

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

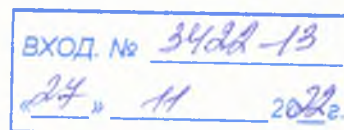
на диссертационную работу Белевцова Никиты Сергеевича на тему «Мультипольные алгоритмы для многомерных дробно-дифференциальных моделей диффузионных и волновых процессов», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

### Актуальность темы диссертации

В настоящее время многомерное интегро-дифференцирование дробного порядка активно развивается и все чаще применяется при математическом моделировании нелокальных явлений и процессов различной природы. Пространственные многомерные дробно-дифференциальные операторы, используемые для описания подобных аномальных процессов, являются нелокальными и определенными во всем пространстве, что в значительной степени затрудняет как аналитическое, так и численное исследование соответствующих математических моделей.

Зачастую численное моделирование является единственным способом построения решений многомерных дробно-дифференциальных моделей. При этом многие из существующих на данный момент численных методов решения подобных моделей обладают достаточно высокой вычислительной сложностью. Таким образом, актуальна задача разработки новых эффективных численных алгоритмов исследования многомерных дробно-дифференциальных моделей нелокальных процессов различной физической природы.

Основной целью диссертационной работы является применение мультипольного подхода для компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов, описываемых дробно-дифференциальными моделями с дробной степенью оператора Лапласа и с потенциалом Рисса.



## **Научная новизна полученных результатов**

В диссертации представлены новые научные результаты, соответствующие области исследования научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Применение симметричного подхода позволило доказать, что для линейных дробно-дифференциальных моделей с дробной степенью оператора Лапласа существуют автомодельные решения и решения типа бегущих волн. Доказана справедливость граничного условия Зоммерфельда для дробно-дифференциального уравнения Гельмгольца.

Для дробно-дифференциальных уравнений эллиптического типа автором построены фундаментальные решения, позволяющие моделировать рассматриваемые виды нелокальных процессов на основе интегральных представлений соответствующих полей. Для построенных фундаментальных решений разработаны алгоритмы их численного расчета.

Предложен и обоснован способ моделирования нелокальных процессов в средах с включениями, на основе которого разработаны новые алгоритмы численного решения нелокальных задач для моделей диффузионного и волнового типов, а именно задачи рассеяния волн на сфере в диспергирующей среде и задач однофазной фильтрации в системе скважин.

Предложенный соискателем алгоритм факторизации функций позволил построить мультипольные разложения для фундаментальных решений дробно-дифференциальных уравнений Пуассона и Гельмгольца. На основе построенных мультипольных разложений автором разработаны последовательные и параллельные алгоритмы численного исследования рассматриваемых в диссертации нелокальных дробно-дифференциальных моделей.

Для дробно-дифференциальных моделей диффузионного типа исследовано влияние дробного показателя на характер фильтрации. Для

дробно-дифференциальных моделей волнового типа показано влияние дробного параметра на ближнюю зону источников возмущения.

### **Достоверность и обоснованность результатов исследования**

Степень достоверности и обоснованности результатов исследования диссертационной работы соответствует общепринятой в рамках специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Результаты, представленные в диссертации, подтверждаются строгими математическими доказательствами, выкладками и рядом тестовых вычислительных экспериментов.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Теоретическая значимость работы состоит в развитии мультипольного подхода к моделированию нелокальных процессов диффузионного и волнового типов. При этом предложенные автором методы и алгоритмы могут применяться к исследованию достаточно широкого класса процессов в нелокальных средах и разработке мультипольных алгоритмов численного решения соответствующих математических моделей. Практическая же значимость работы следует, в первую очередь, из высокой эффективности разработанных в диссертации мультипольных алгоритмов, что дает возможность их использования в трудоемких производственных задачах. Разработанный комплекс программ при этом демонстрирует хорошую масштабируемость мультипольных алгоритмов для вычислительных систем с общей и распределенной памятью.

### **Характеристика содержания диссертационной работы**

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 149 страниц, включая 7 таблиц и 50 рисунков.

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования. Приведены основные положения и результаты, выносимые на защиту, указана их научная новизна, практическая значимость и обоснована их достоверность.

**Первая глава** посвящена аналитическому исследованию математических моделей нелокальных процессов диффузионного и волнового типов с дробной степенью оператора Лапласа и с потенциалом Рисса. Для таких моделей построены автомодельные решения и решения типа бегущих и стоячих волн. Доказаны утверждения о виде фундаментальных решений двух видов дробно-дифференциального уравнения Гельмгольца, а также дробно-дифференциального уравнения Пуассона.

**Во второй главе** для численного исследования многомерных дробно-дифференциальных моделей применяется метод фундаментальных решений, на основе которого разрабатываются алгоритмы решения задач нелокальной фильтрации в системе скважин и рассеяния волн на сфере. С использованием разработанных алгоритмов выполняется численное исследование указанных процессов.

**В третьей главе** выполняется построение факторизованных мультипольных разложений для дробно-дифференциальных уравнений Пуассона и Гельмгольца. Для функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса, предлагается алгоритм их факторизации. Для функций Фокса из мультипольных разложений разрабатываются численные алгоритмы их вычисления, основанные на использовании прямых и асимптотических разложений.

**В четвертой главе** на основе факторизованных мультипольных разложений фундаментальных решений дробно-дифференциальных уравнений Пуассона и Гельмгольца разрабатываются мультипольные численные алгоритмы исследования соответствующих дробно-дифференциальных моделей. Программная реализация этих алгоритмов выполнена в виде комплекса программ компьютерного моделирования. Выполняется тестирование разработанного программного комплекса: проводится сравнение численных результатов с точными аналитическими решениями, оценивается эффективность как последовательных, так и

параллельных версий разработанных алгоритмов. С использованием комплекса программ исследуется процесс восстановления давления на добывающей скважине для нелокальной задачи фильтрации.

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы по диссертационной работе.

#### **Замечания по содержанию диссертации.**

1. На странице 15 в параграфе 1.1 «Феноменологический подход к моделированию нелокальных процессов» приводятся примеры нелокальных процессов. Однако отсутствует определение нелокальности процессов. Какой смысл вкладывает диссертант в это понятие?
2. На странице 17 диссертант пишет «...основной идеей используемого в диссертации подхода для моделирования процессов аномального переноса вещества и энергии в неоднородных средах является представление натурной неоднородной среды модельной однородной с нелокальными эффектами». Однако на странице 23 параграфа 2.1 указывается «...Рассмотрим процесс фильтрации флюида в неоднородной среде...». Далее на странице 27 параграф 2.2 «...Рассмотрим процесс распространения волн в неоднородной среде...». Аналогично на странице 67 параграф 5.1., 5.4 и т.д. Возникает тогда вопрос о том, в какой среде проводится моделирование?
3. На странице 18 в параграфе 1.2. приводится обобщенный закон фильтрации Дарси (1.4). Далее на странице 19 указано, что в предельном  $\alpha = 0$  случае закон Дарси переходит в классический закон. Однако есть еще один предельный случай  $\alpha = 1$ . В этом случае, какую интерпретацию можно дать закону Дарси? Кроме того, диссертант приводит дробно-дифференциальный аналог проницаемости среды  $k_\alpha$  и ее размерность  $[M^\alpha]$ . Однако в классическом случае, как мне известно, размерность коэффициента проницаемости среды имеет

размерность  $[m^2]$ . Поэтому, если случай  $\alpha = 0$  приводит к классическому закону Дарси, то тогда коэффициент проницаемости должен быть безразмерным, а это неверно. Поэтому размерность  $k_\alpha$ , по крайней мере, должна быть  $[m^{2-\alpha}]$ .

4. На странице 28 приведен рисунок 2.2., на этом рисунке отсутствует расчетная кривая для предельного случая  $\alpha = 1$ .
5. На странице 28 указано «...Заметим, что в отличие от классического волнового уравнения в уравнении (2.19) постоянная  $a_\alpha$ , характеризующая свойства среды, имеет дробную размерность и поэтому не является скоростью распространения волны...». Тогда возникает вопрос, а чем является постоянная  $a_\alpha$ ? В модельных уравнениях с дробными производными, которые даются в диссертации, всегда будут содержаться коэффициенты с дробной размерностью. Поэтому имеет смысл ввести характерный масштаб и провести процедуру «обезразмеривания» модельных уравнений.
6. На странице 55 приводится прямое разложение функции Фокса (4.20). Далее указывается, что бесконечные суммы для численных расчетов можно заменить конечными, например, вида  $\sum_{k=0}^{N_p}$ . Как выбирается значение  $N_p$ ? Существует ли алгоритм нахождения  $N_p$ , например, с помощью методов теории функции комплексного переменного?
7. На странице 56 рисунок 4.3 содержит опечатку: вместо  $N$  нужно  $N_p$ . Аналогично на странице 69 рисунок 5.1., на странице 100 рисунок 7.1., на странице 103 рисунок 7.3.
8. На странице 129 указывается, что вычислительные эксперименты проводились на вычислительном кластере Уфимского государственного авиационного технического университета. Какими характеристиками (процессоры, ядра, потоки и т.д.) обладает кластер?

9. На странице 130 приведены две таблицы параллельной реализации алгоритмов на OpenMP и MPI. Однако в диссертации сообщается, что разработан и гибридный их вариант OpenMP+MPI. Поэтому возникает вопрос, насколько эффективен гибридный вариант и условия, когда его необходимо применять? Лучше, на мой взгляд, эффективность параллельных алгоритмов показывать в виде гистограмм.
10. В заключении хочется задать вопрос, связанный с интерпретацией дробных производных в модельных уравнениях, исследуемых процессов в диссертации. Какой смысл диссертант вкладывает в введение дробных производных в диффузионно-волновые процессы? С какими характеристиками среды связаны порядки дробных производных?

Указанные замечания не снижают общую положительную оценку диссертационного исследования.

### **Заключение**

Диссертационная работа Белевцова Никита Сергеевича «Мультипольные алгоритмы для многомерных дробно-дифференциальных моделей диффузионных и волновых процессов» выполнена на высоком научном уровне и является законченным научно-квалификационным исследованием, обладающим актуальностью, научной новизной, а также теоретической и практической значимостью.

По теме диссертации опубликовано 26 работ, из которых 3 статьи в рецензируемых изданиях из перечня ВАК и 4 статьи в рецензируемых изданиях, индексируемых в международной реферативной базе Web of Science.

Диссертация полностью соответствует области исследования научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Результаты, полученные в диссертации, соответствуют следующим пунктам паспорта специальности: п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений»; п. 2

«Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»; п. 3 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Автореферат диссертации полностью соответствует содержанию работы.

Диссертационная работа отвечает всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, **Белевцов Никита Сергеевич**, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности **1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.**

*Я, Паровик Роман Иванович, даю согласие на включение своих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку.*

**Официальный оппонент**, ведущий научный сотрудник лаборатории математического моделирования физических процессов ФГБУН «Институт космических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук», доктор физико-математических наук специальности 05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ (Республика Узбекистан), кандидат физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (Российская Федерация)), доцент

*Паровик*

**Паровик Роман Иванович**

Адрес основного места работы: 684034 с. Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, ул. Мирная, 7  
Телефон: +79247926209  
Адрес эл. почты: parovik@ikir.ru

ПОДПИСЬ УДОСТОВЕРЯЮ

Ведущий специалист по кадрам ИКИР ДВО-РАН  
*Паровик Роман Иванович*  
«09» ноября 2023

