ .

Нахождение полей  $\bar{p}^*(s, x)$  при различных значениях  $s$  позволяет выполнить аппроксимацию функции  $\bar{p}^*(s, x_j) \approx \tilde{p}^*(s)$  для любой расчетной точки  $x_j$ . Применение обратного преобразования Лапласа к функции  $\tilde{p}^*(s)$  приводит к приближенному решению задачи (4.5)-(4.7) в рассматриваемой точке  $x_j$  в любой момент времени  $t$ .

**4.4 Результаты вычислительных экспериментов.** Для численного исследования стационарной (4.8)–(4.10) и нестационарной (4.5)–(4.7) задач линейной однофазной фильтрации была выполнена программная реализация на языке программирования C++ численных алгоритмов, предложенных в предыдущих разделах. Вычислительные эксперименты проводились при следующих параметрах:

- размер расчетной области:  $200 \text{ м} \times 200 \text{ м}$ ;
- коэффициент пьезопроводности при  $\alpha = 2$ :  $\kappa_2 = 0.125 \text{ м}^2/\text{с}$ ;
- забойное давление на нагнетательных скважинах:  $p_n = 20 \text{ МПа}$ ;
- забойное давление на добывающей скважине:  $p_d = 10 \text{ МПа}$ ;
- пластовое давление:  $p_{pl} = 15 \text{ МПа}$ ;
- пористость среды:  $\phi = 0.51$ ;
- вязкость флюида:  $\mu = 0.008 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ;
- плотность флюида:  $\rho = 800 \text{ кг}/\text{м}^3$ ;
- сжимаемость флюида:  $c_f = 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ ;
- сжимаемость породы:  $c_\phi = 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ .

Значение параметра  $P$  было положено равным  $5 \text{ МПа}$ , при этом  $\bar{p} \in [-1, 1]$ .

### Стационарная задача

Важной проблемой при исследовании ЛДДМ является выработка критериев сравнения результатов вычислительных экспериментов при различных значениях дробных параметров. В рассматриваемой задаче такой критерий связан с неизвестными значениями коэффициента пьезопроводности  $\varkappa_\alpha$  при разных  $\alpha$ . Так как значение данного параметра хорошо известно для различных пластовых систем лишь в предельном случае  $\alpha = 2$ , была поставлена задача определения зависимости между параметрами  $\varkappa_\alpha$  и  $\varkappa_2$  при заданных забойных давлениях на скважинах и одинаковом массовом расходе  $G_p$ . Для этого сначала по формуле (4.15) вычисляется значение массового расхода  $G_p|_{\alpha=2}$  при  $\alpha = 2$ :

$$G_p|_{\alpha=2} = \rho\phi c_t P \varkappa_2 \bar{G}_p|_{\alpha=2}, \quad \bar{G}_p = \sum_{j=1}^{N_d} a_j. \quad (4.24)$$

Затем, фиксируя значения забойных давлений на скважинах и полагая, что массовый расход остается неизменным ( $G_p = G_p|_{\alpha=2}$ ), определяем значения  $\varkappa_\alpha$  как

$$\varkappa_\alpha = \frac{G_p|_{\alpha=2}}{\rho\phi c_t P \bar{G}_p}. \quad (4.25)$$

В силу (4.24) и (4.25), получим соотношение

$$\varkappa_\alpha = C_{\varkappa_\alpha} \varkappa_2, \quad C_{\varkappa_\alpha} = \frac{\bar{G}_p|_{\alpha=2}}{\bar{G}_p}, \quad (4.26)$$

которое может быть использовано для сравнения решений рассматриваемой задачи для разных  $\alpha$  при одинаковых заданных величинах забойных давлений на скважинах и одинаковых массовых расходах.

На рисунке 4.5 представлен график зависимости  $C_{\varkappa_\alpha}$  при указанных численных параметрах системы от дробного параметра  $\alpha$ . Видно, что с уменьшением  $\alpha$  коэффициент пьезопроводности  $\varkappa_\alpha$  увеличивается, что характерно для супердиффузионного характера процесса фильтрации.

В таблице 4.2 представлены значения приведенного массового расхода  $\bar{G}_p$  при разных значениях параметра  $\alpha$ , равные суммарной интенсивности

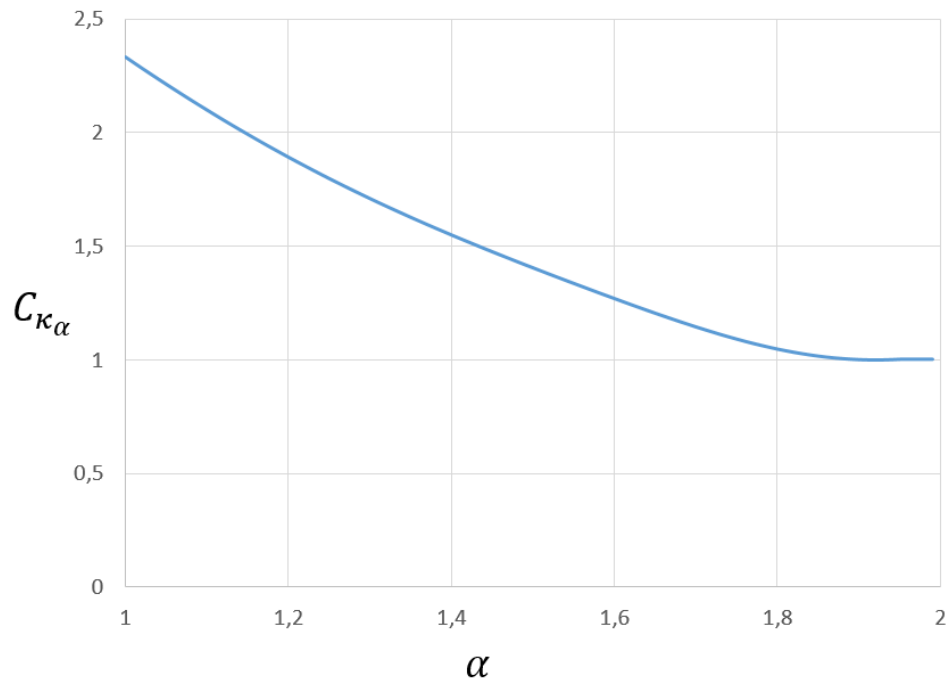


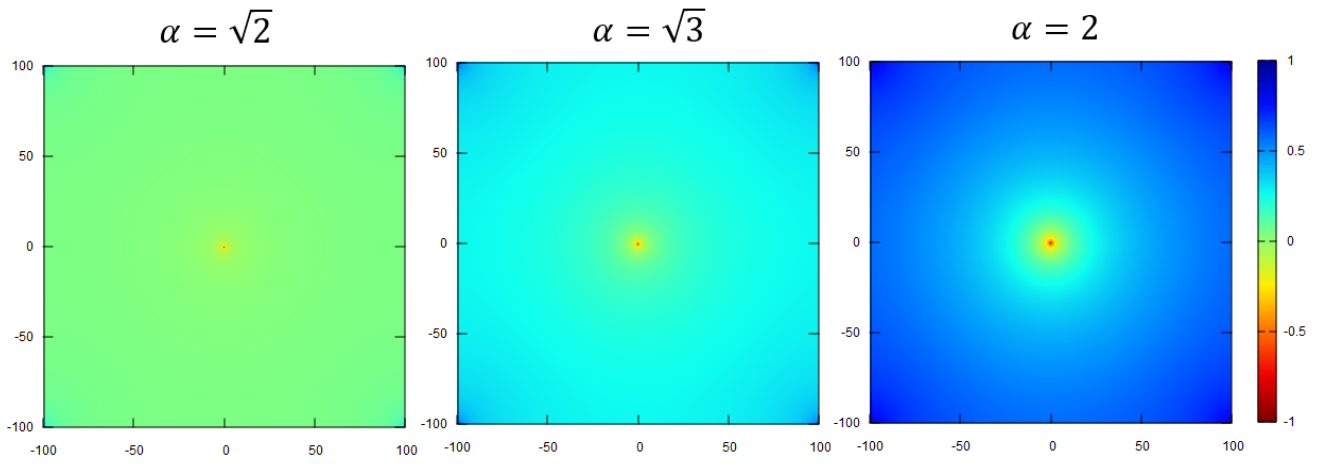
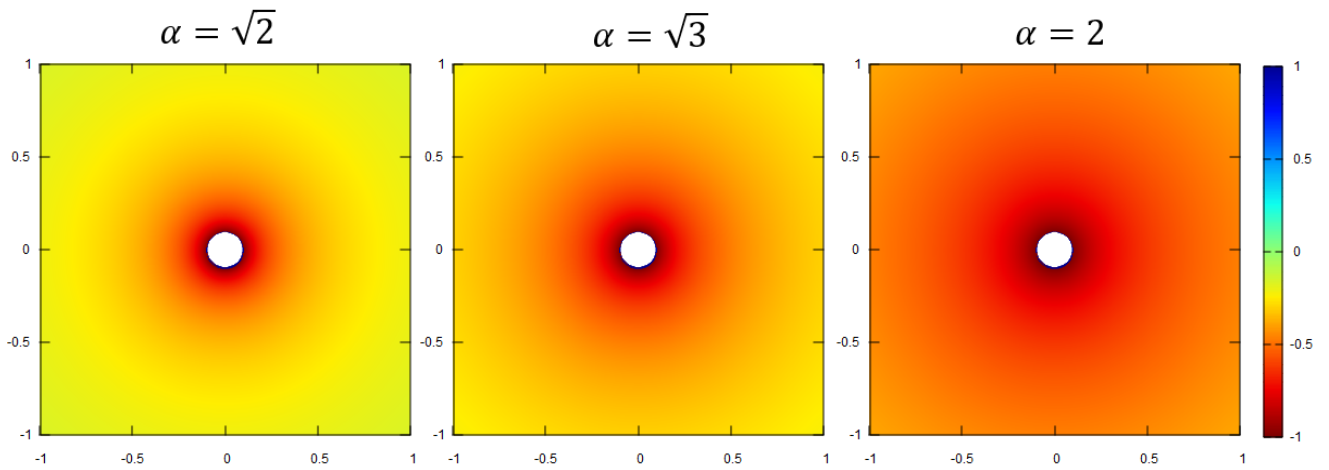
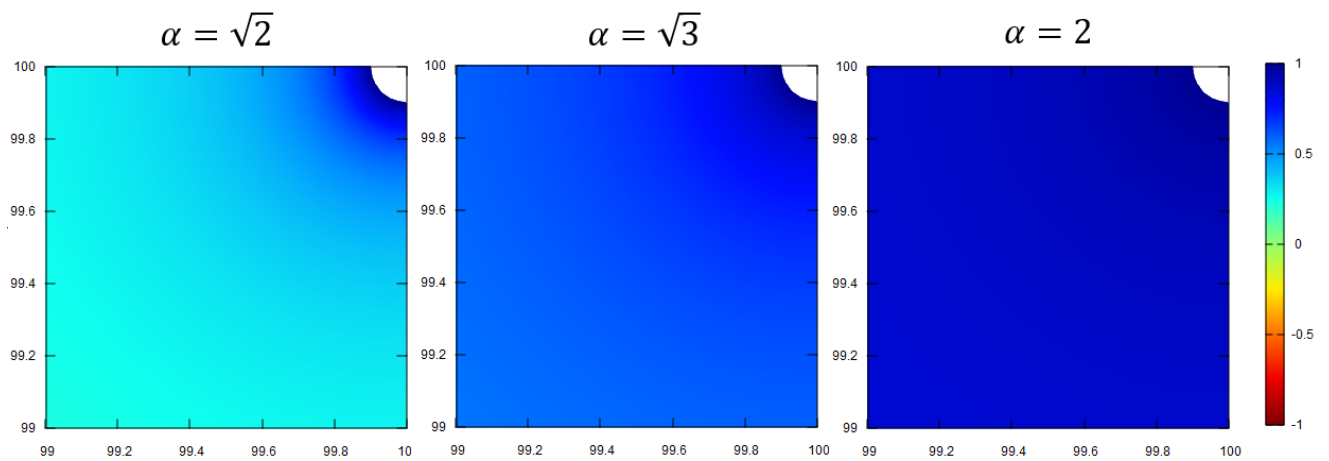
Рисунок 4.5: Зависимость коэффициента  $C_{к\alpha}$  от дробного параметра  $\alpha$

вспомогательных источников, соответствующих добывающей скважине.

Таблица 4.2: Значение  $\bar{G}_p$  при разных  $\alpha$

$\alpha$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$\bar{G}_p$	0.96273	1.32738	1.44176

На рисунках 4.6, 4.7, 4.8 показаны приведенные поля давлений при различных значениях дробного параметра  $\alpha$  во всей расчетной области и в окрестности добывающей и нагнетательных скважин. Можно заметить, что с уменьшением  $\alpha$  все сильнее проявляется супердиффузионный характер протекания процесса: уменьшается интенсивность поля давления, растет «влияние» добывающей скважины.

Рисунок 4.6: Приведенное поле давления  $\bar{p}$ Рисунок 4.7: Приведенное поле давления  $\bar{p}$  в окрестности добывающей скважиныРисунок 4.8: Приведенное поле давления  $\bar{p}$  в окрестности нагнетательной скважины

### Нестационарная задача

Для исследования нестационарной задачи (4.5)-(4.7) используются такие же пластовые параметры, как и для стационарной задачи в предыдущем примере. В качестве критерия сравнения результатов вычислительных экспериментов при разных  $\alpha$  выбирается условие равного забойного давления на скважинах во всех экспериментах, а также одинакового массового расхода в предельный момент времени. Коэффициент пьезопроводности вычисляется по полученному в стационарной задаче соотношению (4.26).

На рисунке 4.9 показаны поля давлений  $s\bar{p}^*$  для разных значений  $\alpha$  при  $s = 10^{-10}$ . Отметим, что данные поля при  $s \rightarrow 0$  асимптотически стремятся к полям, представленным на рисунке 4.6, что согласуется с (4.22).

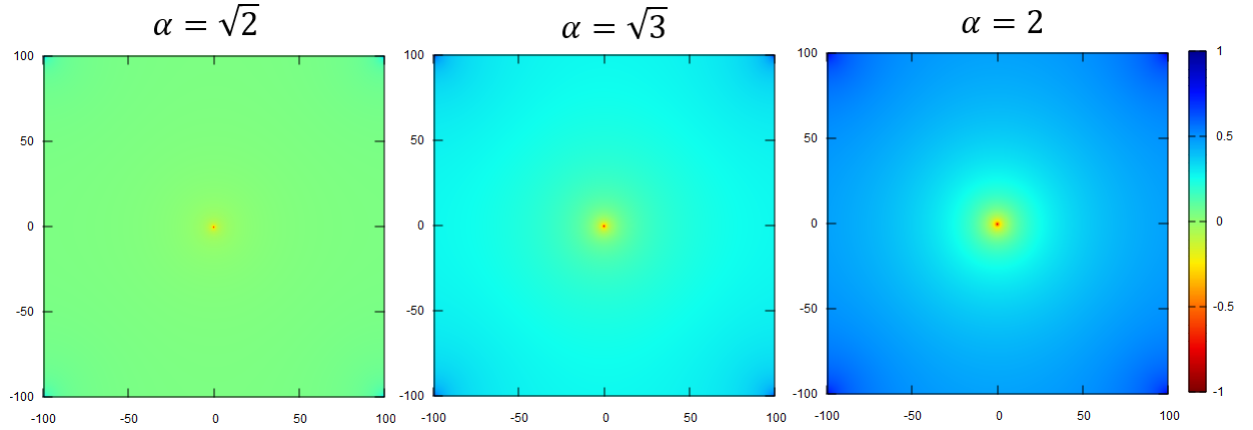


Рисунок 4.9: Поле  $s\bar{p}^*$  для разных  $\alpha$  при  $s = 10^{-10}$

В силу (4.16) и (4.20) может быть показано, что при  $s \rightarrow 0$  для  $\bar{G}^*$  справедливо разложение

$$\bar{G}^*(s) \approx \frac{A}{s} + \frac{B}{s^{2-\frac{2}{\alpha}}}, \quad (4.27)$$

где  $A = const$ ,  $B = const$ . Для определения этих коэффициентов проведем численное исследование параметра  $\bar{G}^*(s)$ .

Рассмотрим сначала случай  $\alpha = \sqrt{2}$ . На рисунке 4.10 представлен график зависимости  $\bar{G}^*$  от  $\frac{1}{s}$ , где  $\bar{G}^*$  определяется, как и в стационарном случае, как сумма интенсивностей вспомогательных источников, соответствующих добывающей скважине. Нетрудно заметить, что при  $s \rightarrow 0$  график  $\bar{G}^*$  приближается прямой вида  $\bar{G}^* = \frac{G_p}{s}$ , где  $G_p$  было определено в таблице 4.2 и представляет собой значение приведенного массового расхода в случае уста-

новившейся фильтрации, к которому сходится рассматриваемая нестационарная задача при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $\bar{G}^*$  может быть представлен в виде

$$\bar{G}^* = \frac{\bar{G}_p}{s} + F(s), \quad (4.28)$$

где  $F(s)$  – функция, график которой представлен на рисунке 4.11.

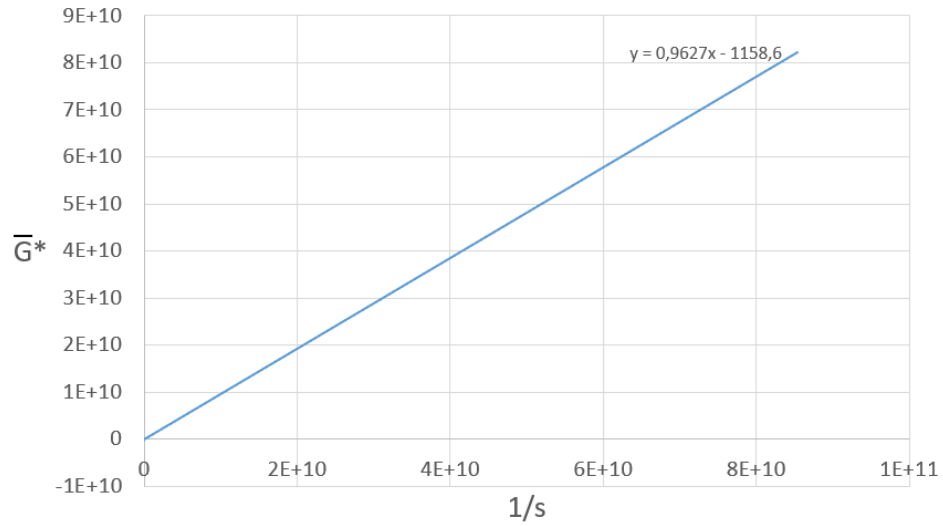


Рисунок 4.10: Зависимость  $\bar{G}^*$  от  $\frac{1}{s}$

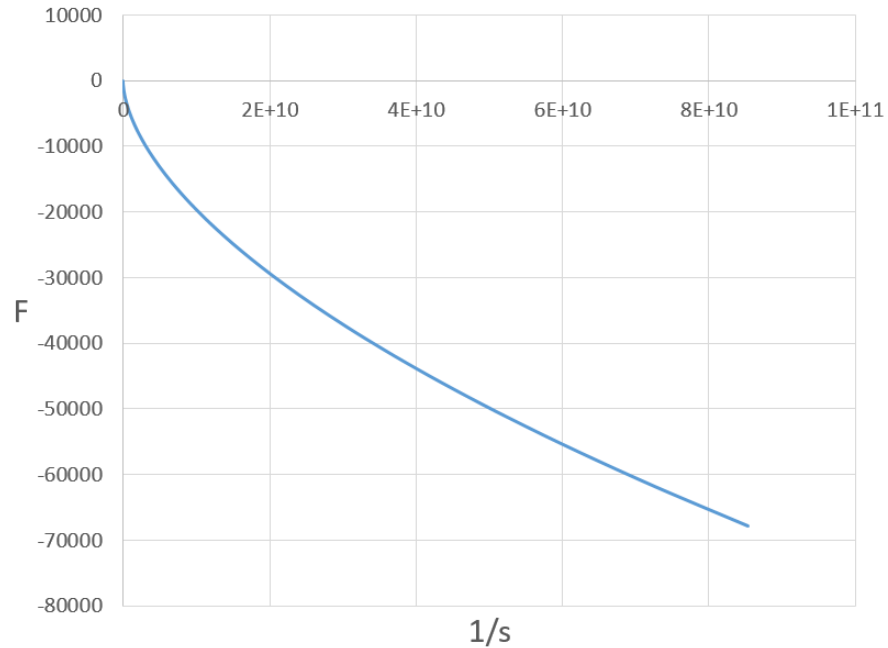


Рисунок 4.11: Зависимость  $F(s)$  от  $\frac{1}{s}$

Было получено, что функция  $F(s)$  аппроксимируется как

$$F(s) = \bar{F}(s) - \frac{0.029}{s^{2-\frac{2}{\sqrt{2}}}}, \quad (4.29)$$

что согласуется с (4.27).

Дальнейшее численное исследование показало, что функция  $\bar{F}(s)$  может быть аппроксимирована степенной функцией вида

$$\bar{F}(s) \approx \frac{0.0084}{s^{0.238}}, \quad (4.30)$$

что приводит к приближенному представлению функции  $\bar{G}^*$ :

$$\bar{G}^*(s) \approx \frac{\bar{G}_p}{s} - \frac{0.029}{s^{2-\frac{2}{\sqrt{2}}}} + \frac{0.0084}{s^{0.238}}. \quad (4.31)$$

На рисунке 4.12 показан график абсолютной погрешности, даваемой приближенным представлением (4.31). Нетрудно заметить, что погрешность возрастает при  $s \rightarrow 0$ , что означает слабую применимость данного представления при  $t \rightarrow \infty$ .

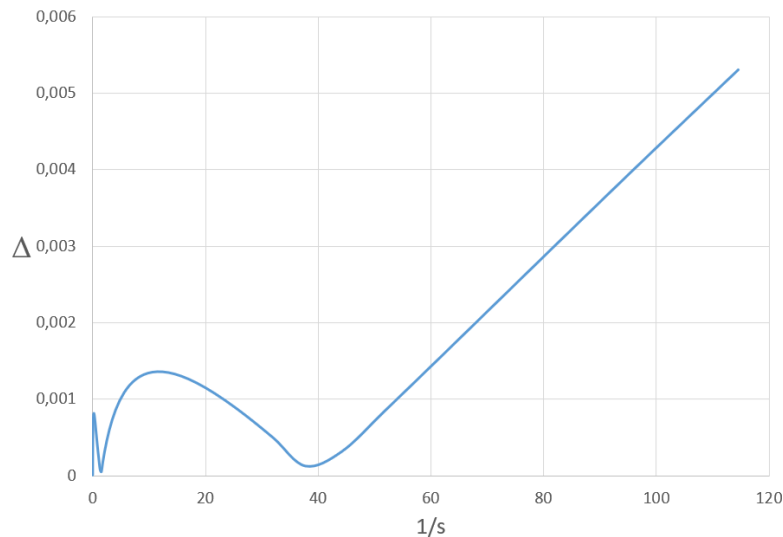


Рисунок 4.12: Погрешность, даваемая приближенным представлением (4.31)

Применяя теперь обратное преобразование Лапласа к (4.31), получим приближенное представление для определения зависимости приведенного мас-



сового расхода  $\bar{G}$  от времени при  $\alpha = \sqrt{2}$ :

$$\bar{G}(\bar{t}) \approx \bar{G}_p|_{\alpha=\sqrt{2}} - 0.0190\bar{t}^{1-\sqrt{2}} + 0.0022\bar{t}^{-0.762}. \quad (4.32)$$

Аналогичные расчеты были выполнены для случая  $\alpha = \sqrt{3}$ , при котором получилось выражение для нахождения приведенного массового расхода вида

$$\bar{G}(\bar{t}) \approx \bar{G}_p|_{\alpha=\sqrt{3}} - 0.2564\bar{t}^{1-\sqrt{3}} + 0.0280\bar{t}^{-0.552}. \quad (4.33)$$

Формула для расчета  $\bar{G}$  в предельном случае  $\alpha = 2$ , в отличие от (4.32) и (4.33), не содержит степенного слагаемого вида  $\bar{t}^{1-\alpha}$  и может быть записана как

$$\bar{G}(\bar{t}) \approx \bar{G}_p|_{\alpha=2} - 0.2362\bar{t}^{-0.091}. \quad (4.34)$$

Важно отметить, что, в соответствии с представлениями (4.32), (4.33) и (4.34), величины  $\bar{G}$  стремятся к  $G_p$  при  $t \rightarrow \infty$ , что соответствует приведенному массовому расходу в предельный момент времени, полученному в стационарной задаче.

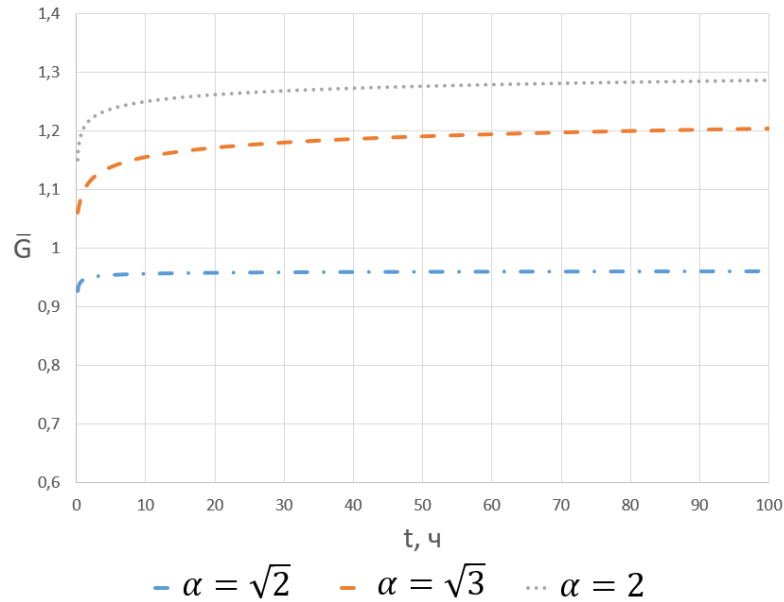


Рисунок 4.13: Приведенный массовый расход  $\bar{G}$  при разных  $\alpha$

На рисунке 4.13 представлены графики зависимости приведенного массового расхода  $\bar{G}$  от времени  $t$  при разных значениях дробного коэффициента  $\alpha$ . Так как массовый расход в рассматриваемой задаче определяется суммарной интенсивностью точечных источников, данный график демонстрирует

достаточность меньшей интенсивности источников при меньших значениях  $\alpha$  для достижения одинакового массового расхода в предельном случае  $t \rightarrow \infty$  при заданных забойных давлениях на скважинах, что характерно для супердиффузионного характера течения при  $\alpha < 2$ . Также можно заметить, что при малых  $\alpha$  быстрее происходит выход на асимптотический режим добычи, что объясняется супердиффузионным характером процесса при  $\alpha < 2$ . Реальный массовый расход может быть вычислен по формуле

$$G = \rho \phi c_t P \kappa_\alpha \bar{G}. \quad (4.35)$$

Таким образом, предложенные алгоритмы, основанные на идеях метода вспомогательных источников, позволили выполнить численное исследование стационарной (4.8)–(4.10) и нестационарной (4.5)–(4.7) задач линейной фильтрации в системе пяти скважин, состоящей из одной добывающей скважины и четырех нагнетательных. Скважины в этих задачах моделировались как линейная суперпозиция функций влияния точечных источников, определяемых фундаментальными решениями рассматриваемых дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца. Интенсивности точечных источников определялись исходя из условий обеспечения заданной величины забойного давления на круговых контурах, соответствующих границам скважин. При этом важно отметить, что предложенный подход не выдвигает требований о подобной форме рассматриваемых контуров и может быть применен для исследования задач с более сложной геометрией.

Таким образом, на примере рассмотренной задачи показано, что подход, предложенный в данном разделе, может быть эффективно использован для исследования задач моделирования, описываемых дробно-дифференциальными по пространству уравнениями, постановка внутренних граничных условий для которых принципиально невозможна в силу нелокальности операторов пространственного дробного интегро-дифференцирования.

## §5 Моделирование рассеяния волн на одиночной непроницаемой сфере

**5.1 Постановка задачи.** Рассмотрим процесс распространения волн в двумерной неоднородной среде, моделируемый дробно-дифференциальным обобщением волнового уравнения (2.19). В случае рассмотрения гармонических монохроматических колебаний, с учетом обобщения дисперсионного соотношения (2.30), данное уравнение может быть сведено к дробно-дифференциальному обобщению уравнения Гельмгольца

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u + k^\alpha u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in (1, 2), \quad (5.1)$$

где  $k^\alpha = \frac{\omega^2}{a_\alpha^2}$ ,  $k$  – волновое число.

Когда подобные колебания порождаются одним точечным источником, уравнение (5.1) может быть переписано как

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u + k^\alpha u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{x}_s$  – координаты источника,  $\delta(z)$  – дельта-функция. Интенсивность источника для удобства дальнейших расчетов была положена равной 1.

Рассмотрим теперь задачу рассеяния волн, которые описываются уравнением (5.2), на одиночной непроницаемой сфере радиуса  $r_a$  с центром в начале координат в среде с пространственной нелокальностью. По круговому контуру, соответствующему границе сферы, должно выполняться условие вида

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (5.3)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  – производная по направлению внешней нормали к контуру сферы.

Решение задачи (5.2), (5.3) может быть представлено в виде

$$u = u_{\text{inc}} + u_{\text{scat}},$$

где  $u_{\text{inc}}$  – волновое поле, порожденное единичным точечным источником, а  $u_{\text{scat}}$  – рассеянное на одиночной сфере волновое поле. Поле  $u$  в общем случае

является комплексным, но в данном разделе будет рассматриваться только его действительная часть.

**5.2 Алгоритм решения задачи рассеяния.** Поле  $u_{\text{inc}}$  является решением дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца (5.2) без дополнительного условия (5.3) и может быть записано через свертку с фундаментальным решением (3.21) как

$$u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) * G_{\alpha,2}^{H^+}(\mathbf{x}) = G_{\alpha,2}^{H^+}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = \\ = C_{\alpha,2}^{H^+} \mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ \frac{k^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|^2}{4} \middle| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (0, 1), (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{array} \right]. \quad (5.4)$$

Для вычисления (5.4) могут быть использованы прямые и асимптотические разложения функции Фокса  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$ . При  $\alpha \in (1, 2)$  данная функция может быть представлена как степенной ряд (см., например, [70]) в виде

$$\mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ z \middle| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (0, 1), (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{array} \right] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}(k+1)) \Gamma(\frac{2}{\alpha}(k+1))}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}(k+1)) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha}(k+1))} \frac{(-z)^k}{k!k!} \\ + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2}(k+1))}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}(k+1)) \Gamma(k + \frac{3}{2}) \Gamma(-k - \frac{1}{2})} (-1)^k z^{\frac{\alpha}{2}(k+1)-1}. \quad (5.5)$$

Для вычислительных целей ряд по  $k$  в данном разложении заменяется на конечную сумму  $\sum_{k=0}^{N_p}$ , где параметр  $N_p$  определяется из требований о необходимом уровне точности вычислений.

На рисунке 5.1 приведены графики погрешности вычисления  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$  при  $\alpha = \sqrt{2}$  и различном количестве членов разложения (5.5). Погрешность  $\Delta$  вычислялась в виде

$$\Delta = \lg \left| \bar{\mathbb{H}}_{2,4}^{2,1}(z) - \tilde{\mathbb{H}}_{2,4}^{2,1}(z) \right|,$$

где  $\bar{\mathbb{H}}_{2,4}^{2,1}(z)$  – значение функции  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$ , вычисленное с использованием 1000 членов разложения (5.5), а  $\tilde{\mathbb{H}}_{2,3}^{2,1}(z)$  – с использованием  $N_p$  членов этого же разложения. Нетрудно заметить, что разложение (5.5) может быть эффек-

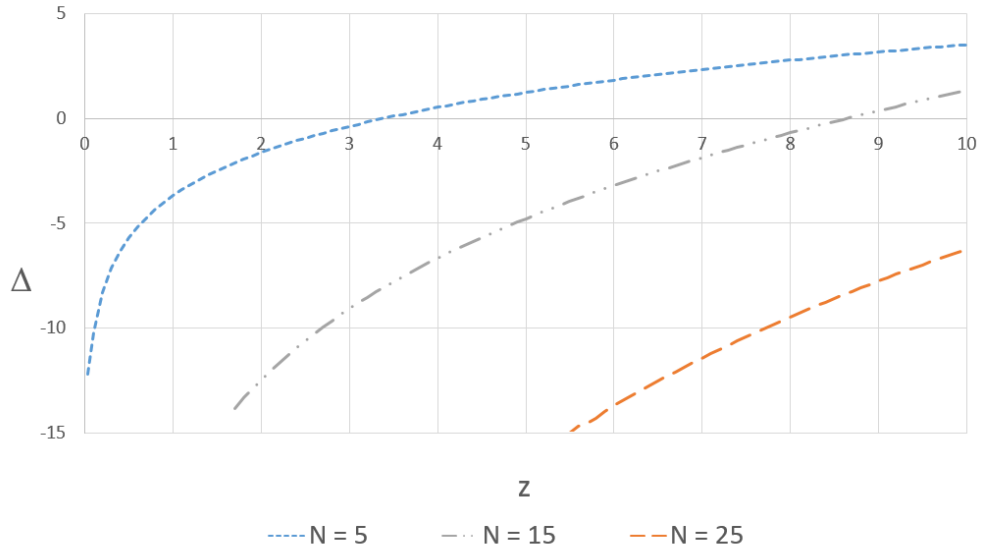


Рисунок 5.1: Погрешность вычисления функций  $H_{2,4}^{2,1}$  при  $\alpha = \sqrt{2}$  и различном количестве членов ряда прямого разложения

тивно использовано для вычисления функций Фокса  $H_{2,4}^{2,1}(z)$  лишь при достаточно малых значениях аргумента  $z$ . Поэтому при больших значениях  $z$  предлагается использование асимптотического разложения вида

$$\begin{aligned}
 H_{2,4}^{2,1} \left[ z \left| \begin{array}{l} \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \\ (0, 1), \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), (0, 1), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \end{array} \right. \right] \\
 \sim \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{k\alpha}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right)} z^{-1 - \frac{k\alpha}{2}} \\
 + c_0 E(ze^{i\pi}) - d_0 E(ze^{-i\pi}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 2\pi i e^{-\frac{i\pi}{2}}, \quad d_0 = -2\pi i e^{\frac{i\pi}{2}}, \\
 E(z) &= \frac{1}{i(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} A_j (4z)^{-\frac{j}{2} - \frac{1}{4}} e^{2\sqrt{z}}.
 \end{aligned}$$

Постоянные  $A_j$  могут быть найдены с использованием теоремы 4.1 из [145] по рекуррентной формуле

$$A_j = -\frac{1}{4j} \sum_{k=0}^{j-1} A_k e(j, k), \quad (5.7)$$

где

$$e(j, k) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + j\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + k\right)}.$$

Важно отметить, что слагаемое  $c_0 z^{-\frac{n}{2}} E(z e^{i\pi}) - d_0 z^{-\frac{n}{2}} E(z e^{-i\pi})$  в правой части (5.6) совпадает с асимптотическим разложением Ханкеля (см. [98]) для функций Бесселя второго рода  $Y_0(2\sqrt{z})$ , что может быть доказано прямыми вычислениями. Таким образом, разложение (5.6) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} & \mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ z \left| \begin{array}{l} \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \\ (0, 1), \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), (0, 1), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \end{array} \right. \right] \\ & \sim \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k\alpha}{2}\right) z^{-1 - \frac{k\alpha}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{k\alpha}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right)} + Y_0(2\sqrt{z}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Для вычислительных целей в этом разложении используется конечная сумма по  $k$  вида  $\sum_{k=0}^{N_a}$ . В данном случае точность вычислений оценивается как  $O(z^{-1 - (N_a + 1)/2})$ .

На рисунке 5.2 представлены графики функции  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$  из решения (5.4) в полулогарифмическом масштабе. Нетрудно заметить, что значения данных функций при различных  $\alpha$  значительно отличаются лишь при достаточно малых значениях аргумента  $z$ , а с увеличением  $z$  эти функции быстро сходятся к асимптотическому разложению (5.8). Иначе говоря, при  $z \gg 0$  функции  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$  являются слабо зависимыми от значения  $\alpha$ .

Для учета условия (5.3), как и в ранее рассматриваемой задаче однофазной фильтрации, могут быть использованы идеи метода фундаментальных решений. Вспомогательные источники с неизвестными интенсивностями размещаются на некотором малом расстоянии  $\varepsilon$  от контура, соответствующего границе сферы радиуса  $r_a$  (см. рисунок 5.3). Уравнение (5.2) в этом случае переписывается в виде

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u + k^\alpha u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \sum_{j=1}^N a_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (5.9)$$

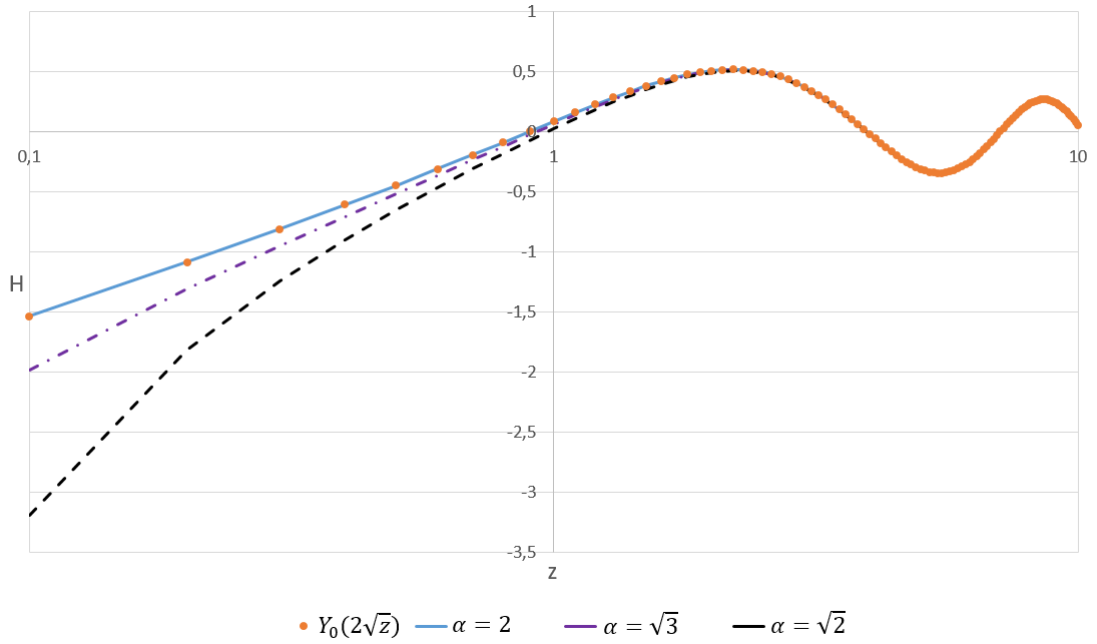


Рисунок 5.2: Графики функций  $H_{24}^{21}(z)$  из (5.4) при разных  $\alpha$

где  $a_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) – интенсивности вспомогательных источников,  $\mathbf{x}_j$  – координаты вспомогательных источников.

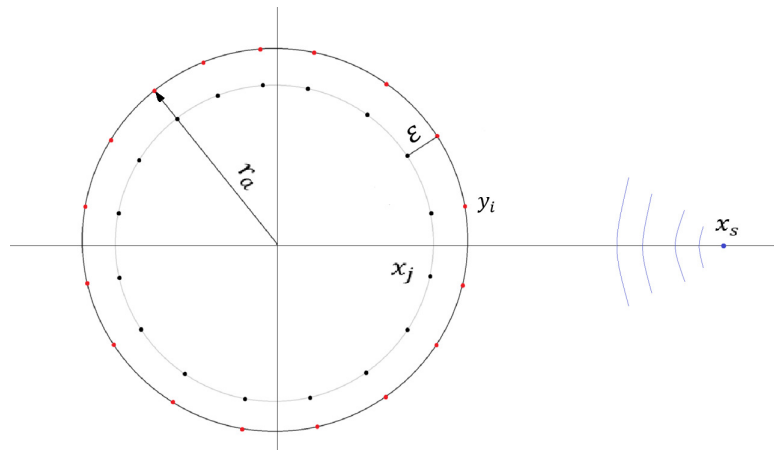


Рисунок 5.3: Здесь  $r_a$  – радиус рассеивающей сферы,  $\varepsilon$  – расстояние от вспомогательных источников до контура сферы,  $\mathbf{x}_j$  – координаты вспомогательных источников,  $\mathbf{y}_k$  – координаты точек на контуре,  $\mathbf{x}_s$  – координаты точечного источника, порождающего поле  $u_{\text{inc}}$

Решение уравнения (5.9) и, соответственно, задачи (5.2), (5.3), представляется в виде

$$\bar{p}(\mathbf{x}) = \left( \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \sum_{j=1}^N a_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right) * G_{\alpha,2}^{H^+}(\mathbf{x}) = u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N a_j G_{\alpha,2}^{H^+}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|). \quad (5.10)$$

Для построения численного решения задачи (5.2), (5.3) по формуле (5.10) предлагается использование следующего **алгоритма**.

- 1) Задаются  $N$  точек  $\mathbf{y}_k$  по круговому контуру, соответствующему границе рассеивающей сферы, на котором должно выполняться условие (5.3), для определения неизвестных значений интенсивности вспомогательных источников  $a_j$ .
- 2) Для каждой из контурных точек записывается уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N a_j G_{\alpha,2}^{H^+}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}_k} = 0, \quad k = 0, \dots, N. \quad (5.11)$$

- 3) Функции  $H_{2/4}^{2/1}(z)$  из фундаментального решения  $G_{\alpha,2}^{H^+}(z)$  вычисляются с использованием прямого разложения (5.5) при  $z \in [0, d_a)$  и асимптотического разложения (5.6) при  $z \in [d_a, \infty)$ . Параметры  $N_d$ ,  $N_a$  и точка стыковки  $d_a$  этих разложений выбираются из требований о необходимом уровне точности расчетов.
- 4) Решается система линейных алгебраических уравнений вида (5.11) для определения интенсивностей  $a_j$ .
- 5) Выполняется подстановка найденных в п. 4 интенсивностей в (5.10) и находится приближенное решение рассматриваемой задачи в любой требуемой точке  $\mathbf{x}$ .

**5.3 Вычислительные эксперименты.** Вычислительные эксперименты проводились при следующих безразмерных значениях параметров:

- радиус рассеивающей сферы  $r_a = 1$ ;
- координаты точечного источника  $\mathbf{x}_s = (3, 0)$ ;
- расстояние между контуром рассеивающей сферы и любым вспомогательным источником  $\varepsilon = 0.1$ ;
- количество вспомогательных источников  $N = 400$ .



Вспомогательные источники были размещены равномерно по окружности радиуса  $r_a - \varepsilon$ , которая является эквидистантной контуром рассеивающей сферы. Точки  $\mathbf{x}_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) на контуре рассеивающей сферы радиуса  $r_a$  были размещены так, чтобы расстояние между каждой точкой и ближайшим вспомогательным источником было равно  $\varepsilon$ .

Рассмотрим сначала волновое поле  $u_{\text{inc}}$ , удовлетворяющее дробно-дифференциальному обобщению уравнения Гельмгольца (5.2), порождаемое единственным точечным источником с координатами  $\mathbf{x}_s$  в отсутствие рассеивающей сферы. Данное волновое поле, как было показано в предыдущем разделе, имеет вид (5.4). На рисунке 5.4 представлены волновые поля  $u_{\text{inc}}$  при различных значениях  $k$  и  $\alpha$ . Значение  $k$  выбиралось так, чтобы коэффициент  $k^\alpha$  перед вторым слагаемым в уравнении (5.2) был одинаковым при разных  $\alpha$ . Нетрудно заметить, что при  $k = 1$  уменьшение  $\alpha$  приводит к росту амплитуды колебаний, а при  $k = 5^{\frac{2}{\alpha}}$  и  $k = 10^{\frac{2}{\alpha}}$  – к росту амплитуды и увеличению частоты.

Увеличение частоты колебаний с уменьшением  $\alpha$  обусловлено множителем  $k^2$  в аргументе функции Фокса в (5.4). Если задавать волновое число независимым от  $\alpha$

$$k \neq k(\alpha), \quad (5.12)$$

то аргументы функций  $H_{2\frac{1}{4}}^2(z)$  будут одинаковыми при разных  $\alpha$ . Таким образом можно получить волновые поля  $u_{\text{inc}}$ , асимптотически совпадающие по частотам, что продемонстрировано на рисунке 5.5.

Рассмотрим теперь волновые поля  $u$ , показанные на рисунке 5.6, являющиеся решениями (5.10) уравнения (5.9), и, соответственно, задачи рассеивания на сфере радиуса  $r_a$  (5.2), (5.3) при разных значениях  $\alpha$  и  $k$ . При  $k = 5^{\frac{2}{\alpha}}$  и  $k = 10^{\frac{2}{\alpha}}$  с уменьшением  $\alpha$  можно наблюдать дифракционную картину. Однако оценить влияние параметра  $\alpha$  на характер рассеивания волнового поля на сфере в данной ситуации представляется проблематичным в силу того, что колебания сильно отличаются по амплитуде при разных значениях этого параметра.

Изменение величин амплитуд колебаний при изменении параметра  $\alpha$  на

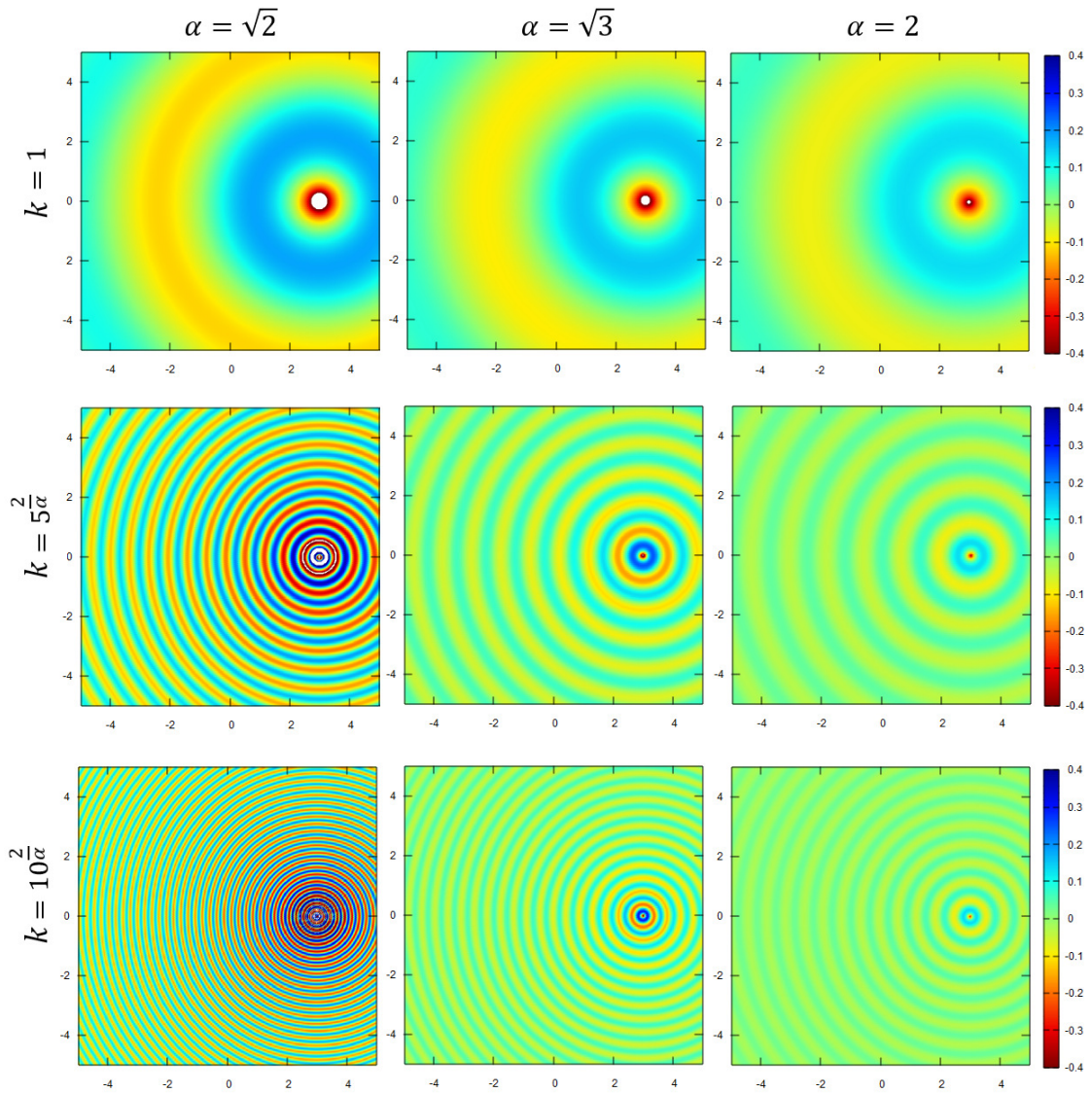


Рисунок 5.4: Волновые поля  $u_{\text{inc}}$ , порожденные точечным источником с координатами  $x_s$ , при разных значениях  $k(\alpha)$  и  $\alpha$

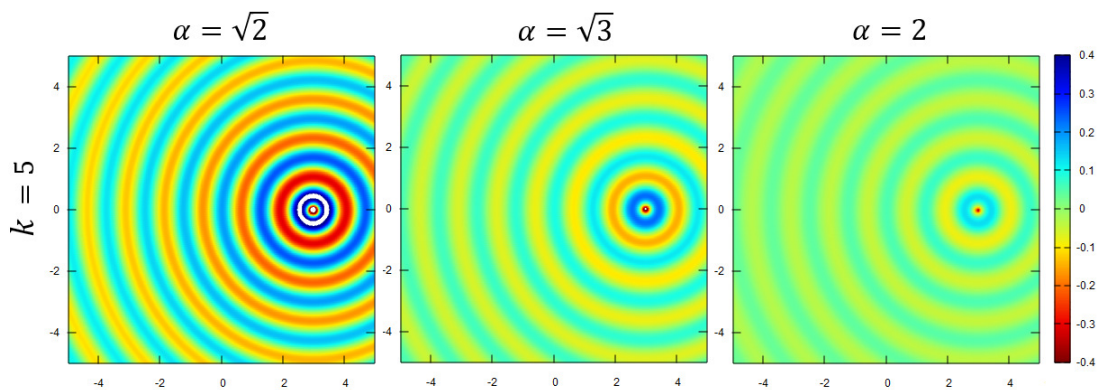


Рисунок 5.5: Волновые поля  $u_{\text{inc}}$  с асимптотически совпадающими по частоте колебаниями при  $k = 5$  и разных  $\alpha$

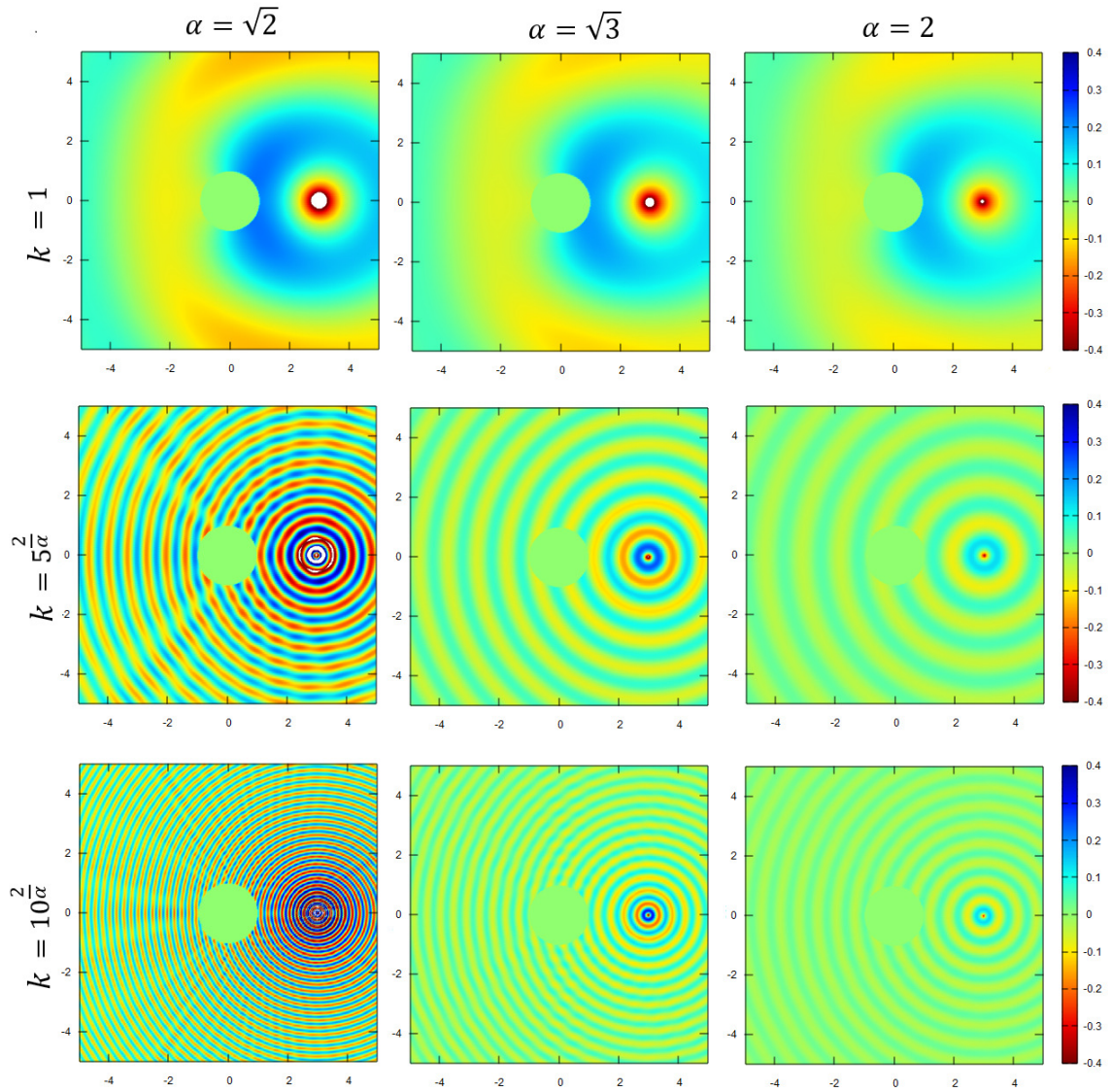


Рисунок 5.6: Волновые поля (5.10) при разных значениях  $\alpha$  и  $k(\alpha)$

представленных выше волновых полях обусловлено, в первую очередь, величиной постоянной  $C_{\alpha,2}^{H^+}$  из (5.4), которая имеет вид

$$C_{\alpha,2}^{H^+} = \frac{k^{2-\alpha}}{2\alpha}.$$

Для того, чтобы «избавиться» от ее влияния на волновые поля, домножим правую часть (5.9) на  $2\alpha k^{\alpha-2}$ , что приведет к асимптотически совпадающим колебаниям не только по частоте, но и по амплитуде (см. рисунок 5.7), в силу характера поведения функции  $H_2^{21}(z)$  (см. (5.8) и рисунок 5.2). Как видно из рисунка 5.7, при  $k = 5$  волновые поля практически идентичны, а их отличия становятся визуально заметны лишь при приближении к точечному

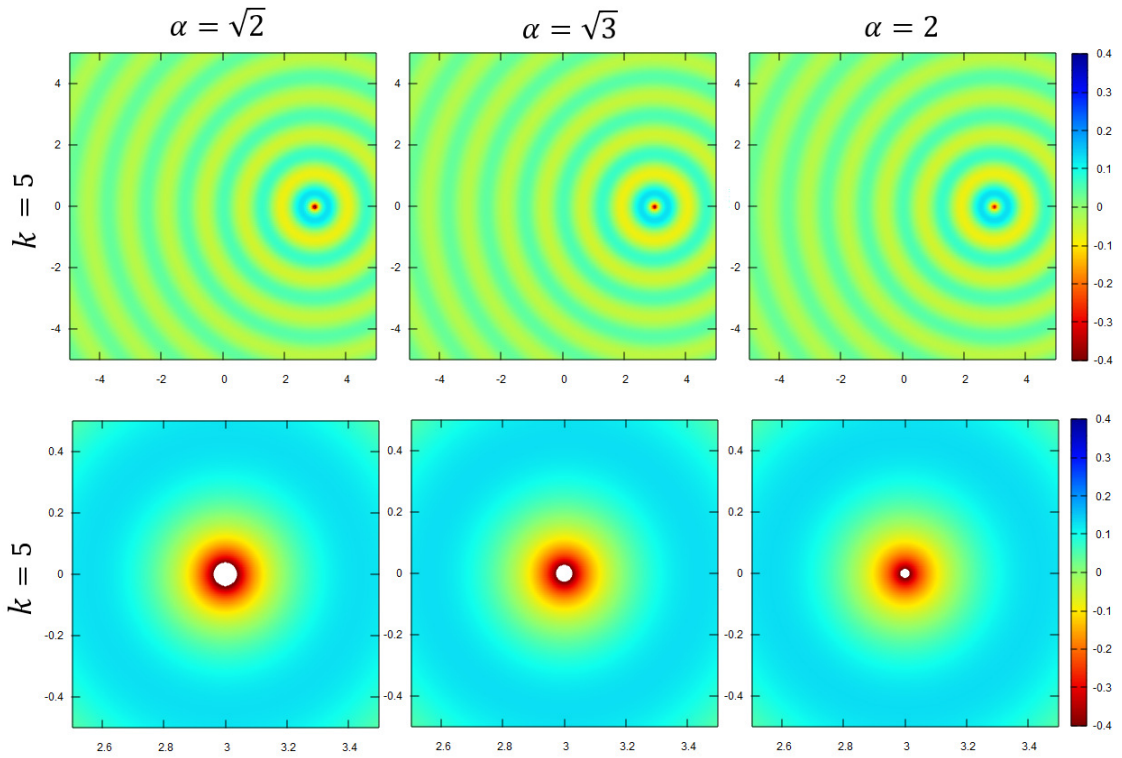


Рисунок 5.7: Волновые поля  $u_{\text{inc}}$  с асимптотически совпадающими по частоте и амплитуде колебаниями при  $k = 5$  и разных  $\alpha$

источнику.

Рассмотрим теперь влияние рассеивающей сферы при разных  $\alpha$  на асимптотически совпадающие по частоте и амплитуде волновые поля, порожденные точечным источником (см. рисунок 5.8). Нетрудно заметить, что при  $k = 5$  и  $k = 10$  влияние параметра  $\alpha$  на характер рассеивания практически отсутствует: волновые поля слабо изменяются при изменении  $\alpha$ . Данное явление обусловлено видом функции Фокса в решении (5.10) и ее поведением при больших значениях аргумента: при  $k > 1$  с ростом волнового числа увеличиваются аргументы функций  $H_{24}^1(z)$ , что, в соответствии с рисунком 5.2, приводит к слабой зависимости решения от параметра  $\alpha$  и, следовательно, к подобным волновым полям. В случае  $k = 1$  изменение параметра  $\alpha$  оказывает более сильный эффект: уменьшение данного параметра усиливает влияние точечного источника, что приводит к меньшему рассеиванию волнового фронта, как продемонстрировано на рисунке 5.8.

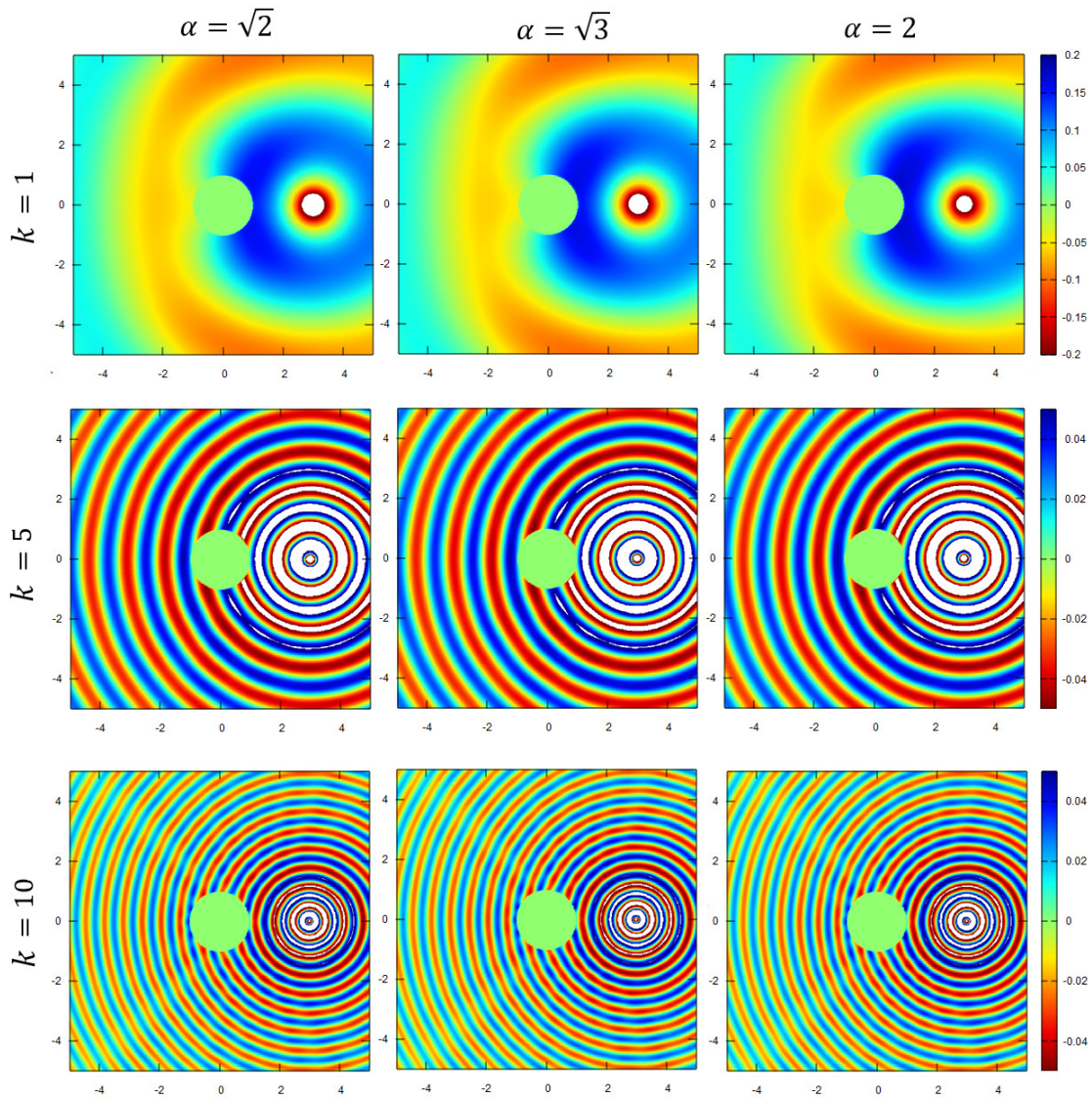


Рисунок 5.8: Волновые поля (5.10) с асимптотически совпадающими по частоте и амплитуде колебаниями при разных значениях  $\alpha$  и  $k$

Распределение интенсивностей вспомогательных источников по окружности радиуса  $r_a - \varepsilon$  в случае  $k = 1$  приведено на рисунке 5.9. Видно, что для обеспечения выполнения условия (5.3) требуется меньшая интенсивность вспомогательных источников при меньшем значении параметра  $\alpha$ . Подобные графики для случаев  $k = 5$  и  $k = 10$  не приведены в данном разделе по причине того, что распределения интенсивностей при таких значениях волнового параметра практически не отличаются при разных  $\alpha$ .

Уменьшение радиуса сферы приводит к более слабому рассеиванию волнового поля, однако характер влияния дробного параметра  $\alpha$  остается неизменным, что продемонстрировано на рисунке 5.10. В данном случае радиус

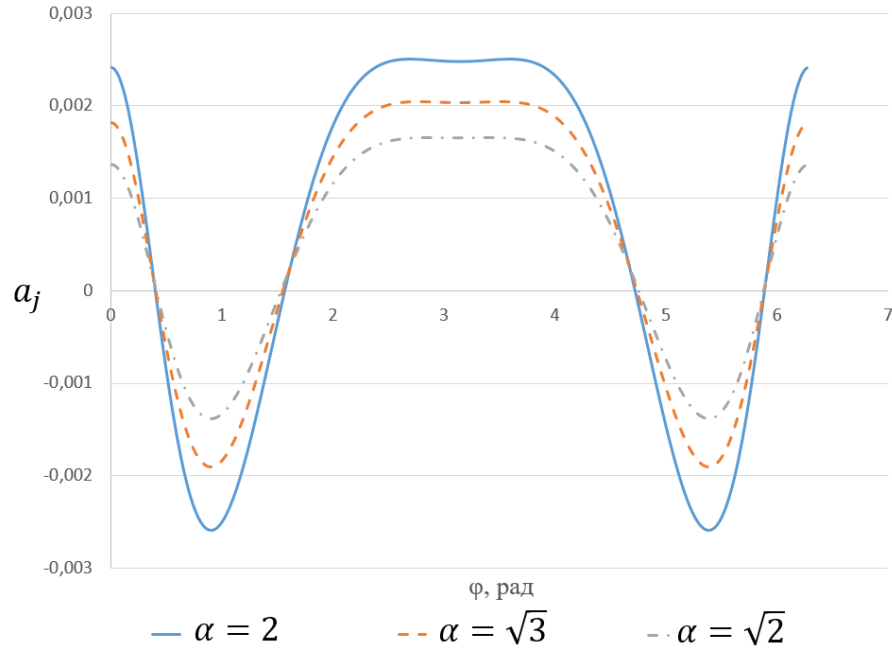


Рисунок 5.9: Распределение интенсивностей вспомогательных источников по окружности радиуса  $r_a - \varepsilon$  при  $k = 1$  и разных  $\alpha$

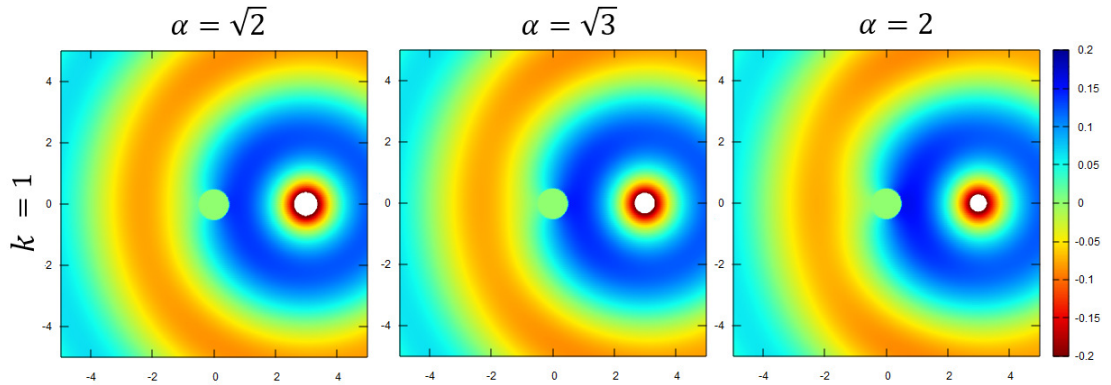


Рисунок 5.10: Волновые поля (5.10) с рассеивающей окружностью радиуса  $\frac{r_a - \varepsilon}{2}$  при  $k = 1$  и разных  $\alpha$

рассеивающей сферы был принят равным  $\frac{r_a}{2}$ , а вспомогательные источники были расположены по окружности радиуса  $\frac{r_a - \varepsilon}{2}$ .

**5.4 Воздействие неоднородной среды на интенсивность сигнала.** Рассмотрим процесс распространения волны, порождаемой двумя точечными источниками, в одномерной неоднородной среде. Такой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a_\alpha^2 (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u + q_1 \delta(x - x_1) + q_2 \delta(x - x_2), \quad u = u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.13)$$

где  $q_1, q_2$  – интенсивности точечных источников, а  $x_1, x_2$  – их координаты.

Как было показано ранее, в случае гармонических колебаний уравнение (5.13) приводит к дробно-дифференциальному обобщению неоднородного уравнения Гельмгольца

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u + k^\alpha u = -\frac{q_1}{a_\alpha^2}\delta(x - x_1) - \frac{q_2}{a_\alpha^2}\delta(x - x_2), \quad (5.14)$$

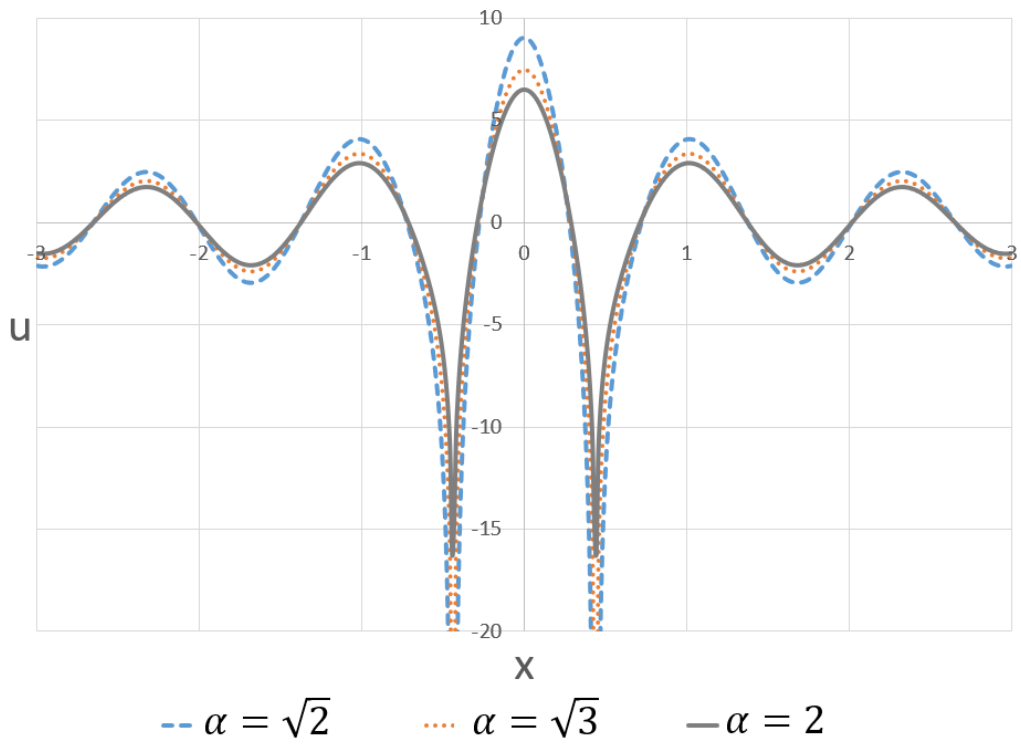
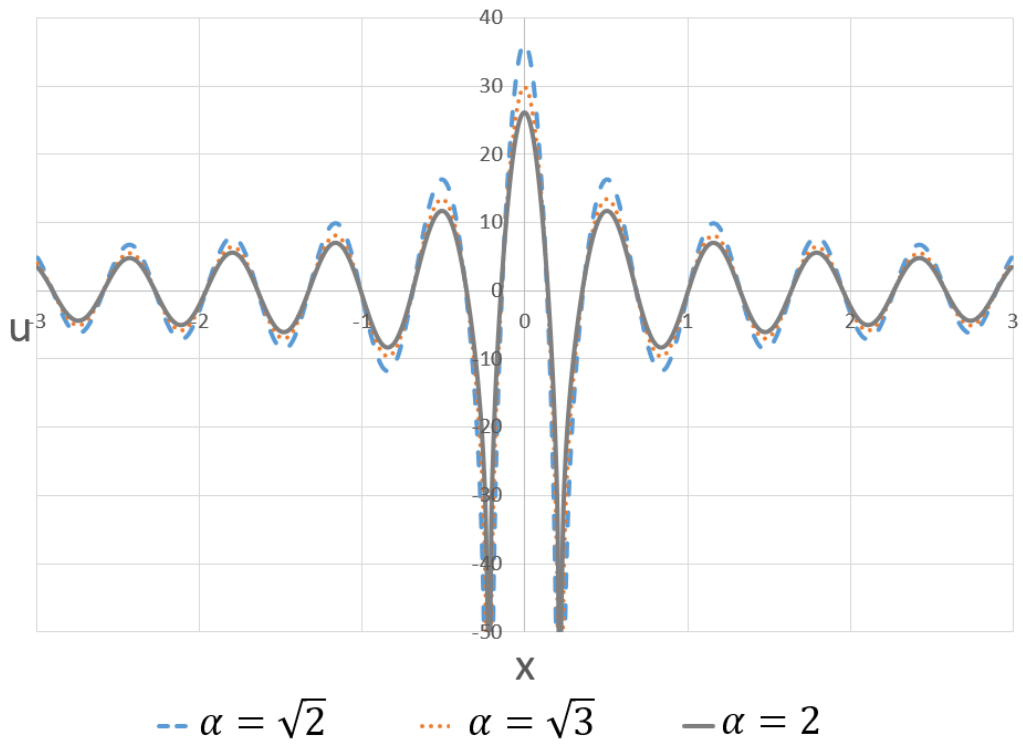
где  $k^\alpha = \frac{\omega^2}{a_\alpha^2}$ ,  $k$  – волновое число. В рассматриваемой задаче параметр  $a_\alpha$  будет определяться исходя из фиксированных значений волнового числа  $k$  и частоты  $\omega$ .

Решение уравнения (5.14) записывается как линейная комбинация фундаментальных решений вида

$$u(x) = q_1 C_{\alpha,1}^{H^+} \mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ \frac{k^2|x - x_1|^2}{4} \middle| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (0, 1), (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{array} \right] + \\ + q_2 C_{\alpha,1}^{H^+} \mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ \frac{k^2|x - x_2|^2}{4} \middle| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (0, 1), (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{array} \right]. \quad (5.15)$$

Выберем координаты источников так, чтобы расстояние от них до начала координат совпадало с координатой  $z_0$  первого максимума функции  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$ . Таким образом, зададим  $x_1 = -z_0, x_2 = z_0$ . В силу слабой зависимости  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$  от  $\alpha$ , точка максимума тоже является инвариантной относительно  $\alpha$ . В этом случае наибольшая интенсивность волны (5.15), порождаемой двумя рассматриваемыми точечными источниками, будет наблюдаться в точке  $x = 0$ .

Положим теперь  $\omega = 1, q_1 = 1, q_2 = 1$ . Решение (5.15) при разных значениях волнового числа  $k$  и дробного параметра  $\alpha$  представлены на рисунке 5.11 и рисунке 5.12. Нетрудно заметить, что уменьшение дробного параметра  $\alpha$  приводит к росту интенсивности решения (5.15). Наибольшее изменение решения при этом наблюдается в начале координат. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что среда, распространение волн в которой описывается уравнением (5.13), может служить «усилителем» сигнала точечных источников при их расположении на расстоянии первого максимума функции Фокса  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$  из (3.2).

Рисунок 5.11: Решение (5.15) при  $k = 5$  и разных  $\alpha$ Рисунок 5.12: Решение (5.15) при  $k = 10$  и разных  $\alpha$



## Глава 3

# ПОСТРОЕНИЕ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В предыдущей главе рассматривались примеры математических моделей, описываемых уравнениями (3.1), (3.2) и (3.3), правые части которых могли быть представлены как линейная комбинация дельта-функций, моделирующих точечные источники различной интенсивности. Вычисление интегральных представлений решений (3.16), (3.19) и (3.39) при этом приводило к вычислению линейной комбинации фундаментальных решений рассматриваемых уравнений. Однако для многих математических моделей важно умение вычислять эти интегралы в случае, когда правая часть  $f(\mathbf{x})$  является непрерывной функцией.

Точное вычисление интегралов (3.16), (3.19) и (3.39) для нахождения решений уравнений (3.1), (3.2) и (3.3), соответственно, возможно только для немногих функций  $f(\mathbf{x})$ . По этой причине для практических целей важна возможность их приближенного вычисления при помощи кубатурных формул вида

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi})G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{i=1}^N q_i G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad q_i = c_i f(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i, \quad (6.0)$$

где  $G(\mathbf{x})$  – фундаментальное решение рассматриваемого уравнения,  $c_i$  – коэффициенты кубатуры,  $\mathbf{x}_i$  – узлы кубатуры, а все расчетные точки  $\mathbf{x}$  лежат внутри некоторой ограниченной области  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ .

Для нахождения численного решения уравнений (3.1), (3.2) и (3.3) с использованием кубатурных формул (6.0) требуется порядка  $\mathcal{O}(N^2)$  вычислительных операций при количестве расчетных точек, сопоставимом по порядку с количеством узлов кубатуры. При большом количестве расчетных точек такой расчет приводит к существенным временным затратам. Для сокращения времени вычислений могут быть использованы методы, уменьшающие количество вычислительных операций при расчете по кубатурным формулам. Среди таких методов широко известны мультипольные методы

(см. [62, 84, 87]). В этих методах взаимодействия между достаточно удаленными узлами кубатуры и расчетными точками учитываются посредством мультипольных разложений, что позволяет снизить вычислительную сложность алгоритмов, требующих  $\mathcal{O}(N^2)$  операций, до  $\mathcal{O}(N \log N)$  или  $\mathcal{O}(N)$  операций. Основой для построения мультипольных разложений являются факторизованные разложения фундаментальных решений рассматриваемых уравнений.

В данной главе выполняется факторизация фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца, представляются мультипольные разложения, основанные на построенных факторизованных разложениях, а также предлагаются способы вычисления входящих в них функций Фокса.

## §6 Факторизация фундаментальных решений

Факторизация функций нескольких переменных является одним из основных и достаточно важных для практического применения направлений исследований в теории факторизации [95, 96]. В математической физике задача факторизации функций возникает, например, в отношении интегрального представления решения линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных  $Lu = f$  вида

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi}) G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.1)$$

Здесь  $G(\mathbf{x})$  — фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения  $Lu = 0$ , а  $L$  — линейный дифференциальный оператор в  $\mathbb{R}^n$ . Факторизованное разложение

$$G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(\mathbf{x}) \Psi_m(\boldsymbol{\xi}) \quad (6.2)$$

позволяет переписать (6.1) в виде

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \Phi_m(\mathbf{x}), \quad a_m = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi}) \Psi_m(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi},$$

что может быть использовано при доказательстве теорем существования и построении различных оценок для решения  $u(\mathbf{x})$ . Факторизация (6.2) тесно связана с теоремами сложения для различных классов специальных функций, которые являются собственными функциями некоторых дифференциальных операторов  $L$  [141]. Кроме того, на основе подобной факторизации могут быть построены эффективные численные алгоритмы нахождения решения  $u(\mathbf{x})$ , среди которых самыми известными являются мультипольные методы [62, 85], основанные на факторизованных мультипольных разложениях фундаментальных решений рассматриваемых уравнений.

**6.1 Алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде интеграла Меллина-Барнса.** Факторизованные разложения множества функций могут быть получены с использованием, так называемых, теорем сложения (см., например, [95, 98, 141]). Однако для многих функций, таких как, например, функции Мейера или Фокса, которые являются достаточно сложными и недостаточно изученными, подобных теорем все еще не существует. Для выполнения их факторизации предлагается следующий алгоритм, основанный на интегральном представлении рассматриваемых функций в виде интеграла Меллина-Барнса.

Рассмотрим функцию  $g(z)$ ,  $z = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma}$ , которая допускает представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{K}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds. \quad (6.3)$$

Здесь

$$\mathcal{K}_{p,q}^{m,n}(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s)},$$

где  $0 < n < p$ ,  $0 < m < q$ ,  $A_j, B_j > 0$ , а  $\mathcal{L}$  – бесконечный контур интегрирования, разделяющий полюса гамма функций  $\Gamma(b_j + B_j s)$  и  $\Gamma(1 - a_j - A_j s)$ .

Пусть  $r < R$ ,  $Re(s) > -1$ , тогда множитель  $z^{-s}$  в подынтегральном выражении (6.3) может быть разложен по многочленам Гегенбауэра [98]:

$$z^{-s} = R^{-s} \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos \gamma \right)^{-s/2} = R^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n C_n^{s/2}(\cos \gamma). \quad (6.4)$$

Для многочленов Гегенбауэра справедливо явное представление (см. [98])

$$C_n^{\beta}(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(\beta + m)\Gamma(\beta + n - m)}{m!(n - m)! [\Gamma(\beta)]^2} \cos [(n - 2m)\theta]. \quad (6.5)$$

Используя (6.4) и (6.5), интеграл (6.3) может быть записан в следующем факторизованном по  $r$  и  $R$  виде:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{r}{R} \right)^n \frac{\cos [(n - 2m)\gamma]}{m!(n - m)!} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{K}_{p,q}^{m,n}(s) \frac{\Gamma(\frac{s}{2} + m)\Gamma(\frac{s}{2} + n - m)}{\Gamma^2(\frac{s}{2})} R^{-s} ds. \quad (6.6)$$

Когда угол  $\gamma = \varphi - \psi$ , множитель  $\cos [(n - 2m)\gamma]$  из (6.6) может быть факторизован по углам  $\varphi$  и  $\psi$  с использованием классических свойств тригонометрических функций.

В зависимости от вида контура интегрирования и сходимости интеграла в правой части (6.6), данное факторизованное разложение может быть представлено, например, через функции Мейера или Фокса [70].

**6.2 Мультипольное разложение для дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона.** Рассмотрим фундаментальное решение (3.15) дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона (3.1) в трехмерном пространстве. При построении мультипольного разложения в  $\mathbb{R}^3$  могут быть использованы сферические координаты в силу того, что фундаментальное решение (3.15) является радиальной функцией. Было доказано следующее утверждение.

**Утверждение 6.1.** Пусть даны  $k$  узлов  $\mathbf{x}_i$  со сферическими координатами

тами  $(r_i, \Psi_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $r_i < a$ ,  $0 < a < \infty$ . Тогда для любой точки  $\mathbf{x}$  с координатами  $(R, \theta, \varphi)$  такой, что  $R > a$ , справедливо разложение

$$\begin{aligned} \Phi_P(R, \theta, \varphi, k) &\equiv \sum_{i=1}^k q_i G_{\alpha,3}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \\ &= C_{\alpha,3}^P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{A_n^m(\alpha) B_m^l(\alpha)}{R^{n-2\alpha+3}} M_n^m Z_n^m \left( \theta, \frac{3}{2} - \alpha \right) Z_m^l \left( \varphi, 1 - \alpha \right), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где

$$M_n^m(r_i, \Psi_i, \psi_i, k) = \sum_{i=1}^k q_i r_i^n Z_n^m \left( \Psi_i, \frac{3}{2} - \alpha \right) Z_n^m \left( \psi_i, 1 - \alpha \right), \quad (6.8)$$

$$Z_n^m(\xi, \beta) = \sin^m \xi C_{n-m}^{\beta+m}(\cos \xi), \quad (6.9)$$

$$A_n^m(\alpha) = \frac{4^m \Gamma^2 \left( \frac{3-\alpha}{2} + m \right) (n-m)! (2m+2-\alpha) \Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(n+m+3-\alpha) \Gamma^2 \left( \frac{3-\alpha}{2} \right)}, \quad (6.10)$$

$$B_m^l(\alpha) = \frac{4^l \Gamma^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{2} + l \right) (m-l)! (2l+1-\alpha) \Gamma(l+1-\alpha)}{\Gamma(l+m+2-\alpha) \Gamma^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) l!}, \quad (6.11)$$

а  $C_m^\lambda(z)$  – многочлены Гегенбауэра.

**Доказательство.** Фундаментальное решение  $G_{\alpha,3}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  в  $\mathbb{R}^3$  имеет вид

$$G_{\alpha,3}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = C_{\alpha,3}^P |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^{\alpha-3},$$

и может быть записано в сферических координатах как

$$G_{\alpha,3}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \frac{C_{\alpha,3}^P}{R^{3-2\alpha} \left( 1 + \frac{r_i^2}{R^2} - 2 \frac{r_i}{R} \cos \gamma \right)^{\frac{3-\alpha}{2}}}, \quad (6.12)$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \Psi_i + \sin \theta \sin \Psi_i \cos(\varphi - \psi_i),$$

где  $\gamma$  – угол между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_i$ .

Функция  $(1 - 2zt + t^2)^{-\beta/2}$  при  $|t| < 1$  является производящей для много-

членов Гегенбауэра  $C_m^{\beta/2}(z)$  [98], поэтому (6.12) может быть записано в виде:

$$G_{\alpha,3}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = C_{\alpha,3}^P \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_i^n}{R^{n+3-\alpha}} C_n^{\frac{3-\alpha}{2}}(\cos \gamma). \quad (6.13)$$

Для факторизации входящих в ряд (6.13) многочленов Гегенбауэра по углам  $\theta$  и  $\Psi_i$  может быть применена теорема сложения [98]:

$$\begin{aligned} C_n^\lambda(\cos \Phi \cos \phi + \sin \Phi \sin \phi \cos \beta) &= \\ &= \frac{\Gamma(2\lambda - 1)}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{k=0}^n \frac{4^k \Gamma^2(\lambda + k)(n - k)!(2k + 2\lambda - 1)}{\Gamma(n + k + 2\lambda)} \times \\ &\times (\sin^k \Phi C_{n-k}^{\lambda+k}(\cos \Phi)) (\sin^k \phi C_{n-k}^{\lambda+k}(\cos \phi)) C_k^{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \beta). \end{aligned} \quad (6.14)$$

В результате, разложение (6.13) принимает вид

$$\begin{aligned} G_{\alpha,3}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) &= \\ &= C_{\alpha,3}^P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r_i^n}{R^{n+3-\alpha}} A_n^m(\alpha) Z_n^m\left(\Psi_i, \frac{3-\alpha}{2}\right) Z_n^m\left(\theta, \frac{3-\alpha}{2}\right) C_m^{1-\frac{\alpha}{2}} \cos(\phi - \psi_i), \end{aligned} \quad (6.15)$$

где  $Z_n^m(z)$  и  $A_n^m(\alpha)$  определены в (6.9) и (6.10).

Теперь факторизуем разложение (6.15) по углам  $\psi$  и  $\varphi_i$ . Воспользовавшись теоремой сложения (6.14) при  $\beta = 0$ , получим:

$$\begin{aligned} C_n^\lambda(\cos(\Phi - \phi)) &= \frac{1}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{k=0}^n \frac{4^k \Gamma^2(\lambda + k)(n - k)!\Gamma(k + 2\lambda - 1)(2k + 2\lambda - 1)}{\Gamma(n + k + 2\lambda)k!} \times \\ &\times (\sin^k \Phi C_{n-k}^{\lambda+k}(\cos \Phi)) (\sin^k \phi C_{n-k}^{\lambda+k}(\cos \phi)). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Применяя (6.16) к (6.15), получим

$$\begin{aligned} G_{\alpha,3}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) &= C_{\alpha,3}^P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{r_i^n}{R^{n+3-\alpha}} A_n^m(\alpha) B_m^l(\alpha) \times \\ &\times Z_n^m\left(\Psi_i, \frac{3-\alpha}{2}\right) Z_m^l\left(\psi_i, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) Z_n^m\left(\theta, \frac{3-\alpha}{2}\right) Z_m^l\left(\varphi, 1 - \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

где  $B_m^l(\alpha)$  дано в (6.11). Подстановка разложения (6.17) в тождество

$$\Phi_P(R, \theta, \varphi, k) \equiv \sum_{i=1}^k q_i G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

дает искомое мультипольное разложение (6.7). □

Для практического применения разложения (6.7) ряд по  $n$  следует заменить на конечную сумму. Обоснованием возможности этого служит следующее утверждение.

**Утверждение 6.2.** *Справедлива оценка*

$$\left| \Phi_P(R, \theta, \varphi, k) - C_{\alpha,3}^P \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{A_n^m(\alpha) B_m^l(\alpha)}{R^{n+3-\alpha}} M_n^m Z_n^m \left( \theta, \frac{3-\alpha}{2} \right) Z_m^l \left( \varphi, 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right| \leq C_{\alpha,3}^P \frac{Q \Gamma(4 - \alpha + p)}{(R - a) \Gamma(3 - \alpha) (p + 1)!} \frac{a^{p+1}}{R^{p+3-\alpha}},$$

$$\text{где } Q = \sum_{i=1}^k |q_i|.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} & \left| \Phi_P(R, \theta, \varphi, k) - C_{\alpha,3}^P \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{A_n^m(\alpha) B_m^l(\alpha)}{R^{n+3-\alpha}} M_n^m Z_n^m \left( \theta, \frac{3-\alpha}{2} \right) Z_m^l \left( \varphi, 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right| \\ & \equiv C_{\alpha,3}^P \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \frac{q_i r_i^n}{R^{n+3-\alpha}} C_n^{\frac{3-\alpha}{2}} \left( \cos \theta \cos \Psi_i + \sin \theta \sin \Psi_i \cos(\varphi - \psi_i) \right) \right| \leq \\ & \leq \frac{C_{\alpha,3}^P}{R^{3-\alpha}} \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{a^n}{R^n} \sum_{i=1}^k q_i C_n^{\frac{3-\alpha}{2}}(1) \right| = C_{\alpha,3}^P \frac{Q C_{p+1}^{\frac{3-\alpha}{2}}(1)}{R^{3-\alpha}} \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{a^n}{R^n} = \\ & = C_{\alpha,3}^P \frac{Q \Gamma(4 - \alpha + p)}{(R - a) \Gamma(3 - \alpha) (p + 1)!} \frac{a^{p+1}}{R^{p+3-\alpha}}. \end{aligned}$$

□

Построим теперь мультипольное разложение в  $\mathbb{R}^2$ . Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 6.3.** Пусть даны  $k$  узлов  $\mathbf{x}_i$  с полярными координатами  $(r_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , причем  $r_i < a$ ,  $0 < a < \infty$ . Тогда для любой точки  $\mathbf{x}$  с координатами  $(R, \varphi)$  такой, что  $R > a$ , справедливо разложение

$$\Phi_P(R, \varphi, k) \equiv \sum_{i=1}^k q_i G_{\alpha,2}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = C_{\alpha,2}^P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{D_n^m(\alpha)}{R^{n+2-\alpha}} M_n^m Z_n^m \left( \varphi, 1 - \frac{\alpha}{2} \right), \quad (6.18)$$

где

$$M_n^m(r_i, \psi_i, k) = \sum_{i=1}^k q_i r_i^n Z_n^m \left( \psi_i, 1 - \frac{\alpha}{2} \right), \quad (6.19)$$

$$Z_n^m(\xi, \beta) = \sin^m \xi C_{n-m}^{\beta+m}(\cos \xi), \quad (6.20)$$

$$D_n^m(\alpha) = \frac{4^m \Gamma^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{2} + m \right) (n-m)! (2m+1-\alpha) \Gamma(m+1-\alpha)}{\Gamma(n+m+2-\alpha) \Gamma^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) m!}. \quad (6.21)$$

**Доказательство.** Фундаментальное решение (3.15) в  $\mathbb{R}^2$  имеет вид

$$G_{\alpha,2}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = C_{\alpha,2}^P |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^{\alpha-2}.$$

В отличие от доказательства утверждения 6.1, здесь факторизацию многочленов Гегенбауэра достаточно выполнить по углам  $\varphi$  и  $\psi_i$  с использованием (6.14) при  $\beta = 0$ . В результате функция  $G_{\alpha,2}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  может быть факторизована как

$$G_{\alpha,2}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = C_{\alpha,2}^P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r_i^n}{R^{n+2-\alpha}} D_n^m(\alpha) Z_n^m \left( \psi_i, 1 - \frac{\alpha}{2} \right) Z_n^m \left( \varphi, 1 - \frac{\alpha}{2} \right), \quad (6.22)$$

где  $Z_n^m(z)$  и  $D_n^m(\alpha)$  определены в (6.20) и (6.21).

Подстановка разложения (6.22) в тождество

$$\Phi_P(R, \varphi, k) \equiv \sum_{i=1}^k q_i G_{\alpha,2}^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

приводит к мультипольному разложению (6.18). □



Возможность практического применения построенного разложения обеспечивается следующим утверждением.

**Утверждение 6.4.** *Справедлива оценка*

$$\left| \Phi_P(R, \varphi, k) - C_{\alpha,2}^P \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^n \frac{D_n^m(\alpha)}{R^{n+2-\alpha}} M_n^m Z_n^m(\varphi, 1 - \frac{\alpha}{2}) \right| \leq \\ \leq C_{\alpha,2}^P \frac{Q\Gamma(3 - \alpha + p)}{(R - a)\Gamma(2 - \alpha)(p + 1)!} \frac{a^{p+1}}{R^{p+2-\alpha}},$$

$$\text{где } Q = \sum_{i=1}^k |q_i|.$$

**Доказательство.**

$$\left| \Phi_P(R, \varphi, k) - C_{\alpha,2}^P \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^n \frac{D_n^m(\alpha)}{R^{n+2-\alpha}} M_n^m Z_n^m \left( \varphi, 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right| = \\ = C_{\alpha,2}^P \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \frac{q_i r_i^n}{R^{n+2-\alpha}} C_n^{1-\frac{\alpha}{2}} \left( \cos(\varphi - \psi_i) \right) \right| \leq \frac{C_{\alpha,2}^P}{R^{2-\alpha}} \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{a^n}{R^n} \sum_{i=1}^k q_i C_n^{1-\frac{\alpha}{2}}(1) \right| = \\ = C_{\alpha,2}^P \frac{Q C_{p+1}^{1-\frac{\alpha}{2}}(1)}{R^{2-\alpha}} \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{a^n}{R^n} = C_{\alpha,2}^P \frac{Q\Gamma(3 - \alpha + p)}{(R - a)\Gamma(2 - \alpha)(p + 1)!} \frac{a^{p+1}}{R^{p+2-\alpha}}.$$

□

Параметр  $p$  в утверждениях 6.2 и 6.4 позволяет контролировать погрешность, порождаемую мультипольным разложением, и выбирается в соответствии с требуемым уровнем точности решения.

**6.3 Мультипольные разложения для дробно-дифференциальных обобщений уравнений Гельмгольца.** Выполним теперь факторизацию фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Гельмгольца, приведенных в утверждениях 3.2 и 3.3 в  $\mathbb{R}^2$ . В силу радиальности фундаментальных решений построение их факторизованных разложений будет выполняться в полярных координатах.

Обозначим через  $(R, \varphi)$  и  $(r, \psi)$  полярные координаты точек  $\mathbf{x}$  and  $\boldsymbol{\xi}$ ,

соответственно. Тогда

$$G_{\alpha,2}^{H^\pm}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \equiv G_{\alpha,2}^{H^\pm}(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) \equiv G_{\alpha,2}^{H^\pm}(z),$$

где  $z = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma}$ , а  $\gamma = \varphi - \psi$ .

Простейшим способом построения факторизованных разложений фундаментальных решений (3.21) и (3.40) является использование теоремы сложения Графа [141] для функций Бесселя:

$$J_0(kz) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) J_m(kR) \cos(m\gamma). \quad (6.23)$$

Подстановка (6.23) в (3.21) и (3.40), с учетом интегральных представлений (3.25) и (3.42), соответственно, приводит к факторизованным представлениям

$$G_{\alpha,2}^{H^+}(z) = C_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m \left[ (\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}} r \right] J_m \left[ (\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}} R \right] \cos(m\gamma) + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\gamma) \int_0^{\infty} \frac{k}{\omega^2 - k^\alpha} J_m(kr) J_m(kR) dk, \quad (6.24)$$

$$G_{\alpha,2}^{H^-}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\gamma) \int_0^{\infty} \frac{k}{k^\alpha + \omega^2} J_m(kr) J_m(kR) dk. \quad (6.25)$$

Использование разложений (6.24) и (6.25) на практике является неэффективным, поскольку не существует явных аналитических представлений для вычисления таких интегралов, а их численное интегрирование является довольно затруднительным из-за сильно осциллирующих подынтегральных выражений. Некоторые алгоритмы вычисления подобных интегралов были предложены в [143, 144], однако сложность этих расчетов сильно зависит от интенсивности осцилляций подынтегральных выражений. Эти осцилляции в (6.24) и (6.25) сильно возрастают с ростом расстояния между точками  $(R, \varphi)$  и  $(r, \psi)$ , что чрезвычайно осложняет вычисления. Таким образом, данные факторизованные разложения являются крайне неэффективными для численного расчета и требуются другие явные факторизованные разложения  $G_{\alpha,2}^{H^\pm}(z)$

и  $G_{\alpha,2}^{H^+}(z)$ . Для этого может быть использован алгоритм, представленный в п. 6.1.

Рассмотрим фундаментальное решение (3.21) дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца (3.2). Первое слагаемое в правой части (3.21) допускает факторизованное разложение

$${}^0G_{\alpha,n}^{H^+}(\mathbf{x}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m \left[ (\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}} r \right] J_m \left[ (\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}} R \right] \cos(m\gamma), \quad (6.26)$$

полученное с использованием теоремы сложения Графа (6.23). Для второго слагаемого в правой части (3.21) справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 6.5.** Пусть  $r < R$ . Тогда для функции  $\delta G_{\alpha,2}^{H^+}(z)$  из фундаментального решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца (3.2) справедливо факторизованное представление

$$\begin{aligned} \delta G_{\alpha,2}^{H^+}(z) &= C_{\alpha,2}^{H^+} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^m \left( \frac{r}{R} \right)^n \frac{[\cos(n-2m)\gamma]}{m!(n-m)!} \times \\ &\times \mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (n-m, 1), (m, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{matrix} \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

**Доказательство.** В силу (3.31), для  $\delta G_{\alpha,2}^{H^+}(z)$  справедливо интегральное представление Меллина–Барнса:

$$\delta G_{\alpha,2}^{H^+}(z) = C_{\alpha,2}^{H^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{2-2s}{\alpha})\Gamma(1-\frac{2-2s}{\alpha})}{\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{2-2s}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{2-2s}{\alpha})} \left( \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} |z|^2}{4} \right)^{-s} ds. \quad (6.28)$$

Используя (6.4) и (6.5), представление (6.28) может быть переписано как

$$\begin{aligned} \delta G_{\alpha,2}^{H^+}(z) &= C_{\alpha,2}^{H^+} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{r}{R} \right)^n \frac{\cos[(n-2m)\gamma]}{m!(n-m)!} \times \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1-\frac{2}{\alpha}+\frac{2s}{\alpha})\Gamma(\frac{2}{\alpha}-\frac{2s}{\alpha})\Gamma(s+m)\Gamma(s+n-m)}{\Gamma(1-s)\Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha}+\frac{2s}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{2}{\alpha}-\frac{2s}{\alpha})} \left( \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \right)^{-s} ds. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Интеграл в правой части (6.29) может быть записан через функции Фокса:

$$\begin{aligned} \delta G_{\alpha,2}^{H^+}(z) &= C_{\alpha,2}^{H^+} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{\cos[(n-2m)\gamma]}{m!(n-m)!} \times \\ &\times \mathbb{H}_{3,5}^{3,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \left| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (m, 1), (n-m, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1) \end{array} \right. \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Используя свойства (2.1.2) и (2.1.8) из [70], функция  $\mathbb{H}_{3,5}^{3,1}$  из (6.30) переписывается как

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{3,5}^{3,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \left| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (m, 1), (n-m, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1) \end{array} \right. \right] &= \\ = (-1)^m \mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \left| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (n-m, 1), (m, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (6.31)$$

что приводит к факторизованному разложению (6.27).  $\square$

**Замечание.** Нетрудно показать, что в предельном случае  $\alpha = 2$  функция Фокса в правой части (6.27) может быть записана как

$$\mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ z \left| \begin{array}{l} (0, 1), (-\frac{1}{2}, 1) \\ (0, 1), (m, 1), (n-m, 1), (-\frac{1}{2}, 1) \end{array} \right. \right] = z^{\frac{n}{2}} Y_{n-2m}(2\sqrt{z}), \quad (6.32)$$

где  $Y_{n-2m}(2\sqrt{z})$  – функции Бесселя второго рода [141].

Отметим также, что при  $m = 0, n = 0$  функция  $\mathbb{H}_{2,4}^{2,1}(z)$  совпадает с функцией Фокса из фундаментального решения (3.21).

С учетом факторизованного разложения (6.30) может быть сформулировано следующее утверждение.

**Утверждение 6.6.** Пусть даны  $k$  узлов  $\mathbf{x}_i$  с полярными координатами  $(r_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , причем  $r_i < a$ ,  $0 < a < \infty$ . Тогда для любой точки  $\mathbf{x}$  с координатами  $(R, \varphi)$  такой, что  $R > a$ , справедливо разложение

$$\begin{aligned}
\Phi_{H^+}^\delta(R, \varphi, k) &\equiv \sum_{i=1}^k q_i^\delta G_{\alpha,2}^{H^+}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|) = \\
&= C_{\alpha,2}^{H^+} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n R^{-n} H_{2,4}^{2,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (n - m, 1), (m, 1), (\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{matrix} \right] \\
&\quad \times [M_n^m(r_i, \psi_i, k) \cos(n - 2m)\varphi + N_n^m(r_i, \psi_i, k) \sin(n - 2m)\varphi], \quad (6.33)
\end{aligned}$$

для  ${}^\delta G_{\alpha,2}^{H^+}(z)$  из (3.21), где

$$M_n^m(r_i, \psi_i, k) = \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!} \sum_{i=1}^k q_i r_i^n \cos(n - 2m)\psi_i, \quad (6.34)$$

$$N_n^m(r_i, \psi_i, k) = \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!} \sum_{i=1}^k q_i r_i^n \sin(n - 2m)\psi_i, \quad (6.35)$$

и

$$\begin{aligned}
\Phi_{H^+}^0(R, \varphi, k) &\equiv \sum_{i=1}^k q_i^0 G_{\alpha,2}^{H^+}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|) = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\omega R) \left( \cos(n\varphi) P_n(r_i, \psi_i, k) + \sin(n\varphi) Q_n(r_i, \psi_i, k) \right) \quad (6.36)
\end{aligned}$$

для  ${}^0 G_{\alpha,2}^{H^+}(z)$  из (3.21), где

$$P_n(r_i, \psi_i, k) = \sum_{i=1}^k q_i J_n(\omega r_i) \cos(n\psi_i), \quad (6.37)$$

$$Q_n(r_i, \psi_i, k) = \sum_{i=1}^k q_i J_n(\omega r_i) \sin(n\psi_i). \quad (6.38)$$

Для возможности использования полученного мультипольного разложения на практике, ряды по  $n$  в (6.33) и (6.36) должны быть заменены на конечные суммы  $\sum_{n=0}^p$  и  $\sum_{n=-p}^p$ , соответственно. Погрешность, даваемая представленным разложением, может контролироваться с помощью параметра  $p$ . В работе [86] было показано, что

$$\left| \Phi_{H^+}^0(R, \varphi, k) - \sum_{n=-p}^p J_n(\omega R) \left( \cos(n\varphi) P_n(r_i, \psi_i, k) + \sin(n\varphi) Q_n(r_i, \psi_i, k) \right) \right| < c \left( \frac{a}{R} \right)^p, \quad c = \text{const} > 0.$$

В силу малой изученности функций Фокса, в настоящее время отсутствуют оценки, позволяющие теоретически оценить погрешность при замене ряда конечной суммой в разложении (6.33). Однако в работе [117] для дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона, которое является предельным случаем уравнений (3.2) и (3.3) при  $\omega = 0$ , такая оценка была получена. В работе [123] вычислительные эксперименты продемонстрировали, что для ряда практически важных задач при вычислении соответствующих мультипольных разложений достаточно ограничиться значением  $p = 4$ . По этой причине в диссертации все численные расчеты выполняются при  $p = 4$ .

На рисунке 6.1 представлены графики зависимости абсолютной погрешности, порождаемой разложением (6.27), от параметра  $p$  в сравнении со значением фундаментального решения (3.21) при  $|z| = 1$ ,  $\alpha = \sqrt{2}$ . Здесь меняется отношение параметров  $r$  и  $R$ , что сказывается на сходимости мультипольного разложения: с ростом  $\frac{r}{R}$  сходимость уменьшается.

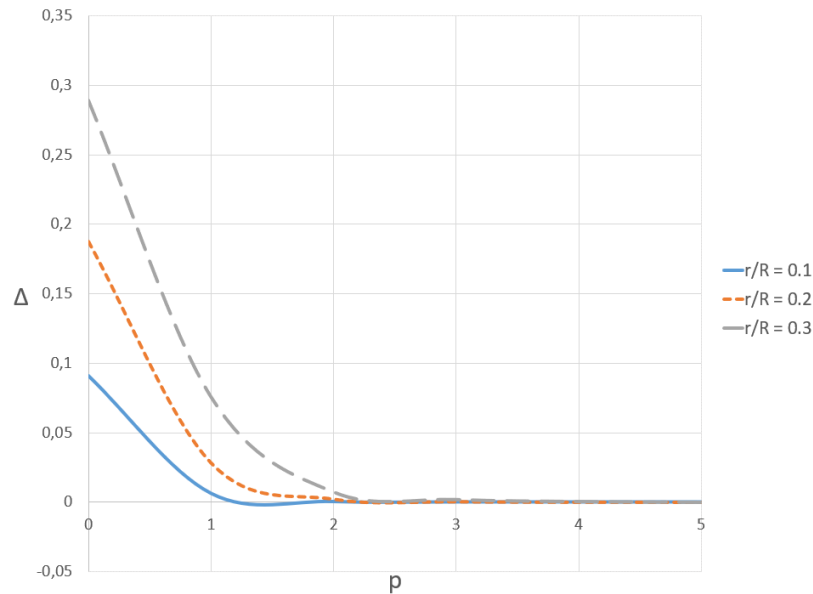


Рисунок 6.1: Зависимость абсолютной погрешности, даваемой мультипольным разложением (6.27) от параметра  $p$  при  $|z| = 1$

Рассмотрим теперь фундаментальное решение (3.40) дробно-дифференциального обобщения модифицированного уравнения Гельмгольца (3.3). С использованием алгоритма, предложенного в п. 6.1, для него было доказано следующее утверждение.

**Утверждение 6.7.** Пусть  $r < R$ . Тогда фундаментальное решение  $G_{\alpha,2}^{H^-}(z)$  дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца (3.3) может быть факторизовано в виде

$$G_{\alpha,2}^{H^-}(z) = C_{\alpha,2}^{H^-} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{[\cos(n-2m)\gamma]}{m!(n-m)!} \times \\ \times H_{1,3}^{2,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (n-m, 1), (m, 1) \end{matrix} \right]. \quad (6.39)$$

**Доказательство.** В силу (3.46), для фундаментального решения  $G_{\alpha,2}^{H^-}(z)$  справедливо интегральное представление Меллина–Барнса

$$G_{\alpha,2}^{H^-}(z) = C_{\alpha,2}^{H^-} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{2-2s}{\alpha})\Gamma(1-\frac{2-2s}{\alpha})}{\Gamma(1-s)} \left(\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} |z|^2}{4}\right)^{-s} ds. \quad (6.40)$$

Используя свойства (6.4) и (6.5), представление (6.40) может быть переписано в виде

$$G_{\alpha,2}^{H^-}(z) = C_{\alpha,2}^{H^-} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{\cos[(n-2m)\gamma]}{m!(n-m)!} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1-\frac{2}{\alpha}+\frac{2s}{\alpha})\Gamma(\frac{2}{\alpha}-\frac{2s}{\alpha})\Gamma(s+m)\Gamma(s+n-m)}{\Gamma(1-s)\Gamma(s)} \left(\frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4}\right)^{-s} ds. \quad (6.41)$$

Интеграл в правой части (6.41) сходится при  $1 - \frac{\alpha}{2} < \gamma < 1$  и может быть записан через функции Фокса:

$$G_{\alpha,2}^{H^-}(z) = C_{\alpha,2}^{H^-} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{[\cos(n-2m)\gamma]}{m!(n-m)!} \times$$

$$\times \mathbb{H}_{2,4}^{3,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \middle| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (m, 1), (n - m, 1), (0, 1) \end{array} \right]. \quad (6.42)$$

Функция  $\mathbb{H}_{2,4}^{3,1}$  из правой части факторизованного разложения (6.42) может быть преобразована (см. свойства (2.1.2) и (2.1.8) из [70]) и записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{2,4}^{3,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \middle| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (0, 1) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (m, 1), (n - m, 1), (0, 1) \end{array} \right] &= \\ &= (-1)^m \mathbb{H}_{1,3}^{2,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \middle| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (n - m, 1), (m, 1) \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Из (6.42) и (6.43) следует факторизованное представление (6.39).  $\square$

**Замечание.** В предельном случае  $\alpha = 2$  функция  $G_{\alpha,2}^{H^-}(z)$  совпадает с модифицированной функцией Бесселя  $K_0(2\sqrt{z})$ , которая является фундаментальным решением модифицированного уравнения Гельмгольца [62]. Более того, в данном случае факторизованные разложения (6.25) и (6.39) сводятся к теореме сложения Графа для функций Бесселя [98, 141]. Отметим также, что при  $m = 0$ ,  $n = 0$  функция Фокса (6.43) совпадает с функцией Фокса из фундаментального решения (3.40) дробно-дифференциального обобщения модифицированного уравнения Гельмгольца.

Полученное факторизованное разложение позволяет сформулировать следующее утверждение о мультипольном разложении.

**Утверждение 6.8.** Пусть даны  $k$  узлов  $\mathbf{x}_i$  с полярными координатами  $(r_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , причем  $r_i < a$ ,  $0 < a < \infty$ . Тогда для любой точки  $\mathbf{x}$  с координатами  $(R, \varphi)$  такой, что  $R > a$ , справедливо разложение

$$\begin{aligned} \Phi_{H^-}(R, \varphi, k) &\equiv \sum_{i=1}^k q_i G_{\alpha,2}^{H^-}(x - x_i) = \\ &= C_{\alpha,2}^{H^-} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n R^{-n} \mathbb{H}_{1,3}^{2,1} \left[ \frac{(\omega^2)^{\frac{2}{\alpha}} R^2}{4} \middle| \begin{array}{l} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}), (n - m, 1), (m, 1) \end{array} \right] \times \\ &\quad \times [M_n^m(r_i, \psi_i, k) \cos(n - 2m)\varphi + N_n^m(r_i, \psi_i, k) \sin(n - 2m)\varphi], \end{aligned} \quad (6.44)$$



где

$$M_n^m(r_i, \psi_i, k) = \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!} \sum_{i=1}^k q_i r_i^n \cos(n-2m)\psi_i, \quad (6.45)$$

$$N_n^m(r_i, \psi_i, k) = \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!} \sum_{i=1}^k q_i r_i^n \sin(n-2m)\psi_i. \quad (6.46)$$

При практическом использовании построенного мультипольного разложения ряд по  $n$  в (6.44) заменяется конечной суммой  $\sum_{n=0}^p$ . Погрешность, даваемая представленным разложением, может контролироваться с помощью параметра  $p$ . На рисунке 6.2 представлены графики зависимости абсолютной погрешности значений факторизованного разложения (6.39) от параметра  $p$  в сравнении с вычисленными значениями фундаментального решения (3.40) при фиксированном  $|z| = 1$ . Видно, что разное отношение параметров  $r$  и  $R$  влияет на скорость сходимости разложения. Расчеты проводились при  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $\omega = 1$ .

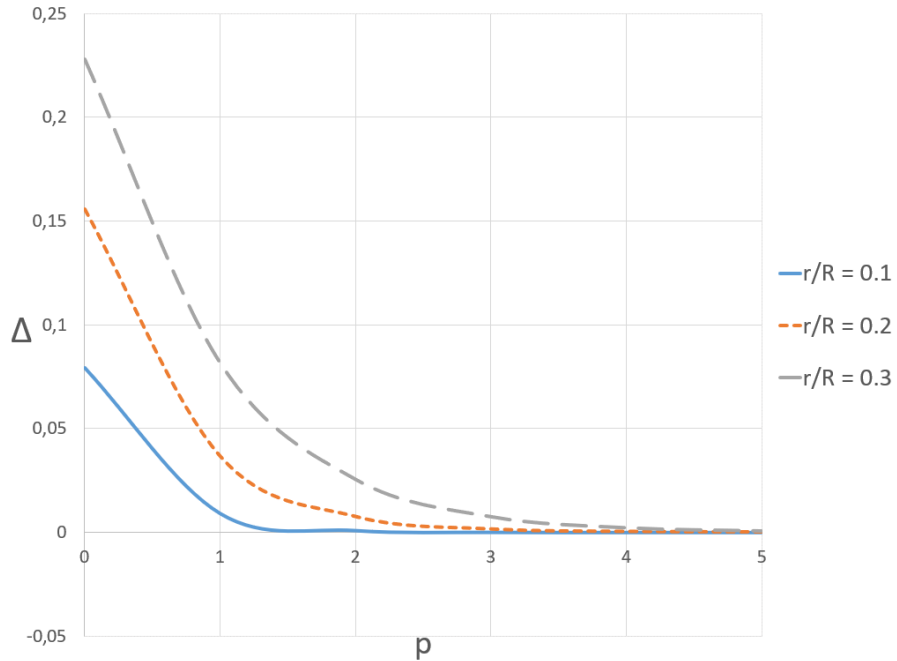


Рисунок 6.2: Зависимость абсолютной погрешности мультипольных разложений от значения параметра  $p$  при  $|z| = 1$

На рисунке 6.3 представлены графики зависимости абсолютной погрешности разложения (6.39) от параметра  $p$ . Значения разложения при этом сравнивались со значениями фундаментального решения (3.40) при разных  $|z|$  и

фиксированном  $\frac{r}{R} = 0.2$ . Увеличение  $|z|$  приводит к увеличению скорости сходимости мультипольного разложения. При этом важно отметить, что влияние величины  $|z|$  на сходимость не столь существенно, как отношение параметров  $r$  и  $R$ .

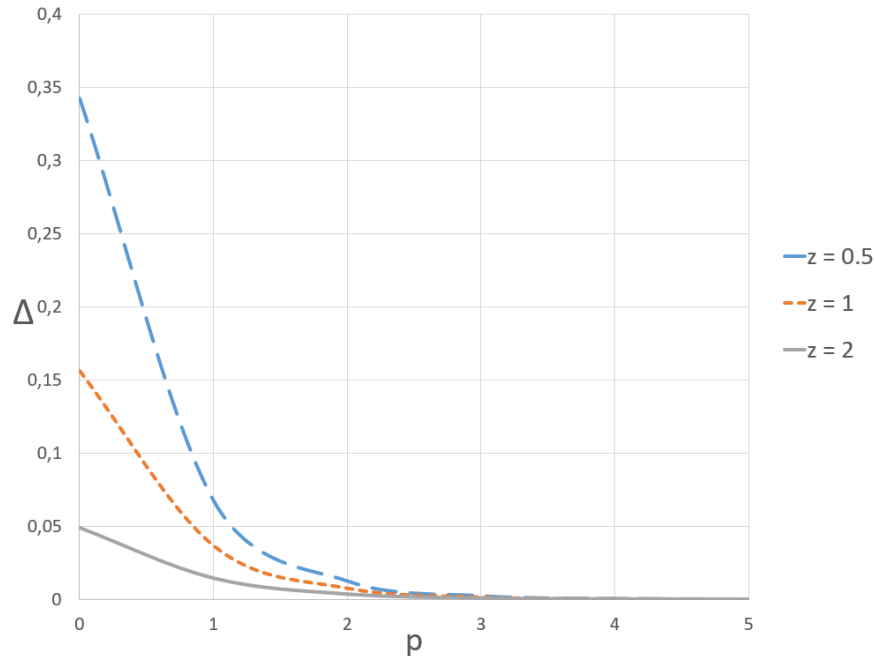


Рисунок 6.3: Зависимость абсолютной погрешности мультипольных разложений от параметра  $p$  при  $\frac{r}{R} = 0.2$

## §7 Численный расчет функций Фокса

Для возможности численного расчета мультипольных разложений (6.33), (6.44) требуются эффективные численные алгоритмы вычисления функций Фокса из этих разложений. В силу того, что функции Фокса в настоящее время все еще являются слабо изученными, отсутствует универсальный численный алгоритм вычисления их значений. Такой универсальный алгоритм может быть построен с использованием специальной процедуры сращивания прямого и асимптотического разложений рассматриваемых функций. Подобные алгоритмы были разработаны для функций Миттаг-Леффлера в работе [68] и для функций Райта в [69]. Тем не менее функции Фокса в разложениях (6.33) и (6.44) являются существенно более сложными, и по этой при-

чине разработка численного алгоритма их вычисления при любых значениях параметров  $m$  и  $n$  является темой отдельного исследования. Важно отметить, что для практического применения мультипольных разложений (6.33) и (6.44) достаточно вычислять малое число членов ряда по  $n$ . Таким образом, и функции Фокса (6.31) и (6.43) будут вычисляться при малых значениях параметров  $m$  и  $n$ . Как будет продемонстрировано далее в этом параграфе, при малых  $m$  и  $n$  возможно использование простой стыковки прямых и асимптотических разложений для вычисления функций  $H_{1,3}^{2,1}(z)$  и  $H_{2,4}^{2,1}(z)$ .

**7.1 Вычисление значений  $H_{1,3}^{2,1}(z)$ .** В соответствии с [70], для (6.43) справедливо разложение

$$\begin{aligned} H_{1,3}^{2,1} \left[ z \left| \begin{array}{c} (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \\ (1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}) \end{array} \right. , (n - m, 1), (m, 1) \right] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}(k + 1 + n - m)) \Gamma(\frac{2}{\alpha}(k + 1 + n - m))}{\Gamma(1 - 2m + n + k)} \frac{(-1)^k}{k!} z^{k+n-m} + \\ + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n - m + 1 - \frac{\alpha}{2}(k + 1))}{\Gamma(-m + \frac{\alpha}{2}(k + 1))} (-1)^k z^{\frac{\alpha}{2}(k+1)-1}. \quad (7.1) \end{aligned}$$

При численном расчете полученного разложения ряды по  $k$  в (7.1) заменяются конечными суммами  $\sum_{k=0}^{N_p}$ . Параметр  $N_p$  при этом выбирается в соответствии с необходимым уровнем точности расчетов. Отметим, что в предельном случае  $m = 0$ ,  $n = 0$  разложение (7.1) совпадает с разложением (4.20) фундаментального решения уравнения (3.3).

На рисунке 7.1 продемонстрированы графики погрешности вычисления функций (6.43) при разных значениях  $m$  и  $n$  для различного числа членов разложения (7.1). Погрешность  $\Delta$  здесь вычислялась в виде

$$\Delta = \lg \left| \bar{H}_{1,3}^{2,1}(z) - \tilde{H}_{1,3}^{2,1}(z) \right|.$$

Здесь  $\bar{H}_{1,3}^{2,1}(z)$  – значение функции Фокса, вычисленное через 1000 членов разложения (7.1), а  $\tilde{H}_{1,3}^{2,1}(z)$  – через  $N_p$  членов. Видно, что увеличению значений аргумента  $z$  приводит к росту погрешности. При этом при больших

значениях  $z$  или параметров  $m$  и  $n$  необходимо большее  $N_p$  для достижения требуемого уровня погрешности, что, в свою очередь, приводит к большему времени численного расчета. По этой причине для вычисления значений функций Фокса (6.43) при больших значениях аргумента  $z$  рекомендуется использовать асимптотические разложения этих функций, рассматриваемые далее.

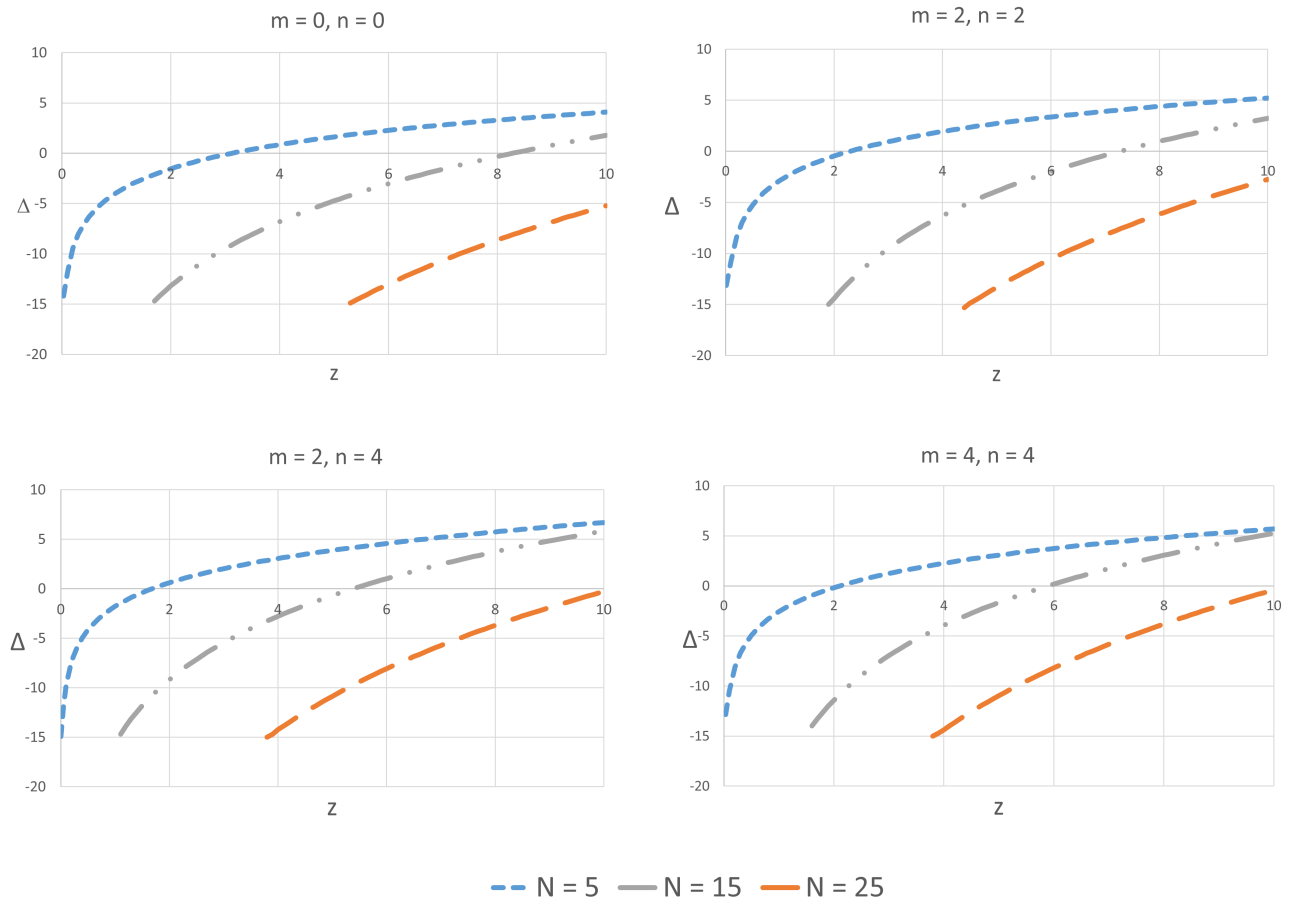


Рисунок 7.1: Погрешность вычислений функций Фокса (6.43) при разных значениях  $m$ ,  $n$  и  $N_p$

В соответствии с [70], для функции  $H_{1,3}^{2,1}(z)$  справедливо асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
 H_{1,3}^{2,1} \left[ z \left| \begin{array}{c} \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \\ \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), (n - m, 1), (m, 1) \end{array} \right. \right] &\sim \\
 &\sim \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k\alpha}{2} + n - m\right)}{\Gamma\left(-\frac{k\alpha}{2} - m\right)} (-1)^k z^{-1 - \frac{k\alpha}{2}}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

При численных расчетах ряд по  $k$  в (7.2) заменяется конечной суммой  $\sum_{k=0}^{N_a}$ . При  $m = 0$ ,  $n = 0$ , разложение (7.2) совпадает с (4.21).

На рисунке 7.2 приведены графики стыковки прямых (7.1) и асимптотических (7.2) разложений функций (6.43) при  $N_p = 25$ ,  $N_a = 9$  и различных значениях  $m$  и  $n$ . Видно, что при малых  $m$  и  $n$  может быть использована простая стыковка прямых и асимптотических разложений в некоторой точке  $z = z_0$ . Возможность такой стыковки в точке  $z_0 = 8$  демонстрируется на рисунке 7.2 и в таблице 7.1.

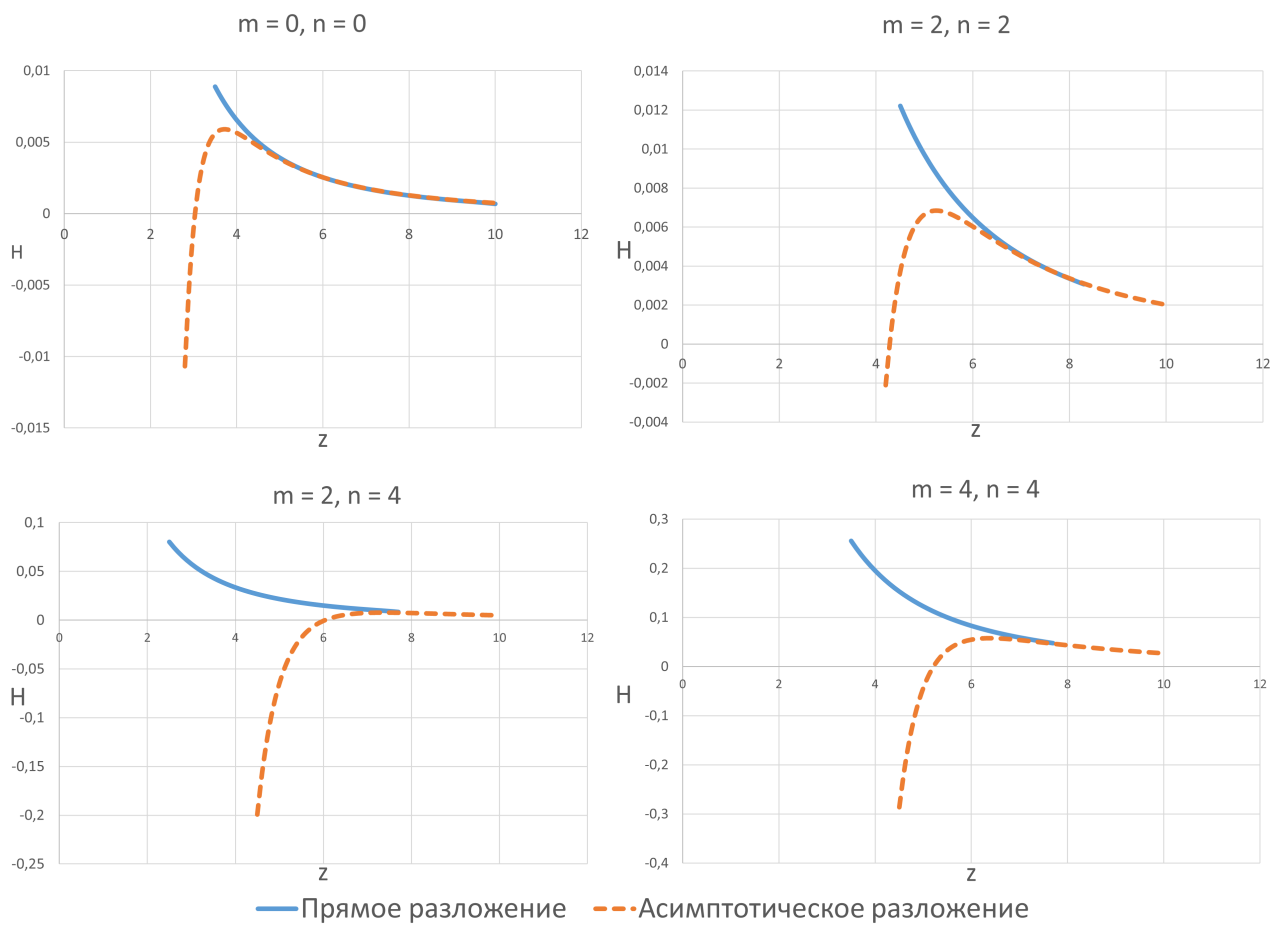


Рисунок 7.2: Прямые и асимптотические разложения функций Фокса (6.43) при разных значениях  $m$  и  $n$

В соответствии с результатами вычислительных экспериментов, для численного расчета функций Фокса (6.43) при  $z \in [0, z_0)$  предлагается использовать прямое разложение (7.1), а при  $z \in [z_0, \infty)$  — асимптотическое разложение (7.2). Для увеличения точности вычислений значение  $z_0$  может быть

Таблица 7.1: Значения прямых и асимптотических разложений функций Фокса (6.43) в точке  $z_0 = 8$

	Прямое разложение	Асимптотическое разложение
$m = 0, n = 0$	0.00127306	0.00127461
$m = 2, n = 2$	0.00336523	0.00336867
$m = 2, n = 4$	0.00724198	0.00721564
$m = 4, n = 4$	0.04260167	0.04287293

выбрано более большим, однако при этом может потребоваться вычисление большего количества  $N_p$  и  $N_a$  членов разложений (7.1) и (7.2).

**7.2 Вычисление значений  $H_{2,4}^{2,1}(z)$ .** Для вычисления функций Фокса (6.31), как и в предыдущем разделе, будет использоваться стыковка прямого и асимптотического разложений.

В соответствии с [70], для функций  $H_{2,4}^{2,1}(z)$  справедливо разложение

$$\begin{aligned}
& H_{2,4}^{2,1} \left[ z \left| \begin{array}{l} \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \\ \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), (n - m, 1), (m, 1), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \end{array} \right. \right] = \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}(k + 1 + n - m)\right) \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}(k + 1 + n - m)\right) (-1)^k z^{k+n-m}}{\Gamma(1 - 2m + n + k) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}(k + 1 + n - m)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha}(k + 1 + n - m)\right) k!} \\
& \quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha \Gamma\left(n - m + 1 - \frac{\alpha}{2}(k + 1)\right) (-1)^k z^{\frac{\alpha}{2}(k+1)-1}}{2\Gamma\left(-m + \frac{\alpha}{2}(k + 1)\right) \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-k - \frac{1}{2}\right)}. \quad (7.3)
\end{aligned}$$

Для вычислительных целей ряды по  $k$  в данном разложении заменяются на конечные суммы  $\sum_{k=0}^{N_p}$ , где параметр  $N_p$  определяется из требований о необходимом уровне вычислительной точности. Отметим, что при  $m = 0, n = 0$  разложение (7.3) совпадает с разложением (5.5).

На рисунке 7.3 представлены графики погрешности, порождаемой разложением (7.3) при  $\alpha = \sqrt{2}$  и различных значениях параметров  $m, n$  и  $N_p$ . Погрешность  $\Delta$  при этом вычислялась в виде

$$\Delta = \lg \left| \bar{H}_{2,4}^{2,1}(z) - \tilde{H}_{2,4}^{2,1}(z) \right|, \quad (7.4)$$

где  $\bar{H}_{2,4}^{2,1}(z)$  – значение функций Фокса (6.31), вычисленных с использовани-

ем 1000 членов разложения (7.3), а  $\tilde{H}_{2,4}^{2,1}(z)$  – с использованием  $N_p$  членов. Нетрудно заметить, что увеличение аргумента  $z$  приводит к росту данной погрешности. Также эти графики демонстрируют, что с ростом значений параметров  $m$  и  $n$  требуется использование большего количества  $N_p$  членов разложения (7.3) для обеспечения достаточного уровня точности вычислений, что приводит к значительному увеличению вычислительной сложности данного расчета. Поэтому для значений аргумента  $z \gg 1$  предлагается использовать другой способ вычисления функций (6.31).

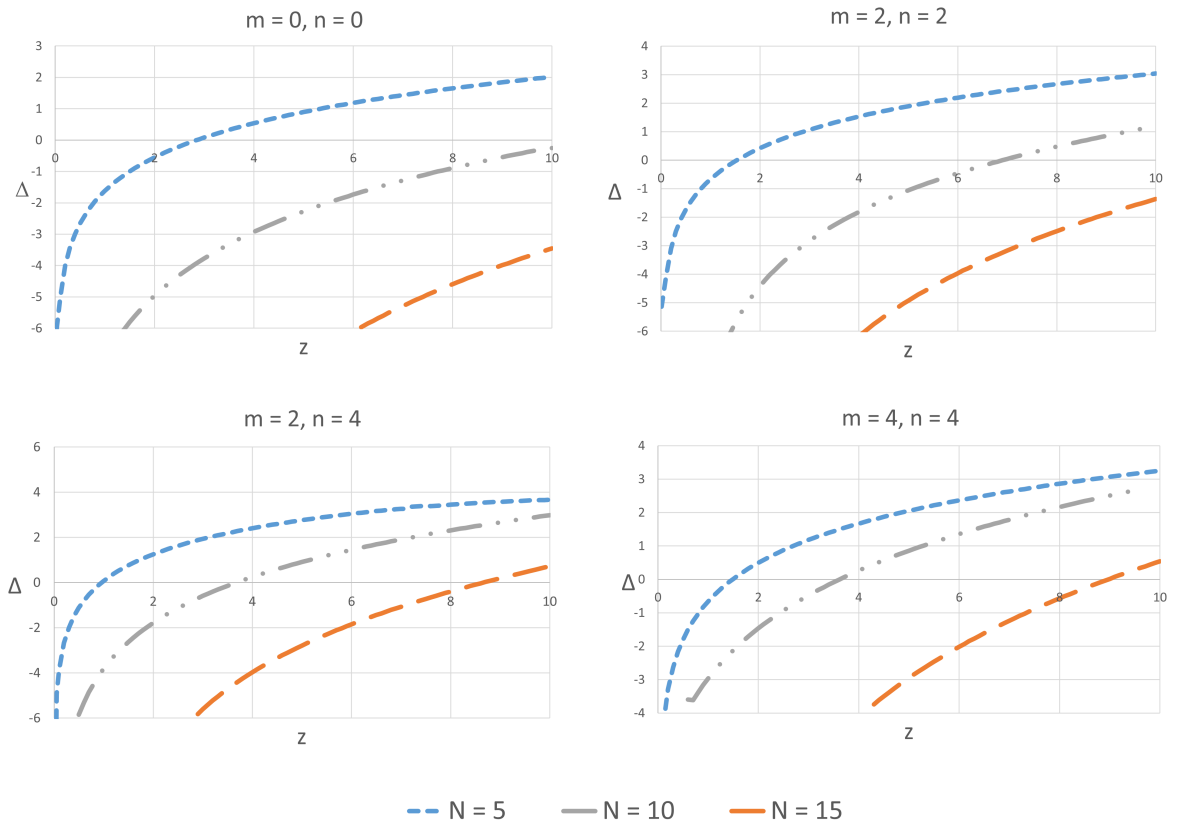


Рисунок 7.3: Погрешность (7.4), порождаемая разложением (6.31) при различных  $m$  и  $n$

В соответствии с теоремой 1.9 из [70], для функций (6.31) справедливо асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
 & z^{-\frac{n}{2}} \mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ z \left| \begin{array}{l} \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \\ \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), (n - m, 1), (m, 1), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \end{array} \right. \right] \sim \\
 & \sim \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(n - m + 1 + \frac{k\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-m - \frac{k\alpha}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right)} z^{-1 - \frac{k\alpha}{2} - \frac{n}{2}} +
 \end{aligned}$$

$$+ c_0 z^{-\frac{n}{2}} E(ze^{i\pi}) - d_0 z^{-\frac{n}{2}} E(ze^{-i\pi}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (7.5)$$

где

$$c_0 = 2\pi i e^{i(m-n-\frac{1}{2})\pi}, \quad d_0 = -2\pi i e^{-i(m-n-\frac{1}{2})\pi},$$

$$E(z) = \frac{2^{-n}}{i(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} A_j (4z)^{\frac{n}{2}-\frac{j}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\sqrt{z}}.$$

Постоянные  $A_j$  могут быть вычислены при помощи теоремы 1.4 из [145] посредством рекурсивной формулы

$$A_j = -\frac{1}{4j} \sum_{k=0}^{j-1} A_k e(j, k), \quad (7.6)$$

где

$$e(j, k) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n - 2m + j\right)}{(n - 2m)\Gamma\left(-\frac{1}{2} + n - 2m + k\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - n + 2m + j\right)}{(2m - n)\Gamma\left(-\frac{1}{2} - n + 2m + k\right)}.$$

Важно отметить, что слагаемое  $c_0 z^{-\frac{n}{2}} E(ze^{i\pi}) - d_0 z^{-\frac{n}{2}} E(ze^{-i\pi})$  в правой части (7.5) совпадает с асимптотическим разложением Ханкеля (см. [98]) для функций Бесселя второго рода  $Y_{n-2m}(2\sqrt{z})$ , что может быть доказано прямыми вычислениями. Таким образом, разложение (7.5) может быть переписано как

$$\begin{aligned} & z^{-\frac{n}{2}} \mathbb{H}_{2,4}^{2,1} \left[ z \left| \begin{array}{l} \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \\ \left(1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right), (n - m, 1), (m, 1), \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) \end{array} \right. \right] \sim \\ & \sim \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n - m + 1 + \frac{k\alpha}{2}\right) (-1)^k z^{-1 - \frac{k\alpha}{2} - \frac{n}{2}}}{\Gamma\left(-m - \frac{k\alpha}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right)} + Y_{n-2m}(2\sqrt{z}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (7.7) \end{aligned}$$

При численных расчетах ряд по  $k$  в этом разложении заменяется на конечную сумму  $\sum_{k=0}^{N_a}$ . Точность вычислений при этом оценивается как  $O(z^{-1-(N_a+1)/2})$ . При  $m = 0$ ,  $n = 0$  разложение (7.7) совпадает с построенным ранее асимптотическим разложением (5.8) для фундаментального решения (3.2) в  $\mathbb{R}^2$ .

На рисунке 7.4 представлены графики функций (6.31) в логарифмических координатах для разных значений  $m, n$  и  $\alpha$ , вычисленные с использова-



нием разложения (7.3) при  $N_d = 15$ , а также главный член асимптотического разложения (7.7). Нетрудно заметить, что с ростом аргумента  $z$  эти функции асимптотически стремятся к главному члену разложения (7.7), который не зависит от  $\alpha$ . Таким образом, при  $z \gg 1$  функция (6.31) является слабо зависимой от  $\alpha$ .

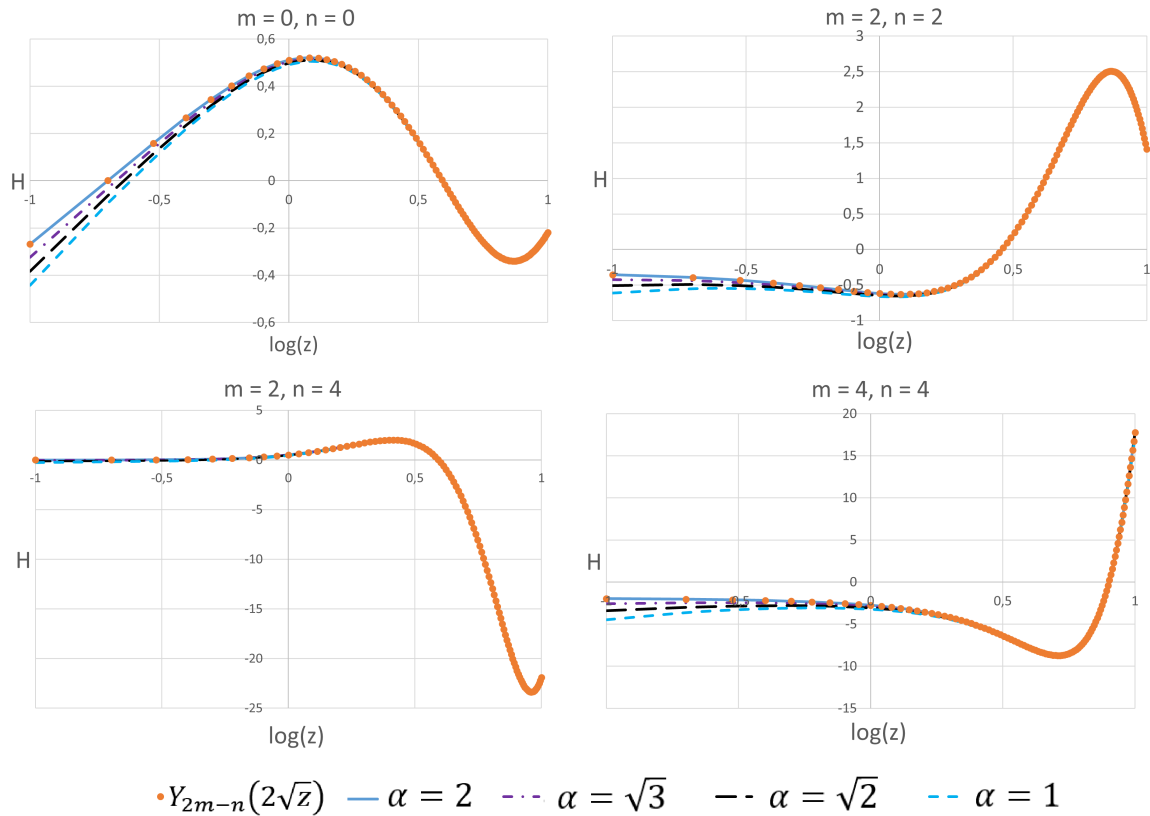


Рисунок 7.4: Функции (6.31) и главный член их асимптотического разложения (7.7) при разных значениях  $m$ ,  $n$  и  $\alpha$

Таким образом, для вычисления функций (6.31) предлагается использование прямого разложения (7.3) при значениях аргумента  $z \in [0, z_0)$  и использование асимптотического разложения (7.7) при  $z \in [z_0, \infty)$ . Значения параметров  $N_p$ ,  $N_a$  и  $z_0$  при этом выбираются исходя из требований о необходимом уровне точности вычислений.

## Глава 4

# МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДРОБНО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Построенные в предыдущей главе мультипольные разложения позволяют применять мультипольный подход для нахождения численных решений дробно-дифференциальных уравнений (3.1), (3.2) и (3.3). Главное преимущество мультипольных методов заключается в их скорости в сравнении с вычислением решения «напрямую» по кубатурным формулам вида (6.0). Это преимущество, в первую очередь, обеспечивается меньшим количеством вычислительных операций при построении численных решений рассматриваемых уравнений с использованием мультипольных разложений при учете дальних взаимодействий между узлами кубатуры и расчетными точками. Например, классические мультипольные методы (см. [84, 86]) позволяют уменьшить вычислительную сложность с  $\mathcal{O}(N^2)$  операций до  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Более того, эти методы являются достаточно хорошо масштабируемыми с точки зрения параллельных вычислений. Таким образом, для численного исследования дробно-дифференциальных моделей, для которых характерна большая вычислительная сложность вследствие нелокальности многомерных дробно-дифференциальных операторов, мультипольный подход является достаточно перспективным.

Данная глава посвящена разработке и апробации мультипольных алгоритмов численного решения дробно-дифференциальных уравнений (3.1), (3.2) и (3.3) для моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов.

## §8 Мультипольные алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца

Преимущество использования мультипольных разложений на практике может быть продемонстрировано на простом примере. Рассмотрим для этого мультипольное разложение (6.44) для дробно-дифференциального обобщения модифицированного уравнения Гельмгольца (3.3). Пусть дано  $k$  кубатурных узлов  $x_i$  с координатами  $(r_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  таких, что  $r_i < a$ ,  $0 < a < \infty$ , а также  $l$  расчетных точек  $\xi_j$  с координатами  $(R_j, \varphi_j)$ ,  $j = 1, \dots, l$  таких, что  $R_j > a$ . Вычисление всех парных взаимодействий между кубатурными узлами и расчетными точками по кубатурной формуле вида (6.0) требует  $\mathcal{O}(kl)$  вычислительных операций. Используя мультипольное разложение (6.44), количество вычислительных операций может быть значительно уменьшено. Для этого сначала вычисляются значения функций  $M_n^m(r_i, \psi_i, k)$  и  $N_n^m(r_i, \psi_i, k)$  для всех кубатурных узлов по формулам (6.45) и (6.46), а затем вычисляются значения  $\Phi_{H^-}(R_j, \varphi_j, k)$  для всех расчетных точек посредством использования конечной суммы  $\sum_{n=0}^p$  в разложении (6.44). В этом случае вычислительная сложность составляет  $\mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(pl)$  операций, что значительно меньше  $\mathcal{O}(kl)$  при больших значениях  $k$  и  $l$ .

Таким образом, в отличие от вычисления по кубатурным формулам вида (6.0), где вычисляются взаимодействия между всеми парами кубатурных узлов и расчетных точек, в мультипольных методах взаимодействия вычисляются между расчетными точками и подобластями, содержащими кубатурные узлы. Однако, как было показано в утверждениях 6.2, 6.4 и на рисунках 6.1, 6.2, 6.3, сходимость мультипольных разложений зависит от соотношения расстояний  $\frac{r}{R}$  и, следовательно, для возможности использования этих разложений рассматриваемые точки и кубатурные узлы должны быть достаточно удалены друг от друга. Поэтому для быстрой сходимости мультипольных разложений и, соответственно, для возможности задавать достаточно малое значение параметра  $p$  при замене ряда по  $n$  на конечную сумму в мульти-

польных разложениях, нужно рассматривать достаточно хорошо удаленные друг от друга подобласти расчетной области  $\Omega$ .

**8.1 Последовательный мультипольный алгоритм.** Для эффективного использования мультипольных разложений в мультипольных методах используется иерархический подход к разбиению расчетной области для определения принципа взаимодействия подобластей друг между другом. Подробно этот подход рассмотрен, например, в работах [86, 87]. Для организации такой иерархической структуры на каждом уровне происходит разбиение расчетной области  $\Omega$  на подобласти (ячейки). На нулевом уровне имеется всего одна расчетная ячейка, совпадающая со всей расчетной областью  $\Omega$ . Последующие уровни получаются из предыдущих посредством деления каждой расчетной ячейки на  $2^n$  частей, где  $n$  – размерность пространства. Как было показано ранее, уменьшение количества вычислительных операций может быть достигнуто на каждом уровне иерархической структуры алгоритма за счет учета взаимодействия между расчетными ячейками посредством мультипольных разложений. Подробное описание мультипольных алгоритмов решения классических уравнений математической физики представлено, например, в работах [62, 84].

Для удобства описания алгоритма могут быть введены следующие определения (см. [87])

- Две подобласти (ячейки) одного уровня иерархической структуры алгоритма считаются соседними, если они имеют хотя бы одну общую точку. Ячейка также считается соседней сама себе.
- Две подобласти (ячейки) одного уровня иерархической структуры алгоритма считаются «хорошо разделенными», если они не являются соседними.

Для каждой ячейки на каждом уровне иерархической структуры может быть определена, так называемая, схема взаимодействия, состоящая из ячеек, взаимодействие рассматриваемой ячейки с которыми может вычисляться с использованием мультипольных разложений.

Для ячейки  $i$  на уровне  $l$  схема взаимодействия  $L_i^l$  определяется следующим образом.

- 1) На уровне  $l - 1$  определяется ячейка  $j$ , из которой ячейка  $i$  была образована посредством разбиения на уровне  $l$ .
- 2) На уровне  $l - 1$  определяются соседние к  $j$  ячейки, формируется список  $L$  порожденных ими ячеек на уровне  $l$ .
- 3) Из  $L$  исключаются ячейки, которые являются соседними для ячейки  $i$ , что дает схему взаимодействия  $L_i^l$ .

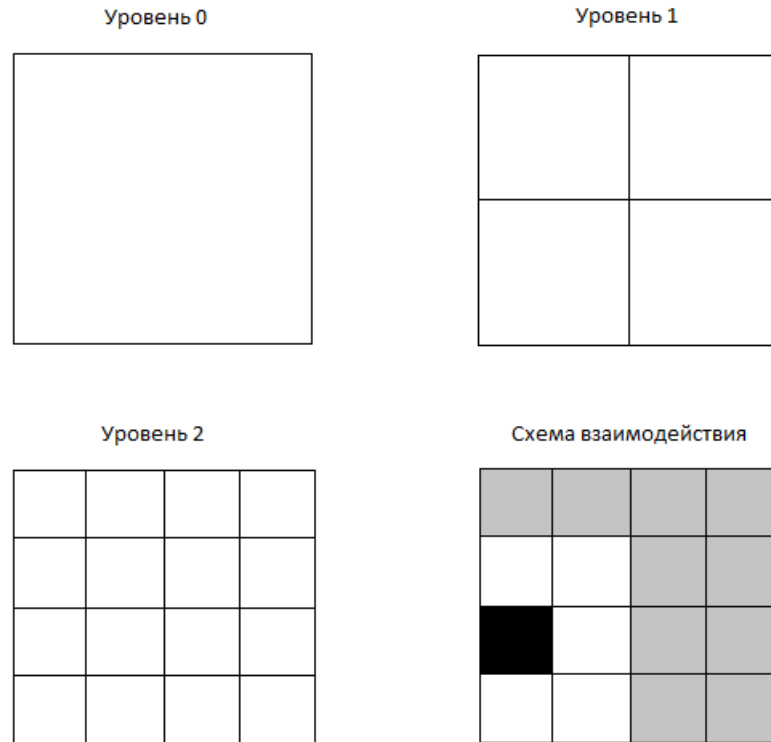


Рисунок 8.1: Иерархическая система и пример схемы взаимодействия для  $\Omega \in \mathbb{R}^2$

На рисунке 8.1 продемонстрировано иерархическое разбиение расчетной области  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  на подобласти. Для одной из ячеек второго уровня разбиения (ячейка черного цвета) показан пример схемы взаимодействия (ячейки серого цвета). Отметим, что на уровнях  $l = 0$  и  $l = 1$  отсутствуют хорошо разделенные ячейки, поэтому определение схемы взаимодействия возможно лишь для ячеек уровней  $l \geq 2$ .

На рисунке 8.2 продемонстрирован пример построения схемы взаимодействия (ячейки синего цвета) для одной ячейки (красный цвет) уровня  $l = 3$ . Отметим, что на этом уровне взаимодействия красной ячейки считаются только с подобластями, взаимодействие с которыми не вычислялось на

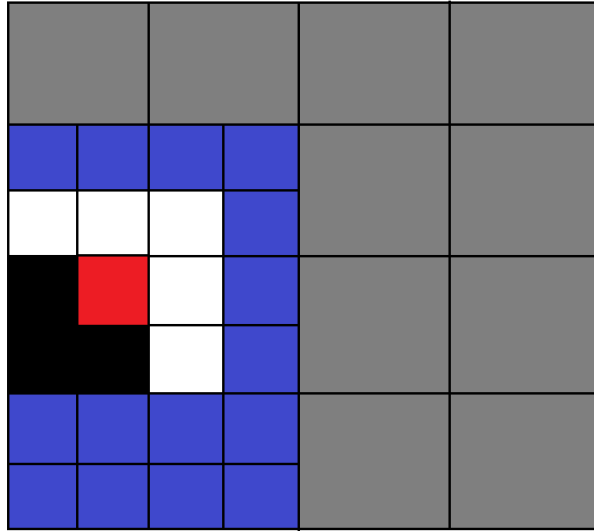


Рисунок 8.2: Пример построения схемы взаимодействия на уровне  $l = 3$

уровне  $l = 2$ . Далее, при переходе от уровня  $l = 3$  к  $l = 4$  дочерние ячейки красной ячейки будут взаимодействовать только с дочерними ячейками белых и черных ячеек.

Таким образом, для всех расчетных ячеек уровня  $l \geq 2$  с помощью мультипольных разложений может быть вычислено взаимодействие кубатурных узлов, содержащихся в этих ячейках, со всеми расчетными точками из ячеек схемы взаимодействия рассматриваемой ячейки.

Для того, чтобы каждая ячейка содержала хотя бы один кубатурный узел при их равномерном распределении, максимальный уровень иерархической структуры определяется как  $l_{max} \approx \log_{2^n}(N)$ , где  $N$  – количество узлов кубатуры. На уровне  $l_{max}$  по кубатурным формулам вида (6.0) вычисляются локальные взаимодействия между кубатурными узлами и расчетными точками, лежащими во всех соседних ячейках этого уровня.

Таким образом, для построения численных решений уравнений (3.1), (3.2) и (3.3) в  $\mathbb{R}^2$  можно сформулировать следующий алгоритм.

### ***Последовательный мультипольный алгоритм***

- 1) На уровнях иерархической структуры  $l = l_2, \dots, l_{max}$  для каждой ячейки  $i$  с  $k_i^l$  кубатурными узлами  $\mathbf{x}_i$ :
  - определяется схема взаимодействия  $L_i^l$ ;

- вычисляются мультипольные взаимодействия  $\Phi(\mathbf{x}, k_i^l)$  рассматриваемой ячейки со всеми расчетными точками  $\mathbf{x}$ , лежащими в ячейках  $L_i^l$ :
  - для дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона (3.1) используется мультипольное разложение (6.18),
  - для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца (3.2) используются мультипольные разложения (6.33) и (6.36),
  - для дробно-дифференциального обобщения модифицированного уравнения Гельмгольца (3.3) используется мультипольное разложение (6.44).

Мультипольные разложения вычисляются относительно центра ячейки  $i$ . Возможность этого обеспечивается инвариантностью мультипольных разложений относительно преобразования переноса. Ряды по  $n$  в разложениях заменяются на конечные суммы  $\sum_{n=0}^p$ , а параметр  $p$  в соответствии с требуемым уровнем точности вычислений.

- 2) Вычисляются локальные взаимодействия  $\Lambda_I^{l_{max}}(\mathbf{x})$  между узлами кубатуры и расчетными точками, лежащими в соседних ячейках на уровне  $l_{max}$  по кубатурам вида (6.0). Обозначение  $I$  в  $\Lambda_I^{l_{max}}(\mathbf{x})$  – множество всех кубатурных узлов  $\mathbf{x}_i$ , находящихся в ячейках, являющихся соседними для ячейки с расчетной точкой  $\mathbf{x}$ .
- 3) Численное решение рассматриваемых уравнений в расчетной точке  $\mathbf{x}$  представляется в виде суммы локальных и мультипольных разложений:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{l=2}^{l_{max}} \sum_{j \in L_x^l} \Phi(\mathbf{x}, k_j^l) + \Lambda_I^{l_{max}}(\mathbf{x}), \quad (8.1)$$

где  $L_x^l$  – схема взаимодействия ячейки, содержащей расчетную точку  $\mathbf{x}$  на уровне  $l$ .

Отметим, что мультипольные разложения  $\Phi(\mathbf{x}, k_j^l)$  считаются в совокупности для всех расчетных точек, лежащих в ячейках из схемы взаимодействия ячейки  $j$  на уровне  $l$ , что и позволяет значительно сократить время расчета за счет уменьшения количества вычислительных операций.

Оценим теперь количество вычислительных операций представленного выше последовательного мультипольного алгоритма.

- Вычисление коэффициентов мультипольных разложений на каждом уровне иерархической структуры алгоритма требует порядка  $Np^n$  операций.
- Максимально возможное число ячеек в схеме взаимодействия составляет  $3^n(2^n - 1)$ . Тогда вычисление всех мультипольных взаимодействий приводит к порядку  $3^n(2^n - 1)Np^n$  операциям.
- Для расчета локальных взаимодействий на уровне  $l_{max}$  требуется порядка  $3^n N$  операций.

При максимально возможном  $l_{max} = \log_{2^n}(N)$ , суммарное количество операций равно

$$3^n(2^n - 1)Np^n \log_{2^n}(N) + 3^n N.$$

Время выполнения алгоритма при этом

$$T_1 \approx 3^n(2^n - 1)Np^n \log_{2^n}(N)T_0, \quad (8.2)$$

где  $T_0$  – время выполнения одной вычислительной операции.

Таким образом, вычислительная сложность разработанного алгоритма составляет порядка  $\mathcal{O}(N \log N)$  операций.

**8.2 Параллельный мультипольный алгоритм.** Последовательный мультипольный алгоритм является эффективным для вычисления интегралов (3.16), (3.19) и (3.39) когда подынтегральные выражения достаточно быстро стремятся к нулю при удалении от начала координат. Если же они убывают по степенному закону, что нередко характерно при моделировании нелокальных процессов, то расчетная область  $\Omega$  становится достаточно большой, что приводит сильному увеличению количества расчетных точек и кубатурных узлов и, соответственно, к увеличению количества вычислений. В таком случае, для эффективных быстрых вычислений рассматриваемых решений требуются дальнейшие оптимизации предложенного алгоритма.

Важной особенностью мультипольных методов является то, что их параллельные версии обладают высокой масштабируемостью. В работах [88–90] предложены параллельные версии мультипольных алгоритмов для класси-



ческих уравнений математической физики. Однако ни последовательные, ни параллельные мультипольные алгоритмы ранее не применялись при построении численных решений многомерных ЛДДМ. В данном разделе предлагается гибридный параллельный мультипольный алгоритм, основанный на использовании интерфейсов MPI и OpenMP.

В мультипольных алгоритмах могут быть выделены два уровня параллелизма: верхний и нижний. В силу того, что мультипольный алгоритм имеет иерархическую структуру разделения расчетной области на подобласти, на верхнем уровне может использоваться принцип геометрического параллелизма (domain decomposition), реализуемый, например, с использованием интерфейса MPI, для выполнения параллельных вычислений мультипольных взаимодействий между подобластями. Данный уровень параллелизма может быть реализован на многопроцессорных вычислительных системах (МВС) с распределенной памятью. Подобными системами являются, например, вычислительные кластеры. Важно отметить, что характер отображения вычислительных подобластей мультипольного алгоритма на узлы МВС может различаться в силу различных архитектур МВС и топологий коммуникационной среды. Таким образом, распараллеливание вычислений на первом уровне параллелизма осуществляется за счет декомпозиции расчетных ячеек мультипольного алгоритма по узлам МВС. Для эффективной работы этого уровня требуется оптимальная декомпозиция расчетной области и минимизация пересылок между узлами МВС.

На нижнем уровне параллелизма может выполняться параллельное вычисление мультипольных разложений (6.7), (6.18), (6.33), (6.36) и (6.44). Программная реализация этого уровня для отдельных узлов МВС с общей памятью может быть эффективно выполнена с использованием интерфейсов OpenMP или CUDA.

В рамках диссертационного исследования разработан следующий *гибридный MPI + OpenMP алгоритм*.

- 1) На начальном этапе выполняется отображение вычислительных подобластей уровней  $l_2, \dots, l_{max}$  на узлы МВС для параллельного вычисления мультипольных взаимодействий между этими подобластями. На каждый

узел отображается равное количество ячеек уровня  $l_{max}$ , что, в совокупности с равномерным распределением кубатурных узлов, приводит к примерно одинаковой нагрузке на всех узлах МВС.

- 2) Информация о координатах кубатурных узлов и расчетных точек передается каждому узлу многопроцессорной системы для возможности вычисления локальных и мультипольных взаимодействий.
- 3) На каждом узле многопроцессорной системы реализуется многопоточное вычисление сумм в мультипольных разложениях с использованием, например, интерфейса OpenMP.
- 4) Производятся независимые вычисления мультипольных взаимодействий между подобластями на всех уровнях иерархической структуры в соответствии с инициализированными на первом шаге данного алгоритма ячейками.
- 5) Выполняется пересылка данных между процессорами о мультипольном и локальном влиянии всех ячеек уровней  $l_2, \dots, l_{max}$  на расчетные точки. Программная реализация предложенного параллельного алгоритма выполнена на языке программирования C++.

Выполним оценку количества операций и пересылок разработанного параллельного алгоритма. Для  $\log_{2^n}(N)$  уровней разбиения, суммарное количество операций для каждого процессора равно

$$(3^n(2^n - 1)Np^n \log_{2^n}(N) + 3^n N) s^{-1},$$

где  $s$  – количество узлов вычислительной системы. Для каждого узла количество пересылок составляет порядка  $N(1 - s^{-1})$ .

Время выполнения разработанного параллельного мультипольного алгоритма состоит из времени расчета и времени передачи данных:

$$T_s \approx T_1 s^{-1} + N(1 - s^{-1})t_{comm},$$

где  $t_{comm}$  – среднее время выполнения одной пересылки. Тогда, с учетом (8.2),

оценка ускорения алгоритма имеет вид

$$S_s \equiv \frac{T_1}{T_s} = \frac{s}{1 + \frac{(s-1)t_{comm}}{3^n(2^n-1)Np^n \log_{2^n}(N)}}.$$

Таким образом,  $S_s \rightarrow s$ ,  $E_s = \frac{S_s}{s} \rightarrow 1$  при  $N \rightarrow \infty$ , т.е. асимптотическая эффективность алгоритма равна 1.

## **§9 Комплекс программ компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов с использованием мультипольного подхода**

**9.1 Описание комплекса программ.** Комплекс программ компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов с использованием мультипольного подхода реализован на языке программирования C++ на основе последовательных и параллельных мультипольных алгоритмов, предложенных в §8. Основу комплекса составляют вычислительные модули MFPS (Multipole Fractional Poisson Solver) и MFHS (Multipole Fractional Helmholtz Solver), предназначенные для численного исследования математических моделей, описываемых дробно-дифференциальными обобщениями уравнений Пуассона (3.1) и Гельмгольца (3.2), (3.3). Для этих вычислительных модулей получены два свидетельства о регистрации программ на ЭВМ [128], [129].

Использование языка программирования C++ позволило добиться высокой производительности разработанного комплекса программ при решении трудоемких с вычислительной точки зрения модельных задач. Высокая производительность обеспечивается также возможностью распараллеливания вычислений с использованием интерфейсов OpenMP и MPI. Таким образом, комплекс программ предназначен для современных многоядерных вычислительных систем и вычислительных кластеров.

Разработанный комплекс программ имеет структуру, представленную на рисунке 9.1. Содержащиеся в нем вычислительные модули MFPS и MFHS

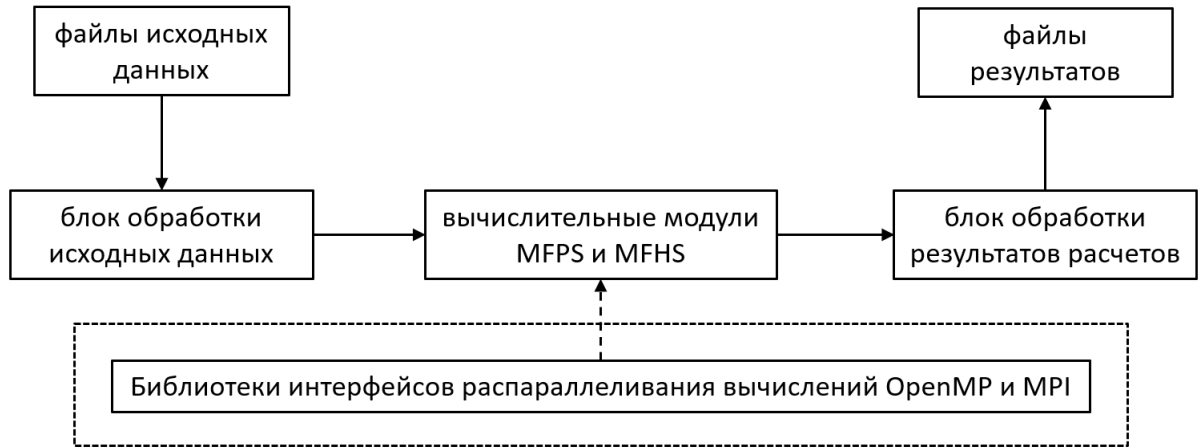


Рисунок 9.1: Структура комплекса программ

имеют схожую друг с другом структуру, схематично показанную на рисунке 9.2.

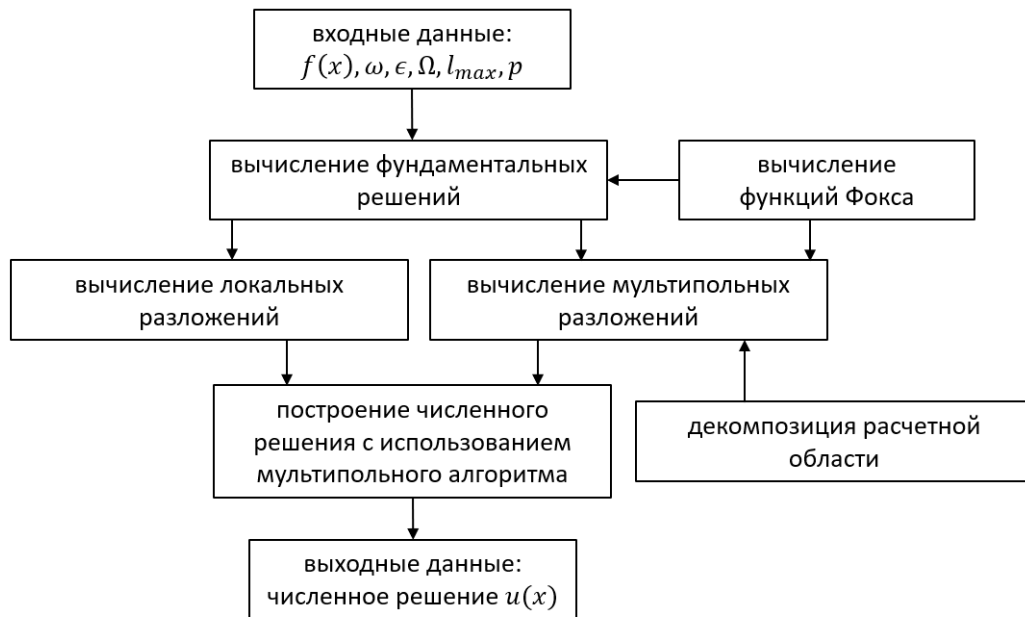


Рисунок 9.2: Структура вычислительного модуля

Вычислительный модуль MFPS предназначен для численного исследования дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона (3.1) с дробной степенью оператора Лапласа порядка  $\alpha \in (1, 2)$  и позволяет выполнять построение численного решения этого уравнения с использованием мультипольного алгоритма, предложенного в §8, а также с использованием кубатурной формулы вида (6.0). Распараллеливание вычислений в MFPS обес-

печивается многопоточным вычислением конечных сумм в мультипольных разложениях с использованием интерфейса OpenMP, а также использованием принципа геометрического параллелизма при реализации иерархической структуры разработанного мультипольного алгоритма с помощью интерфейса MPI. Пользователь имеет возможность задавать правую часть решаемого уравнения (как в аналитическом виде, так и в формате поля значений), размеры расчетной области, размерность равномерной пространственной сетки, а также такие параметры мультипольного алгоритма, как количество уровней иерархической структуры алгоритма и количество членов ряда в мультипольном разложении фундаментального решения рассматриваемого уравнения.

Вычислительный модуль MFHS предназначен для численного исследования дробно-дифференциальных обобщений уравнения Гельмгольца (3.2), (3.3) с дробной степенью оператора Лапласа порядка  $\alpha \in (1, 2)$  и позволяют выполнять построение численных решений этого уравнения с использованием мультипольных алгоритмов, предложенных в §8, а также с использованием кубатурных формул вида (6.0). Помимо особенностей, аналогичных модулю MFPS, данный модуль содержит вычислительный блок нахождения значений функций Фокса  $H_{1,3}^{2,1}(z)$  и  $H_{2,4}^{2,1}(z)$  из фундаментальных решений (3.40), (3.21) и их мультипольных разложений (6.44), (6.33), соответственно. Пользователь при этом имеет возможность задавать количество вычисляемых членов ряда в прямых и асимптотических разложениях этих функций, а также точку их стыковки.

**9.2 Построение тестовых примеров для верификации программного комплекса.** Для отладки и тестирования представленного комплекса программ, включающего разработанные последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы, требуются точные частные решения рассматриваемых моделей. В силу того, что предложенные алгоритмы разработаны для моделей в двумерном пространстве, частные решения тоже будут искаться в  $\mathbb{R}^2$ .

*Точные решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона*

Рассмотрим дробно-дифференциальное обобщение уравнения Пуассона

(3.1) в  $\mathbb{R}^2$ :

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u = f(x, y), \quad \alpha \in (1, 2), \quad u = u(x, y). \quad (9.1)$$

В соответствии с (3.16), решение уравнения (9.1) может быть записано как

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) G_{\alpha, 2}^P(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (9.2)$$

где

$$G_{\alpha, 2}^P(x, y) \equiv G_{\alpha, 2}^P(r) = C_{\alpha, 2}^P r^{\alpha-2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad C_{\alpha, 2}^P = \frac{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})}{2^{\alpha} \pi \Gamma(\frac{\alpha}{2})}.$$

Выполнив замену переменных

$$\xi = \rho \cos \gamma, \quad \eta = \rho \sin \gamma$$

в (9.2), получим

$$u(r) = 2C_{\alpha, 2}^P \int_0^{\infty} \rho f(\rho) \left( \int_0^{\pi} (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma)^{\alpha/2-1} d\gamma \right) d\rho. \quad (9.3)$$

Правая часть (9.3) может быть проинтегрирована по  $\gamma$ , что приводит к

$$u(r) = 2C_{\alpha, 2}^P \pi \int_0^r \rho f(\rho) (r^2 - \rho^2)^{\alpha/2-1} P_{-\alpha/2}^0 \left( \frac{r^2 + \rho^2}{r^2 - \rho^2} \right) d\rho + \\ + 2C_{\alpha, 2}^P \pi \int_r^{\infty} \rho f(\rho) (-r^2 + \rho^2)^{\alpha/2-1} P_{-\alpha/2}^0 \left( \frac{r^2 + \rho^2}{-r^2 + \rho^2} \right) d\rho, \quad (9.4)$$

где  $P_{\mu}^{\nu}(z)$  – функция Лежандра, которая может быть представлена через гипергеометрическую функцию Гаусса [137]:

$$P_{\mu}^{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \mu)} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} {}_2F_1 \left( -\nu, \nu + 1; 1 - \mu; \frac{1-z}{2} \right).$$

Используя свойства гипергеометрических функций (см. 7.3.1 из [137]), урав-

нение (9.4) может быть представлено в виде

$$u(r) = 2C_{\alpha,2}^P \pi r^{\alpha-2} \int_0^r \rho f(\rho) {}_2F_1 \left( 1 - \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}; 1; \frac{\rho^2}{r^2} \right) d\rho + \\ + 2C_{\alpha,2}^P \pi \int_r^\infty \rho^{\alpha-1} f(\rho) {}_2F_1 \left( 1 - \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}; 1; \frac{r^2}{\rho^2} \right) d\rho. \quad (9.5)$$

Когда правая часть уравнения (9.1) представляет собой степенную функцию  $f(r) = r^{2\gamma}$ ,  $-1 < \gamma < -\alpha/2$ , в соответствии с 2.21.1.3 из [137] представление (9.5) дает частное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона:

$$u(r) = 2^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(-\frac{\alpha}{2}-\gamma)}{\Gamma(-\gamma)\Gamma(\frac{\alpha}{2}+\gamma+1)} r^{\alpha+2\gamma}. \quad (9.6)$$

Рассмотрим теперь дробно-дифференциальное уравнение Пуассона (3.1) при  $\alpha = 1$ ,  $f(\mathbf{x}) = e^{-p|\mathbf{x}|^2}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,  $p > 0$ . Для построения решения в этом случае может быть использовано преобразование Фурье. Применение прямого и обратного преобразований Фурье к (3.1) приводит к интегральному представлению решения:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi p} \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{\tau}|^{-1} e^{-\frac{|\boldsymbol{\tau}|^2}{4p}} e^{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\tau}. \quad (9.7)$$

Так как  $|\boldsymbol{\tau}|^{-1} e^{-\frac{|\boldsymbol{\tau}|^2}{4p}}$  является радиальной функцией, то можно использовать свойство преобразования Фурье (3.24), что приводит к представлению

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2p} \int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{4p}} J_0(k|\mathbf{x}|) dk. \quad (9.8)$$

В соответствии с [146] (см. 2.12.9.1), интеграл в правой части (9.8) может быть явно вычислен, что дает частное решение уравнения (3.1)

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} e^{-\frac{p|\mathbf{x}|^2}{2}} I_0 \left( \frac{p|\mathbf{x}|^2}{2} \right), \quad (9.9)$$

где  $I_0(z)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода [141].

**Точное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца**

Рассмотрим теперь дробно-дифференциальное обобщение модифицированного уравнения Гельмгольца (3.3) в  $\mathbb{R}^2$  с экспоненциальной правой частью вида

$$-(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u - \omega^2 u = ce^{-p|\mathbf{x}|^2}, \quad c = \text{const}, \quad p = \text{const}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (9.10)$$

Для построения решения этого уравнения, как и в предыдущем разделе, воспользуемся преобразованием Фурье. Подействовав прямым, а затем обратным преобразованием Фурье на (9.10), получим

$$u(\mathbf{x}) = \frac{c}{4p\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{|\boldsymbol{\tau}|^2}{4p}}}{|\boldsymbol{\tau}| + \omega^2} e^{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\tau}. \quad (9.11)$$

В силу того, что  $\frac{e^{-\frac{|\boldsymbol{\tau}|^2}{4p}}}{|\boldsymbol{\tau}| + \omega^2}$  является радиальной функцией, воспользуемся свойством (3.24), что приводит к

$$u(\mathbf{x}) = \frac{c}{2p} \int_0^{\infty} \frac{k}{k + \omega^2} e^{-\frac{k^2}{4p}} J_0(k|\mathbf{x}|) dk. \quad (9.12)$$

Функция Бесселя  $J_0(z)$  может быть разложена в степенной ряд (см., например, [98]), и тогда (9.12) представляется в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{c}{2p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!} \left( \frac{|\mathbf{x}|^2}{4} \right)^n \int_0^{\infty} \frac{k^{2n+1}}{k + \omega^2} e^{-\frac{k^2}{4p}} dk. \quad (9.13)$$

Вычислив интеграл в правой части (9.13), получим решение вида

$$u(\mathbf{x}) = \frac{c}{\pi\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!} G_{2,3}^{3,2} \left[ \frac{\omega^2}{4p} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1 \\ n+1, 1, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right] (p|\mathbf{x}|^2)^n, \quad (9.14)$$

где  $G_{2,3}^{3,2}(z)$  – функция Мейера [137].



**Решение задачи Коши для однородного дробно-дифференциального уравнения фильтрации**

Рассмотрим задачу Коши для дробно-дифференциального уравнения фильтрации (1.9) в  $\mathbb{R}^2$  при  $\alpha = 1$ :

$$u_t + a^2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u = 0, \quad (9.15)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}). \quad (9.16)$$

Положим  $f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ . Тогда, под действием преобразования Фурье по пространственной переменной  $\mathbf{x}$  система (9.15), (9.16) принимает вид задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\hat{u}_t(\boldsymbol{\xi}, t) = -a^2|\boldsymbol{\xi}|\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (9.17)$$

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, 0) = 1. \quad (9.18)$$

Решение (9.17), (9.18) записывается как

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = e^{-a^2t|\boldsymbol{\xi}|}. \quad (9.19)$$

Подействовав на (9.19) обратным преобразованием Фурье, получим

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{a^2t}{2\pi(|\mathbf{x}|^2 + a^4t^2)^{3/2}}.$$

Решение задачи Коши (9.15), (9.16) для произвольной правой части  $f(\mathbf{x})$  может быть записано в виде свертки

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{a^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{tf(\boldsymbol{\xi})}{(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2 + a^4t^2)^{3/2}} d\boldsymbol{\xi}. \quad (9.20)$$

При  $f(\mathbf{x}) = e^{-c|\mathbf{x}|^2}$ ,  $c = \text{const}$  интеграл в правой части (9.20) может быть вычислен аналитически в точке  $\mathbf{x} = 0$ , и тогда решение рассматриваемой задачи Коши в этой точке представляется как

$$u(0, t) = 1 - a^2t\sqrt{\pi c}e^{ca^4t^2} \operatorname{erfc}(a^2t\sqrt{c}), \quad (9.21)$$

где  $erfc(z)$  – дополнительный интеграл вероятности [137].

## §10 Результаты тестовых расчетов

Данный раздел посвящен демонстрации эффективности использования разработанных последовательного и параллельных мультипольных алгоритмов на примере нахождения численных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона (3.1) и Гельмгольца (3.3), а также задачи Коши (9.15), (9.16). Помимо этого, мультипольный подход применяется к модельной задаче построения кривой восстановления давления для нелокальной модели однофазной фильтрации. Построенные в предыдущем параграфе точные частные решения рассматриваемых уравнений используются для отладки и тестирования выполненных программных реализаций.

### 10.1 Последовательный алгоритм

*Дробно-дифференциальное обобщение уравнения Пуассона*

Рассмотрим дробно-дифференциальное обобщение уравнения Пуассона (3.1) в  $\mathbb{R}^2$ . В п. 9.2 было построено его точное решение (9.9) при  $f(\mathbf{x}) = e^{-p|\mathbf{x}|^2}$  и  $\alpha = 1$ . С использованием кубатурной формулы (6.0) было найдено численное решение уравнения (3.1) при  $p = 5$ ,  $\alpha = 1$  в ограниченной прямоугольной области  $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$ . Графики полученных приближенных решений при различных значениях  $N$  квадратной  $N \times N$  сетки кубатурных узлов, а также график точного решения (9.9) представлены на рисунке 10.1. Видно, что максимальное значение абсолютной погрешности достигается в точке  $|\mathbf{x}| = 0$ , что объясняется тем, что в этой точке функции  $u(\mathbf{x})$  и  $f(\mathbf{x})$  достигают своего максимального значения.

На рисунке 10.2 в полулогарифмическом масштабе представлен график зависимости от  $N$  абсолютной погрешности

$$\Delta = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |\bar{u} - u_{dir}|, \quad (10.1)$$

даваемой рассматриваемой кубатурной формулой. Здесь  $\bar{u}$  – точное решение (9.9),  $u_{dir}$  – численное решение, построенное по формуле (6.0). Из графика

видно, что при больших  $N$  абсолютная погрешность экспоненциально стремится к нулю.

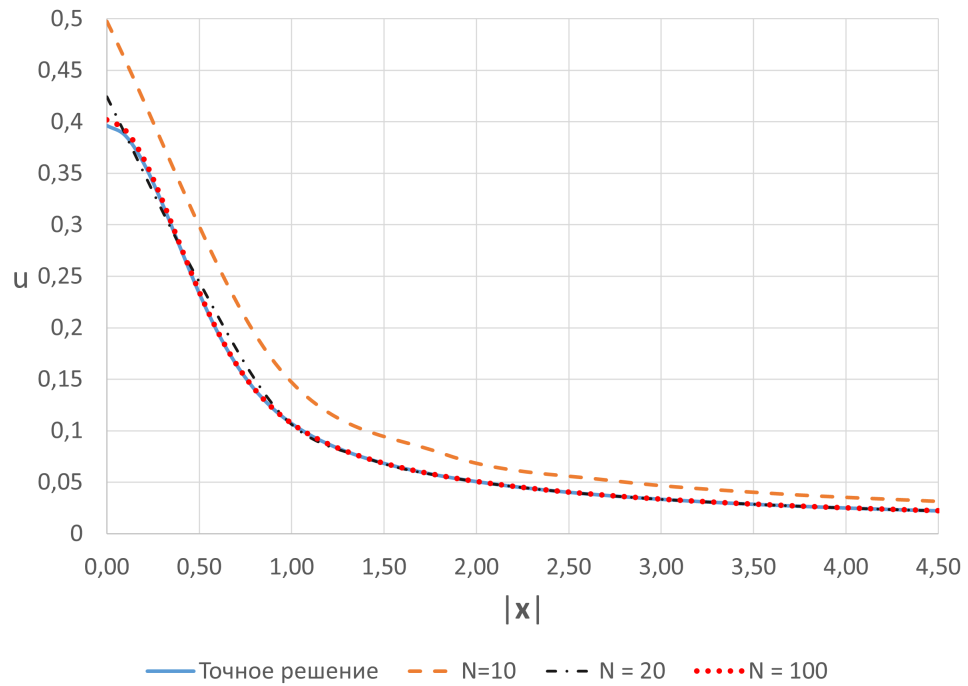


Рисунок 10.1: Сравнение численного решения уравнения (3.1), полученного с использованием кубатурной формулы (6.0), с точным аналитическим решением (9.9) при разных  $N$

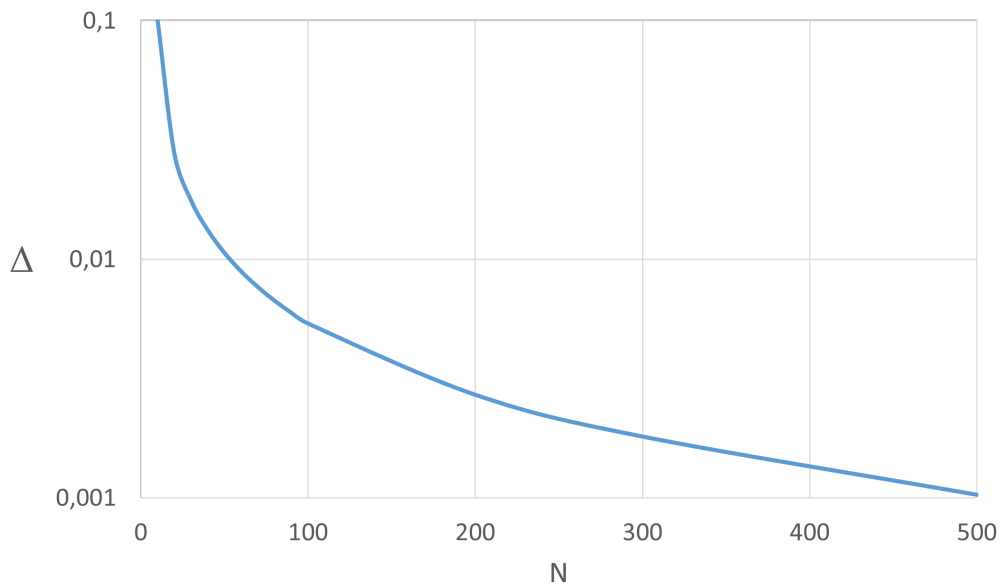


Рисунок 10.2: Зависимость абсолютной погрешности (10.1) от  $N$

Предложенный в п. 8.1 последовательный мультипольный алгоритм позволяет уменьшать количество арифметических операций при нахождении численных решений рассматриваемых уравнений по кубатурным формулам вида (6.0), что приводит к значительному уменьшению времени расчета. Для демонстрации этого был выполнен ряд вычислительных экспериментов по нахождению численного решения уравнения (3.1) с  $f(\mathbf{x}) = e^{-5|\mathbf{x}|^2}$  в ограниченной прямоугольной области  $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$  при  $\alpha = \sqrt{2}$ . В таблице 10.1 представлены результаты этих экспериментов. Здесь  $N$  – количество кубатурных узлов,  $l_{max}$  – максимальный уровень разбиения расчетной области в мультипольном алгоритме,  $p$  – количество членов ряда по  $n$  в мультипольном разложении (6.18),  $t_{dir}$  – время расчета по кубатуре вида (6.0),  $t_{mult}$  – время расчета последовательным мультипольным алгоритмом. Количество расчетных точек в данных экспериментах выбиралось равным количеству кубатурных узлов. Погрешность, порождаемая мультипольным алгоритмом, определялась как

$$\Delta_m = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |u_{dir} - u_{mult}|, \quad (10.2)$$

где  $u_{mult}$  – приближенное решение, полученное с использованием мультипольного алгоритма, а  $u_{dir}$  – приближенное решение, построенное по кубатурной формуле (6.0). Эффективность алгоритма оценивалась ускорением  $S = \frac{t_{dir}}{t_{mult}}$ , даваемым разработанным мультипольным алгоритмом.

Таблица 10.1: Результаты вычислительных экспериментов последовательного мультипольного алгоритма решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона

$N$	$l_{max}$	$p$	$t_{dir}, c$	$t_{mult}, c$	$\Delta_m$	$S$
100	3	4	0.005	0.011	$3.98 \cdot 10^{-4}$	0.454
400	4	4	0.026	0.015	$3.82 \cdot 10^{-4}$	1.733
2500	5	4	0.852	0.151	$2.02 \cdot 10^{-4}$	5.642
10000	6	4	11.13	0.672	$2.01 \cdot 10^{-4}$	16.57
40000	7	4	171.1	3.243	$1.52 \cdot 10^{-4}$	52.76
160000	7	4	2705	15.75	$2.15 \cdot 10^{-4}$	171.7
250000	8	4	6730	25.71	$1.95 \cdot 10^{-4}$	261.8

Из таблицы 10.1 видно, что погрешность мультипольного метода имеет одинаковый порядок при разном количестве кубатурных узлов. На эту по-

грешность влияет параметр  $p$ , равный количеству вычисляемых членов ряда по  $n$  в мультипольном разложении. Увеличение этого параметра приводит к уменьшению погрешности  $\Delta_m$ , что продемонстрировано на рисунке 10.3 при  $N = 10000$ . Заметим, что при больших  $\alpha$  требуется меньшее значение  $p$  для достижения заданного уровня точности.

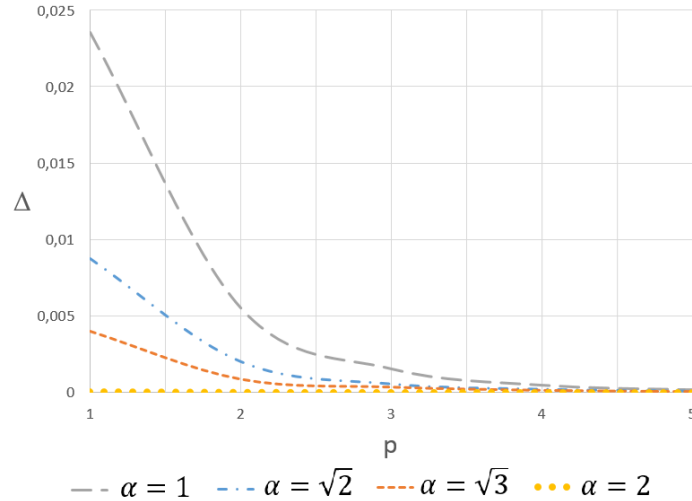


Рисунок 10.3: Зависимость погрешности (10.2) от параметра  $p$  при  $N = 10000$  и разных  $\alpha$

На рисунке 10.4 представлен график зависимости ускорения  $S$  от количества кубатурных узлов  $N$ . Видно, что при малых  $N$  вычисление с использованием кубатурных формул является более эффективным, но с ростом  $N$  ускорение  $S$ , даваемое мультипольным алгоритмом значительно возрастает. Таким образом, разработанный мультипольный алгоритм является наиболее эффективным в практически значимых задачах большой размерности.

#### *Дробно-дифференциальное обобщение уравнения Гельмгольца*

Рассмотрим теперь дробно-дифференциальное обобщение модифицированного уравнения Гельмгольца (3.3). Вычислительные эксперименты для этого уравнения проводились при  $f(\mathbf{x}) = e^{-|\mathbf{x}|^2}$  в ограниченной прямоугольной области  $\Omega \in [-5, 5] \times [-5, 5]$ .

На рисунке 10.5 представлено численное решение уравнения (3.3) при разных значениях  $\alpha$ . Нетрудно заметить, что для данного решения существует точка, являющаяся инвариантной относительно значения параметра  $\alpha$ . Более того, после прохождения этой точки меняется характер влияния дробного параметра на интенсивность решения.

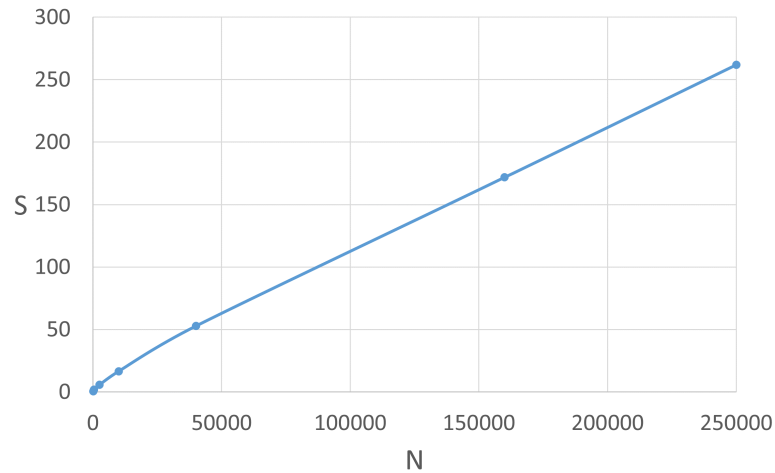


Рисунок 10.4: Ускорение, даваемое мультипольным алгоритмом при численном решении дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона

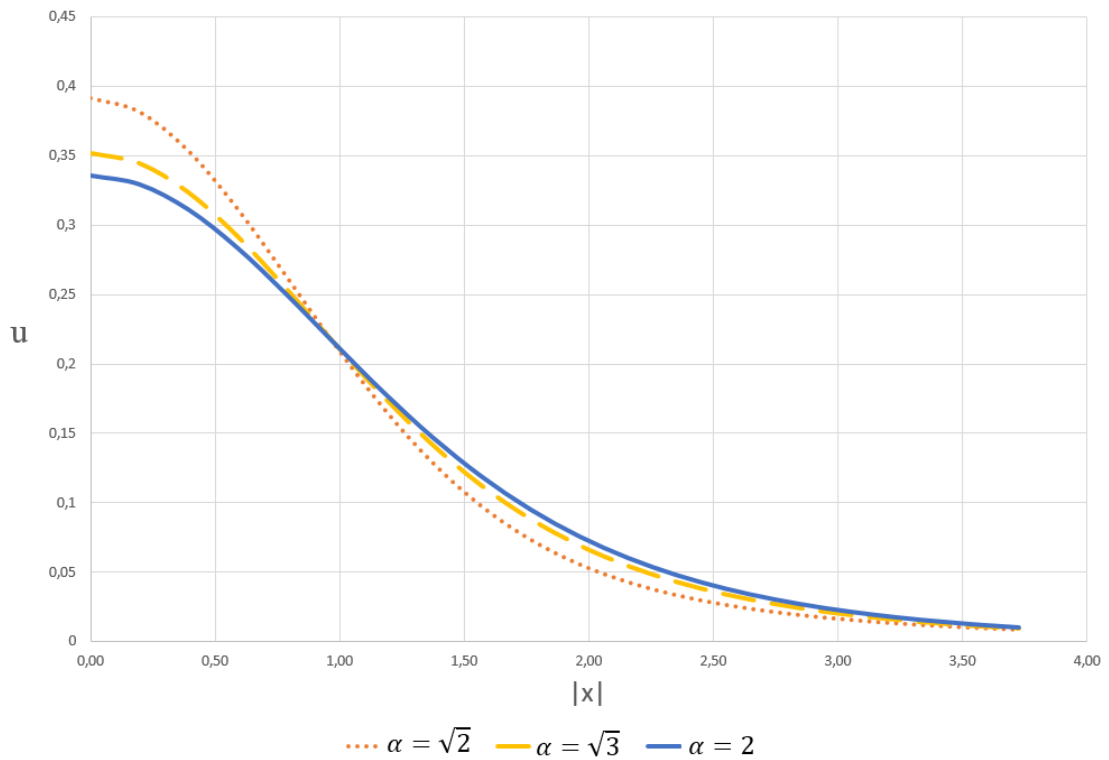


Рисунок 10.5: Численное решение уравнения (3.3), полученное с использованием кубатурной формулы (6.0)

При  $\alpha = 1$ ,  $\omega = 1$  было выполнено сравнение (см. рисунок 10.6) численного решения, вычисленного по кубатурной формуле (6.0), с точным решением (9.14), построенным в п. 9.2. На рисунке 10.7 продемонстрирована зависимость погрешности, порождаемой кубатурной формулой, от количества ее узлов  $N$ .

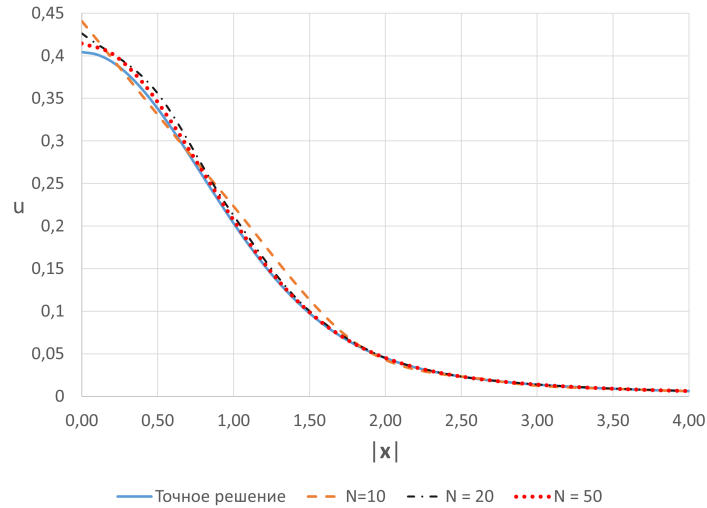


Рисунок 10.6: Сравнение численного решения уравнения (3.3), полученного с использованием кубатурной формулы (6.0), с точным аналитическим решением (9.14) при разных  $N$

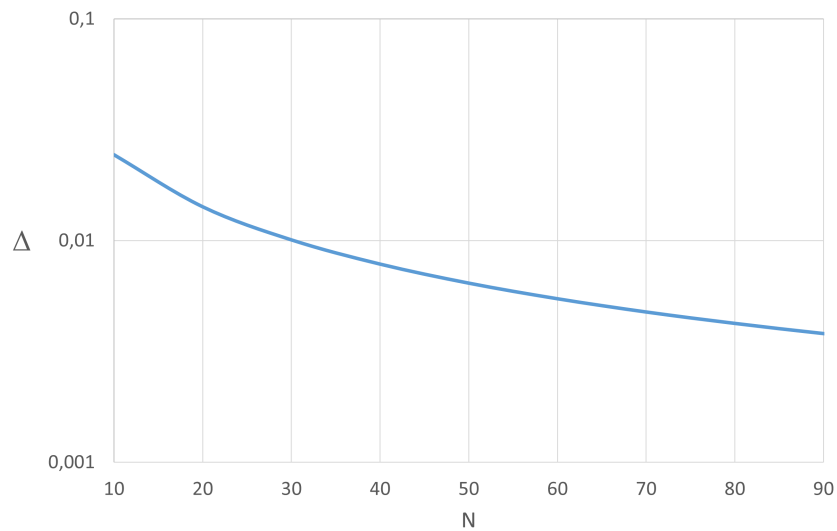


Рисунок 10.7: Зависимость абсолютной погрешности (10.1) от  $N$

Результаты вычислительных экспериментов при  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $\omega = 1$  представлены в таблице 10.2. Здесь  $N$  – количество кубатурных узлов и расчетных точек,  $l_{max}$  – максимальный уровень иерархической структуры мультипольного алгоритма,  $p$  – количество членов ряда по  $n$  в мультипольном разложении (6.44),  $t_{dir}$  – время расчета по кубатурной формуле (6.0),  $t_{mult}$  – время расчета последовательным мультипольным алгоритмом,  $S = \frac{t_{dir}}{t_{mult}}$  – ускорение, даваемое рассматриваемым алгоритмом. Для вычисления значений функций Фокса использовался алгоритм, предложенный в п. 7.1. Нетрудно заметить,

что, как и в случае дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона, применение мультипольного алгоритма не является эффективным при малых  $N$ .

Таблица 10.2: Результаты вычислительных экспериментов последовательного мультипольного алгоритма решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца

$N$	$l_{max}$	$p$	$t_{dir}, c$	$t_{mult}, c$	$\Delta_m$	$S$
100	3	15	0.065	0.119	$3.82 \cdot 10^{-4}$	0.546
400	3	15	0.849	1.182	$3.82 \cdot 10^{-4}$	0.718
900	4	15	3.899	3.478	$3.82 \cdot 10^{-4}$	1.121
2500	4	15	28.34	12.25	$3.82 \cdot 10^{-4}$	2.313
4900	5	15	106.1	23.57	$3.82 \cdot 10^{-4}$	4.497
10000	5	15	434.5	47.93	$3.82 \cdot 10^{-4}$	9.065
20000	6	15	1658	93.52	$3.82 \cdot 10^{-4}$	17.73

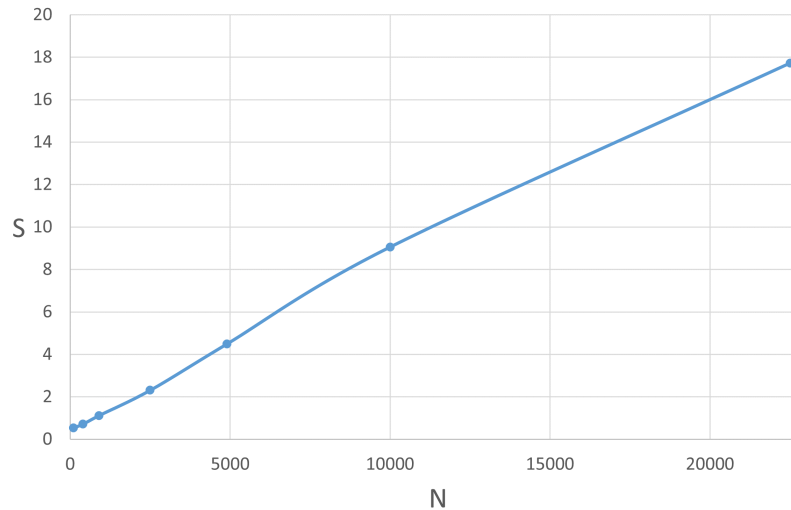


Рисунок 10.8: Ускорение, даваемое мультипольным алгоритмом при численном решении дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца

На рисунке 10.8 приведен график зависимости ускорения  $S$  от количества кубатурных узлов  $N$ . Видно, что для малого количества расчетных точек вычисление по кубатурной формуле вида (6.0) работает быстрее предложенного мультипольного алгоритма, однако при увеличении  $N$  наблюдается значительный рост ускорения  $S$ .

Таким образом, для дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона (3.1) и для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельм-



гольца (3.3) продемонстрирована высокая эффективность применения мультипольных методов, в особенности при большом количестве кубатурных узлов и расчетных точек.

**10.2 Параллельный алгоритм.** Для демонстрации возможностей разработанного параллельного алгоритма на языке программирования C++ была выполнена программная реализация предложенного в п. 8.2 алгоритма решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона (3.1) с использованием интерфейсов OpenMP и MPI. Отметим, что данная программа допускает использование интерфейсов OpenMP и MPI как вместе, так и независимо друг от друга.

Вычислительные эксперименты проводились для уравнения (3.1) в  $\mathbb{R}^2$  при  $\alpha = \sqrt{2}$  с правой частью вида  $f(\mathbf{x}) = e^{-5|\mathbf{x}|^2}$  в ограниченной прямоугольной области  $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$ .

Рассмотрим сначала результаты вычислительных экспериментов параллельного OpenMP алгоритма, представленные в таблице 10.3. Данные расчеты проводились на шестиядерном процессоре Intel Xeon CPU E5-1650. Здесь  $N$  – количество кубатурных узлов и расчетных точек в рассматриваемой задаче,  $l_{max}$  – количество уровней иерархической структуры в мультипольном алгоритме,  $t_{mult}$  – время расчета последовательным мультипольным алгоритмом,  $t_{mult}^{omp}$  – время расчета параллельной OpenMP версией этого алгоритма. Ускорение параллельного алгоритма оценивалось параметром  $S = \frac{t_{mult}}{t_{mult}^{omp}}$ . Нетрудно заметить, что ускорение нелинейно зависит от размерности задачи и наибольшее ускорение, даваемое параллельной OpenMP версией, достигается при достаточно больших значениях параметра  $N$ . Также наблюдается немонотонная зависимость  $S$  от максимального уровня иерархической структуры мультипольного алгоритма  $l_{max}$ .

Теперь рассмотрим параллельную MPI версию предложенного мультипольного алгоритма. Расчеты выполнялись при таких же численных параметрах, как и в OpenMP алгоритме. Количество кубатурных узлов и расчетных точек было выбрано  $N = 10^6$ . Результаты вычислительных экспериментов, которые проводились на вычислительном кластере Уфимского государственного авиационного технического университета, представлены в таблице 10.4.

Таблица 10.3: Результаты вычислительных экспериментов параллельного OpenMP алгоритма

N	$l_{max}$	$t_{mult}, c$	$t_{mult}^{omp}, c$	S
2500	4	0.173	0.072	2.402
	5	0.151	0.069	2.188
	6	0.187	0.081	2.308
10000	5	0.913	0.313	2.916
	6	0.672	0.273	2.461
	7	0.954	0.296	3.222
40000	6	3.791	1.015	3.734
	7	3.241	0.941	3.446
	8	3.895	1.184	3.289
250000	7	31.47	7.287	4.318
	8	25.71	5.843	4.399
	9	27.92	6.142	4.545

Здесь  $n_p$  – количество узлов МВС,  $t_n^{mpi}$  – время расчета параллельным MPI алгоритмом при  $n$  узлах. Ускорение вычислялось как  $S_n = \frac{t_1^{mpi}}{t_n^{mpi}}$ , а эффективность –  $E = \frac{S_n}{n_p}$ . Видно, что с ростом количества узлов МВС наблюдается рост ускорения, однако эффективность при этом падает в силу особенностей декомпозиции расчетной области и увеличения числа пересылок между процессорами. График зависимости полученного ускорения от количества узлов МВС представлен на рисунке 10.9.

Таблица 10.4: Результаты вычислительных экспериментов параллельного MPI алгоритма

$n_p$	1	2	4	8	16	32	64	128
$t_n^{mpi}, c$	1270.061	638.233	330.741	170.105	88.886	50.107	35.445	24.384
$S_n$	1	1.989	3.840	7.466	14.288	25.346	35.831	52.084
$E_n$	1	0.994	0.960	0.933	0.890	0.792	0.559	0.406

Таким образом, была продемонстрирована эффективность использования разработанного гибридного параллельного мультипольного алгоритма на примере построения численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона (3.1). Результаты вычислительных экспериментов для параллельных алгоритмов решения дробно-дифференциальных обобщений уравнений Гельмгольца (3.2) и (3.3) не представлены в диссертации в силу того, что структурно эти алгоритмы идентичны рассмотренному, а от-

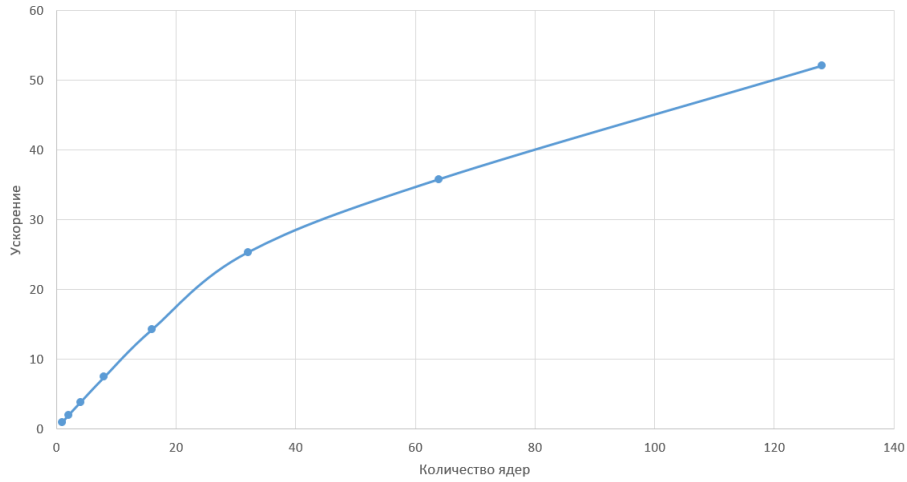


Рисунок 10.9: График ускорения, даваемого MPI алгоритмом

личаются лишь вычислением конечных сумм в мультипольных разложениях, которое реализуется тривиально.

**10.3 Дробно-дифференциальная модель однофазной фильтрации.** В предыдущих разделах демонстрировалась применимость мультипольного подхода для построения численных решения стационарных дробно-дифференциальных аналогов уравнений эллиптического типа. Рассмотрим теперь нестационарный процесс нелокальной однофазной фильтрации, описываемый моделью (1.9) при отсутствии объемных источников:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} p = 0, \quad \alpha \in [1, 2], \quad p = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (10.3)$$

В качестве начального условия для модели (10.3) примем заданное распределение давления в начальный момент времени вида

$$p(\mathbf{x}, 0) = e^{-100|\mathbf{x}|^2}. \quad (10.4)$$

Как было показано в 1.2, модель (10.3) может быть численно решена посредством дискретизации по временной переменной, что приводит к необходимости решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца на каждом временном шаге:

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} p(t_{k+1}) + \frac{1}{\Delta t_k} p(t_{k+1}) = \frac{p(t_k)}{\Delta t_k}. \quad (10.5)$$

Для задачи Коши (10.3), (10.4) в п. 9.2 было построено точное решение при  $\alpha = 1$  в точке  $|\mathbf{x}| = 0$ , которое имеет вид

$$u(0, t) = 1 - 10t\sqrt{\pi}e^{100t^2} \operatorname{erfc}(10t). \quad (10.6)$$

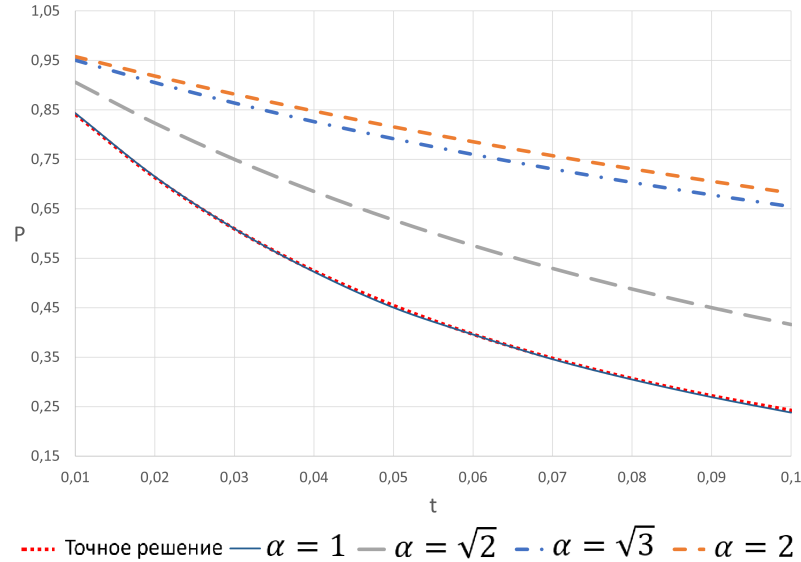


Рисунок 10.10: Эволюция давления в точке  $|\mathbf{x}| = 0$

Вычислительные эксперименты проводились для квадратной расчетной области  $\Omega \in [-15, 15] \times [-15, 15]$ . Для решения уравнения (10.5) применялся параллельный мультипольный алгоритм, разработанный в п. 8.2. На рисунке 10.10 представлены графики эволюции давления в точке  $|\mathbf{x}| = 0$  при разных значениях параметра  $\alpha$ . Видно, что давление уменьшается с течением времени, причем с уменьшением  $\alpha$  интенсивность этого процесса возрастает, что характеризует супердиффузионный режим фильтрации, описываемый моделью (10.3). При этом нетрудно заметить, что при  $\alpha = 1$  численное решение совпадает с точным аналитическим (10.6).

**10.4 Расчет кривой восстановления давления для нелокальной модели однофазной фильтрации.** Рассмотрим нелокальную модель однофазной фильтрации с дробной степенью оператора Лапласа (1.9), предложенную в п. 1.2. Решим задачу расчета кривой восстановления давления (КВД) на контуре добывающей скважины для такой модели в системе пяти скважин. В качестве начального распределения давления выберем поле давлений, которое является решением стационарной задачи нелокальной филь-

трации, рассмотренной в п. 4.2, 4.4, и соответствует предельному режиму установившегося фильтрационного течения. Кривая восстановления давления в этом случае продемонстрирует характер изменения давления на контуре добывающей скважины при отсутствии объемных источников.

Рассматриваемая модель описывается задачей Коши вида

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = -\kappa_\alpha (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{p}, \quad (10.7)$$

$$\bar{p}(0, \mathbf{x}) = p_c(\mathbf{x}, \alpha), \quad (10.8)$$

где  $p_c(\mathbf{x}, \alpha)$  – решение стационарной модели (4.8), (4.9).

Под действием преобразования Лапласа  $\bar{p}^*(s, \mathbf{x}) \equiv \mathcal{L}[\bar{p}(t, \mathbf{x})](s, \mathbf{x})$ , система (10.7), (10.8) принимает вид дробно-дифференциального обобщения неоднородного уравнения Гельмгольца

$$s\bar{p}^* + \kappa_\alpha (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{p}^* = p_c(\mathbf{x}, \alpha). \quad (10.9)$$

Для построения численного решения уравнения (10.9) применялся параллельный мультипольный алгоритм, разработанный в п. 8.2. По аналогии с процедурой, представленной в п. 4.4, для разных  $\alpha$  были получены выражения для определения давлений в пространстве изображений на контуре добывающей скважины:

$$\bar{p}^*(s, \mathbf{x}) \Big|_{|\mathbf{x}|=r_d, \alpha=\sqrt{2}} = -136.232s^{-0.057}, \quad (10.10)$$

$$\bar{p}^*(s, \mathbf{x}) \Big|_{|\mathbf{x}|=r_d, \alpha=\sqrt{3}} = -148.064s^{-0.101}, \quad (10.11)$$

$$\bar{p}^*(s, \mathbf{x}) \Big|_{|\mathbf{x}|=r_d, \alpha=2} = -161.615s^{-0.124}, \quad (10.12)$$

где  $r_d$  – радиус добывающей скважины.

Поддействовав обратным преобразованием Лапласа на (10.10), (10.11) и (10.12), получим выражения для определения значений давления на контуре скважины в любой момент времени  $t$ :

$$\bar{p}(t, \mathbf{x}) \Big|_{|\mathbf{x}|=r_d, \alpha=\sqrt{2}} = -8.004t^{-0.943}, \quad (10.13)$$

$$\bar{p}(t, \mathbf{x}) \Big|_{|\mathbf{x}|=r_d, \alpha=\sqrt{3}} = -15.72t^{-0.899}, \quad (10.14)$$

$$\bar{p}(t, \mathbf{x})|_{|\mathbf{x}|=r_d, \alpha=2} = -21.27t^{-0.876}. \quad (10.15)$$

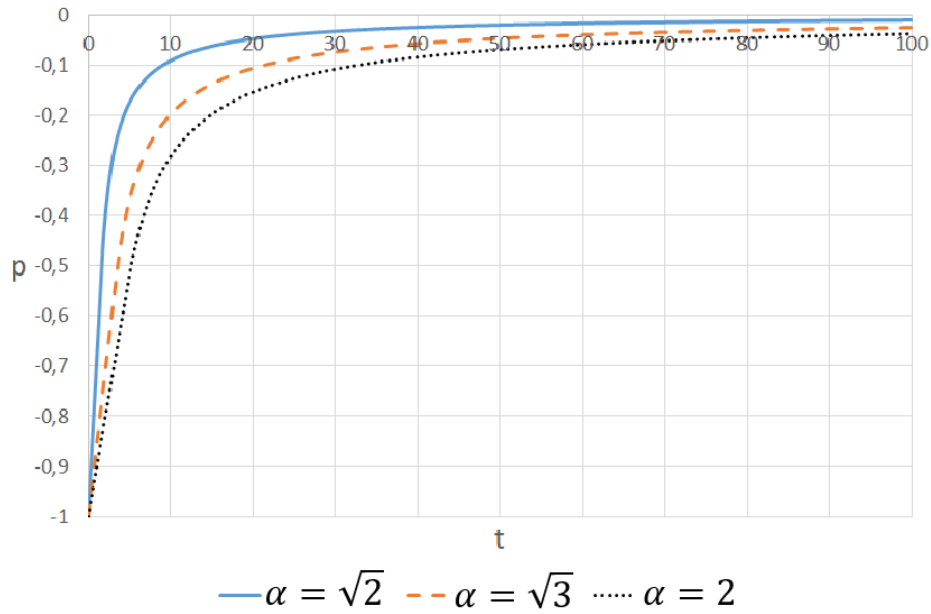


Рисунок 10.11: Эволюция давления на контуре добывающей скважины

На рисунке 10.11 представлены графики КВД при разных значениях  $\alpha$ . Видно, что с уменьшением  $\alpha$  увеличивается скорость восстановления давления в добывающей скважине, что соответствует супердиффузионному режиму фильтрации. Полученные результаты могут быть использованы для идентификации параметров модели  $\alpha$  и  $\varkappa_\alpha$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационного исследования сводятся к следующему.

1. Установлено, что нестационарные ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа обладают автомодельными решениями и решениями типа бегущих волн, построены примеры таких решений. Доказана справедливость постановки условия излучения Зоммерфельда для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца.

2. Доказаны утверждения о виде фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^n$ .

3. Разработаны алгоритмы компьютерного моделирования процессов диффузионного и волнового типов в средах с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников. Выполнены их программные реализации на языке программирования C++, с использованием которых решены задачи моделирования однофазной фильтрации с системой скважин и рассеяния волн на непроницаемом объекте. Показано, что в задаче фильтрации при неизменных давлениях и массовых расходах на скважинах уменьшение дробного показателя  $\alpha$  приводит к более быстрому выходу на стационарный режим. Для задачи рассеяния установлено, что изменение  $\alpha$  оказывает влияние на волновой процесс только в ближней зоне источника возмущения.

4. Предложен алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса. С его использованием выполнена факторизация и построены мультипольные разложения фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца. Предложены способы вычисления значений функций Фокса из соответствующих фундаментальных решений и их мультипольных разложений.

5. Разработаны последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы численного решения ЛДДМ с дробной степенью оператора Лапласа. Проведены оценки количества вычислительных операций последовательных

алгоритмов и эффективности параллельных алгоритмов. Выполнены программные реализации этих алгоритмов на языке программирования C++ с использованием стандартов OpenMP и MPI.

6. Построен ряд точных частных решений рассматриваемых ЛДДМ для верификации разработанных алгоритмов. Проведена серия вычислительных экспериментов, показывающая применимость и эффективность этих алгоритмов для построения численных решений многомерных ЛДДМ. Показано, что использование параллельного мультипольного алгоритма позволяет на 4 порядка сократить время расчета по сравнению с классическими алгоритмами при количестве расчетных узлов  $\sim 10^6$ . Решена модельная задача построения кривой восстановления давления на контуре добывающей скважины для ЛДДМ однофазной фильтрации, результаты которой могут быть использованы для идентификации параметров модели.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д. ф.-м. н., доценту Лукацуку С. Ю. за постановки задач, внимание и всестороннюю поддержку в процессе работы над диссертацией.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wyss, W. The fractional diffusion equation / W. Wyss // Journal of Mathematical Physics. — 1986. — Vol. 27, No. 11. — P. 2782–2785.
2. Schneider, W. R. Fractional diffusion and wave equations / W. R. Schneider, W. Wyss // Journal of Mathematical Physics. — 1989. — Vol. 30, No. 1. — P. 134–144.
3. Mainardi, F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena / F. Mainardi // Chaos, Solitons & Fractals. — 1996. — Vol. 7, No. 9. — P. 1461–1477.
4. Mainardi, F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation / F. Mainardi // Applied Mathematics Letters. — 1996. — Vol. 9, No. 6. — P. 23–28.
5. Luchko, Y. Fractional wave equation and damped waves / Y. Luchko // Journal of Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 54, No. 3. — P. 031505.
6. Metzler, R. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // Physics reports. — 2000. — Vol. 339, No. 1. — P. 1–77.
7. Caffarelli, L. A. Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure / L. A. Caffarelli, J. L. Vazquez // Archive for rational mechanics and analysis. — 2011. — Vol. 202. — P. 537–565.
8. Herrmann, R. Folded potentials in cluster physics: a comparison of Yukawa and Coulomb potentials with Riesz fractional integrals / R. Herrmann // Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical. — 2013. — Vol. 46, No. 40. — P. 405203.
9. Tarasov, V. E. Fractional power-law spatial dispersion in electrodynamics / V. E. Tarasov, J. J. Trujillo // Annals of Physics. — 2013. — Vol. 334. — P. 1–23.
10. Riewe, F. Mechanics with fractional derivatives / F. Riewe // Physical Review E. — 1997. — Vol. 55, No. 3. — P. 3581.
11. Laskin, N. Fractional quantum mechanics / N. Laskin // Physical Review E. — 2000. — Vol. 62, No. 3. — P. 3135.
12. Balescu, R. Aspects of anomalous transport in plasmas / R. Balescu. — Bristol : IOP Publishing, 2005. — 478 p.
13. Anomalous transport: foundations and applications / Ed. by R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov. — Berlin : Willey-VCH, 2008. — 608 p.
14. Tarasov, V. E. On history of mathematical economics: Application of fractional calculus / V. E. Tarasov // Mathematics. — 2019. — Vol. 7, No. 6. — P. 509.

15. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.
16. Kilbas, A. A. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 523 p.
17. Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 272 с.
18. Учайкин, В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск : Изд-во «Артишок», 2008. — 512 с.
19. Nigmatullin, R. R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry / R. R. Nigmatullin // Phys. stat. sol. (b). — 1986. — Vol. 133, No. 1. — P. 425–430.
20. Nigmatullin, R. R. Relationships between 1D and space fractals and fractional integrals and their applications in physics / R. R. Nigmatullin, D. Baleanu // Applications in Physics, Part A. — 2019. — P. 183–220.
21. Федоров, В. Е. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными / В. Е. Федоров, К. В. Бойко, Т. Д. Фуонг // Математические заметки СВФУ. — 2021. — Т. 28, № 3. — С. 85–104.
22. Pimenov, V. G. Numerical method for fractional advection-diffusion equation with heredity / V. G. Pimenov // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2018. — Vol. 230, No. 5.— P. 737-741.
23. Ibrahim, M. Crank-Nicolson scheme for two-dimensional in space fractional diffusion equations with functional delay /M. Ibrahim , V. G. Pimenov // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki. Udmurtskii Gosudarstvennyi Universitet. — 2021. — Vol. 57.— P. 128-141.
24. Ibrahim, M. Numerical method for system of space-fractional equations of superdiffusion type with delay and Neumann boundary conditions /M. Ibrahim , V. G. Pimenov // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki. Udmurtskii Gosudarstvennyi Universitet. — 2022. — Vol. 59.— P. 41-54.
25. Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.
26. Pskhu, A. V. Green function of the first boundary-value problem for the fractional diffusion-wave equation in a multidimensional rectangular domain / A. V. Pskhu // Journal of mathematical sciences. — 2022. — Vol. 260, No. 3. — P. 325–334.

27. Vabishchevich, P. N. Numerically solving an equation for fractional powers of elliptic operators / P. N. Vabishchevich // *Journal of Computational Physics*. — 2015. — Vol. 82. — P. 289–302.
28. Учайкин, В. В. Нелокальная (дробно-дифференциальная) модель переноса космических лучей в межзвёздной среде / В. В. Учайкин, А. Д. Ерылыкин, Р. Т. Сибатов // *УФН*. — 2023. — Т. 193, № 3. — С. 233–278.
29. Паровик, Р. И. Модель субдиффузии радона во фрактальной пористой среде / Р. И. Паровик // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-маф. науки*. — 2013. — Т. 2, № 7. — С. 46–51.
30. Tverdyi, D Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation / D. Tverdyi, R. Parovik // *Fractal and Fractional*. — 2021. — Vol. 6, No. 1. — P. 23.
31. Алиханов, А. А. Устойчивость и сходимостъ разностных схем для краевых задач уравнения диффузии дробного порядка / А. А. Алиханов // *ЖВММФ*. — 2016. — Т. 56, № 4. — С. 572–586.
32. Caffarelli, L. An extension problem related to the fractional Laplacian / L. Caffarelli, L. Silvestre // *Communications in Partial Differential Equations*. — 2007. — Vol. 32, No. 8. — P. 1245–1260.
33. Hilfer, R. Applications of fractional calculus in physics / R. Hilfer. — Singapore : World Scientific, 2000. — 470 p.
34. Gorenflo, R. Random walk models approximating symmetric space-fractional diffusion processes / R. Gorenflo, F. Mainardi // *Problems and Methods in Mathematical Physics : The Siegfried Prossdorf Memorial Volume Proceedings of the 11th TMP, Chemnitz, Germany, March 25–28, 1999*. — Basel : Birkhauser, 2001. — P. 120–145.
35. Ortigueira, M. D. Riesz potential operators and inverses via fractional centred derivatives / M. D. Ortigueira // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. — 2006. — Vol. 2006, No. 11. — P. 48391.
36. Fractional dynamics: recent advances / Ed. by J. Klafter, S. C. Lim, R. Metzler. — Singapore : World Scientific, 2011. — 532 p.
37. Herrmann, R. Fractional calculus: an introduction for physicists / R. Herrmann. — Singapore : World Scientific, 2011. — 276 p.
38. Vázquez, J. L. Classical solutions and higher regularity for nonlinear fractional diffusion equations / J. L. Vázquez, A. de Pablo, F. Quirós, A. Rodríguez. // *Journal of the European Mathematical Society*. — 2017. — Vol. 19, No. 7. — P. 1949–1975.
39. Riesz, M. Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green. C. R. Congr. internat. Math., Oslo. — 1936. — Vol. 2. — P. 62–63.

40. Riesz, M. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. *Acta Mathematica*. — 1949. — Vol. 81. — P. 1–223.
41. Frostman, O. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions Lund: Diss. 118 S, 1935.
42. Стейн, И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функции / И. М. Стейн. — Москва : Мир, 1973. — 342 с.
43. Лизоркин, П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций / П. И. Лизоркин // Труды Математического института имени В.А Стеклова. — 1969. — Т. 105, № 0. — С. 89–167.
44. Samko, S. G. Hypersingular integrals and their applications / S. G. Samko. — CRC Press, 2001. — 378 с.
45. Samko, S. G. A new approach to the inversion of the Riesz potential operator / S. G. Samko // *Fractional Calculus & Applied Analysis*. — 1998. — Vol. 1, No. 3. — P. 225–245.
46. Рубин, Б. С. Одномерное представление, обращение и некоторые свойства потенциалов Рисса от радиальных функций / Б. С. Рубин // Математические заметки. — 1983. — Т. 34, № 4. — С. 521–533.
47. Yamazaki, K. Remarks on the method of modulus of continuity and the modified dissipative porous media equation / K. Yamazaki // *Journal of Differential Equations*. — 2011. — Vol. 250, No. 4. — P. 1909–1923.
48. Aifantis, E. C. Fractional generalizations of gradient mechanics / E. C. Aifantis // *Handbook of Fractional Calculus with Applications*. — 2019. — Vol. 2. — P. 241–262.
49. Gómez-Aguilar, J. F. Modeling and simulation of the fractional space-time diffusion equation / J. F. Gómez-Aguilar, M. Miranda-Hernández, M. G. López-López, V. M. Alvarado-Martínez, D. Baleanu // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2015. — Vol. 30, No. 1-3. — P. 115–127.
50. Chen, H. Large solutions to elliptic equations involving fractional Laplacian / H. Chen, P. Felmer, A. Quaas // *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*. — 2015. — Vol. 32, No. 6. — P. 1199–1228.
51. Albinali, A. Anomalous diffusion approach and field application for fractured nano-porous reservoirs / A. Albinali, E. Ozkan // *Proceedings of the SPE-181255-MS Presented at SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. — UAE, Dubai. — 2016.

52. Raghavan, R. Nonlocal diffusion in fractured rocks. / R. Raghavan, C. Chen, J. J. DaCunha // SPE Reservoir evaluation & engineering. — 2017. — Vol. 20, No. 02.— P. 383–393.
53. Antil, H. Bilevel optimization, deep learning and fractional Laplacian regularization with applications in tomography / H. Antil, Z W. Di, R. Khatri // Inverse Problems. — 2020. — Vol. 36, No. 6.— P. 064001.
54. Pozrikidis, C. The fractional Laplacian / C. Pozrikidis. — CRC Press, 2016. — 278 с.
55. Lischke, A. What is the fractional Laplacian? A comparative review with new results / A. Lischke, G. Pang, M. Gulian, F. Song, C. Glusa, et al. // Journal of Computational Physics. — 2020. — Vol. 404.— P. 62.
56. Muslih, S. I. Riesz fractional derivatives and fractional dimensional space / S. I. Muslih, O. P. Agrawal // International Journal of Theoretical Physics. — 2010. — Vol. 49, No. 2.— P. 270–275.
57. Yamamoto, M. Asymptotic expansion of solutions to the dissipative equation with fractional Laplacian / M. Yamamoto // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2012. — Vol. 44, No. 6.— P. 3786–3805.
58. Ainsworth, M. Analysis and approximation of a fractional Cahn–Hilliard equation / M. Ainsworth, Z. Mao // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2017. — Vol. 55, No. 4.— P. 1689–1718.
59. Stan, D. Finite and infinite speed of propagation for porous medium equations with nonlocal pressure / D. Stan, F. del Teso, J. L. Vázquez // Journal of Differential Equations. — 2016. — Vol. 260, No. 2.— P. 1154–1199.
60. Pandey, P. An efficient technique for solving the space-time fractional reaction-diffusion equation in porous media / P. Pandey, S. Kumar, J. F. Gómez-Aguilar, D. Baleanu // Chinese Journal of Physics. — 2020. — Vol. 68.— P. 483–492.
61. Laskin, N. Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals / N. Laskin // Physics Letters A. — 2000. — Vol. 268, No. 4-6.— P. 298–305.
62. Gumerov, N. A. Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions / N. A. Gumerov, R. Duraiswami. — Amsterdam : Elsevier, 2005. — 426 p.
63. Ландкоф, Н. С. Основы современной теории потенциала / Н. С. Ландкоф. — Москва : Наука, 1966. — 515 с.
64. Кризский, В. Н. О способе вычисления потенциальных физических полей в кусочно-анизотропных средах / В. Н. Кризский, Н. В. Трегубов, Р. Р. Яматов // Журнал СВМО. — 2010. — Т. 12, № 4. — С. 134–145.

65. Александров, П. Н. Прямая и обратная задачи сейсморазведки анизотропных и диспергирующих упругих сред на основе объемных интегральных уравнений / П. Н. Александров, В. Н. Кризский // Математическое моделирование. — 2023. — Т. 35, № 5. — С. 15–30.
66. Bateman, H. Tables of integral transforms [volumes I & II], Vol. 1 / H. Bateman — McGraw-Hill Book Company, 1954.
67. Gorenflo, R. Mittag-Leffler functions, related topics and applications, 2nd extended and updated edition / R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. Rogosin, et al. — Berlin: Springer, 2020.
68. Gorenflo, R. Computation of the Mittag-Leffler function  $E_{\alpha,\beta}(z)$  and its derivative / R. Gorenflo, J. Loutchko, Y. Luchko. // Fractional Calculus & Applied Analysis. — 2002. — Vol. 5, No. 4.— P. 491–518.
69. Luchko, Y. Algorithms for evaluation of the Wright function for the real argument's values / Y. Luchko. // Fractional Calculus & Applied Analysis. — 2008. — Vol. 11, No. 1.— P. 57–75.
70. Kilbas, A. A. H-transforms: Theory and Applications / A. A. Kilbas — CRC Press, 2004. — 745 p.
71. Fairweather, G. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems / G. Fairweather, A. Karageorghis // Advances in Computational Mathematics. — 1998. — Vol. 9, No. 1-2.— P. 69–95.
72. Kaklamani, D. I. Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics / D. I. Kaklamani, H. T. Anastassiou // IEEE Antennas and Propagation Magazine. — 2002. — Vol. 44, No. 3.— P. 48–64.
73. Young, D. L. The method of fundamental solutions for 2d and 3d Stokes problems / D. L. Young, S. J. Jane, C. M. Fan, et al. // Journal of Computational Physics. — 2006. — Vol. 211, No. 1.— P. 1–8.
74. Cheng, A. H. D. An overview of the method of fundamental solutions – solvability, uniqueness, convergence, and stability / A. H. D. Cheng, Y. Hong // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2006. — Vol. 120.— P. 118–152.
75. Li, W. Localized method of fundamental solutions for 2D harmonic elastic wave problems / W. Li // Applied Mathematics Letters. — 2021. — Vol. 112.— P. 106759.
76. del Teso, F. Finite difference method for a fractional porous medium equation / F. del Teso // Calcolo. — 2014. — Vol. 51.— P. 615-638.
77. del Teso, F. Finite difference method for a general fractional porous medium equation / F. del Teso, J. L. Vazquez // arXiv preprint. — 2013. — arXiv:1307.2474.

78. Huang, Y. Numerical methods for the fractional Laplacian: a finite difference-quadrature approach / Y. Huang, A. Oberman // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 2014. — Vol. 52, No. 6.— P. 3056–3084.
79. Ainsworth, M. Towards an efficient finite element method for the integral fractional Laplacian on polygonal domains /M. Ainsworth, C. Glusa // *Contemporary Computational Mathematics*. — 2018. — P. 17-57.
80. Nochetto, R. H. A PDE approach to fractional diffusion in general domains: a priori error analysis /R. H. Nochetto, E. Otarola, A. J. Salgado // *Foundations of Computational Mathematics*. — 2015. — Vol. 15.— P. 733-791.
81. Du, Q. Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints /Q. Du // *SIAM review*. — 2012. — Vol. 54, No. 4.— P. 667-696.
82. Song, F. Computing fractional Laplacians on complex-geometry domains: algorithms and simulations /F. Song, C. Xu, G. E. Karniadakis // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2017. — Vol. 39, No. 4.— P. A1320-A1344.
83. Kyprianou, A. Unbiased walk-on-spheres Monte Carlo methods for the fractional Laplacian /A. Kyprianou, A. Osojnik, T. Shardlow // *IMA Journal of Numerical Analysis*. — 2018. — Vol. 38, No. 3.— P. 1550-1578.
84. Greengard, L. A fast algorithm for particle simulations / L. Greengard, V. Rokhlin // *Journal of computational physics*. — 1987. — Vol. 73, No. 2.— P. 325–348.
85. Greengard, L. The fast Gauss transform / L. Greengard, J. Strain // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. — 1991. — Vol. 12, No. 1.— P. 79–94.
86. Rokhlin, V. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions / V. Rokhlin // *Journal of Computational Physics*. — 1990. — Vol. 86, No. 2.— P. 414–439.
87. Beatson, R. A short course on fast multipole methods / R. Beatson, L. Greengard // *Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs*. 7th EP-SRC numerical analysis summer school, University of Leicester, Leicester, GB, July 8–19, 1996.. — Oxford: Clarendon Press, 1997. — P. 1–37.
88. Greengard, L. A parallel version of the fast multipole method / L. Greengard, W. D. Gropp // *Computers & Mathematics with Applications*. — 1990. — Vol. 20, No. 7.— P. 63–71.
89. Yokota, R. Petascale turbulence simulation using a highly parallel fast multipole method / R. Yokota, T. Narumi, L. Barba, K. Yasuoka // *Computer Physics Communications*. — 2013. — Vol. 184, No. 3.— P. 445–455.

90. Watschinger, R. A parallel fast multipole method for a space-time boundary element method for the heat equation / R. Watschinger, M. Merta, G. Of, J. Zapletal // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2022. — Vol. 44, No. 4.— P. 320–345.
91. Jelich, C. Fast multipole boundary element method for the acoustic analysis of finite periodic structures / C. Jelich, W. Zhao, H. Chen, S. Marburg // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2022. — Vol. 391.— P. 23.
92. Greengard, L. Fast multipole methods for the evaluation of layer potentials with locally-corrected quadratures / L. Greengard, M. O’Neil, M. Rachh, F. Vico // *Journal of Computational Physics: X*. — 2021. — Vol. 10.— P. 100092.
93. Hermanns, M. On the quasi-steady limit of the enhanced multipole method for the thermal response of geothermal boreholes / M. Hermanns, J. M. Rivero // *Applied Thermal Engineering*. — 2023. — Vol. 225.— P. 120121.
94. Li, J. A dual-level method of fundamental solutions in conjunction with kernel-independent fast multipole method for large-scale isotropic heat conduction problems / J. Li, Z. Fu, W. Chen, X. Liu // *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. — 2019. — Vol. 11, No. 2.— P. 501–517.
95. Osgood, W. F. Factorization of analytic functions of several variables / W. F. Osgood // *Annals of Mathematics. Second Series*. — 1917. — Vol. 19.— P. 77–95.
96. Chuang, C. T. Fix-points and factorization of meromorphic functions. Transl. from the Chinese / C. T. Chuang, C. C. Yang — Singapore etc.: World Scientific, 1990.
97. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов — М. : Физматлит, 2008. — 400 с.
98. Abramowitz, M. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, volume 55). / M. Abramowitz, I. A. Stegun — Government Printing Office; 2nd Printing edition, 1964. — 1046 p.
99. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
100. Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М. : Мир, 1989. — 639 с.
101. Ибрагимов, Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М. : Наука, 1983. — 280 с.



102. Ибрагимов, Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования: классич. и новые методы, нелинейн. мат. модели, симметрия и принципы инвариантности : [учебник : пер. с англ.] / Н. Х. Ибрагимов. — Изд-во Нижегород. госуниверситета, 2007. — 421 с.
103. Ibragimov, N. H. Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations / N. H. Ibragimov. — Chichester : John Wiley & Sons, 1999. — 366 p.
104. Газизов, Р. К. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка / Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукашук // Вестник УГАТУ. — 2007. — Т. 9, № 3 (21). — С. 125–135.
105. Gazizov, R. K. Symmetry properties of fractional diffusion equations / R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, S. Yu. Lukashchuk // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 136. — P. 014016.
106. Gazizov, R. K. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations / R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, S. Yu. Lukashchuk // Handbook of Fractional Calculus with Applications. — 2019. — Vol. 2. — P. 65–90.
107. Gazizov, R. K. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs / R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, S. Yu. Lukashchuk // Handbook of Fractional Calculus with Applications. — 2019. — Vol. 2. — P. 353–382.
108. Belevtsov, N. S. Lie group analysis of 2-dimensional space-fractional model for flow in porous media / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2018. — Vol. 41, No. 18. — P. 9123–9133.
109. Belevtsov, N. S. Symmetry group classification and conservation laws of the nonlinear fractional diffusion equation with the Riesz potential / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Symmetry. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 178.
110. Белевцов, Н. С. Групповая классификация одного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка / Н. С. Белевцов // Мавлютовские чтения: Материалы IX Всероссийской молодежной научной конференции (2015 г.). — Т. 3. — Уфа : ФГБОУ ВПО «УГАТУ», 2015. — С. 170–175.
111. Белевцов, Н. С. Симметрии двумерного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов // Мавлютовские чтения: Материалы X Всероссийской молодежной

- научной конференции (2016 г.). — Т. 4. — Уфа : ФГБОУ ВПО «УГАТУ», 2016. — С. 230–234.
112. Белевцов, Н. С. Фундаментальное решение дробно-дифференциального обобщения уравнения Лапласа / Н. С. Белевцов // Мавлютовские чтения: Материалы XII Всероссийской молодежной научной конференции (2018 г.). — Т. 5. — Уфа : ФГБОУ ВПО «УГАТУ», 2018. — С. 277–281.
113. Белевцов, Н. С. Построение формулы продолжения для дробно-дифференциальных уравнений с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов IX Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых (2016 г.). — Уфа : ФГБОУ ВО «БГУ», 2016. — С. 17–21.
114. Белевцов, Н. С. Дробно-дифференциальное обобщение уравнения Пуассона / Н. С. Белевцов // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов X Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых (2018 г.). — Уфа : ФГБОУ ВО «БГУ», 2018. — С. 173.
115. Belevtsov, N. S. Symmetry properties of linear fractional filtration equation with the Riesz potential / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences (ICMMAS'17). — 2017. — P. 291–292.
116. Белевцов, Н. С. Алгоритм численного решения стационарного уравнения фильтрации с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов, С. Ю. Лукашук // Лобачевские чтения 2018: материалы Семнадцатой молодежной научной школы-конференции (2018 г.). — Т. 56. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. — С. 52–55.
117. Belevtsov, N. S. Multipole expansion of the fundamental solution of a fractional degree of the Laplace operator / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory". — 2020. — Vol. 176. — P. 26–33.
118. Белевцов, Н. С. Групповая классификация нелинейного уравнения фильтрации с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения». — 2018. — С. 23–27.
119. Белевцов, Н. С. Симметричная редукция уравнения фильтрации с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов // Актуальные проблемы науки и

- техники: материалы XI Всероссийской зимней школы-семинара магистрантов, аспирантов и молодых ученых(с международным участием) — 2018. — Т. 3. — С. 152–157.
120. Белевцов, Н. С. О симметричной редукции уравнения фильтрации с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов // Молодежный Вестник УГАТУ — 2018. — Т. 2, № 19. — С. 21–25.
121. Белевцов, Н. С. Дробно-дифференциальная модель линейной двухфазной фильтрации / Н. С. Белевцов // Молодежный Вестник УГАТУ — 2023. — Т. 1, № 27. — С. 104–108.
122. Белевцов, Н. С. Симметричный анализ нелинейного уравнения фильтрации с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов // Актуальные проблемы науки и техники: материалы XI Всероссийской зимней школы-семинара магистрантов, аспирантов и молодых ученых (с международным участием) — 2018. — С. 56.
123. Белевцов, Н. С. Параллельный алгоритм численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона / Н. С. Белевцов, С. Ю. Лукашук // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2019): труды международной конференции, 2019. — С. 165–174.
124. Belevtsov, N. S. The general solution of a fractional Bessel equation / N. S. Belevtsov // International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences (ICMMAS'19). — 2019. — P. 129–130.
125. Belevtsov, N. S. Numerical algorithms for a fractional generalization of the Poisson equation / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // AIP Conference Proceedings. — AIP Publishing LLC, 2020. — 2020. — Vol. 1. — P. 420051.
126. Белевцов, Н. С. Исследование дробно-дифференциальной модели однофазной фильтрации с потенциалом Рисса / Н. С. Белевцов, С. Ю. Лукашук // Многофазные системы — 2020. — Т. 15. № 1–2. — С. 14–14.
127. Белевцов, Н. С. Моделирование однофазной фильтрации в среде с пространственной нелокальностью / Н. С. Белевцов, С. Ю. Лукашук // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» — 2022. — Т. 2. — С. 302–304.
128. Белевцов, Н. С. Быстрый метод мультиполей для решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона / Н. С. Белевцов // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2019614633 от 09.04.2019.
129. Белевцов, Н. С. Мультипольный метод численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца / Н. С. Белевцов // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2021661816 от 15.07.2021.

130. Belevtsov, N. S. Factorization of the fundamental solution to fractional Helmholtz equation / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, No. 1. — P. 57–62.
131. Белевцов, Н. С. Об одной дробно-дифференциальной модификации модели нелетучей нефти / Н. С. Белевцов // Математика и математическое моделирование. — 2021. — Т. 6.— С. 13–27.
132. Белевцов, Н. С. Мультипольный алгоритм численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца / Н. С. Белевцов // Вычислительные методы и программирование. — 2021. — Т. 22.— С. 109–120.
133. Belevtsov, N. S. A fast algorithm for fractional Helmholtz equation with application to electromagnetic waves propagation / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Applied Mathematics and Computation. — 2022. — Vol. 416. — P. 126728.
134. Arbogast, T. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory / T. Arbogast, J. Douglas, U. Hornung // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1990. — Vol. 21, No. 4. — P. 823–836.
135. Азиз, Х. Математическое моделирование пластовых систем. Регулярная и хаотическая динамика / Х. Азиз, Э. Сеттари. — Ижевский институт компьютерных исследований, 2004.
136. Kirsch, A. The mathematical theory of time-harmonic Maxwell's equation / A. Kirsch, F. Hettlich — Cham: Springer, 2015.
137. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 632 с.
138. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 664 с.
139. Zhu, T. Modeling acoustic wave propagation in heterogeneous attenuating media using decoupled fractional Laplacians / T. Zhu, J. M. Harris // Geophysics. — 2014. — Vol. 79, No. 3. — P. 105–116.
140. Treeby, B. E. Modeling power law absorption and dispersion for acoustic propagation using the fractional Laplacian / B. E. Treeby, B. T. Cox // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2010. — Vol. 127, No. 5. — P. 2741–2748.
141. Watson, G. N. A treatise on the theory of Bessel functions / G. N. Watson — Cambridge university press, 1995.

142. Sommerfeld, S. Partial differential equations in physics / G. N. Watson — Academic press, 1949.
143. Lucas, S. K. Evaluating infinite integrals involving products of Bessel functions of arbitrary order / S. K. Lucas // Journal of computational and applied mathematics. — 1195. — Vol. 64, No. 3. — P. 269–282.
144. Deun, J. V. Integrating products of Bessel functions with an additional exponential or rational factor / J. V. Deun, R. Cools // Computer Physics Communications. — 2008. — Vol. 178, No. 8. — P. 578–590.
145. Riney, T. D. On the coefficients in asymptotic factorial expansions / T. D. Riney // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1956. — Vol. 7, No. 2. — P. 245–249.
146. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 632 с.