

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель проректора по науке
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный
университет имени первого
Президента России Б.Н. Ельцина»,
д. ф.-м. н., профессор

Иванов
«16» _____ 2023



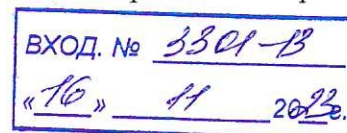
ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу **Белевцова Никиты Сергеевича**
на тему «Мультипольные алгоритмы для многомерных дробно-
дифференциальных моделей диффузионных и волновых процессов»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Актуальность темы диссертационной работы

В последние десятилетия дробные дифференциальные уравнения все активнее внедряются в приложения в качестве математических моделей сложных систем и процессов, осложненных эффектами временной и пространственной нелокальности. При этом в силу сложности таких моделей, на первый план выходит разработка численных алгоритмов их исследования.

В настоящее время имеется большое число работ по конструированию и исследованию численных алгоритмов решения уравнений с частными дробными производными как по временной, так и пространственной переменным. Однако подавляющее большинство таких алгоритмов ориентировано на уравнения с одномерными дробными производными типа Римана–Лиувилля или Герасимова–Капуто. При этом важно отметить, что многомерные дробно-дифференциальные операторы, такие как дробная степень оператора Лапласа, в силу своей нелокальности, не могут быть в общем случае сведены к простой линейной суперпозиции одномерных дробно-дифференциальных операторов. В результате прямой перенос



алгоритмов, разработанных для одномерных дробно-дифференциальных моделей, на многомерный случай оказывается невозможен.

Таким образом, можно констатировать, что разработка численных алгоритмов для уравнений с многомерными дробно-дифференциальными операторами является актуальной задачей современного математического моделирования, решение которой позволит внедрить в практическую деятельность новые, более точные математические модели нелокальных сред и протекающих в них процессов. В диссертационной работе Белевцова Н.С. данная задача успешно решается на основе мультипольного подхода применительно к линейным моделям диффузионных и волновых процессов.

Оценка структуры и содержания диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 146 наименований. Общий объем диссертации составляет 149 страниц. Оформление диссертации соответствует ГОСТ Р 7.0.11-2011.

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, формулируются цель и задачи исследования, приводятся выносимые на защиту положения, отмечается их научная новизна, степень достоверности, а также указываются их теоретическая и практическая значимости.

Первая глава посвящена аналитическому исследованию дробно-дифференциальных математических моделей нелокальных процессов различной природы. Рассматриваются нелокальные дробно-дифференциальные модели диффузионного и волнового типов, выполняется их исследование с использованием симметричного подхода. Доказано существование решений автомодельного типа и типа бегущих волн для линейных дробно-дифференциальных моделей диффузионного и волнового типов, построены примеры таких решений. Проводится редукция нестационарных дробно-дифференциальных моделей к дробно-дифференциальным обобщениям уравнений эллиптического типа. Для дробно-дифференциальных уравнений Гельмгольца и Пуассона выполняется построение фундаментальных решений. Доказано, что для волновой модели в диспергирующей среде справедливо условие излучения Зоммерфельда.

Во **второй главе** предлагается способ моделирования процессов в нелокальных средах, содержащих внутренние включения различной природы и формы. Разрабатываются алгоритмы численного исследования моделей диффузионного и волнового типов в подобных средах, описываемых

конечным числом точечных источников. С использованием программной реализации алгоритмов решены стационарная и нестационарная задачи нелокальной однофазной фильтрации в системе скважин, а также задача рассеяния волн на сфере в диспергирующей среде.

В **третьей главе** решается задача построения факторизованных мультипольных разложений построенных в первой главе фундаментальных решений. Для решения этой задачи предлагается способ факторизации функций, представляемых в виде контурного интеграла типа Меллина-Барнса. Предлагаются численные алгоритмы, позволяющие вычислять функции Фокса из фундаментальных решений и их мультипольных разложений. Отметим как методический прием приведенный в этой главе рисунок 3.3, поясняющий общую мотивировку диссертации.

Четвертая глава посвящена разработке и программной реализации в виде комплекса программ компьютерного моделирования последовательных и параллельных мультипольных алгоритмов численного решения многомерных дробно-дифференциальных моделей с дробной степенью оператора Лапласа. Для разработки таких алгоритмов используются полученные в первой главе фундаментальные решения и их мультипольные разложения, построенные в третьей главе. Приводится описание разработанного комплекса программ компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов с использованием мультипольного подхода, а также предлагается ряд тестовых модельных задач для его верификации. С использованием программного комплекса решена задача построения кривой восстановления давления (КВД) в системе скважин в нелокальной среде.

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы по диссертационной работе.

Соответствие паспорту специальности

Содержание диссертации соответствует паспорту научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по следующим пунктам:

п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений»;

п. 2 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»;

п. 3 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Диссертационное исследование содержит все три составляющих названия специальности: в работе получены новые результаты в области математического моделирования, а также численных методов и комплексов программ.

Научная новизна полученных результатов

В диссертации получены новые научные результаты, способствующие развитию мультипольного подхода к математическому моделированию нелокальных процессов с применением аппарата многомерного дробного интегро-дифференцирования. Наиболее существенными из них, на наш взгляд, являются следующие.

1) Доказаны утверждения о виде фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений операторов Гельмгольца, представленных через функции Фокса, и о виде мультипольных разложений для соответствующих уравнений.

2) Разработан алгоритм факторизации функций, представимых в виде интеграла Меллина-Барнса, основанный на использовании многочленов Гегенбауэра.

3) В работе впервые для многомерных дробно-дифференциальных моделей применен метод вспомогательных точечных источников, что дало новый способ компьютерного моделирования процессов в нелокальных средах с внутренними включениями.

4) На основе полученных фундаментальных решений и их факторизованных разложений, впервые сконструированы мультипольные алгоритмы для численного исследования линейных моделей с дробной степенью оператора Лапласа.

5) Для волновых процессов в нелокальных средах, описываемых моделями с дробной степенью оператора Лапласа, обнаружен эффект локализации влияния нелокальности среды в ближней зоне источников возмущений.

Также можно отметить установление некоторых симметричных свойств многомерных дробно-дифференциальных моделей, позволившее получить ряд их характерных свойств, в частности, автомодельные решения.

Достоверность и обоснованность результатов исследования

Достоверность и обоснованность полученных в работе результатов обеспечивается, в первую очередь, строгостью математических доказательств, а также использованием фундаментальных принципов математического моделирования и разработки численных методов. Предложенные в диссертации алгоритмы апробируются рядом вычислительных экспериментов, демонстрирующих, в частности, их высокую эффективность. Результаты вычислительных экспериментов также сравниваются с построенными точными решениями ряда модельных задач.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты диссертационной работы носят преимущественно теоретический характер, но при этом обладают и практической значимостью. **Теоретическая значимость** работы обуславливается применимостью предложенных в диссертации подходов и разработанных мультипольных алгоритмов для аналитического и численного исследований нелокальных многомерных дробно-дифференциальных математических моделей диффузионных и волновых процессов. **Практическая значимость** работы заключается в применимости разработанных в диссертации алгоритмов при решении нелокальных задач в таких областях как, например, нефтяной инжиниринг, оптика кристаллов, физика плазмы, геофизика и др.

Замечания по диссертационной работе

1. В диссертации сказано, что уравнения с дробными производными по пространству менее разработаны, чем уравнения с дробными производными по времени. Это не так, особенно с точки зрения численных методов. Для пространственных дробно-дифференциальных уравнений существует масса работ по численным методам их решения, и, к сожалению, далеко не все из них упомянуты в диссертации.

2. В диссертации выполнен краткий обзор существующих численных методов решения уравнений с дробной степенью оператора Лапласа. Однако

не представлены результаты сравнения разработанных в диссертации алгоритмов с этими методами.

3. Динамика абсолютной погрешности в таблице 10.1 на странице 124 выглядит достаточно странно. Сначала погрешность уменьшается почти в два раза, потом практически не меняется, а потом снова уменьшается. Обычно погрешность как функция параметра «ступеньками» не меняется. В работе этот эффект не обсуждается и не объясняется.

4. На разработанные программные коды получены свидетельства о регистрации программ. Однако они не выложены в открытый доступ, чтобы с ними можно было ознакомиться.

5. Некоторые математические вопросы остались вне рассмотрения. Так не указано, в каком смысле (классическом или обобщенном) понимаются решения, не указана требуемая для применения алгоритмов гладкость, не постулируются существование, единственность и корректность решений, а также не везде явно указаны классы функций, для которых справедливы полученные результаты. Понятно, что это не предмет диссертации, но хотелось бы большей математической строгости в этих вопросах.

6. Некоторые места в диссертации и, особенно, в автореферате написаны недостаточно подробно. Например:

6.1. Непонятна фраза на странице 8 диссертации «В работах автора [108, 109] было предложено обобщение основных методов группового анализа для поиска симметрий многомерных дробно-дифференциальных уравнений с потенциалом Рисса. Тем не менее симметричные свойства ранее не использовались для построения инвариантно-групповых групповых решений таких уравнений.»

6.2. На странице 17 диссертации написано уравнение (1.3), но не написан смысл величины u .

6.3. На странице 20 диссертации используется понятие пространство Лизоркина, но оно не введено, автор ограничился ссылкой, что создает некоторые трудности при чтении.

6.5 Рисунки 2 и 3 автореферата вызывают вопросы, так как оси координат в них не подписаны.

6.6. На странице 8 автореферата используется функция Фокса, но она не определена в тексте и нет даже ссылки. В диссертации есть ссылка на странице 27, но в тексте также нет определения.

Понятно, что эти вопросы возникли из-за того, что ограниченность объема диссертации и автореферата не позволила расписать подробнее эти и другие места, но чтение усложнилось.

Заключение

Указанные замечания не снижают общего положительного впечатления о работе. Автореферат полностью и правильно отражает основные положения диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 26 работах, в том числе 3 статьи в изданиях, входящих в перечень ВАК, 4 работы в зарубежных рецензируемых изданиях, индексируемых в международной реферативной базе Web of Science, получены два свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

Диссертационное исследование Белевцова Никиты Сергеевича на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является цельной и завершенной научно-квалификационной работой. Полученные автором результаты обоснованы, обладают научной новизной, имеют теоретическую и практическую значимость. В диссертации содержится решение задачи разработки мультипольных алгоритмов компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов, описываемых линейными многомерными дробно-дифференциальными математическими моделями, имеющей существенное значение для математического моделирования нелокальных процессов.

Диссертация соответствует требованиям пп. 9-11 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, **Белевцов Никита Сергеевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.**

Работа доложена автором и обсуждена 27 сентября 2023 г. на семинаре кафедры вычислительной математики и компьютерных наук (протокол № 8)

Отзыв подготовлен заведующим кафедры вычислительной математики и компьютерных наук ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», доктором физико-математических наук, профессором Пименовым Владимиром Германовичем.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры вычислительной математики и компьютерных наук 1 ноября 2023 г., протокол № 10.

Заведующий кафедрой
вычислительной математики и
компьютерных наук, профессор,
д.ф.-м.н. по специальности
01.01.02 - "Дифференциальные
уравнения"

Пименов
Владимир
Германович

Доцент кафедры
вычислительной математики и
компьютерных наук, доцент,
к.ф.-м.н. по специальности
05.13.18 - "Математическое
моделирование, численные
методы и комплексы программ"

Солодушкин
Святослав
Игоревич

Доцент кафедры
вычислительной математики и
компьютерных наук, к.ф.-м.н. по
специальности 01.01.02 -
"Дифференциальные уравнения,
динамические системы и
оптимальное управление"



Гомоюнов
Михаил
Игоревич

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого
Президента России Б. Н. Ельцина»

Адрес организации: 620002, Свердловская область, г. Екатеринбург,
ул. Мира, д. 19

Рабочий телефон: +7 (343) 375 45 07

Адрес эл. почты: rector@urfu.ru