

**УТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по научной работе  
ФГБОУ ВО «Уфимский университет  
науки и технологий»  
доктор физ.-мат. наук, профессор



С. А. Мустафина

2023 г.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

**Диссертация** «Мультипольные алгоритмы для многомерных дробно-дифференциальных моделей диффузионных и волновых процессов» выполнена на кафедре высокопроизводительных вычислительных технологий и систем ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

**В период подготовки диссертации соискатель** Белевцов Никита Сергеевич являлся аспирантом ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по направлению подготовки 09.06.01. Информатика и вычислительная техника, по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. В настоящее время является аспирантом четвертого года обучения и работает по совместительству в должности старшего преподавателя на кафедре высокопроизводительных вычислительных технологий и систем ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий».

**В 2017 г. окончил** бакалавриат ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика, **в 2019 г. окончил** магистратуру ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

**Справка о сдаче кандидатских экзаменов выдана 7 апреля 2023 г.** ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

**Научный руководитель** – доктор физико-математических наук, доцент Лукашук Станислав Юрьевич, профессор кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий».

**По итогам обсуждения принято следующее заключение:**

1. Диссертация Белевцова Никиты Сергеевича является законченной научно-квалификационной работой, соответствующей п.9 Положения о присуждении ученых степеней, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны и обоснованы мультипольные алгоритмы компьютерного моделирования диффузионных и волновых процессов, описываемых линейными многомерными дробно-дифференциальными уравнениями. Совокупность полученных результатов имеет существенное значение для дальнейшего развития науки и техники в области математического моделирования нелокальных процессов.

**2. Соискателем лично получены все основные результаты, выносимые на защиту:**

*В области математического моделирования:*

- дробно-дифференциальные математические модели нелокальной однофазной фильтрации и распространения электромагнитных волн в неоднородной среде, точные частные решения, автомодельные решения и решения типа бегущих волн для этих моделей, построенные с использованием симметричного подхода;

- фундаментальные решения дробно-дифференциальных обобщений многомерных уравнений Пуассона и Гельмгольца, а также интегральные представления решений этих уравнений;

- способ моделирования нелокальных процессов в средах с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников;

- алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса, и построенные с его помощью факторизованные мультипольные представления решений линейных дробно-дифференциальных диффузионных и волновых моделей.

*В области численных методов:*

- численные алгоритмы решения стационарной и нестационарной задач нелокальной однофазной фильтрации с системой скважин и задачи рассеяния волн на непроницаемом объекте в нелокальной среде;

- численно-аналитические оценки точности приближенных мультипольных разложений фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца;

- способ численного расчета функций Фокса, входящих в полученные факторизованные мультипольные разложения;

- последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы численного исследования многомерных дробно-дифференциальных моделей диффузионных и волновых процессов.

*В области комплексов программ:*

- программные реализации численных алгоритмов решения задач для моделей нелокальных процессов в средах с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников;
- программные реализации разработанных последовательных и параллельных мультипольных численных алгоритмов для компьютерного моделирования многомерных линейных дробно-дифференциальных моделей.

В перечисленных в диссертации работах соискателем лично получены следующие результаты:

- в работах [85, 86, 97] выполнялось исследование многомерных дробно-дифференциальных моделей диффузионного типа с использованием симметричного подхода, найдены инвариантно-групповые решения таких моделей;

- в работах [94, 99, 101] построены мультипольные разложения фундаментального решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона с дробной степенью оператора Лапласа, разработаны последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы численного решения этого уравнения и проведен ряд вычислительных экспериментов, демонстрирующих эффективность предложенных алгоритмов;

- в работах [106, 108, 109] предложен алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса, построены фундаментальные решения и соответствующие факторизованные мультипольные разложения для дробно-дифференциальных обобщений уравнений Гельмгольца, разработаны последовательные и параллельные мультипольные численные алгоритмы их решения, предложены способы вычисления функций Фокса из построенных фундаментальных решений и их мультипольных разложений, а также выполнен ряд вычислительных экспериментов, демонстрирующих высокую эффективность разработанных алгоритмов;

- в работе [107] предложены дробно-дифференциальные модификации однофазной и многофазной моделей нелокальной фильтрации, предложены алгоритмы построения численных решений этих моделей, а также построены их частные решения.

Опубликованные работы полностью отражают основное содержание диссертации. Все основные положения и результаты, выносимые на защиту, отражены в публикациях автора. Работы [97, 108, 109] написаны автором единолично, другие – совместно с научным руководителем С.Ю. Лукашук.

**3. Достоверность полученных результатов и выводов основана** на строгих математических доказательствах сформулированных утверждений, тестировании разработанных программных реализаций предложенных алгоритмов, а также сравнении результатов вычислительных экспериментов с построенными точными частными решениями рассматриваемых модельных задач.

**4. Научная новизна работы заключается в следующем:**

- на основе симметричных свойств нестационарных многомерных

линейных дробно-дифференциальных моделей с дробной степенью оператора Лапласа показано, что такие модели обладают автомодельными решениями и решениями типа бегущих волн, построены примеры таких решений. Доказано, что для амплитуд монохроматических гармонических волн, описываемых дробно-дифференциальным обобщением уравнения Гельмгольца, остается справедливым условие излучения Зоммерфельда;

- построены фундаментальные решения многомерных дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца, записанные через функции Фокса. Предложен и обоснован способ их приближенного вычисления с заданной точностью на основе прямых и асимптотических разложений;

- предложен подход к моделированию нелокальных сред с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников. На его основе разработаны численные алгоритмы решения стационарной и нестационарной задач нелокальной однофазной фильтрации с системой скважин и задачи рассеяния волн на непроницаемом объекте в нелокальной среде;

- предложен алгоритм факторизации функций, допускающих представление в виде контурного интеграла Меллина-Барнса, на основе которого выполнена факторизация фундаментальных решений дробно-дифференциальных обобщений уравнений Пуассона и Гельмгольца, а также построены их мультипольные разложения;

- разработаны последовательные и параллельные мультипольные алгоритмы численного решения многомерных линейных дробно-дифференциальных моделей, а также предложен ряд тестовых задач для их верификации.

#### **5. Практическая значимость заключается в следующем:**

- результаты работы могут быть использованы для эффективного высокопроизводительного компьютерного моделирования нелокальных диффузионных и волновых процессов, описываемых многомерными дробно-дифференциальными моделями;

- разработанные численные алгоритмы, основанные на обобщении метода вспомогательных источников, могут использоваться для решения задач компьютерного моделирования нелокальных процессов в средах с включениями, описываемыми конечным числом точечных источников;

- построенные точные частные решения рассматриваемых линейных дробно-дифференциальных моделей могут быть использованы для исследования их качественных свойств и верификации алгоритмов их численного решения.

#### **6. Ценность научных работ заключается в том, что:**

Результаты разработок и проведенных исследований способствуют развитию методов и алгоритмов математического моделирования нелокальных процессов диффузионного и волнового типов с использованием многомерного аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка, а

также развитию численных методов построения решений соответствующих моделей.

## **7. Обоснование выбранной специальности и отрасли науки диссертации**

Диссертация соответствует паспорту специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, при этом работа соответствует следующим пунктам паспорта специальности:

п. 1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (физико-математические науки)»;

п. 2. «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»;

п. 3. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

**Отрасль науки** – физико-математические науки, поскольку преобладают математические методы в качестве аппарата исследований и получены результаты в виде новых математических методов и вычислительных мультипольных алгоритмов исследования многомерных дробно-дифференциальных математических моделей нелокальных процессов.

## **8. Полнота изложения материалов диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 26 научных работах, в том числе 7 статей – в рецензируемых журналах из списка ВАК или включенных в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и/или Scopus; также получены два свидетельства о регистрации программ для ЭВМ. Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных автором, достаточная.

### Работы в научных журналах, включенных в перечень ВАК РФ

1. Белевцов, Н. С. Мультипольный алгоритм численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца / Н. С. Белевцов // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии — 2021. — Т. 22. — С. 109–120.

2. Belevtsov, N. S. Factorization of the fundamental solution to fractional Helmholtz equation / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol.42, No. 1. — P. 57–62.\*)

3. Белевцов, Н. С. Об одной дробно-дифференциальной модификации модели нелетучей нефти / Н. С. Белевцов // Математика и математическое моделирование — 2021. — Т. 6. — С. 13–27.

\*) также входит в системы цитирования Web of Science и Scopus.

Работы в научных журналах, включенных в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и/или Scopus

1. Belevtsov, N. S. Lie group analysis of 2-dimensional space-fractional model for flow in porous media / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2018. — Vol.41, No. 18. — P. 9123–9133.

2. Belevtsov, N. S. Symmetry group classification and conservation laws of the nonlinear fractional diffusion equation with the Riesz potential / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // *Symmetry*. — 2020. — Vol.12, No. 1.— P. 178.

3. Belevtsov, N. S. Numerical algorithms for a fractional generalization of the Poisson equation / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // *AIP Conference Proceedings*. — AIP Publishing LLC, 2020. — 2020. — Vol.1. — P. 420051.

4. Belevtsov, N. S. A fast algorithm for fractional Helmholtz equation with application to electromagnetic waves propagation / N. S. Belevtsov, S. Yu. Lukashchuk // *Applied Mathematics and Computation*. — 2022. — Vol. 416. — P. 126728.

#### Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

1. Белевцов, Н. С. Быстрый метод мультиполей для решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Пуассона / Н. С. Белевцов // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2019614633 от 09.04.2019.

2. Белевцов, Н. С. Мультипольный метод численного решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца / Н. С. Белевцов // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2021661816 от 15.07.2021.

**Диссертация** Белевцова Н.С. соответствует п. 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней (утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 года № 842), предъявляемых к кандидатским диссертациям и в ней:

- отсутствуют недостоверные сведения об опубликованных соискателем ученой степени работах, в которых изложены основные научные результаты диссертации;

- соискатель ссылается на авторов и источники заимствования.

Диссертация «Мультипольные алгоритмы для многомерных дробно-дифференциальных моделей диффузионных и волновых процессов» Белевцова Н.С. рекомендуется к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

**Заключение принято на заседании** кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» Министерства образования и науки РФ.

Присутствовало на заседании 16 человек, в том числе 8 докторов наук.

Результаты голосования: «за» – 16 человек, «против» – нет, «воздержалось» – нет.

Протокол № 9 от «10» мая 2023 г.

И.о. заведующего кафедрой ВВТиС,  
канд. физ.-мат. наук, доцент

Федорова Г.И.

Ученый секретарь  
Ученого совета университета



Ефименко Н.В.