

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уфимский университет науки и технологий»

На правах рукописи



СОКОЛОВА АЛЕКСАНДРА АЛЕКСЕЕВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ  
ЖИДКОСТИ И ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО  
ФОРМООБРАЗОВАНИЯ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОЙ  
ФИЛЬТРАЦИИ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, доцент  
Шерыхалина Наталия Михайловна

Уфа — 2026

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>Глава 1. Обзор методов математического моделирования задач гидродинамики и электрохимического формообразования, анализ численной фильтрации как инструмента исследования математических моделей.</b> .....	19
1.1. Математическая модель процесса электрохимического формообразования.....	19
1.2. Методика повышения надежности численных решений .....	24
1.3. Метод Леви-Чивиты и его видоизменение .....	35
1.4. Задача о периодических волнах. Солитон .....	36
Выводы по главе 1 .....	41
<b>Глава 2. Использование численной фильтрации для анализа моделей со сложными граничными условиями.</b> .....	42
2.1. Постановка задачи о солитоне Стокса .....	42
2.2. Разработка и апробация численно-аналитического метода решения задачи.....	44
2.3. Численное решение .....	51
2.4. Анализ и валидация математической модели на основе численной фильтрации.....	53
2.5. Решение задачи с краевыми условиями в дифференциальном виде .....	55
2.6. Описание алгоритма и программной реализации .....	56
Выводы по главе 2.....	58
<b>Глава 3. Моделирование и комплексное исследование процессов ЭХО с применением фильтрации для постпроцессорной обработки результатов вычислительного эксперимента.</b> .....	60
3.1. Задача предельно-квазистационарного копирования круглого электрод-инструмента. Постановка задачи.....	60
3.2. Численно-аналитический метод решения .....	63
3.3. Численные результаты.....	69
3.4. Осесимметричная задача об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите. Постановка и метод решения .....	71
3.5. Численное решение .....	76
Выводы по главе 3 .....	78

<b>Глава 4. Численно-аналитическое решение задачи о прорезания пазов вращающимся электрод-инструментом, исследование результатов вычислительного эксперимента.</b> .....	80
4.1. Постановка задачи.....	80
4.2. Численно-аналитическое решение методом граничных элементов .....	82
4.3. Описание алгоритма. Тестирование алгоритма и программы.....	84
4.4. Вычислительный эксперимент. Оценка погрешности .....	87
4.5. Исследование влияния частоты вращения электрода-инструмента на форму боковой поверхности .....	92
4.6. Исследование влияния синхронного с вращением электрода-инструмента включения напряжения.....	94
Выводы по главе 4.....	102
Заключение.....	103
Условные обозначения и сокращения.....	105
Список литературы .....	106
Приложение А Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.....	118
Приложение Б Акты о внедрении.....	120
Приложение В Листинг программы решения задачи о солитоне Стокса .	123

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность**

Во многих областях научных и прикладных исследований ключевым инструментом анализа сложных физических, механических и технологических процессов выступает математическое моделирование. Оно позволяет заменить дорогостоящие, трудоёмкие или принципиально невозможные натурные эксперименты на их виртуальные аналоги - численные эксперименты, реализуемые с использованием современных вычислительных методов и программных комплексов. Особенно актуальной задача моделирования становится в контексте разработки новых технологий обработки материалов, где традиционных подходов зачастую недостаточно. В условиях импортозамещения и стремления к технологической независимости особенно остро встаёт необходимость создания отечественных программно-алгоритмических решений, основанных на методах математического моделирования. Разработка и верификация соответствующих численных моделей, а также создание специализированных программных комплексов позволяют не только повысить точность прогнозирования поведения материалов в процессе обработки, но и оптимизировать технологические режимы, сократить время вывода продукции на рынок и обеспечить конкурентоспособность отечественных производств.

Важным приложением математического моделирования является область электрохимической обработки. Электрохимическая размерная обработка представляет собой один из перспективных методов формообразования труднообрабатываемых материалов и сплавов, находящий широкое применение в современном машиностроении, авиационной, инструментальной, медицинской и других высокотехнологичных отраслях промышленности.

В основе процесса лежит управляемое анодное растворение материала заготовки в электролите под действием электрического тока. На рис.1 показан пример электрод-инструмента (1) и результат электрохимической обработки (2),

полученный с помощью этого инструмента в наноструктурном технически чистом титане.

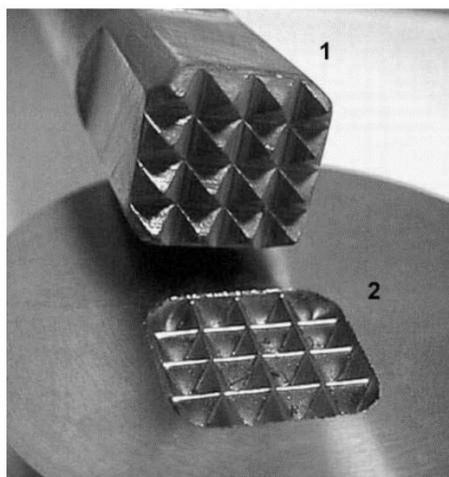


Рис. 1. Электрод-инструмент (1) и пирамидальные углубления (2), полученные в наноструктурном технически чистом титане

Данная технология обеспечивает высокую гибкость, отсутствие механического и теплового воздействия на обрабатываемую деталь, а также дает возможность получать сложные геометрические формы с высокой точностью (табл.1).

Табл.1. Сравнение характеристик различных методов обработки

Вид обработки	Средняя удельная производительность см <sup>3</sup> /с	Средний удельный расход энергии, дж/см <sup>3</sup>	Класс чистоты обрабатываемой поверхности	Точность обработки (класс)
Анодно-механическая (чистовая)	$4 \cdot 10^{-4} - 2,5 \cdot 10^{-3}$	$(1,4 \div 2,9) 10^5$	2 – 3	3 – 4
Электрохимическое травление	$8,3 \cdot 10^{-4} - 8,3 \cdot 10^{-3}$	$(2,9 \div 8,7) 10^5$	3-7	3-5
Электрохимическая размерная	$8 \cdot 10^{-3} - 1,6$	$(2,2 \div 4,3) 10^5$	5-8	2-4
Электроабразивная	$0,3 \cdot 10^{-4} - 0,3 \cdot 10^{-3}$	$(2,3 \div 4,3) 10^5$	9-12	1-2
Электроалмазная	$1,6 \cdot 10^{-3} - 1,6 \cdot 10^{-2}$	$(2,3 \div 4,3) 10^5$	9-11	1-2
Электрохимическое полирование	$1,7 \cdot 10^{-6} - 1,7 \cdot 10^{-5}$	$(1,4 \div 5,8) 10^5$	8-13	2-4

На рис. 2 приведен пример результата электрохимической обработки (ЭХО) пластины из хромоникелевой стали.

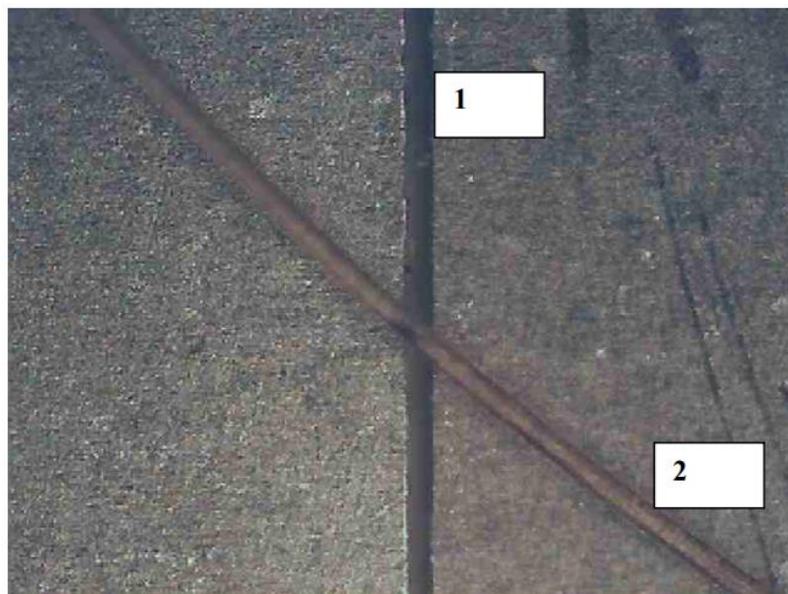


Рис. 2. Результат электрохимической обработки: 1 – узкая (70 мкм) щель, прорезанная в тонкой пластине из хромоникелевой стали в сравнении с человеческим волосом (2).

Учитывая растущие требования к качеству и надёжности изделий, особенно в условиях работы с высокопрочными и жаропрочными сплавами, электрохимическая обработка приобретает всё большую актуальность как альтернатива традиционным механическим методам обработки.

#### **Степень разработанности темы**

Развитие методов математического моделирования электрохимического формообразования активно исследуется в течение последних десятилетий. Важный вклад в данную область внесли работы Алексеева Г.А., Болотнова А.М., Волгина В.М., Галанина С.И., Давыдова А.Д., Житникова В.П., Зайцева А.Н., Каримова А.Х., Кащеева В.Д., Клокова В.В., Котляра Л.М., Кризского В.Н., Миназетдинова Н.М., Мороза И.И., Седыкина Ф.В., Филатова Е.И. и других. Однако не всегда должное внимание уделяется вопросам повышения точности и надёжности численных решений задач моделирования.

Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в области моделирования и проектирования технологических процессов ЭХО, до настоящего времени отсутствует универсальная теория, адекватно описывающая анодное растворение при высоких плотностях тока в условиях узких, протяжённых и динамически изменяющихся межэлектродных зазоров. Поэтому особую значимость приобретает математическое моделирование как ключевой инструмент исследования сложных физико-химических процессов в зоне формообразования. В современных условиях особенно остро стоит необходимость разработки отечественных решений на основе математического моделирования в области технологий формообразования труднообрабатываемых материалов и сплавов для машиностроения в связи с ограничениями на импорт высокотехнологичного оборудования. Электрохимическое формообразование, благодаря своей гибкости и возможностям точного контроля параметров обработки, становится одним из ключевых направлений, способствующих преодолению данных вызовов. Станки электрохимической размерной обработки имеют сложные алгоритмы управления траекториями движения электрод-инструментов при формообразовании. В связи с этим особую актуальность приобретает развитие методов математического моделирования процессов электрохимического формообразования, которые позволяют не только прогнозировать результаты, но и оптимизировать технологические параметры. Современная вычислительная техника, вычислительные методы и подходы дают возможность более глубоко исследовать физические процессы, происходящие в зоне формообразования, и повысить точность прогнозируемых результатов. Это особенно важно для новых задач, где при отсутствии экспериментальных данных требуется разрабатывать новые численные методы, оценивать точность и достоверность полученных решений.

### ***Проблемы, возникающие при численном решении сложных задач***

Математическое моделирование заменяет натурный эксперимент аналитическим или численным экспериментом, а также позволяет отслеживать

и анализировать изменение и взаимовлияние различных параметров. Большинство математических моделей требует проведения компьютерных экспериментов (рис.3). Компьютерное моделирование незаменимо в сложных процессах электрохимического формообразования, когда натурный эксперимент поставить невозможно, затруднительно или небезопасно.

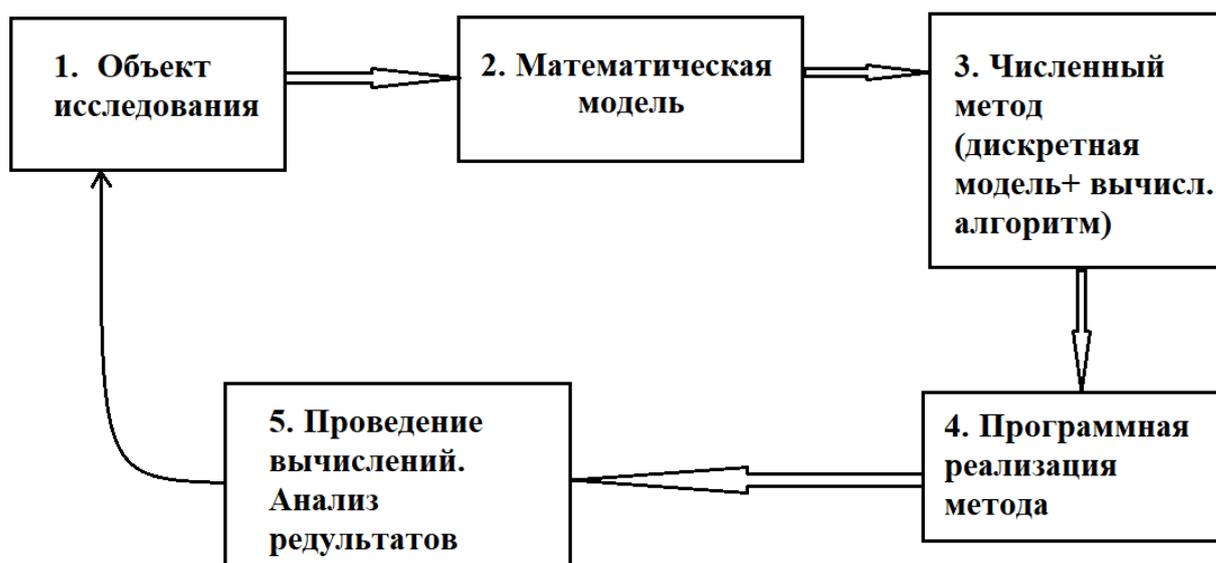


Рис. 3. Схема вычислительного эксперимента

Может сложиться ощущение, что сложность современных вычислительных задач заключается в объёме данных. Однако, фактически проблема глубже: мы доверяем решения машинам. Несмотря на широкое использование численных методов в моделировании и проектировании, а также обилие математических пакетов, вопрос оценки вычислительных погрешностей остаётся чрезвычайно актуальным. Рассмотрим детально причины.

Для решения задачи применяется вычислительный метод, подвергнутый детализации до уровня, достаточного для его реализации на ЭВМ. Алгоритм включает две части: математическую — формализованную аналитически, и программную — воплощённую в коде на языке, пригодном для исполнения компьютером. В современных компьютерах для вещественных чисел принята форма представления с плавающей точкой, т.е. каждое число представляется в виде:

$$x = \pm(y_1 \cdot 2^{-1} + y_2 \cdot 2^{-2} + \dots + y_t \cdot 2^{-t})2^p,$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_t$  – двоичные цифры.

Число  $x$  нормализуется таким образом, чтобы  $y_1=1$ , поэтому в памяти компьютера хранятся только значащие цифры нормализованного числа. Число  $m = \pm(y_1 \cdot 2^{-1} + y_2 \cdot 2^{-2} + \dots + y_t \cdot 2^{-t})$  называется мантиссой числа  $x$ . Количество  $t$  цифр, которое отводится для записи мантиссы, называется разрядностью мантиссы. Разрядность зависит от конструктивных особенностей конкретной вычислительной машины, но всегда конечна. В данном представлении  $p$  – целое число, называемое двоичным порядком.

Долгое время архитектуры ЭВМ различались по разрядности мантиссы и порядка, методам округления и правилам машинной арифметики. В настоящее время подавляющее большинство компьютеров строятся в соответствии со стандартом IEEE для двоичной арифметики. В IEEE-арифметике при стандартной записи нормализованного числа  $x$  под мантиссу выделено 24 разряда (с учётом знака), под порядок – 8. Первый значащий разряд нормализованной мантиссы всегда равен единице, поэтому он не хранится явно; освобождённый бит позволяет увеличить точность мантиссы на один дополнительный двоичный разряд. Так как  $y_1=1$ , то для мантиссы нормализованного числа справедливы оценки  $0.5 \leq |m| < 1$ . В то же время для представления порядка используется конечное число  $l+1$  двоичных цифр, поэтому  $-(2^{l+1} - 2) = p_{\min} \leq p \leq p_{\max} = 2^{l+1} - 1$ .

Таким образом, следует признать: компьютер способен точно представлять не все числа, а лишь ограниченное множество рациональных чисел определённой структуры – так называемое машинное представимое множество. Остальные значения аппроксимируются с погрешностью, обусловленной округлением, которую принято называть **погрешностью представления (округления)**. В IEEE для нормализованных чисел граница относительной погрешности равна единице первого отброшенного разряда мантиссы, т.е.

$\varepsilon_M = 2^{-t}$  (порядок числа не влияет на погрешность представления). Величину  $\varepsilon_M$  называют машинной точностью (машинный эпсилон). Эта величина имеет принципиальное значение в компьютерных вычислениях: с высокой долей вероятности число  $a$ , являющееся точным решением задачи, отсутствует в множестве представимых на ЭВМ чисел. Единственное, что можно попытаться сделать, это найти его представление с относительной погрешностью порядка  $\varepsilon_M$ .

Во-вторых, распределение чисел в машинной арифметике на числовой оси неравномерно - их плотность увеличивается по мере приближения к нулю. Заметим, что расстояние от одного нормализованного числа  $x = m \cdot 2^p$  до другого ближайшего нормализованного числа равно единице последнего разряда мантиссы, умноженной на  $2^p$ , т.е. равно  $2^{p-t}$ . Т.е. расстояние уменьшается с уменьшением значения порядка  $p$  и возрастает с увеличением  $p$ .

В-третьих, диапазон представимых чисел в ЭВМ ограничен. В большинстве языков, включая семейство C (типы float и double), используются 32-битная (одинарная) и 64-битная (двойная) точность. У первых — около 7 значащих десятичных цифр, у вторых — около 16. Несмотря на это, потеря точности неизбежна: даже двойная точность при достаточной длине вычислений исчерпывает свою погрешность, а неоптимальное использование типов данных из-за ограниченности ресурсов и не идеальности разработчиков усугубляет искажение результатов. Таким образом, при появлении в процессе вычисления мантиссы с числом знаков, большим допустимого системой, происходит округление. Это может быть либо отбрасывание первого лишнего разряда (правило усечения), либо в соответствии с некоторыми правилами (правило дополнения), либо как-то иначе.

Таким образом, возникает проблема - как соотнести вычисленные (приближенные) результаты с истинным решением поставленной задачи.

Сейчас для решения этой задачи применяют подход, при котором абстрактные математические объекты (векторы, матрицы, и т.д.), заменяются

аналогами с точным конечным представлением. Часто используются рациональные числа из ограниченного множества и построенные на их основе структуры. Каждая операция сопровождается ручной оценкой погрешности, а именно, поиском отклонения приближённого результата от истинного значения.

Распространение описанного подхода на численные задачи, решаемые на ЭВМ, породило попытки установить аналитическую связь между погрешностью результата и ошибками исходных данных, а также округлений для каждого конкретного численного метода. Справедливости ради следует отметить, что на этом пути были достигнуты определенные успехи, особенно в линейной алгебре, однако в целом эти попытки не достигли намеченной цели. Есть формулы, связывающие погрешность результата с погрешностью исходных данных. Но дело в том, что сами вычисления, производимые на базе этих формул, тоже выполняются не точно, а с погрешностью. Поэтому нельзя применять эти формулы для любой платформы, ведь правила выполнения команд и различные тонкости архитектуры процессора, на котором происходит эти конкретные вычисления, в них не учитываются. Кроме того, нет возможности учитывать грубость конечного результата, зависящую от индивидуальной точности участвующих в вычислении операндов. Следует особо отметить, что зачастую задача получения достоверной оценки погрешности для некоторых вычислительных алгоритмов (особенно, сложных) является задачей, по сложности сопоставимой с разработкой самого численного метода.

Практика показывает, что то ли по этой, то ли по ряду других причин, при создании вычислительных приложений оценкам погрешностей не придается должное значение. Даже невозможно предположить, какая точность получится при вычислении простейшего примера  $\exp(0.0001)$  и во всех других примерах, где вычисления базируются на замене точного результата на приближенный.

Помимо сказанного, сам подход замены точного значения одним приближённым несёт принципиальный недостаток: он не гарантирует корректности проверки числовых условий. К примеру, если вы находите значение операции

```
if x<0: c;  
else: b;
```

а переменная  $x$  при этом вычисляется приближенно, то невозможно достоверно определить ветвление значений условного оператора, поскольку, например, вычисленное значение 0.011 может заменять точное значение  $x$ , равное -0.03.

К числу недостатков подхода относится также нарушение ассоциативности в цепочках сложения и умножения. В результате один и тот же алгоритм в разных вычислительных средах может давать несовпадающие, порой существенно различающиеся результаты.

Итак, замена абстрактных объектов приближёнными аналогами не обеспечивает гарантии корректности вычислений в большинстве алгоритмов.

Вот тут и возникает вопрос: сколько верных знаков присутствует в полученном результате? Из-за различных факторов, рассмотренных выше, неправильная оценка погрешности результата вычисления может появиться из-за ошибки в полученном решении. При проектировании сложных технологических процессов такая ошибка может привести к фатальным последствиям.

В данной работе будет наглядно показано, что возможно существенно увеличить надежность создаваемых комплексов для решения задач, применяя определенные подходы. Эти подходы будут применены в работе при решении задач гидродинамики и электрохимического формообразования. Более того, полученные с увеличенной степенью надежности результаты решения рассмотренных задач позволили сделать определенные выводы, которые ранее не освещались.

Таким образом, **целью** данной работы является совершенствование математических моделей на основе методов их анализа и валидации, а также разработка численно-аналитических методов и комплексов программ для повышения точности и надежности решений задач гидродинамики и электрохимического формообразования.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Разработать методы анализа и валидации математических моделей нестационарного электрохимического формообразования со сложными граничными условиями на основе методов численной фильтрации.
2. Разработать численно-аналитический метод решения задачи о солитоне Стокса и плоских и осесимметричных задач электрохимического формообразования со сложными граничными условиями с использованием алгоритма численной фильтрации.
3. Разработать численно-аналитический метод решения нестационарной задачи электрохимического формообразования для случая использования вращающегося электрода-инструмента.
4. Реализовать алгоритмы и комплексы программ для решения задачи о солитоне Стокса и задач нестационарного электрохимического формообразования со сложными граничными условиями на основе разработанных численно-аналитических методов.
5. Провести комплексное исследование процессов электрохимического формообразования на основе результатов вычислительного эксперимента, оценить эффективность предложенных методов, алгоритмов и их численных реализаций.

#### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Методы анализа и валидации математических моделей нестационарного электрохимического формообразования со сложными граничными условиями на основе методов численной фильтрации (п.7 паспорта специальности 1.2.2).
2. Численно-аналитический метод решения задачи о солитоне Стокса и плоских и осесимметричных задач электрохимического формообразования со сложными граничными условиями с использованием алгоритма численной фильтрации (п.2 паспорта специальности 1.2.2).
3. Численно-аналитический метод решения нестационарной задачи электрохимического формообразования для случая использования вращающегося электрода-инструмента (п.2 паспорта специальности 1.2.2).

4. Алгоритмы и комплексы программ для решения задачи о солитоне Стокса и задач нестационарного электрохимического формообразования со сложными граничными условиями на основе разработанных численно-аналитических методов (п.3 паспорта специальности 1.2.2).

5. Результаты комплексного исследования процессов электрохимического формообразования на основе результатов вычислительного эксперимента, оценки эффективности предложенных методов, алгоритмов и их численных реализаций (п.8 паспорта специальности 1.2.2).

Эти положения соответствуют областям исследования 2, 3, 7, 8 из паспорта специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

### **Научная новизна**

1. Новизна метода анализа математических моделей нестационарного электрохимического формообразования со сложными граничными условиями заключается в том, что к результатам решения известной задачи гидродинамики новым численно-аналитическим методом был успешно применен метод численной фильтрации, что позволило обосновать возможность его использования для анализа математических моделей и уточнения результатов задач электрохимического формообразования.

2. Новизна численно-аналитического метода решения задачи о солитоне Стокса заключается в применении интеграла Шварца вместо степенного ряда, а также использовании краевых условий в дифференциальном виде и в применении численной фильтрации, что позволило уменьшить погрешность решения до  $10^{-16}$ . Впервые рассмотрена и решена осесимметричная задача об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом при немонотонной зависимости анодного потенциала от плотности тока. В задаче об электрохимическом формообразовании круглым в сечении электродом-инструментом было получено квазистационарное решение, что позволило определить форму заготовки в различные моменты времени и диапазон времени, в котором квазистационарное решение совпадет с нестационарным.

3. Новизна численно-аналитического метода решения нестационарной задачи электрохимического формообразования для вращающегося электрода-инструмента заключается в том, что впервые была решена задача с выполнением поворота электрода-инструмента. Полученные результаты моделирования позволили получить характеристики данного процесса формообразования и определить значения параметров, при которых процесс становится небезопасным.

4. Новизна алгоритмов и комплексов программ обусловлена новизной предложенных моделей и численных методов. Отличительной особенностью программной реализации решения задачи о солитоне Стокса является использование типа данных float128 и адаптация алгоритма для компилятора, позволяющего проводить вычисления с 34 значащими цифрами после запятой. Применение численной фильтрации на этапе постпроцессорной обработки показало возможность получения решений задач нестационарного электрохимического формообразования с увеличенной точностью без завышения разрядности вычислений.

5. Новизна результатов вычислительных экспериментов комплексного исследования процессов электрохимического формообразования заключается в том, что был обнаружен ряд эффектов, таких как изменение геометрии обрабатываемой поверхности и короткое замыкание, свойственных нестационарным процессам формообразования при обработке вращающимся электродом-инструментом, которые хорошо согласуются с результатами натуральных экспериментов.

#### **Теоретическая и практическая значимость**

Расширены научные представления о роли постпроцессорной обработки результатов численных экспериментов в задачах гидродинамики и электрохимического формообразования, обосновано применение метода численной фильтрации для повышения точности и достоверности результатов решения задачи о солитоне Стокса и задач электрохимического формообразования. На примере вычисления значения числа Фруда

продемонстрирована высокая точность численных методов и подтверждена работоспособность рассмотренных эвристических методов получения оценок погрешности, что позволяет применять эти методы для широкого класса практически важных вычислительных экспериментов. В осесимметричной задаче об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом при немонотонной зависимости анодного потенциала от плотности тока найдены распределения потенциала, напряженности и численные значения, характеризующие эти параметры. Оценка погрешности параметров, показала, что значения потенциала вычислены с точностью до  $10^{-3}$ .

Практическая значимость решения задачи о солитоне Стокса заключается в повышении точности вычислений параметров солитона до двух единиц 15-го разряда. За счет оптимизации реализации численного алгоритма сокращено время работы программы в 1.5 раза. Тестирование и анализ аппаратно-программных средств позволили подобрать благоприятную среду и тип данных для проведения сложных вычислений, применяемых к числам с длинной мантиссой, что подтверждается свидетельствами о регистрации программ. Проведенные численные исследования технологий электрохимического формообразования позволили получить характеристики нестационарных процессов формообразования при обработке вращающимся электродом-инструментом. Это дало возможность за счет оптимизации траектории движения электрод-инструмента повысить производительность на 5% и исключить короткое замыкание. Практическое применение результатов решения задачи моделирования электрохимического формообразования сократило время отладки процесса электрохимической обработки деталей на 30%.

Практическая значимость результатов подтверждается их внедрением на предприятиях ООО «СЕМАТ» (г. Москва) и ЗАО НПО «ПАРАЛЛЕЛЬ» (г. Уфа), а также в учебном процессе на кафедре Вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО УУНиТ.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается их сравнением с результатами других авторов, корректным использованием математического

аппарата и согласованием вычисленных значений с экспериментальными данными. Результаты подтверждаются приведенными оценками погрешности на основе численной фильтрации и верификацией алгоритмов и программ путем сравнения оценок, полученных разными методами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих научных семинарах и конференциях: Российской научной конференции «Мавлютовские чтения» (г. Уфа, 2011); Российской научной конференции «Мавлютовские чтения» (г. Уфа, 2012); Всероссийской школе-семинаре аспирантов и молодых ученых «Актуальные проблемы науки и техники» (г. Уфа, 2013); Российской научной конференции «Мавлютовские чтения» (г. Уфа, 2016); Международной конференции «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений» (г. Уфа, 2017); Международной конференции «Марчуковские научные чтения» (г. Новосибирск, 2017); VIII научно-технической конференции молодых специалистов (г. Уфа, 2017); Международной конференции «Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений» (пос. Дивноморское, 2017); Международной научной конференции «Актуальные научные исследования в современном мире» (г. Переяслав-Хмельницкий, 2018); Международной школе-конференции «Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение» (г. Чебоксары, 2018), Межвузовском научном конгрессе «Высшая школа: научные исследования» (г. Уфа, 2019), Российской научной конференции «Мавлютовские чтения» (г. Уфа, 2024); X международной научной конференции «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений» (г. Уфа, 2024); II Всероссийской весенней школе-семинаре молодых ученых «Актуальные проблемы науки и техники» (г. Уфа, 2025) ; Российской научной конференции «Мавлютовские чтения» (г. Уфа, 2025).

Исследования проводились в рамках выполнения гранта РФФИ 17-07-00356.

**Публикации.** Основные результаты диссертации отражены в 26 публикациях: в работах автора [71 – 75] и в соавторстве [10, 13–15, 17–19, 29, 30, 78, 79, 81, 93, 94, 97, 103–106], в том числе в 7 статьях в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ, 3 статьи включены в международные базы WoS и Scopus, получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [66, 67].

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы (106), содержит 6 таблиц, 84 рисунка и изложена на 137 страницах.

В работах, выполненных в соавторстве, автору принадлежит разработка численно-аналитических методов, алгоритмов и программ, проведение вычислительного эксперимента, а также участие в постановке задач.

## **Глава 1. Обзор методов математического моделирования задач гидродинамики и электрохимического формообразования, анализ численной фильтрации как инструмента исследования математических моделей.**

### **1.1. Математическая модель процесса электрохимического формообразования**

Автором идеи и технического воплощения многих разновидностей ЭХО является советский инженер В. Н. Гусев (1904-1956). Первый промышленный станок, в котором был реализован процесс ЭХО, был создан в 1943г.

В настоящее время существует множество технологических процессов ЭХО [44–47, 68, 98]; их применяют при изготовлении деталей сложной конфигурации (штампов, пресс-форм и др.), для гравирования, сглаживания кромок, снятия заусенцев и т.п. Все эти процессы происходят благодаря явлению анодного растворения при электролизе.

Чтобы создать условия для процесса ЭХО, заготовку, которую необходимо обработать, подключают к источнику постоянного тока. Электрод-инструмент (который выполняет роль обработчика) также подключают к источнику постоянного тока. Для замыкания электрической цепи в пространство между анодом и катодом под давлением подают электролит. В результате описанных манипуляций осуществляется процесс обработки заготовки, то есть, растворение поверхности анода.

При этом электролит с высокой интенсивностью прокачивается между электродами, обновляется и удаляется из рабочей зоны, что позволяет уменьшать межэлектродные промежутки при формообразовании обрабатываемых поверхностей.

Для достижения высоких эксплуатационных и технико-экономических характеристик необходимо разрабатывать новые технологические методы обработки [37, 53]. Для этого нужно разрабатывать новые численно-аналитические методы, моделирующие данный процесс.

Поскольку стационарное электрическое поле в электролите обладает свойствами соленоидальности и потенциальности, математическое моделирование процесса проводится на основе уравнения Лапласа.

При решении двумерных задач для уравнения Лапласа применяется либо метод граничных элементов [3, 50, 52, 90, 99], либо методы теории функций комплексного переменного (ТФКП) [44, 48, 59, 60, 70, 74, 76, 88]. При применении ТФКП возможно получение аналитических решений или применение простых численных методов для решения задач. В данной работе для решения задач применяются оба метода.

Моделирование ЭХО основано на законе Фарадея. При этом скорость электрохимического растворения определяется формулой

$$V_{ecm} = k\eta \frac{j}{\kappa}, \quad k = \kappa\varepsilon/\rho, \quad (1.1.1)$$

где  $\varepsilon$  – электрохимический эквивалент;  $\rho$  – плотность растворяемого материала;  $j$  – плотность тока на границе обрабатываемой поверхности;  $\kappa$  – электропроводность электролита;  $\eta = \eta(j)$  – выход по току. Согласно закону Ома, напряженность электрического поля  $E = j/\kappa$ . При этом, чем больше относительная разность  $|\Delta V_{ecm}|/V_{ecm}$  скоростей на различных участках межэлектродного пространства (МЭП), тем выше локализация процесса, и тем происходит более точное копирование формы электрода-инструмента (ЭИ), роль которого играет катод.

В третьей главе рассматривается задача, где зависимость выхода по току от плотности тока моделируется ступенчатой функцией [11, 12]

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ \forall \eta \in [0, \eta_0], & j = j_1, \\ 0, & j < j_1. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Рассматривается режим обработки, называемый предельно квазистационарным, при котором в каждой точке анода, где происходит

растворение,  $j = j_1$ , а  $\eta$  может изменяться от  $\eta_0$  до нуля или какой-то минимальной величины.

Рассмотрим стационарную задачу об ЭХО плоским электрод-инструментом  $A'CB'$ , который движется вертикально вниз со скоростью  $V_{et}$ . Обрабатываемая поверхность  $ADB$  приобретает стационарную форму. Сечение межэлектродного пространства (МЭП) показано на рис. 1.1.1, *а*.

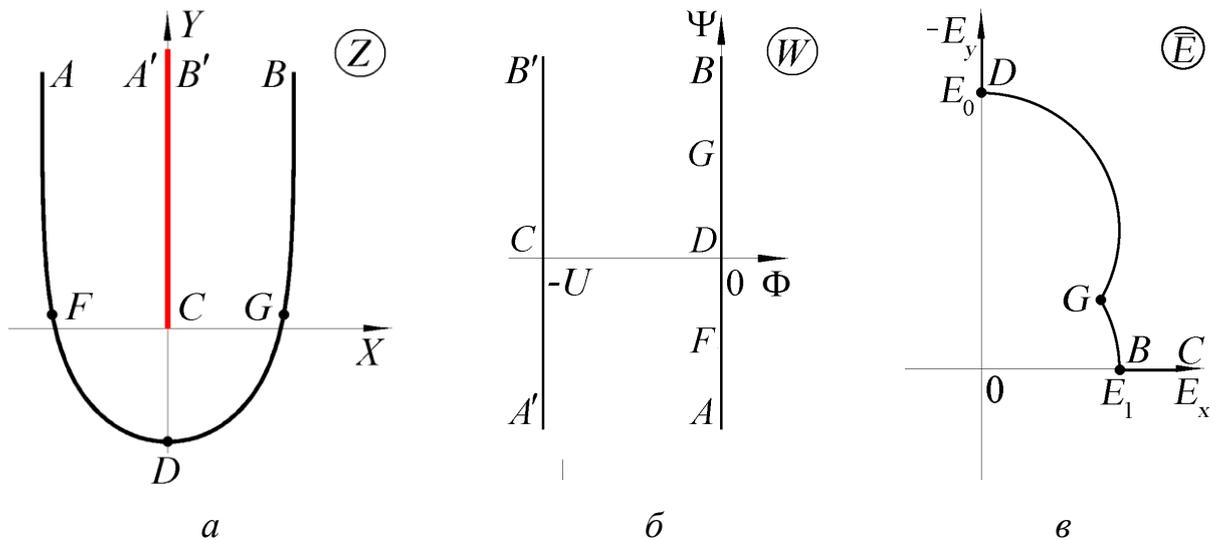


Рис. 1.1.1. Формы межэлектродного пространства на плоскостях: *а* – физической; *б* – комплексного потенциала; *в* – годографа напряженности

Областью, соответствующей МЭП на плоскости комплексного потенциала, является полоса (рис. 1.1.1, *б*).

Скорость растворения определяется законом Фарадея с функцией выхода по току (1.1.2).

При этом на обрабатываемой поверхности образуются две зоны с двумя типами краевых условий. Первая зона  $FDG$ , в которой напряженность за счет близости к ЭИ превышает  $E_1$ , характеризуется условием стационарности [41]. На плоскости годографа напряженности  $\bar{E} = dW/dZ$  этому участку соответствует дуга окружности радиуса  $E_0/2$  с центром в точке  $iE_0/2$  (рис. 1.1.1, *в*), где  $E_0$  – напряженность в точке  $D$ ,  $E_0 = V_{et}/(k\eta_0)$  [61]. Вторая зона  $GB$  (и симметричная ей  $AF$ ) характеризуется постоянным модулем напряженности  $|\bar{E}| = E_1$ . На

плоскости  $\sqrt{E}$  этому участку соответствует дуга окружности радиуса  $E_1 \leq E_0$  с центром в начале координат.

Введем параметрические плоскости  $t_1 = E_0/\sqrt{E}$  и  $\zeta$ , области изменения которых показаны на рис. 1.1.2, а, б.

Функция  $t_1(\zeta)$  представляется в виде суммы известных функций с заданными особенностями, учитывающими свойства решения, и ряда Лорана

$$t_1 = -\frac{1}{\pi} \ln \zeta + \sum_{m=1}^{\infty} d_m (\zeta^m - \zeta^{-m}). \quad (1.1.3)$$

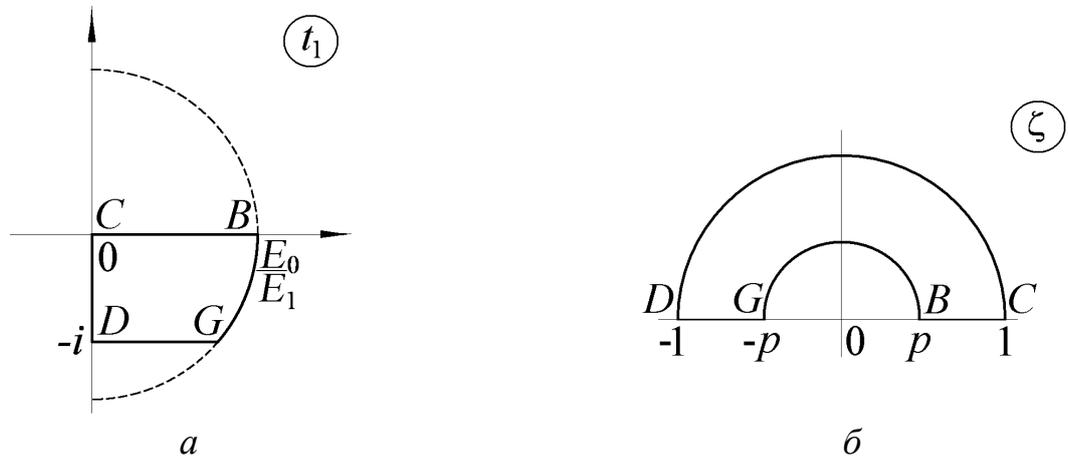


Рис. 1.1.2. Форма областей на параметрических плоскостях

Будем искать  $W(\zeta)$  в виде

$$W = W_0 + i \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\zeta^m - \zeta^{-m}),$$

где  $W_0 = \frac{2iU}{\pi} \ln \left[ \frac{p\zeta - 1}{\zeta - p} (-i\sqrt{\zeta}) \right]$ . Для  $\zeta = pe^{i\sigma}$

$$W_0 = \frac{2iU}{\pi} \ln \left[ \frac{1 - p^2 e^{i\sigma}}{pe^{i\sigma} - p} (-i\sqrt{pe^{i\sigma/2}}) \right] = \frac{2iU}{\pi} \left[ \ln(1 - p^2 e^{i\sigma}) - \ln \left( 2\sqrt{p} \sin \frac{\sigma}{2} \right) \right].$$

Должно выполняться условие  $\operatorname{Re}[W(pe^{i\sigma})] = 0$ , т.е.

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{2U}{\pi} \ln(1 - p^2 e^{i\sigma}) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (p^m e^{im\sigma} - p^{-im\sigma}) \right] = 0.$$

Разложим  $\ln(1 - p^2 e^{i\sigma})$  в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} & -\frac{2U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p^{2m} e^{im\sigma} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (p^m e^{im\sigma} - p^{-m} e^{-im\sigma}) = \\ & = -\frac{2U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p^{2m} \cos m\sigma - i \frac{2U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p^{2m} \sin m\sigma + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos m\sigma (p^m - p^{-m}) + \\ & \quad + i \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin m\sigma (p^m + p^{-m}). \end{aligned}$$

Приравниваем мнимую часть к 0 и выражаем  $c_m$

$$c_m = \frac{2U}{\pi} \frac{1}{m} \frac{p^{2m}}{(p^m + p^{-m})}.$$

$$\text{Тем самым } W = \frac{2iU}{\pi} \left( \ln \left( \frac{1 - p\zeta}{\zeta - p} i\sqrt{\zeta} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{p^{2m}}{p^m + p^{-m}} (\zeta^m - \zeta^{-m}) \right).$$

Найдем производные  $dW/d\zeta$  и  $dZ/dW$

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{2iU}{\pi} \left( \frac{-p}{1 - p\zeta} + \frac{1}{2\zeta} - \frac{1}{\zeta - p} + \frac{1}{\zeta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{2m}}{p^m + p^{-m}} (\zeta^m + \zeta^{-m}) \right), \quad \frac{dZ}{dW} = \frac{1}{E} = \frac{t_1}{E_0}.$$

$$\text{Тогда } Z(\zeta) = \int_1^{\zeta} \frac{t_1}{E_0} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \frac{1}{E_0} \int_1^{\zeta} \left( -\frac{1}{\pi} \ln \zeta + \sum_{m=1}^{\infty} d_m (\zeta^m - \zeta^{-m}) \right) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (1.1.4)$$

Для решения задачи необходимо найти коэффициенты  $d_m$ . Это осуществляется по уравнению  $|t_1(p e^{i\sigma})| = \alpha$  при  $0 \leq \sigma \leq \pi$ . Расчет формы поверхности проводится с помощью численного интегрирования (1.1.4).

На всей обрабатываемой поверхности происходит стационарное формообразование при  $\alpha \rightarrow \infty$ , тогда

$$Z = -\frac{i}{E_0} \frac{(W + U)^2}{2U}.$$

Предельное же формообразование  $|\bar{E}| = E_1$  происходит при  $\alpha \rightarrow 1$ , тогда формируется предельно-стационарное решение согласно формуле

$$Z = i \frac{4U}{\pi E_1} \ln \cos \frac{\pi}{4U} (W + U).$$

Отличие предельно-стационарного и обычного стационарного режимов в том, что при первом на всей обрабатываемой поверхности плотность тока равна предельному значению  $j_1$  [40, 41].

## 1.2. Методика повышения надежности численных решений

Во введении была подробно описана проблема оценки и достоверности получаемых численных решений при решении сложных задач моделирования. В монографии [9] был изложен подход, с помощью которого можно существенно повысить точность численных решений и получить надежные оценки. Методика заключается в следующем:

- извлечение «невидимой» информации из имеющихся данных;
- решение одной и той же задачи несколькими способами;
- завышение точности решения с целью выявления ошибок в программах и в оценке погрешности.

При разработке методов анализа и валидации математических моделей в работе будет рассматриваться новый метод решения задачи о солитоне Стокса и будет получено новое численное решение. Данная задача была выбрана в качестве наглядного примера, демонстрирующего эффективность предлагаемых методик. Задача о солитоне Стокса уже решалась ранее, решение было проанализировано, оценено и уточнено с помощью подхода, описываемого в монографии [9]. В главе 2 текущей работы эта задача будет решена другим способом и с увеличенной длиной машинного слова. Полученные более точные

решения дадут оценку предыдущим, уточненным с помощью рассматриваемой методики решениям. Сравнение результатов позволит сделать вывод - действенны ли предлагаемые механизмы или нет.

Извлечение «невидимой информации» происходит посредством разработанного эвристического алгоритма, называемого *численной фильтрацией*. Основой методов численной фильтрации является априорное знание закона изменения погрешности вычисления от параметра дискретизации. Закон представляется в виде суммы нескольких слагаемых известного вида с неизвестными коэффициентами и заключается в поочередном (или групповом) подавлении этих компонент погрешности.

Идея численной фильтрации, в отличие от ускорения сходимости последовательности и экстраполяции (идея которых основывается на выполнении определенных условий), имеет своей целью только предоставление дополнительной информации для последующего сравнительного анализа [14, 19]. Поочередное (групповое) подавление компонент погрешности позволяет получить к исходной последовательности несколько дополнительных последовательностей, сравнение которых дает возможность сделать оценки погрешности, а также сделать вывод об их справедливости.

При применении численной фильтрации рассматривается модель погрешности вычисления некоторого параметра  $z$ , которая представляется в виде суммы

$$z_n - z = c_1 n^{-k_1} + c_2 n^{-k_2} + \dots + c_L n^{-k_L} + \Delta(n). \quad (1.2.1)$$

Использованные условные обозначения приведены в табл. 1.2.1.

Табл. 1.2.1. Условные обозначения

$z$	точное значение (известное только в тестовых примерах)
$z_n$	вычисленный результат, полученный численным методом при разбиении на $n$ отрезков, всегда приближенное значение
$c_j$	коэффициенты (неизвестные)
$k_1, \dots, k_L$	$k_1 < k_2 < \dots < k_L$ , произвольные действительные числа (известные)

Чаще всего в литературе величину  $\Delta(n)$  считают бесконечно малой. Однако,  $\Delta(n)$  не имеет априорной оценки. Более того, не отрицается возможность того, чтобы с ростом  $n$  она тоже росла. Рост этой величины, которая может содержать и погрешность округления, и не вошедшие в правую часть (1.2.1) слагаемые, и остаточный член ряда, происходит очень часто. Кроме того, величина  $\Delta(n)$  может содержать в себе и те составляющие, что образовались в результате несовершенства построения численного метода и его программной реализации. В данной работе фильтрация проводилась с помощью формулы, совпадающей с формулой Ричардсона:

$$z_{n_i}^{(j)} = z_{n_i}^{(j-1)} + \frac{z_{n_i}^{(j-1)} - z_{n_{i-1}}^{(j-1)}}{Q^{kj} - 1}. \quad (1.2.2)$$

После поочередного или группового подавления компонент рассматриваемой модели погрешности результаты численной фильтрации и оценки погрешности представляют на графике (рис. 1.2.1) в виде зависимости  $-\lg \delta$  (десятичного логарифма) абсолютной или относительной погрешности, т.е. точности, выраженной в количестве точных десятичных знаков от логарифма  $n$  (числа слагаемых суммы, отрезков разбиения и т.п.). При этом каждая составляющая зависимости (1.2.1) представляется на таком графике отрезком прямой.

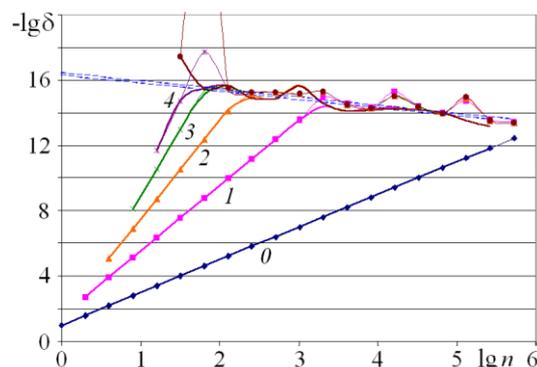


Рис.1.2.1. Пример представления результатов фильтрации

На рис. 1.2.1 приведен пример графического представления результатов фильтрации, здесь десятичный логарифм отношения оценок погрешностей или отношения погрешностей является разностью между ординатами точек, соответствующих конкретному числу  $n$ . Из рис. 1.2.1 наглядно определяется относительная размытость оценки погрешности. Если расстояния между точками больше  $\lg 3 \approx 0,5$ , получаются оценки, которым можно доверять [9].

При применении предложенных методов анализа численных данных по описанным графикам применяются описанные ниже правила.

- Для оценки погрешности задействуется вторая сверху линия. Самая верхняя лишь визуализирует размытость оценки погрешности.

- Оценка принимается надежной, если как минимум на 0.5 отстоят хотя бы две точки самой верхней линии от последней точки второй сверху линии. При невыполнении этого условия более целесообразным является рассмотрение для оценки погрешности третьей сверху линии, если она удовлетворяет заданному критерию.

- Важно обращать внимание и на конфигурацию самих линий. Если линии прямые, то дополнительных исследований, как правило, не требуется, так как это свидетельствует об убывании погрешности с ростом  $n$ . Однако, более сложная форма линий, например, загиб вверх, может означать изменение знака погрешности или же, что она проходит через локальный минимум, что требует дополнительного анализа.

- Важно обращать внимание на расположение точек на графике (их плотность), а также на постоянство знака оценки погрешности. Если точки расположены не часто, то есть вероятность принять за прямую то, что на самом деле прямой не является.

При решении технических задач численная фильтрация может быть полезной не только для получения дополнительного численного материала, но и является вспомогательным инструментом обоснования различных гипотез о поведении параметров реальных физических процессов.

В качестве наглядного примера можно рассмотреть задачу гидродинамики о кавитационном обтекании кругового цилиндра по несимметричной схеме Рябушинского [72, 79], решение которой демонстрирует эффективность применения метода численной фильтрации при решении сложных задач.

Кавитация – это появление в жидкости областей, заполненных парами или газами, выделившимися из жидкости. Если в некоторой занятой жидкостью области давление упадет ниже данного предела, то произойдет разрыв сплошности течения. Так образуется каверна (область, заполненная парами жидкости или газами), то есть, возникает кавитация. Задача кавитационного обтекания кругового цилиндра была решена многими авторами [8, 21, 26]. Ими было замечено, что зависимости многих параметров имеют локальные экстремумы при выполнении условия гладкого отрыва. Однако строгого доказательства эта гипотеза не имеет. Учитывая, что вблизи экстремума зависимость имеет вид  $y-y_0 \approx C(x-x_0)^2$ , то погрешность определения положения экстремума  $\Delta x$  связана с погрешностью вычисления  $y$   $\Delta y$  зависимостью  $\Delta x \sim \sqrt{|\Delta y|}$ , т.е.  $\Delta x$  имеет примерно половину точных значащих цифр по сравнению с  $\Delta y$ . Большинство известных зависимостей представлено в графическом виде, т.е. имеет точность по  $y$  около двух значащих цифр, следовательно, по  $x$  около одной. Самые точные результаты, приведенные в [8] имеют 4 точные значащие цифры по  $y$ , соответственно, по  $x$  около двух.

В связи с этим в данной задаче рассматривается решение с применением фильтрации и исследуется зависимость параметров.

Согласно постановке [72, 79] цилиндрическая оболочка, оба конца которой ( $A$  и  $B$ ) закреплены (рис. 1.2.2), обтекается потоком идеальной жидкости. Скорость потока на свободной линии тока  $CF$  равна  $V_0$ . На линии  $ADG$  вектор скорости параллелен оси  $X$ . Согласно несимметричной схеме Рябушинского для замыкания каверны вводится прямолинейный замыкатель  $FG$ .

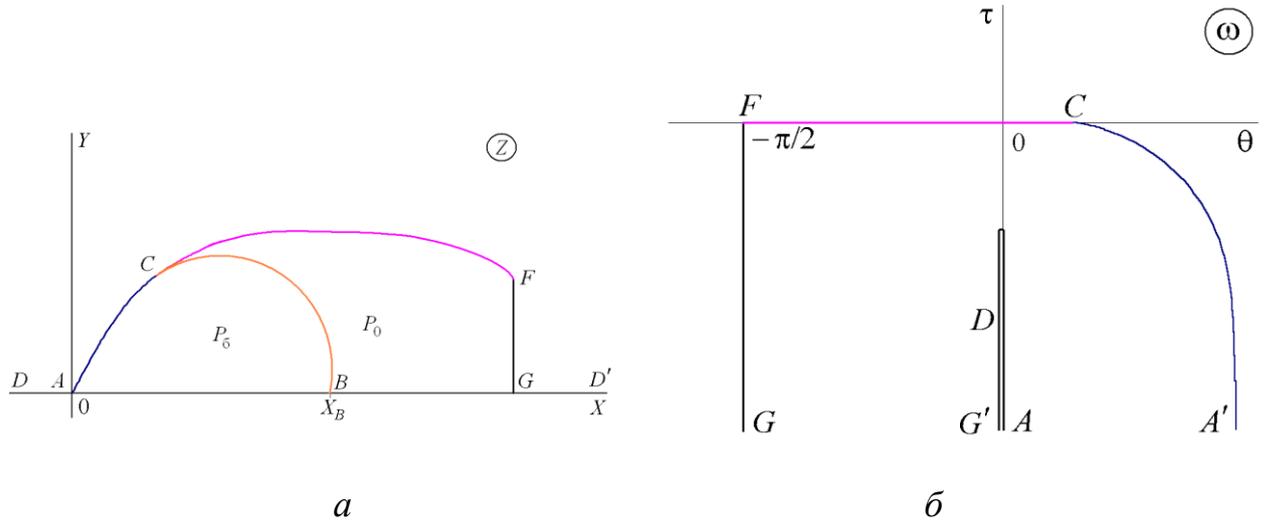


Рис. 1.2.2. Схема течения: а – физическая плоскость; б – плоскость изменения функции Жуковского

Граничным условием является уравнение Лапласа (равновесия оболочки) на смоченной части оболочки  $AC$

$$T = R(P_b - P) = \text{const}, \quad (1.2.3)$$

где  $R$  – радиус кривизны оболочки ( $R > 0$ , если оболочка выпукла в сторону жидкости),  $P$  – давление в потоке;  $P_b$  – давление внутри оболочки;  $T$  – натяжение оболочки. Уравнение Лапласа с учетом уравнения Бернулли:

$$\rho \frac{V^2}{2} + P = P^*, \quad \rho \frac{V_0^2}{2} + P_0 = P^*$$

( $P$  – давление в потоке;  $V$  – модуль вектора скорости жидкости;  $\rho$  – плотность жидкости;  $P_0, V_0$  – давление и модуль скорости на свободной поверхности;  $P^*$  – константа Бернулли) записывается в дифференциальной форме

$$T = \pm \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} \left( P_b - P^* + \rho \frac{V^2}{2} \right),$$

$$\frac{d\theta}{ds} = - \frac{\rho V_0^2}{2T} \left( \mu - 1 + \left| \frac{V}{V_0} \right|^2 \right), \quad \mu = \frac{P_b - P_0}{P^* - P_0}, \quad (1.2.4)$$

где  $\theta$  – угол между вектором скорости и осью  $X$ ;  $s$  – дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки  $A$ . В формуле (1.2.4) выбирается знак «-», так как,

согласно рис. 1.2.2, а, угол наклона вектора скорости  $\theta$  при  $\mu \geq 1$  уменьшается вниз по потоку.

Число кавитации определяется как  $K = \frac{P_\infty - P_0}{\rho V_\infty^2 / 2}$ , где  $\rho$  – плотность

жидкости;  $V_\infty$  – скорость на бесконечности,  $P_0$  – давление в каверне,  $P_\infty$  – давление на бесконечности.

Для решения этой задачи используются методы теории функций комплексного переменного [72, 79]. Численное решение задачи было получено методом коллокаций [72, 79]. Уравнение равновесия удовлетворялось в отдельных точках параметрической плоскости. В точке отрыва либо удовлетворялось условие Бриллюэна – Вилла, чему соответствует длина смоченной части оболочки  $L_C = L_0$ , либо величина  $L_C$  задавалась. Получаемая при этом система нелинейных уравнений решалась методом Ньютона с регулированием шага путем минимизации суммы квадратов невязок по всем уравнениям.

При решении с помощью численной фильтрации было исследовано поведение безразмерных параметров [72, 79], таких как натяжение  $T^*$ , высота оболочечной конструкции  $H^*$  и коэффициенты давления  $C_x, C_y$ . Для оценки погрешности использовалась численная фильтрация результатов расчетов [9, 34], полученных при различных числах точек коллокаций  $n$ . Результаты фильтрации изображены на рис. 1.2.3, 1.2.4, где по оси абсцисс отложены десятичные логарифмы  $n$ , по оси ординат – десятичные логарифмы оценок относительной погрешности искомого параметра  $\delta = |\Delta u / u|$ . Цифрой 0 обозначены вычисленные результаты, цифрами 1, 2 – результаты 1-й и 2-й фильтрации. Толстыми линиями обозначены результаты фильтрации разностей соседних (по числу точек коллокаций) вычисленных значений, что позволяет выбрать эталон. Тонкими линиями обозначены результаты сравнения с выбранным эталоном. Наложение двух семейств кривых позволяет оценить качество выбранного эталона. Эти результаты показывают, что для приведенных

вариантов параметры  $C_X$ ,  $C_Y$ ,  $T^*$  и  $H^*$  определяются с относительной погрешностью около  $10^{-12}$ .

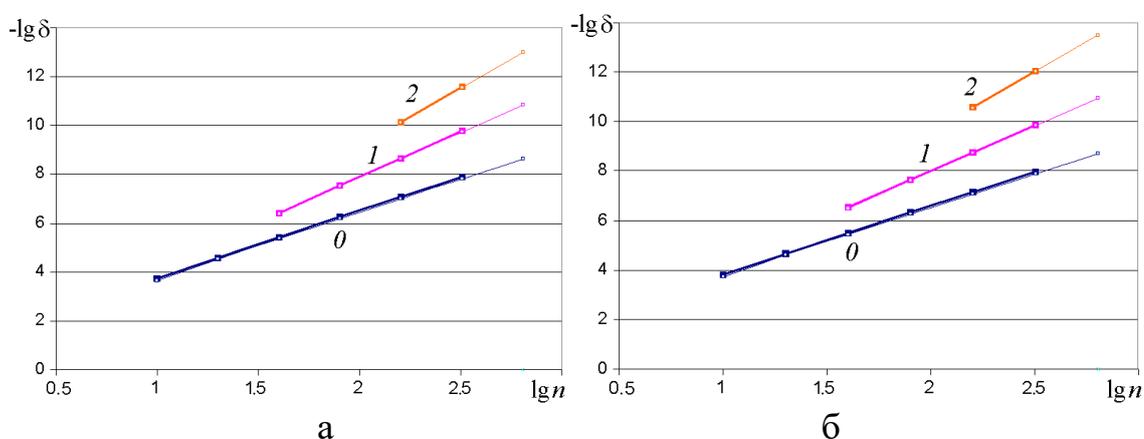


Рис. 1.2.3. Оценка погрешности параметров: а –  $C_X$ ; б –  $C_Y$  для  $\mu=1$ ,  $K=1$

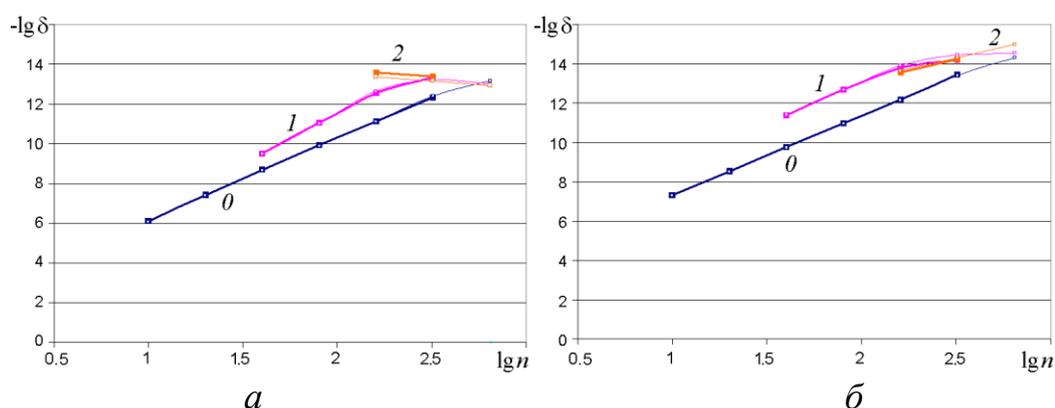


Рис. 1.2.4. Оценка погрешности параметров: а –  $T^*$ ; б –  $H^*$  для  $\mu=1$ ,  $K=1$

Вычисленные значения для  $\mu=1$ ,  $K=1$  (при выполнении условия Бриллюэна – Вилла):  
 $C_X=0.563588646494$ ;  $C_Y=0.358778735216$ ;  
 $\theta_C=0.548199589367$ ;  $T^*=0.879827111207$ ;  $H^*=0.51181685530421$ .

На рис. 1.2.5 и рис. 1.2.6 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для  $L/l=\pi/2$  ( $L$  – длина всей оболочки),  $K=1$  от длины смоченной поверхности  $L_C$  при  $\mu=1$ ; 2; 4;  $\infty$ . Положение точки отрыва, соответствующее выполнению условия конечности кривизны свободной поверхности в точке  $C$  ( $\theta_C = \theta_{C_0}$ ,  $L_C = L_0$ ), отмечено на графиках жирной точкой.

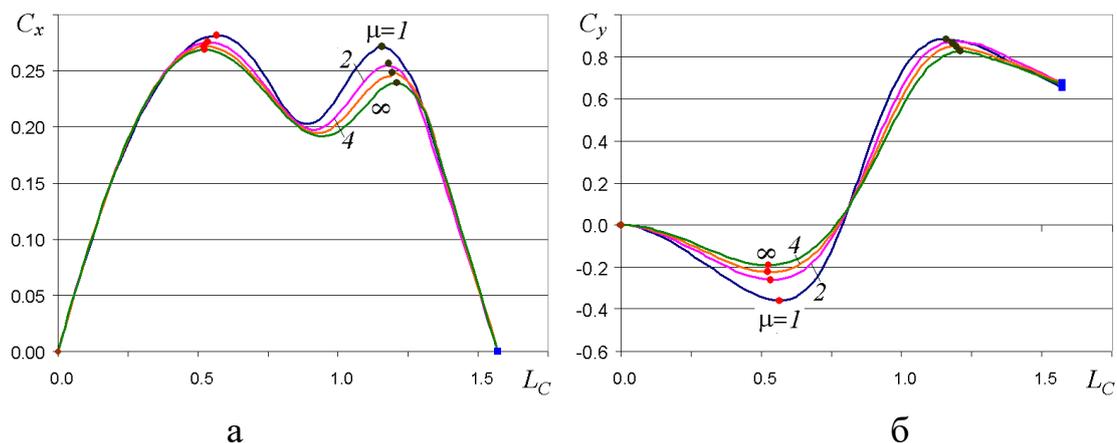


Рис. 1.2.5. Зависимости параметров от  $L_C$ : а –  $C_x$ ; б –  $C_y$

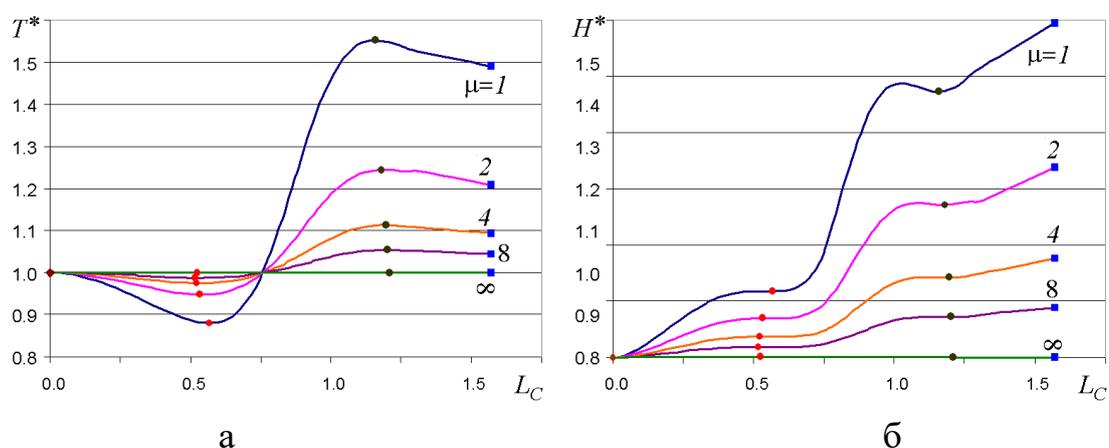


Рис. 1.2.6. Зависимости параметров от  $L_C$  а –  $T^*$ ; б –  $H^*$

Из рис. 1.2.5 и рис. 1.2.6 видно, что при  $\theta_C = \theta_{C_0}$  зависимости, предположительно, имеют локальные экстремумы. Следует отметить, что, основываясь на данных графиках, это предположение можно сделать весьма приближенно, поскольку точность передачи графической информации обычно ограничивается двумя знаками (0.01) от диапазона исследования. При этом если в точке экстремума зависимости имеют вид  $f(x) \approx y_0 + k(x - x_0)^2$ , то при определении  $y_0$  с точностью 0.01, значение  $x_0$  определяется примерно до 0.1. Поэтому для проверки и обоснования предположения об экстремуме в конкретной точке нужна более высокая точность и другая форма графического представления.

В соответствии со сделанными выше оценками, погрешность исследуемых параметров после фильтрации не превышает  $10^{-12}$ . Согласно этому, выберем шаг по параметру  $\theta_C$  равным  $10^{-6}$  и рассмотрим разности  $\Delta u = u - u_0$  в зависимости от  $\Delta\theta_C = \theta_C - \theta_{C0}$ , где  $u_0, \theta_{C0}$  – значения параметра  $u$  и  $\theta_C$  при выполнении условия конечности кривизны в точке отрыва.

Эти зависимости иллюстрируются на рис. 1.2.7 и рис. 1.2.8. При этом одна масштабная единица по оси абсцисс равна  $10^{-6}$ , по оси ординат –  $10^{-12}$ . На точечные графики зависимостей нанесен график функции  $f(x) \approx kx^2$  с подобранными коэффициентами  $k$ . Как показывают графики, положение экстремума с высокой точностью совпадает с  $\theta_{C0}$ .

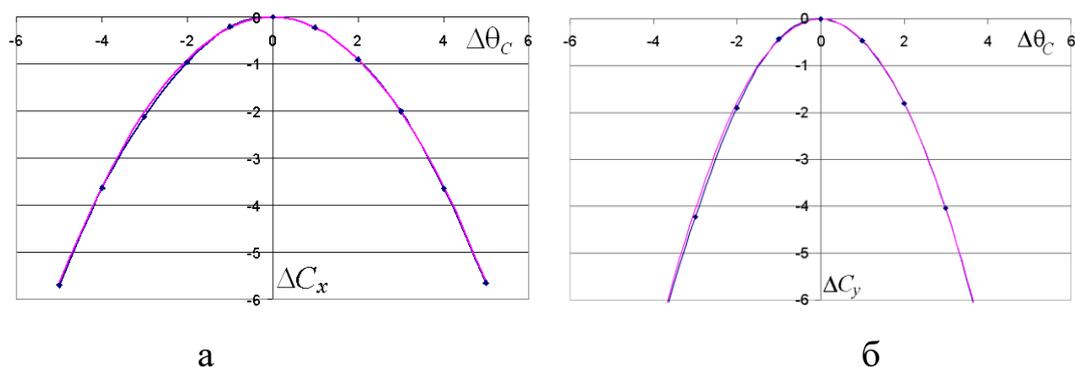


Рис. 1.2.7. Зависимости приращений параметров для  $\mu=1, K=1$ : а –  $C_x$ ; б –  $C_y$

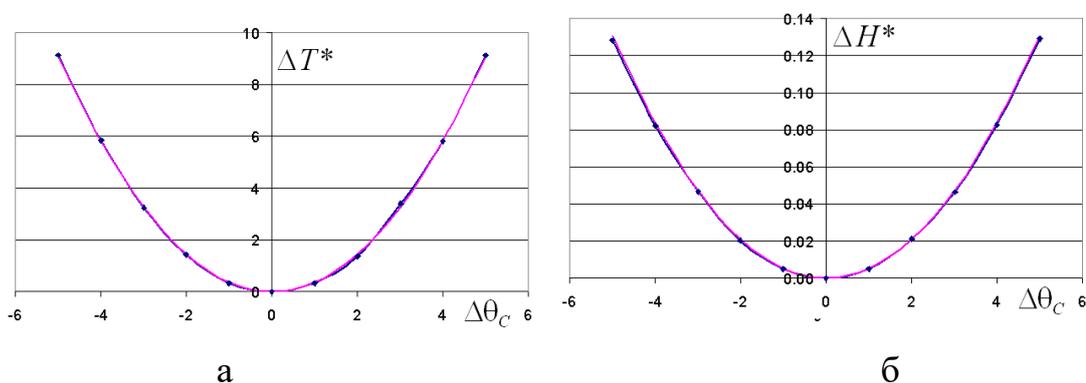


Рис. 1.2.8. Зависимости приращений параметров для  $\mu=1, K=1$ : а –  $T^*$ ; б –  $H^*$

При исследовании кавитационного обтекания кругового цилиндра [8] было замечено, что зависимости многих параметров имеют локальные

экстремумы при выполнении этого условия. Однако в связи с ограничением точности расчетов соображениями «здравого смысла» этот вывод вызывал некоторые сомнения, поскольку количество верных знаков, с которыми определяется точка экстремума, как правило, в два раза меньше, чем в вычисленном значении исследуемой функции. При решении задачи рассмотренным численно-аналитическим методом и проведением фильтрации численных результатов были получены данные с высокой точностью, которые подтвердили наличие локальных экстремумов параметров обтекания.

### 1.3. Метод Леви-Чивиты и его видоизменение

В задачах о течении несжимаемой жидкости условия задаются на соответствующих участках границы в виде уравнений, связывающих мнимую, действительную части функции и их производные. Для решения таких задач с единственным участком, на котором задано сложное граничное условие (может также быть один участок, где задана действительная часть функции, и еще один, где задана мнимая), эффективно применяется метод Леви-Чивиты.

Для метода Леви-Чивиты характерно отображение области плоскости  $\omega$  на внутренность полукруга единичного радиуса параметрической плоскости  $\zeta$ , при котором участок, на котором задано сложное граничное условие, переходит в диаметр полукруга. После этого, в соответствии с методом, при решении рассматривается функция  $\omega(\zeta)$ . То есть, мы видоизменяем искомую функцию. При этом на радиусах на осях она будет либо только мнимой, либо только действительной. Это важно, так как мы можем использовать принцип симметрии. Основываясь на принципе симметрии осуществляем аналитическое продолжение функции на полный круг. Сходящийся внутри данного круга степенной ряд может быть применен для поиска функции, аналитической в круге. Поскольку для возможности разложения функции в степенной ряд необходимо, чтобы она была непрерывна на границе, предварительно выделяются главные особенности искомой функции (полюса и т. п.).

Рассматриваемый метод заключается в представлении решения в виде суммы известной функции, содержащей особенности рассматриваемой задачи, и неизвестной функции без особенностей, которая записывается в виде ряда [8]. Первая функция отвечает за скачки угла на границе, бесконечно удаленные точки и является, по существу, грубым приближением решения, а вторая, представляемая степенным рядом, предназначена для некоторого видоизменения граничных значений (исправления грубого приближения), чтобы удовлетворить краевому условию. Этот метод оправдывает себя, когда вторая

функция является достаточно гладкой, т.е. краевое условие ни в одной точке границы не приводит к разрыву производных.

В этом случае степенной ряд быстро сходится и при численном решении не требуется сохранения слишком большого числа членов этого ряда, что ведет к сокращению размерности решаемых систем уравнений и уменьшению объема вычислений. Однако в ряде задач краевое условие таково, что в одной или более точек границы вторая функция не является гладкой. Для решения таких задач предназначены видоизменения этого метода, состоящие в более тонком учете особенностей решения, которые отражаются в использовании дополнительных слагаемых искомой функции [81].

#### **1.4. Задача о периодических волнах. Солитон**

Рассмотрим задачу о периодических волнах на поверхности весомой жидкости конечной глубины. Данная задача представляет большой интерес для исследователей в связи с многочисленными техническими приложениями и теоретическим знанием.

Будем рассматривать плоское стационарное течение идеальной невязкой жидкости со свободными границами. При этих допущениях математическая модель течения строится на основе теории струй идеальной жидкости и описывается краевыми задачами для аналитических функций комплексного переменного в областях со свободными границами [8, 49, 54].

Задача о течении весомой жидкости вдоль плоского дна решена в [9, 51, 82, 86, 87, 102]. Решение описывает гравитационные волны конечной глубины и определяется двумя геометрическими параметрами: отношениями высоты гребешка  $H$  к высоте впадины  $h - H' = H/h$  и величины периода  $T$  к высоте впадины  $- T' = T/h$ . Этими двумя отношениями, взятыми в определенных диапазонах ( $0 \leq T' \leq \infty, 1 \leq H' \leq H^*(T')$ ), полностью определяется форма волны и поле скоростей течения жидкости. Особый интерес представляют предельные случаи решений  $H = H^*$  (максимальное значение параметра  $H = H^*$  соответствует волне Стокса – волне с изломом свободной поверхности) и  $T' \rightarrow \infty$ . Последний случай описывает

переход от периодических решений к решению типа уединенной волны (солитона).

Случай  $T'=\infty$ ,  $H'=H^*(\infty)$  (уединенная волна Стокса) подробно исследован во многих работах [9, 58, 82, 85, 86, 87, 90, 95, 102]. В табл. 1.4.1 и табл. 1.4.2 приведены численные результаты, полученные исследователями. Поэтому на первом этапе для изучения влияния учета различных особенностей задачи на скорость сходимости алгоритмов имеет смысл рассмотреть именно этот случай.

В 1983 году П.И. Плотников строго доказал гипотезу Стокса о том, что предельным решением при увеличении амплитуды волны является конфигурация с углом при вершине волны равным  $120^\circ$  [63]. Также П.И. Плотников строго доказал, что решение задачи о солитоне не единственно. Имеется в виду, что при приближении высоты солитона к предельной число Фруда может принимать одно и то же значение несколько раз, при критической высоте – бесконечное число раз.

Таблица 1.4.1. Значения числа Фруда, полученные разными авторами

$Fr=1.286$	(5)	Longuet-Higgins M.S., Fenton J.D. Proc. R. S. London. 1974.
$Fr=1.2867$	(42)	Гузевский Л.Г. Межвуз сб. ЧувГУ. 1982.
$Fr=1.2909$		Fox M.J.H. Ph.D. thesis. Cambridge univ. 1977.
$Fr=1.290906$	(15)	Hunter J.K., Vanden-Broek J.-M. J.F.M. 1983.
$Fr=1.290889$	(1)	Williams J.M. Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1981.
$Fr=1.29089053$	(7)	Evans W.A.B., Ford M.J. Proc. R. Soc. London 1996.
$Fr=1.290890455$		Шерыхалина Н.М. ВИНТИ. №2550-В95-деп. 1995
$Fr=1.2908904558$		Maklakov D.V. Euro. Journ. of Applied Mathematics. V. 13, 2002.
$Fr=1.29089045586$		Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Физика волновых процессов, № 2-3, 1998.
$Fr=1.2908904558634$		Sherykhalina N.M., Zhitnikov V.P. Computational Fluid Dynamics Journ. V. 10, N 3, 2001.
$Fr=1.29089045586335$		Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Уфа: Гилем. 2009.

Таблица 1.4.2. Значения параметров солитона, полученные разными авторами

	Longuet-Higgins & Fenton (1974)	Fox (1977)	Williams (1981) computed	Williams (1981) extrapolated	Evans & Ford (1996)
$Fr$	1.286 (-5)	1.2909	1.290891	1.290889 (-1)	1.29089053 (7)
амплит.	0.827 (-6)	0.8332	0.833200	0.833197 (-2)	0.833199179 (94)
масса	1.897 (-73)	1.968 (-2)	1.970323 (2)	1.970319 (-2)	1.97032019 (-47)
импульс	2.440 (-103)	2.540 (-3)	2.543474 (6)	2.543463 (-5)	2.54346767 (-47)
циркул.	1.653 (-62)	1.713 (-2)	1.714569	1.714571 (2)	1.71456873 (-51)
кинет.эн.	0.5052 (-298)	0.5339 (-11)	0.535012 (3)	0.535005 (-4)	0.535008913 (77)
пот. эн.	0.413 (-25)	0.4369 (-8)	0.437675 (2)	0.437670 (-3)	0.437672702 (9)

### *Задача о солитоне Стокса*

Рассмотрим задачу об уединенной волне Стокса. Как видно из табл. 1.4.1 и табл. 1.4.2, разными научными школами были представлены численные результаты по параметрам солитона Стокса. Это позволяет использовать их в сравнении. В случае, если погрешность была больше, чем единица последнего приведенного разряда, то она указывалась в скобках.

Ошибка уровня единицы последнего приведенного разряда обычно представлена авторами как оценка погрешности. Ошибки в оценке погрешности у разных авторов варьируются в очень широком диапазоне, встречаются ошибки в 10 – 100 раз. Такое заключение можно сделать, если сравнить у разных авторов значения одинаковых величин.

Заметим, что Williams [102] для уточнения результатов вычисления применял линейную экстраполяцию зависимостей параметров от невязки по краевому условию. Из табл. 1.4.2 видно, что такая экстраполяция не приводит к уточнению результатов. Однако разность вычисленного и экстраполированного значений могла бы быть использована для оценки погрешности.

Поэтому в настоящее время реально оценить погрешность опубликованного результата можно только тогда, когда появляется более точный результат. Однако, как следует из табл. 1.4.1, хронология получения более точных результатов может нарушаться. Тем самым, проблема обоснования

полученных оценок погрешности остается актуальной и при таком способе верификации.

В связи с этим в данной работе предлагается методика, с помощью которой, во-первых, можно определить диапазон, в котором можно доверять оценкам, полученным по правилам Рунге, Ромберга и т.п. Во-вторых, требуется оценить максимальную точность, которая может быть достигнута при анализе результатов конкретного вычислительного эксперимента, и при этом обеспечить физическую достоверность получаемых оценок. Физическая достоверность может быть достигнута путем получения приближенного значения искомого параметра (называемого ниже эталоном), получения и независимого обоснования оценки его погрешности (интервала неопределенности) и проверки факта пересечения интервалов, полученных разными способами.

В [95] были опубликованы результаты решения этой задачи (см. табл. 1.4.3) видоизмененным методом Леви-Чивиты с учетом особенностей решения в точке излома свободной поверхности и на бесконечности. Для уточнения и оценки погрешности была применена формула фильтрации типа Эйткена с использованием метода наименьших квадратов [95].

Таблица 1.4.3. Результаты, полученные видоизмененным методом Леви-Чивиты

	Шерыхалина & Житников (2001) вычисленные	Шерыхалина & Житников (2001) отфильтрованные
<i>Fr</i>	1.290890455863	1.2908904558634
амплит.	0.833199084519	0.8331990845196
масса	1.9703206602	1.9703206601317 (-2)
импульс	2.5434681352	2.5434681351545
циркул.	1.7145692406	1.7145692405337 (2)
кинет.эн.	0.5350088360	0.5350088359709
пот. эн.	0.43767269344	0.4376726934439

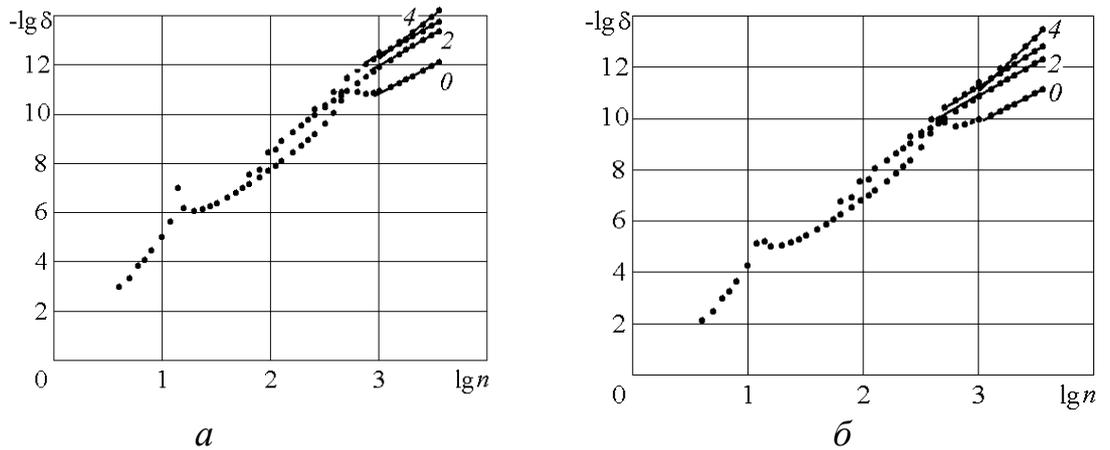


Рис. 1.4.1. Результаты фильтрации решений задачи о солитоне Стокса:  
 $a$  – числа Фруда;  $b$  – потенциальной энергии

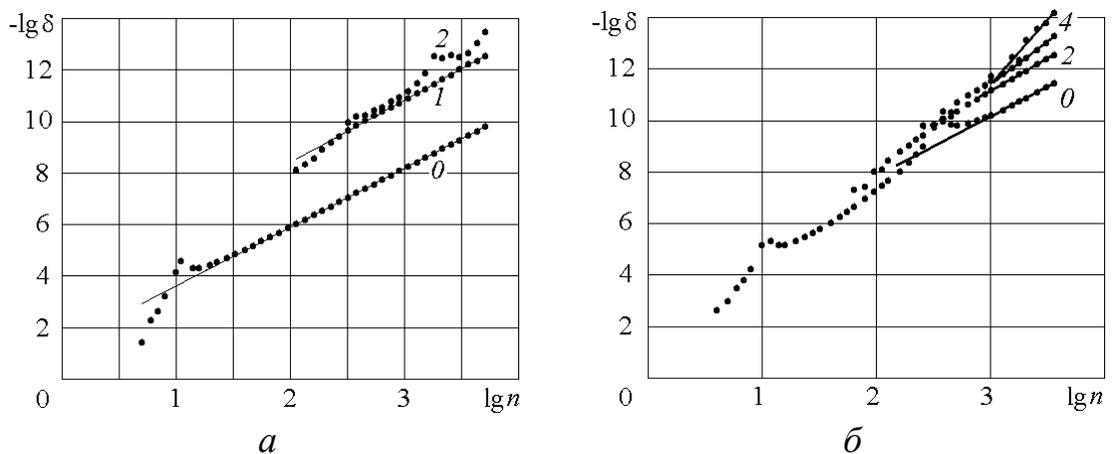


Рис. 1.4.2. Результаты фильтрации решений задачи о солитоне Стокса:  
 $a$  – циркуляции;  $b$  – массы

Полученные оценки, согласно рис. 1.4.1 и рис. 1.4.2 дали возможность декларировать точность до 13 знака по числу  $Fr$  и до двух-трех единиц 13 разряда по остальным параметрам (табл. 1.4.3, колонка 3).

В последствии значение числа  $Fr$  было уточнено до 14 знаков и значение массы до одной единицы 13 разряда [9]. В данной работе (глава 2) для решения этой задачи был использован интеграл Шварца с интегральным условием (уравнение Бернулли) на границе. Этим подтвердились оценки параметров, полученные в [9] и [95].

## **Выводы по главе 1**

Рассмотрение приведенных задач и примеров показывает, что точность получаемых решений может быть повышена с помощью численной фильтрации. Однако этот вывод носит сугубо эвристический характер. Численная фильтрация не имеет строгого математического доказательства, поэтому для того, чтобы применять ее при решении сложных задач ЭХО, необходимо провести ее апробацию на известной сложной задаче, решенной разными методами и многими авторами. Кроме того, обоснование самой методики можно провести, если верифицировать решение, полученное при помощи численной фильтрации, путем получения решения этой же задачи, но новым численно-аналитическим методом и с увеличенной длиной машинного слова. В качестве задачи, решение которой является наглядным обоснованием применения метода численной фильтрации, предлагается использовать задачу о солитоне Стокса, которая представляет интерес для многих исследователей в связи со своим техническим приложением. Сформулированный подход к обеспечению надежности численных решений создает предпосылки для корректного решения конкретных задач электрохимического формообразования, рассмотренных в последующих главах диссертационной работы.

## Глава 2. Использование численной фильтрации для анализа моделей со сложными граничными условиями.

Решение задачи о солитоне Стокса позволяет определить значения параметров волны, таких как число Фруда, амплитуда волны и т.д. Число Фруда позволяет сравнивать условия волнообразования для судов разного размера.

### 2.1. Постановка задачи о солитоне Стокса

Пусть струя идеальной жидкости движется вдоль горизонтальной прямолинейной стенки  $ADC$  (рис. 2.1.1,  $a$ ). Сила тяжести действует вертикально вниз. Рассматривается решение типа уединенной волны наибольшей амплитуды, при этом на вершине волны образуется излом с внутренним углом  $2\pi/3$  (волна Стокса). Скорость на бесконечности равна  $V_\infty$ , асимптотическая толщина струи –  $h$ . Давление  $P$  на свободной границе равно атмосферному  $P_0$ .

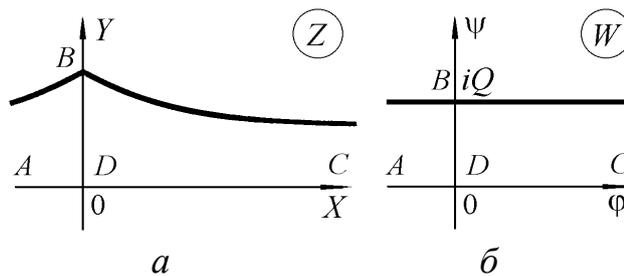


Рис. 2.1.1. Формы области, соответствующей течению на плоскостях:  $a$  – физической;  $b$  – комплексного потенциала

Изначально форма свободной поверхности струи нам неизвестна. Привяжем к рассматриваемому потоку систему координат так, чтобы нижняя граница  $ADC$  совпадала с осью  $X$ . Пусть точка излома свободной поверхности  $B$  располагается на вертикальной оси. Ось  $OY$  направлена вертикально вверх. Уравнение Бернулли при  $P=P_0$  используется для связи ординаты точки  $Y$  и значения модуля вектора скорости потока  $V$  на свободной границе  $A'BC$ . Если обозначить через  $Fr$  число Фруда и через  $g$  – ускорение свободного падения, то данное уравнение можно записать как'

$$\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 + \frac{2Y}{Fr^2 h} = const, \quad Fr = \frac{V_\infty}{\sqrt{gh}}. \quad (2.1.1)$$

Часто при решении задач через конформные отображения вводится вспомогательная плоскость параметрического переменного. На нее отображаются области, соответствующие течению на физической плоскости, затем, эта плоскость связывается конформным отображением с плоскостью комплексного потенциала. Пусть  $\chi$  - плоскость параметрической переменной. Будет удобнее решать задачу, если свободная поверхность отобразится на действительную ось  $\chi = \sigma + i0$ , а областью, соответствующей потоку на физической плоскости, будет полоса  $\chi = \sigma + i\nu$  с шириной, равной одному (рис. 2.1.2, б). Найдем, в связи с принятыми допущениями, аналитические функции комплексного переменного  $Z(\chi)$  и  $W(\chi)$ . Используем общепринятые обозначения:  $Z = X + iY$ ,  $X$  и  $Y$  – координаты в декартовой системе,  $W$  – функция комплексного потенциала.

На рис. 2.1.1, б представлена плоскость комплексного потенциала  $W$ . На ней областью потока также является полоса. Функцию  $W(\chi)$  запишем следующим образом

$$W(\chi) = \varphi + i\psi = Qw(\chi) = -Q\chi + Q, \quad (2.1.2)$$

где  $Q = hV_\infty$  – расход жидкости в струе.

Пусть  $z = Z/h$ . Решение удобнее получить, если использовать плоскость логарифмического годографа скорости (функцию Жуковского)

$$\omega = i \ln \frac{dw}{dz} = \theta + i\tau. \quad (2.1.3)$$

Здесь  $\frac{dw}{dz} = \frac{V}{V_\infty} e^{-i\theta}$  – величина, комплексно сопряженная безразмерной

скорости,  $V$  и  $\theta$  – модуль и угол наклона вектора скорости к оси абсцисс,  $\tau = \ln(V/V_\infty)$ .

Функция  $\omega(\chi)$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$1) \text{ при } \operatorname{Re} \chi = 0, 0 < \operatorname{Im} \chi \leq 1 \text{ действительная часть } \operatorname{Re} \omega(\chi) = \theta = 0; \quad (2.1.4)$$

- 2) при  $\text{Im } \chi = 1$  действительная часть  $\text{Re } \omega(\chi) = 0$ ; (2.1.5)
- 3) при  $\text{Im } \chi = 0$  действительная и мнимая части  $\omega(\chi)$  связаны уравнением (2.1.1);
- 4) при  $\chi = \sigma + i0, \sigma \rightarrow \pm 0$  действительная часть  $\text{Re } \omega(\chi) \rightarrow \pm \frac{\pi}{6}$ ,
- 5) при  $\chi \rightarrow \infty$  величина  $\omega(\chi) \rightarrow 0$ .

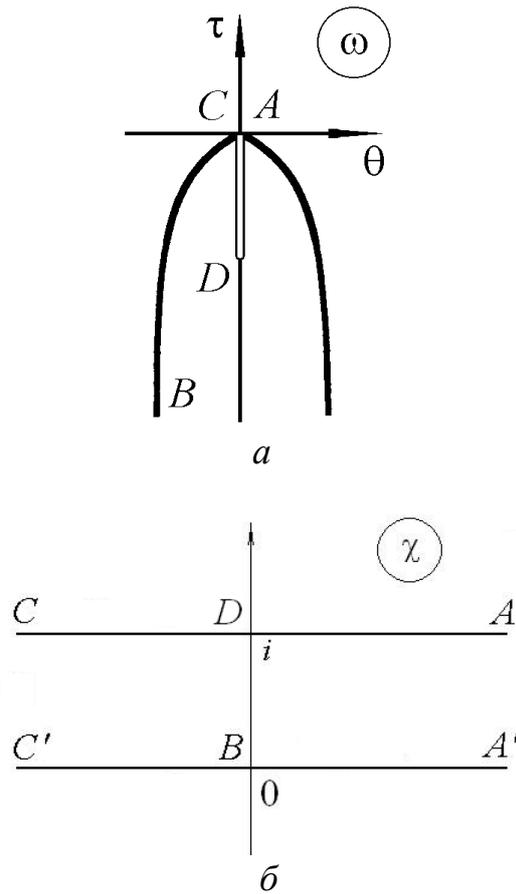


Рис. 2.1.2. Формы областей, соответствующих течению на плоскостях:  $a$  – логарифмического годографа скорости;  $b$  – параметрического переменного  $\chi$

## 2.2. Разработка и апробация численно-аналитического метода решения задачи

Представим  $\omega$  в виде суммы

$$\omega(\chi) = \omega_1(\chi) + \omega_2(\chi). \quad (2.2.1)$$

где  $\omega_2(\chi)$  – функция, удовлетворяющая условиям 1), 2), 4), 5). В результате такого представления  $\omega_1(\chi) \rightarrow 0 + it_1(0)$  при  $\chi \rightarrow 0$ , т.е. функция  $\omega_1(\chi)$  является непрерывной на границе.

Функция  $\omega_1(\chi)$  получается следующим образом. Будем искать решение на границе  $\chi = \sigma$  в узловых точках  $\sigma_m$  ( $m=0, \dots, n$ ). Искомыми будут значения  $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m) = \theta_m$ . При  $\sigma = \sigma_n$  примем  $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma_n) = 0$ , поскольку  $\omega_1(\sigma)$  быстро (как экспонента) убывает при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ . Кроме того,  $\theta_0 = 0$ , так как  $\operatorname{Re} \omega_2(0+0) = \pi/6$  (согласно условиям задачи). Значения  $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma)$  в точках, промежуточных между узловыми, найдем с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные.

Для восстановления функции  $z_1(\chi)$  используем формулу Шварца с учетом того, что  $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma + i0)$  – нечетная функция  $\sigma$  и  $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma + i) = 0$

$$\omega_1(\chi) = -i \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \omega_1(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma.$$

При  $\chi \rightarrow \sigma_m + i0$  согласно формуле Сохоцкого

$$\omega_1(\sigma_m) = -i \cdot v.p. \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \omega_1(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \sigma_m} d\sigma + \operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m),$$

где  $v.p.$  означает главное значение интеграла

$$v.p. \int_0^{\infty} \frac{\gamma(\sigma)}{\mu(\sigma) - \mu(\sigma_m)} d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_0^{\sigma_m - \varepsilon} \frac{\gamma(\sigma)}{\mu(\sigma) - \mu(\sigma_m)} d\sigma + \int_{\sigma_m + \varepsilon}^{\infty} \frac{\gamma(\sigma)}{\mu(\sigma) - \mu(\sigma_m)} d\sigma \right].$$

При  $0 \leq m < n$  вычисление главного значения интеграла практически производится по формуле [65]

$$v.p. \int_0^{\sigma_n} \operatorname{Re} \omega_1(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \sigma_m} d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\sigma_n} \frac{\operatorname{Re} \omega_1(\sigma) \operatorname{sh} \pi \sigma - \operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m) \operatorname{sh} \pi \sigma_m}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \sigma_m} d\sigma - \operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m) \sigma_m + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m) \ln \frac{e^{\pi \sigma_n} - e^{\pi \sigma_m}}{e^{\pi \sigma_n} - e^{-\pi \sigma_m}}. \tag{2.2.2}
\end{aligned}$$

Численное интегрирование производится методом Гаусса.

Слагаемое  $\omega_2(\zeta)$  введено для учета особенности решения в точке  $\chi = 0$  (рис. 2.1.2).

Уравнение (2.1.1) представим в дифференциальной форме

$$e^{3\tau} \frac{d\tau}{d\sigma} - \frac{1}{Fr^2} \sin \theta = 0. \tag{2.2.3}$$

Для выделения особенности в точке  $\chi = 0$  определим функцию

$$f(\chi) = \frac{1 - e^{-\pi\chi}}{\left(1 + ie^{-\pi\chi/2}\right)^2},$$

которая имеет действительные положительные значения при  $\chi = \sigma + i$  и при  $\chi = 0 + i\nu$  ( $0 \leq \nu \leq 1$ ), стремится к 1 при  $\operatorname{Re} \chi \rightarrow +\infty$ , стремится к 0 при  $\chi \rightarrow 0$ .

Функцию  $\omega_2(\chi)$  представим в виде

$$\begin{aligned}
\omega_2(\chi) &= \frac{i}{3} \ln f(\chi) + iC_1 \left[ (f(\chi))^\beta - 1 \right] = \\
&= \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\chi}}{\left(1 + ie^{-\pi\chi/2}\right)^2} + iC_1 \left( \frac{1 - e^{-\pi\chi}}{\left(1 + ie^{-\pi\chi/2}\right)^2} \right)^\beta - iC_1. \tag{2.2.4}
\end{aligned}$$

Функция (2.2.4) удовлетворяет условию (2.1.4) на  $AD$ , (2.1.5) на  $DB$  и уравнению (2.2.3) при  $\chi \rightarrow 0$ , как показано ниже.

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma} \frac{i}{3} \left[ \ln(1 - e^{-\pi\sigma}) - 2 \ln(1 + ie^{-\pi\sigma/2}) \right] &= \frac{i}{3} \left[ \frac{\pi e^{-\pi\sigma}}{1 - e^{-\pi\sigma}} - 2 \frac{-i \frac{\pi}{2} e^{-\pi\sigma/2}}{1 + ie^{-\pi\sigma/2}} \right] = \\
&= \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \left[ \frac{e^{-\pi\sigma/2}}{1 - e^{-\pi\sigma}} + \frac{i(1 - ie^{-\pi\sigma/2})}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right] = \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{e^{-\pi\sigma/2}(1 + e^{-\pi\sigma}) + i(1 - ie^{-\pi\sigma/2})(1 - e^{-\pi\sigma})}{(1 - e^{-\pi\sigma})(1 + e^{-\pi\sigma})} = \\
&= \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{e^{-\pi\sigma/2} + e^{-\pi\sigma/2} e^{-\pi\sigma} + i(1 - e^{-\pi\sigma} - ie^{-\pi\sigma/2}(1 - e^{-\pi\sigma}))}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \\
&= \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{e^{-\pi\sigma/2} + e^{-\pi\sigma/2} e^{-\pi\sigma} + i - ie^{-\pi\sigma} + e^{-\pi\sigma/2} - e^{-\pi\sigma/2} e^{-\pi\sigma}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \\
&= \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{e^{-\pi\sigma/2} + i - ie^{-\pi\sigma} + e^{-\pi\sigma/2}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \frac{1}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{ie^{-\pi\sigma/2} - 1 + e^{-\pi\sigma} + ie^{-\pi\sigma/2}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \\
&= \frac{1}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{-1 + e^{-\pi\sigma} + 2ie^{-\pi\sigma/2}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = -\frac{\pi}{3} e^{-\pi\sigma/2} \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} + i \frac{2\pi}{3} \frac{e^{-\pi\sigma}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \\
&= -\frac{\pi}{3} \frac{e^{-\pi\sigma/2}}{(1 + e^{-\pi\sigma})} + i \frac{2\pi}{3} \frac{e^{-\pi\sigma}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = -\frac{\pi}{6} \frac{2}{e^{\pi\sigma/2} + e^{-\pi\sigma/2}} + i \frac{\pi}{3} \frac{2}{e^{\pi\sigma} - e^{-\pi\sigma}} = \\
&= -\frac{\pi}{6} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\sigma}{2}} + i \frac{\pi}{3} \frac{1}{\operatorname{sh} \pi\sigma},
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\chi} \omega_2(\chi) = -\frac{\pi}{6} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\chi}{2}} + i \frac{\pi}{3} \frac{1}{\operatorname{sh} \pi\chi} + i\beta C_1 \left( \frac{1 - e^{-\pi\chi}}{(1 + ie^{-\pi\chi/2})^2} \right)^{\beta-1} \pi e^{-\pi\chi/2} \frac{e^{-\pi\chi/2} + i}{(1 + ie^{-\pi\chi/2})^3}.$$

При  $\chi = \sigma + i0$ ,  $\sigma \rightarrow 0$  имеют место оценки:  $f(\sigma + i0) = \frac{\pi\sigma}{2i} + O(\sigma^2)$ ,

$$\omega_2(\sigma + i0) = \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{(1 + ie^{-\pi\sigma/2})^2} + iC_1 \left( \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{(1 + ie^{-\pi\sigma/2})^2} \right)^\beta - iC_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{3} \ln(1 - e^{-\pi\sigma}) - 2 \frac{i}{3} \ln(1 + ie^{-\pi\sigma/2}) + iC_1 \left( \frac{(1 - e^{-\pi\sigma})(1 - ie^{-\pi\sigma/2})^2}{(1 + e^{-\pi\sigma})^2} \right)^\beta - iC_1 = \\
&= \frac{i}{3} \ln(1 - e^{-\pi\sigma}) - \frac{i}{3} \ln(1 + e^{-\pi\sigma}) - 2 \frac{i}{3} i \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + iC_1 \frac{(1 - e^{-\pi\sigma})^\beta}{(1 + e^{-\pi\sigma})^{2\beta}} (1 - ie^{-\pi\sigma/2})^{2\beta} - iC_1 = \\
&= \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + iC_1 \frac{(1 - e^{-\pi\sigma})^\beta}{(1 + e^{-\pi\sigma})^{2\beta}} (1 + e^{-\pi\sigma})^\beta e^{-2i\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}} - iC_1 = \\
&= \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + \\
&+ iC_1 \left( \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \left( \cos(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) - i \sin(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) \right) - iC_1 = \\
&= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + C_1 \left( \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \sin(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) + \\
&+ \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} + iC_1 \left( \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \cos(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) - iC_1 = \\
&= \theta_2(\sigma) + i\tau_2(\sigma). \\
\theta_2(\sigma) &= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + C_1 \left( \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \sin(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) = \\
&= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left( 1 - \frac{\pi\sigma}{2} + O(\sigma^2) \right) + C_1 \left( \frac{1 - 1 + \pi\sigma + O(\sigma^2)}{1 + 1 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \right)^\beta \sin \left( 2\beta \operatorname{arctg} \left( 1 - \frac{\pi\sigma}{2} + O(\sigma^2) \right) \right) = \\
&= \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sigma}{4} + O(x^2) \right) + C_1 \left( \frac{\pi\sigma + O(\sigma^2)}{2 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \right)^\beta \sin \left( 2\beta \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sigma}{4} + O(\sigma^2) \right) \right) = \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + O(\sigma^2) + C_1 \frac{\pi\sigma}{2} \left( \frac{1 + O(\sigma)}{1 + O(\sigma)} \right)^\beta \sin \left( \frac{\pi}{2} \beta + \beta\sigma + O(\sigma^2) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + O(\sigma^2) + C_1 \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta (1 + O(\sigma)) \left( \sin\left( \frac{\pi}{2}\beta \right) + O(\sigma) \right) = \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin\left( \frac{\pi\beta}{2} \right) \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}), \\
e^{3\tau_2(\sigma)} &= \exp \left[ \ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} + 3C_1 \left( \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \cos(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) - 3C_1 \right] = \\
&= \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \exp \left[ 3C_1 \left( \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \cos(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) - 3C_1 \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{1 - 1 + \pi\sigma + O(\sigma^2)}{1 + 1 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \exp \left[ 3C_1 \left( \frac{1 - 1 + \pi\sigma + O(\sigma^2)}{1 + 1 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \right)^\beta \cos\left( 2\beta \operatorname{arctg} \left( 1 - \frac{\pi\sigma}{2} + O(\sigma^2) \right) \right) \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{\pi\sigma + O(\sigma^2)}{2 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \exp \left[ 3C_1 \left( \frac{\pi\sigma + O(\sigma^2)}{2 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \right)^\beta \cos\left( 2\beta \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sigma}{4} + O(\sigma^2) \right) \right) \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{\pi\sigma}{2} \frac{1 + O(\sigma)}{1 + O(\sigma)} \exp \left[ 3C_1 \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta \left( \frac{1 + O(\sigma)}{1 + O(\sigma)} \right)^\beta \cos\left( \frac{\pi\beta}{2} - \frac{\pi\beta\sigma}{2} + O(\sigma^2) \right) \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{\pi\sigma}{2} (1 + O(\sigma)) \exp \left[ 3C_1 \cos\left( \frac{\pi\beta}{2} \right) \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{\pi\sigma}{2} \left( 1 + 3C_1 \cos\left( \frac{\pi\beta}{2} \right) \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) \right), \\
\omega_2(\sigma + i0) &= \theta_2(\sigma) + i\tau_2(\sigma) = \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin \frac{\pi\beta}{2} \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + \frac{i}{3} \ln \frac{\pi\sigma}{2} - iC_1 + iC_1 \cos \frac{\pi\beta}{2} \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}), \\
\frac{d\theta_2}{d\sigma} &= C_1 \frac{\pi}{2} \beta \sin \frac{\pi\beta}{2} \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^{\beta-1} - \frac{\pi}{6} + O(\sigma^\beta),
\end{aligned}$$

$$\frac{d\tau_2}{d\sigma} = \frac{1}{3\sigma} + C_1 \frac{\pi}{2} \beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^{\beta-1} + O(\sigma^\beta).$$

Отметим также, что вследствие того, что  $\theta$  – нечетная,  $\tau$  – четная по  $\sigma$  функции, значения  $\theta_1(0)=0, \frac{d\tau_1}{d\sigma}(0)=0$ . Подставив полученные выражения в (2.2.3), получим:

$$\begin{aligned} & e^{-3C_1+3\tau_1(\sigma)} \frac{\pi\sigma}{2} \left( 1 + 3C_1 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) \right) \times \\ & \times \left[ \frac{1}{3\sigma} + C_1 \frac{\pi}{2} \beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^{\beta-1} + O(\sigma^\beta) + \frac{d\tau_1}{d\sigma}(\sigma) \right] = \\ & = \frac{1}{Fr^2} \sin \left[ \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) + \theta_1(\sigma) \right], \\ & e^{-3C_1+3\tau_1(0)+O(\sigma^2)} \left( 1 + 3C_1 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) \right) \times \\ & \times \left[ \frac{\pi}{6} + C_1 \frac{\pi}{2} \beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) \right] = \\ & = \frac{1}{Fr^2} \left[ \sin \frac{\pi}{6} \cos \left( -\frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) + \frac{d\theta_1}{d\sigma}(0)\sigma \right) + \right. \\ & \left. + \cos \frac{\pi}{6} \sin \left( -\frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) + \frac{d\theta_1}{d\sigma}(0)\sigma \right) \right], \\ & \frac{\pi}{6} + C_1 \frac{\pi}{2} \beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + \frac{\pi}{6} 3C_1 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) = \\ & = e^{3C_1-3\tau_1(0)} \frac{1}{Fr^2} \left[ \sin \frac{\pi}{6} \left( 1 + O(\sigma^{2\beta}) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \cos \frac{\pi}{6} \left[ -\frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin \left( \frac{\pi\beta}{2} \right) \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) + \frac{d\theta_1}{d\sigma}(0)\sigma \right].$$

Получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{6} + C_1 \frac{\pi}{2} (1+\beta) \cos \frac{\pi\beta}{2} \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) = \\ & = e^{3C_1 - 3\tau_1(0)} \frac{1}{Fr^2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{d\theta_1}{d\sigma}(0)\sigma - \frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin \left( \frac{\pi\beta}{2} \right) \left( \frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) \right) \right]. \end{aligned}$$

При приравнении членов одного порядка  $O(1)$  и  $O(\pi/2 - \sigma)^\beta$  получаются равенства

$$C_1 - \tau_1(0) = -\frac{1}{3} \ln \left( \frac{3}{\pi} \frac{1}{Fr^2} \right), \quad (2.2.5)$$

$$(\beta + 1) \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2.2.6)$$

При решении уравнения (2.2.6) определяется значение  $\beta \approx 0,80267907$ .

Форма свободной поверхности определялась с помощью численного интегрирования выражения

$$\frac{dZ}{h} = dz = dx + idy = e^{i\omega} dw = -e^{i\omega(\chi)} d\chi.$$

Для численного интегрирования применялась формула средних прямоугольников с последующей фильтрацией до достижения точности порядка  $10^{-15}$ .

### 2.3. Численное решение

Численно задача решалась методом коллокаций. Уравнение (2.1.1) удовлетворялось в отдельных точках оси  $BA'$  ( $\sigma_m = Fm/n$ ,  $m = \overline{0, n-1}$ ). Кроме того, должно выполняться уравнение (2.2.5). Получаемая при этом система  $n+1$  нелинейных уравнений относительно параметров  $Fr$ ,  $C_1$ ,  $\theta_m$  ( $m = \overline{0, n-1}$ )

решалась методом Ньютона [6] с регулированием шага путем минимизации суммы квадратов невязок по всем уравнениям. Поиск решения прекращался, когда невязки по модулю не превышали  $10^{-30}$ . Для решения использовались числа с длиной мантииссы около 35 десятичных разрядов. Отметим, что узловые точки задавались неравномерно в соответствии с формулой

$$\sigma_m = \frac{\sigma_n}{M + \alpha} \left[ (M - 1) \left( \frac{m}{n} \right)^{\alpha+1} + (\alpha + 1) \frac{m}{n} \right]$$

при значениях  $\sigma_n = 40$ ,  $M = 1000$ ,  $\alpha = 3$ , подобранным экспериментально. При  $\alpha > 0$  отношение густоты расположения узловых точек в конце и начале сетки

$$\frac{d\sigma_m/dm(n)}{d\sigma_m/dm(0)} = M.$$

### **Численные результаты**

Безразмерными параметрами, характеризующими солитон [90] являются:

– амплитуда 
$$a = y_B - 1 = \frac{Fr^2}{2},$$

– масса 
$$m = \frac{M}{\rho h^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [y(x) - 1] dx,$$

– импульс 
$$i = \frac{I}{\rho \sqrt{gh^5}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_1^{y(x)} \left( 1 - \frac{V_x}{V_\infty} \right) dy,$$

– потенциальная энергия 
$$u = \frac{U}{\rho gh^3} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (y(x) - 1)^2 dx,$$

– кинетическая энергия 
$$t = \frac{T}{\rho gh^3} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_1^{y(x)} \left( \left( 1 - \frac{V_x}{V_\infty} \right)^2 + \left( \frac{V_y}{V_\infty} \right)^2 \right) dy,$$

– циркуляция 
$$c = \frac{C}{\rho \sqrt{gh^3}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \sqrt{\left( 1 + y'(x)^2 \right) \left( 1 - \frac{2}{Fr^2} (y(x) - 1) \right)} \right] dx.$$

Здесь  $\rho$  – это плотность жидкости.

В соответствии с [90] между параметрами существует связь:

$$i = mFr, \quad t = (i - c) \frac{Fr}{2}, \quad u = \left( Fr^2 - 1 \right) \frac{m}{3}.$$

#### 2.4. Анализ и валидация математической модели на основе численной фильтрации

Для оценки погрешности и уточнения численных результатов использовалась численная фильтрация данных, полученных для различного количества точек коллокаций  $n$ , на основе априорной модели зависимости результата вычисления  $z_n$  искомой величины  $z$  от параметра  $n$  (1.2.1).

С помощью фильтрации удалось подавить несколько регулярных компонент и уменьшить погрешность искомого параметра  $Fr$ .

Для фильтрации использовалась комбинация формул Эйткена и Ричардсона. Значения  $k_j$  определялись по формуле Эйткена [32, 82]

$$Q^{k_j} \approx \frac{z_{n_{i-1}}^{(j-1)} - z_{n_{i-2}}^{(j-1)}}{z_{n_i}^{(j-1)} - z_{n_{i-1}}^{(j-1)}} \text{ для } Q = 2. \text{ Это дало возможность определить значения}$$

$k_j = 4, 5, \dots$ . Затем использовалась формула фильтрации (1.2.2).

Для независимой проверки использовался  $\varepsilon$ -алгоритм [32, 82]. Оценки, полученные двумя методами, сравнивались на предмет отсутствия противоречий.

Оценки погрешностей получались в виде разности вычисленных или отфильтрованных результатов с выбранным значением эталона  $\Delta = \left| z_{n_i}^{(j)} - z_{et} \right|$ .

Результаты расчетов и фильтрации приведены на рис. 2.4.1 и рис. 2.4.2.

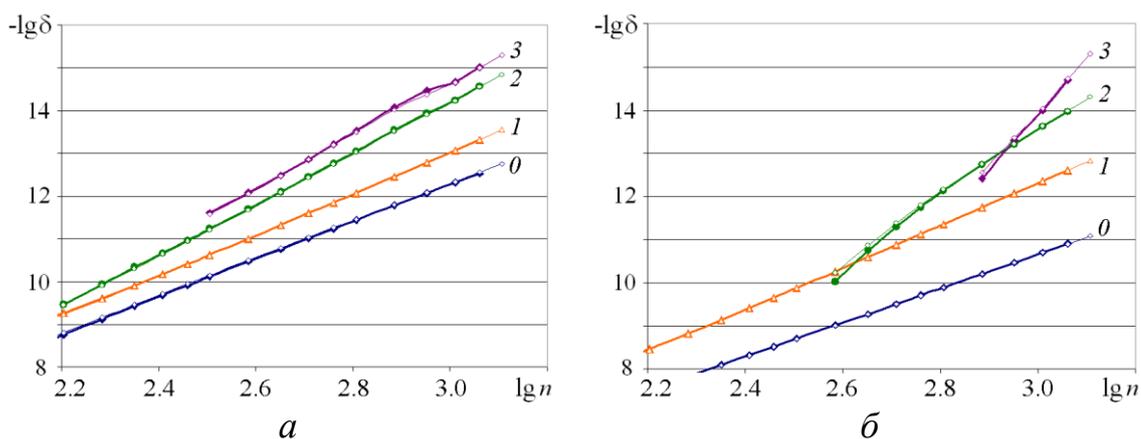


Рис. 2.4.1. Результаты фильтрации параметров солитона Стокса:  
 $a$  – числа Фруда;  $\bar{b}$  – потенциальной энергии

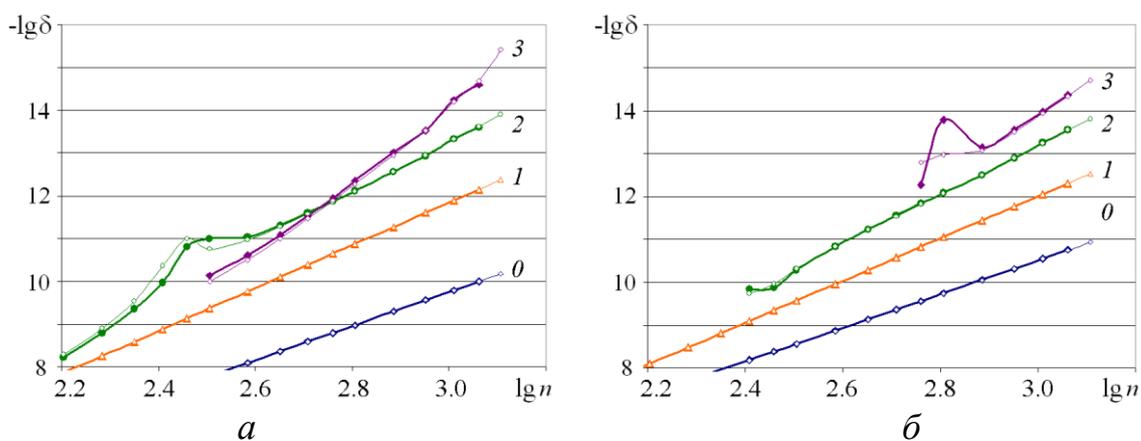


Рис. 2.4.2. Результаты фильтрации параметров солитона Стокса:  
 $a$  – циркуляции;  $\bar{b}$  – массы

Результаты, вычисленные предложенным методом, представлены в табл. 2.4.1 (колонки 4, 5).

Таблица 2.4.1. Результаты вычислений и фильтраций

	Шерыхалина & Житников, 2001 (вычисленные)	Шерыхалина & Житников, 2001 (отфильтрованные)	Результаты применения предлож. метода (вычисленные)	Результаты применения предлож. метода (отфильтрованные)
$Fr$	1.290890455863	1.2908904558634	1.2908904558635	1.290890455863341
$a$	0.833199084519	0.8331990845196	0.8331990845197	0.833199084519532
$m$	1.9703206602	1.9703206601317 (-2)	1.97032066009	1.97032066013185
$i$	2.5434681352	2.5434681351545	2.54346813510	2.54346813515454
$c$	1.7145692406	1.7145692405337 (2)	1.7145692405	1.71456924053350
$t$	0.5350088360	0.5350088359709	0.53500883596	0.53500883597099
$u$	0.43767269344	0.4376726934439	0.437672693441	0.43767269344390

Полученные в этой работе результаты сравнивались с полученными ранее в [95] (табл. 2.4.1, колонки 2, 3). Проверке подлежали декларированные в [95] оценки погрешности числа Фруда не более одной единицы 13-го разряда, а других параметров – порядка двух-трех единиц 13-го разряда. Это и было главной целью данного раздела: проверить, **насколько оценки и уточнения, полученные с помощью численной фильтрации, соответствуют истине.** Проверка показала, что погрешность числа Фруда и других параметров, кроме массы и циркуляции не превосходят  $10^{-13}$ . Погрешности массы и циркуляции не превосходят  $2 \cdot 10^{-13}$ . Тем самым, оценки, полученные в [95] полностью **подтвердились де-факто** с помощью более точного решения, полученного другим методом. Отметим, что согласно главе 1, линия, соответствующая последней фильтрации, служит только для оценки размытости, а оценка погрешности берется с предпоследней линии.

На рис. 2.4.1 и рис. 2.4.2 для фильтрации использованы последовательности  $z_{n_i}$ , начинающиеся с 5, 6, 7, 8 при дальнейшем удваивании предыдущих значений. Это позволило определить наиболее точное значение числа Фруда до двух-трех единиц 15 разряда, а массы и циркуляции около двух-трех единиц 14 разряда. Эти оценки подтверждаются наложением толстых линий, полученных в результате фильтрации последовательностей разностей  $z_{n_i} - z_{n_{i+1}}$  (для исключения из них искомого) на результат сравнения с эталоном.

## 2.5. Решение задачи с краевыми условиями в дифференциальном виде

Последние оценки были получены при помощи интеграла Шварца с интегральным условием (уравнение Бернулли) на границе. Это позволило уточнить значение числа  $Fr$  до  $2 \cdot 3 \cdot 10^{-15}$ . Чтобы проверить этот результат, необходимо получить независимый результат с помощью применения другого метода решения. Для этого необходимо увеличить точность вычисляемых значений и разрядность мантиссы машинного слова. Для решения использовались числа с длиной мантиссы около 35 десятичных разрядов.

### ***Численное решение***

Численно задача решалась методом коллокаций. Уравнение (2.2.3) удовлетворялось в отдельных точках оси  $BA'$  ( $\sigma_m = F m/n$ ,  $m = \overline{0, n-1}$ ). Кроме того, должно выполняться уравнение (2.2.5). Получаемая при этом система  $n+1$  нелинейных уравнений относительно параметров  $Fr$ ,  $C_1$ ,  $\theta_m$  ( $m = \overline{1, n-1}$ ) решалась методом Ньютона с регулированием шага путем минимизации суммы квадратов невязок по всем уравнениям. Поиск решения прекращался, когда невязки по модулю не превышали  $10^{-20}$ .

### ***Анализ и проверка предшествующих результатов***

На рис. 2.5.1 представлены результаты фильтрации данных, полученных этим методом решения задачи. Использование этого метода и расширенной мантиссы позволило уменьшить погрешность до  $10^{-16}$  (рис. 2.5.1). Сравнение со значением, полученным в [95] показало отличие около  $-1,5 \cdot 10^{-15}$ .

Тем самым, оценки, полученные ранее, были подтверждены, и получено новое значение числа Фруда, равное  $Fr = 1,2908904558633395 \pm 10^{-16}$ . Кроме того, была разработана программная реализация используемого численного метода, позволившая значительно увеличить скорость вычисления.

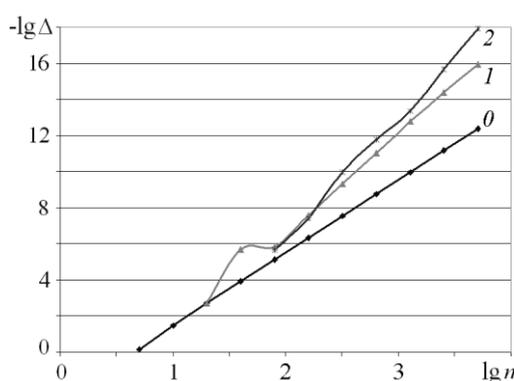


Рис. 2.5.1. Результаты фильтрации числа Фруда, полученные в разделе 2.2

## **2.6. Описание алгоритма и программной реализации**

На рис. 2.6.1 приведена структура типового алгоритма решения рассмотренных выше задач методом, использующим функцию Жуковского.

При решении задач методом коллокаций основным элементом является решение системы нелинейных уравнений.

При решении задач с помощью интеграла Шварца ускорение достигается за счет предварительного вычисления значений функций в узловых точках и вычисления их комбинаций при расчете Якобиана.

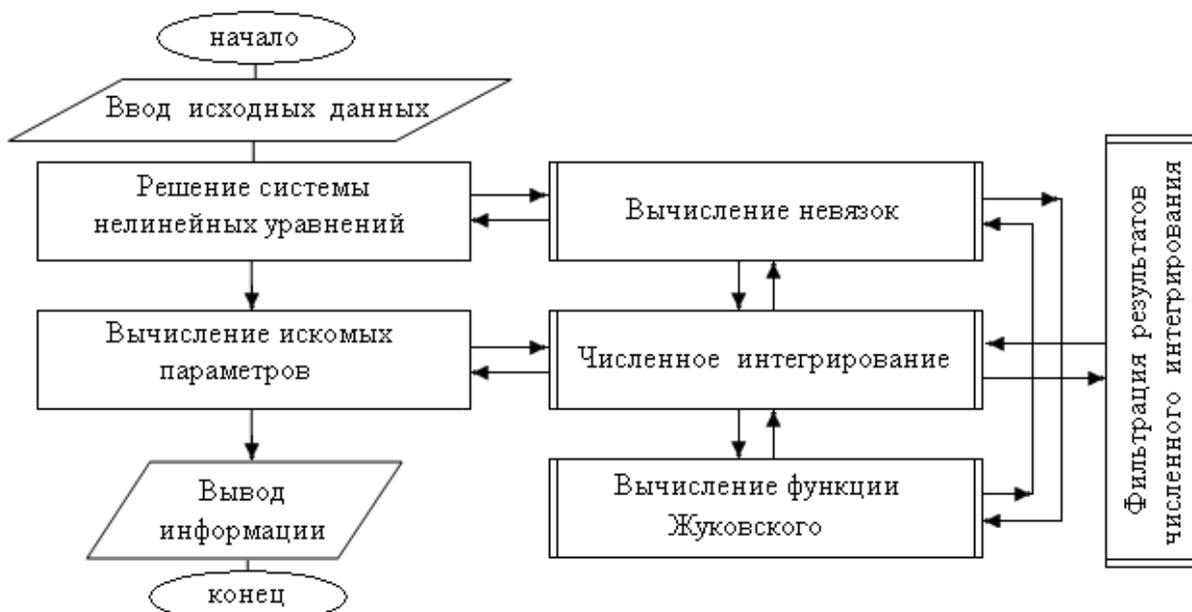


Рис. 2.6.1 Блок-схема алгоритма решения задачи

Создание программного комплекса предполагает объединение набора программ на основе установления информационных связей между различными программными модулями (расчетными и постпроцессорной обработки).

При работе расчетных модулей, решающих вычислительные задачи, создается протокол работы программы: набор блоков информации – отчетов о работе программно-алгоритмической единицы (решения уравнений, численного интегрирования и т.п.), снабженных меткой для возможности идентификации данного блока и организованных по оговоренному для каждого типа блоков правилу.

### ***Программная реализация метода***

Для достижения поставленных целей необходимо проводить вычислительный эксперимент, используя данные повышенной разрядности. Для проведения эксперимента была написана программа на языке C++. В C++ существуют два типа данных с плавающей точкой: `float` и `double`. У типа данных `float` размер занимаемой памяти в два раза меньше, чем у типа данных `double`. Если добавить к названию типа `double` приставку `long`, то получится тип с плавающей точкой повышенной точности. Однако, при рассмотрении тестовых примеров элементарных вычислений (например, 1 разделить на 3) было выявлено, что этот тип данных при вычислении дает не более 14-16 значащих цифр. Поэтому особенностью программной реализации решения поставленной задачи является использование типа данных `float128` – формат представления чисел с плавающей запятой, занимающий в памяти четыре последовательных ячейки (компьютерных слова; в случае 32-битного компьютера – 128 бит или 16 байт). Данный тип поддерживается не во всех компиляторах, поэтому применялся компилятор `gcc version 4.8.2 20140120 (Red Hat 4.8.2-15)` с подключением библиотеки «`<<quadmath.h>>`».

### **Выводы по главе 2**

Таким образом, фильтрация, выполняемая на этапе постпроцессорной обработки данных численного эксперимента, дает возможность получить достоверные оценки погрешности и существенно повысить точность и эффективность численных алгоритмов. Тестирование с помощью точных или приближенных (полученных другим способом) частных решений позволяет подтвердить или опровергнуть эти оценки. Тем самым, увеличивается надежность численных данных и выводов, основанных на оценках.

Были разработаны два метода решения задачи о солитоне Стокса, позволяющие сравнивать полученные данные с более ранними и между собой. Этим показано, что оценкам, полученным методом фильтрации, можно доверять.

Следует отметить, что три задачи имеют интерес при оценке погрешностей с практической точки зрения. Первая – определение диапазона параметра дискретизации  $n$  и погрешности  $\delta$ , где оценка погрешности по более простым правилам (типа Рунге и Ромберга) дает приемлемые результаты. Вторая задача состоит в том, чтобы обеспечить максимально возможную точность эталона для данного эксперимента и найти его оценку погрешности. Третья задача – исследование компонент погрешности для поиска несовершенностей и ошибок в программе и улучшении численных алгоритмов. Все эти задачи решаются методами фильтрации.

Исследование зависимостей погрешностей от числа дискретизации  $n$  (например, числа узлов коллокации) позволяет описать их различное поведение в трех диапазонах. При малых  $n$  имеет место область хаоса, вызванного грубой аппроксимацией; далее следует область преобладания регулярных компонент погрешности, которые могут быть фильтрованы. При больших  $n$  преобладает погрешность округления. Границы областей определяются экспериментально.

### Глава 3. Моделирование и комплексное исследование процессов ЭХО с применением фильтрации для постпроцессорной обработки результатов вычислительного эксперимента.

#### 3.1. Задача предельно-квазистационарного копирования круглого электрод-инструмента. Постановка задачи

Рассмотрим задачу электрохимической обработки с помощью электрода-инструмента (ЭИ) круглой формы (рис. 3.1.1, *а*). ЭИ заглабляется в изначально плоскую заготовку со скоростью  $V_{et}$  перпендикулярно к поверхности. Форма межэлектродного пространства (МЭП) показана на рис. 3.1.1, *б*. Здесь  $FA'$  и  $GB'$  – берега условного разреза, проведенного по линии тока, уходящей на бесконечность (т.е.  $A, A', B, B'$  – одна точка, удаленная на бесконечность). Начальный межэлектродный зазор (расстояние  $CD$ ) равен  $S_0$ , разность потенциалов между электродами равна  $U$ .

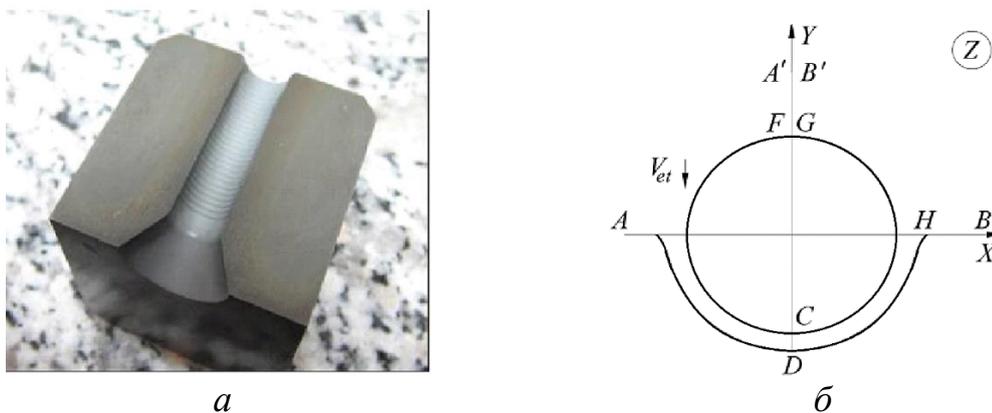


Рис. 3.1.1 Копирование круглого ЭИ: *а* – экспериментальный образец [22];  
*б* – расчетная схема (физическая плоскость  $Z$ )

На плоскости комплексного потенциала  $W = \Phi + i\Psi$  эквипотенциальным поверхностям катода  $FCG$  и анода  $ADB$  соответствуют вертикальные отрезки  $\Phi = -U$  и  $\Phi = 0$  соответственно (рис. 3.1.2, *а*). Линиям тока  $FA'$  и  $GB'$  соответствуют горизонтальные отрезки. Тем самым образом области МЭП является прямоугольник.

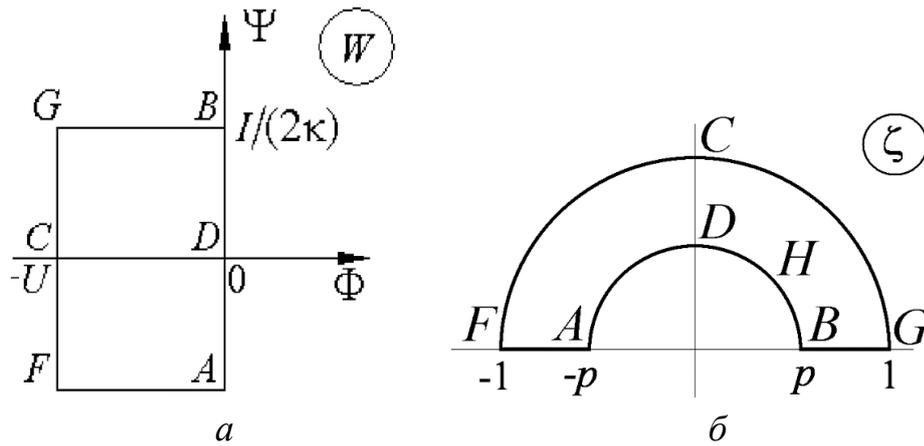


Рис. 3.1.2. Область межэлектродного пространства на плоскостях:  $a$  – комплексного потенциала;  $b$  – параметрической плоскости  $\zeta$

Конформно отобразим область МЭП на полукольцо плоскости  $\zeta$  (рис. 3.1.2,  $b$ ). Тогда связь плоскостей  $\zeta$  и  $W$  осуществляется функцией

$$W = \frac{U}{\ln p} \ln \zeta - U - i \frac{U}{\ln p} . \quad (3.1.1)$$

Перейдем к безразмерным величинам  $x, y, \tau, w$ :

$$x = X/l, \quad y = Y/l, \quad \tau = \frac{V_{et}}{l} t = k\eta_0 U t / l^2, \quad w = W/U,$$

где  $l = k\eta_0 U / V_{et}$  (величина стационарного зазора в задаче об обработке плоским горизонтальным ЭИ). При этом

$$v_{et} = -\frac{dy_{A'}}{d\tau} = -\frac{1}{l} \frac{l}{V_{et}} \frac{dY_{A'}}{dt} = \frac{V_{et}}{V_{et}} = 1.$$

В общем случае режим обработки характеризуется числом  $\alpha = \frac{E_0}{E_1} = \frac{j_0}{j_1}$ ,

где  $E_0 = V_{et} / (k\eta_0)$ ,  $E_1 = j_1 / \kappa$ . В обычном режиме  $\alpha = \infty$ , в предельном  $\alpha = 1$ . При  $\alpha = 1$  достигается наивысшая степень локализации процесса растворения [22].

Рассмотрим случай  $\alpha = 1$ . На рис. 3.1.3,  $a$  показана плоскость годографа безразмерной напряженности  $\bar{E} = dw/dz$ , где ввиду симметрии изображена только правая половина области, соответствующая правой половине области

плоскости  $z$ . Области анода соответствует разрез по дуге окружности  $|\bar{E}|=1$   $DMH$  и части вертикальной прямой  $HВ$  (рис. 3.1.3, *a*).

Поскольку при  $|\bar{E}| < 1$  растворения не происходит, а значение  $|\bar{E}|=1$  является максимальным, на всех участках, где растворение происходит, в данном процессе  $|\bar{E}|=1$ . Это позволяет получать решения, соответствующие различным моментам времени  $\tau$  не решая нестационарной задачи, т.е. квазистационарно, аналогично [25]. При  $\alpha=1$  квазистационарное решение данной задачи до определенного момента времени является точным, а не приближенным к нестационарному.

Для упрощения решения рассмотрим плоскость изменения функции Жуковского (логарифмический годограф)  $\omega = i \ln \frac{dw}{dz}$  (рис. 3.1.3, *б*). При этом все участки границы анода представляются частями прямых и окружности, граница катода – некоторой кривой.

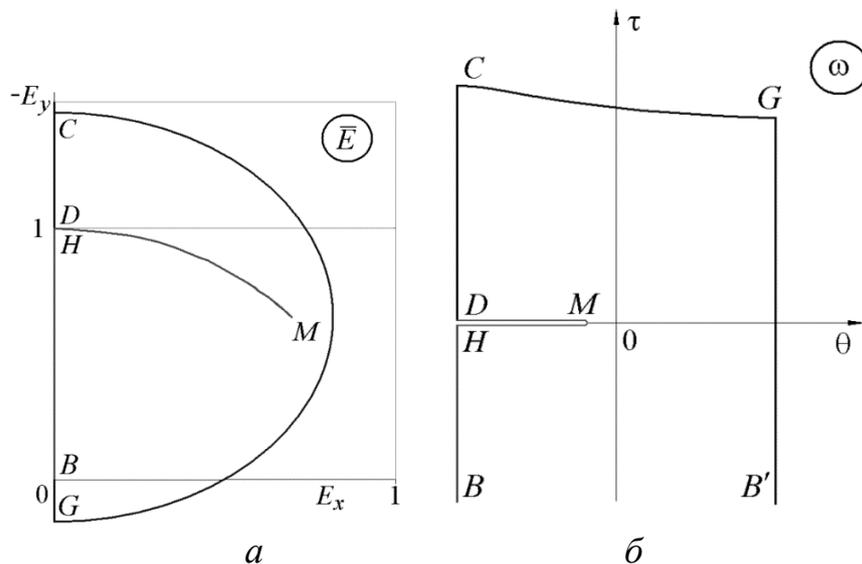


Рис. 3.1.3. Образы МЭП при квазистационарном решении для  $\alpha=1$ :  
*a* – на плоскости годографа напряженности; *б* – на плоскости  
 логарифмического годографа

Краевые условия для аналитической функции  $\omega(\xi)$ :

$$- \operatorname{Re} \omega = \theta = -\frac{\pi}{2} \text{ на } CD \text{ и } BH;$$

- $\operatorname{Re} \omega = \theta = \frac{\pi}{2}$  на  $B'G$ ;
  - $\operatorname{Im} \omega = \tau = 0$  на  $DMH$ ;
  - $|z - y_0| = r$  на  $CG$ ,
- (3.1.2)

где  $y_0, r$  – ордината центра и радиус окружности в безразмерном виде.

### 3.2. Численно-аналитический метод решения

Для решения задачи рассмотрим сначала область плоскости логарифмического годографа, заменив криволинейный участок границы некоторой другой кривой (рис. 3.2.1, *a*), т.е. снимем условие (3.1.2).

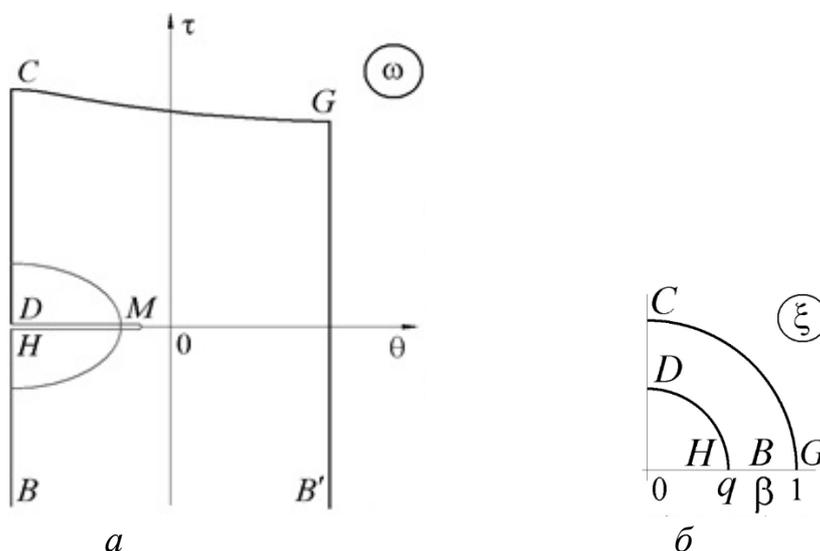


Рис. 3.2.1 Образы МЭП для вспомогательного решения:  
*a* – на плоскости логарифмического годографа напряженности;  
*б* – на параметрической плоскости  $\xi$

Используем область параметрического переменного  $\xi$  в виде четверти кольца с соответствием точек, указанном на рис. 3.2.1, *б*.

Функция

$$\omega_0(\xi) = i \ln(\xi^2 - \beta^2) + iC_0 + \frac{\pi}{2} \quad (3.2.1)$$

отображает четверть круга плоскости  $\xi$  на вертикальную криволинейную полуполосу  $\omega$  без разреза. При этом четверть кольца  $\xi$  отобразится на вертикальную полуполосу  $\omega$  с выемкой (рис. 3.2.1, *a*). Для преобразования

выемки в разрез используем функцию, имеющую нулевые значения действительной части на действительном и мнимом радиусе и нулевые значения мнимой части на окружности  $\xi = e^{i\sigma}$ . В силу этого используем сходящийся ряд Лорана [48]

$$\omega_1(\xi) = i \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} (\xi^{2m} - \xi^{-2m}). \quad (3.2.2)$$

*Примечание.* При таких условиях функция  $\omega_1(\xi)$  в соответствии с принципом симметрии может быть аналитически продолжена на все кольцо, и как аналитическая в кольце функция представлена в виде сходящегося ряда Лорана.

Для определения коэффициентов  $c_{2m}$  разложим логарифм в  $\omega_0(\xi)$  (3.2.1) в степенной ряд при  $\xi = qe^{i\sigma}$

$$\omega_0(qe^{i\sigma}) = iC_0 + 2i \ln \beta - \frac{\pi}{2} - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{\beta^{2m}} e^{2mi\sigma}. \quad (3.2.3)$$

Условием на участке границы  $\xi = qe^{i\sigma}$  является равенство нулю мнимой части суммы

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [\omega_0(qe^{i\sigma}) + \omega_1(qe^{i\sigma})] &= C_0 + 2 \ln \beta - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{\beta^{2m}} \cos 2m\sigma + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} (q^{2m} - q^{-2m}) \cos 2m\sigma = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$C_0 = -2 \ln \beta, \quad c_{2m} = \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{\beta^{2m} (q^{2m} - q^{-2m})}.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \omega_0(\xi) + \omega_1(\xi) = & i \ln(\xi^2 - \beta^2) - 2i \ln \beta + \\ & + \frac{\pi}{2} - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{\beta^{2m}(q^{2m} - q^{-2m})} (\xi^{2m} - \xi^{-2m}). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Функция (3.2.4) решает задачу обработки с помощью ЭИ некоторой криволинейной (незамкнутой в общем случае) формы. Для круглого ЭИ эту функцию необходимо модифицировать путем добавления третьего слагаемого  $\omega_2(\xi)$ . Функция  $\omega_2(\xi)$  должна удовлетворять условиям:  $\operatorname{Re} \omega = \theta = 0$  на  $CD$ ,  $BH$  и  $B'G$ ;  $\operatorname{Im} \omega = \tau = 0$  на  $DMH$ . При таких условиях функция  $\omega_2(\xi)$  согласно принципу симметрии может быть аналитически продолжена на все кольцо, и представлена в виде сходящегося ряда Лорана

$$\omega_2(\xi) = i \sum_{m=1}^{\infty} d_{2m} \left( \frac{\xi^{2m}}{p^{2m}} - \frac{p^{2m}}{\xi^{2m}} \right). \quad (3.2.5)$$

Коэффициенты  $d_{2m}$  должны выбираться так, чтобы в результате использования функции

$$\omega(\xi) = \omega_0(\xi) + \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi)$$

удовлетворялось условие (3.1.2).

Остается найти связь двух параметрических плоскостей  $\zeta$  (рис. 3.1.2) и  $\xi$  (рис. 3.2.1, б). Для этого отобразим правую четверть кольца  $\zeta$  на полосу  $\chi$  [24] (рис. 3.2.2, а). Сначала развернем четверть в полукольцо  $\zeta_1 = \zeta^2$  ( $p_1 = p^2$ ), затем используем способ, аналогичный (3.2.2) – (3.2.4)

$$\begin{aligned} \chi(\zeta_1) = & \frac{1}{\pi} \left( \ln \frac{\zeta_1 - 1}{\zeta_1 + 1} - i \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \times \\ & \times \frac{p_1^{2m-1}}{p_1^{2m-1} - p_1^{-2m+1}} \left( \zeta_1^{2m-1} + \zeta_1^{-2m+1} \right) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\gamma = \chi(p_1), \quad \frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{d\chi}{d\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{d\zeta} = \frac{1}{\pi} \frac{2\zeta}{\zeta_1^2 - 1} +$$

$$+ \frac{4\zeta}{\pi\zeta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_1^{2m-1}}{p_1^{2m-1} - p_1^{-(2m-1)}} (\zeta_1^{2m-1} - \zeta_1^{-2m+1}). \quad (3.2.7)$$

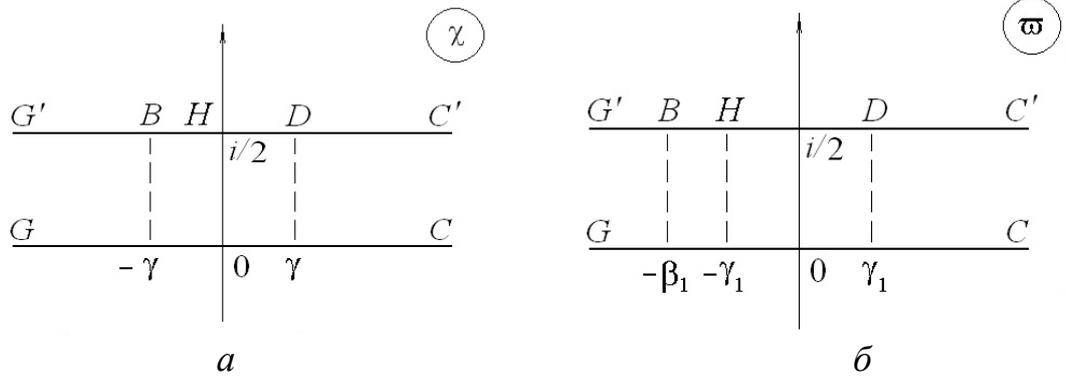


Рис. 3.2.2. Формы образов МЭП на параметрических плоскостях  $\chi$  и  $\varpi$

Производная комплексного потенциала, согласно (3.1.2), равна

$$\frac{dw}{d\chi} = \frac{1}{\ln p} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{d\chi}{d\zeta} \right)^{-1}. \quad (3.2.8)$$

Аналогично отобразим  $\xi$  на полосу  $\varpi$ . Для этого сначала развернем четверть кольца в полукольцо  $\xi_1 = \xi^2$  ( $q_1 = q^2$ ), а затем применим преобразование, аналогичное (3.2.6)

$$\varpi(\xi_1) = \frac{1}{\pi} \left( \ln \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1} - i \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \times$$

$$\times \frac{q_1^{2m-1}}{q_1^{2m-1} - q_1^{-2m+1}} (\zeta_1^{2m-1} + \zeta_1^{-2m+1}), \quad (3.2.9)$$

$$\gamma_1 = \varpi(q_1), \quad -\beta_1 = \varpi(\beta^2),$$

$$\frac{d\varpi}{d\xi} = \frac{d\varpi}{d\xi_1} \frac{d\xi_1}{d\xi} = \frac{1}{\pi\xi_1} \frac{2\xi}{\xi_1^2 - 1} +$$

$$+ \frac{2\xi}{\pi\xi_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_1^{2m-1}}{q_1^{2m-1} - q_1^{-(2m-1)}} (\xi_1^{2m-1} - \xi_1^{-2m+1}). \quad (3.2.10)$$

Связь  $\varpi$  и  $\chi$  сводится к сдвигу. Согласно рис. 3.2.2, чтобы середина между  $B$  и  $D$  ( $\gamma_1 - \beta_1$ )/2 перешла в 0 на плоскости  $\chi$ , необходим сдвиг

$$\chi = \varpi - \frac{\gamma_1 + \beta_1}{2}. \quad (3.2.11)$$

Связь параметров  $p$  и  $q$  можно установить, отобразив  $\chi$  и  $\varpi$  на верхнюю полуплоскость  $t_1$  (рис. 3.2.3).

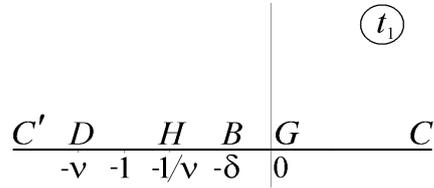


Рис. 3.2.3. Параметрическая плоскость  $t_1$

Тогда

$$\varpi = \frac{1}{2\pi} \ln t_1, \quad (3.2.12)$$

$$\varpi_D = \frac{i}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln v, \quad \varpi_H = \frac{i}{2} - \frac{1}{2\pi} \ln v, \quad \varpi_B = \frac{i}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln \delta, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \ln v,$$

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \ln t_1 + C, \quad \chi_D = \frac{i}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln v + C, \quad \chi_B = \frac{i}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln \delta + C.$$

Поскольку  $\operatorname{Re} \chi_D = -\operatorname{Re} \chi_B$ , то

$$C = -\frac{1}{4\pi} (\ln v + \ln \delta), \quad \gamma = \operatorname{Re} \chi_D = \frac{1}{4\pi} (\ln v - \ln \delta), \quad \chi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t_1}{\sqrt{v\delta}}. \quad (3.2.13)$$

Исключим  $t_1$  из (3.2.12) и (3.2.13)

$$t_1 = e^{2\pi\varpi} = \sqrt{v\delta} e^{2\pi\chi},$$

$$\varpi = \chi + \frac{1}{4\pi} \ln v\delta, \quad \chi = \varpi - \frac{1}{4\pi} \ln v\delta, \quad (3.2.14)$$

$$\gamma = \operatorname{Re} \chi_D = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{v}{\delta}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \ln v, \quad v = e^{2\pi\gamma_1}, \quad \delta = v e^{-4\pi\gamma} = e^{2\pi(\gamma_1 - 2\gamma)},$$

$$v\delta = e^{2\pi\gamma_1} e^{2\pi(\gamma_1 - 2\gamma)} = e^{4\pi(\gamma_1 - \gamma)}.$$

Связь  $\chi$  и  $\varpi$

$$\chi = \varpi - \frac{1}{4\pi} \ln v\delta = \varpi - \gamma_1 + \gamma. \quad (3.2.15)$$

Тем самым с учетом (3.2.11), получим уравнение, связывающее  $p$  и  $q$

$$\gamma = \frac{\gamma_1 - \beta_1}{2}. \quad (3.2.16)$$

Согласно (3.2.15) и (3.2.8) производные

$$\frac{d\chi}{d\varpi} = 1, \quad \frac{dw}{d\varpi} = \frac{dw}{d\chi} \frac{d\chi}{d\varpi} = \frac{1}{\ln p} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{d\chi}{d\zeta} \right)^{-1},$$

$$\frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{d\varpi} \frac{d\varpi}{d\xi} = \frac{1}{\ln p} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{d\chi}{d\zeta} \right)^{-1} \frac{d\varpi}{d\xi}. \quad (3.2.17)$$

Тогда дифференциал

$$dz = e^{i\omega(\xi)} \frac{dw}{d\xi} d\xi. \quad (3.2.18)$$

Численно задача решалась методом коллокаций. Уравнение формы ЭИ (3.1.2) удовлетворялось в отдельных точках  $\xi_m = e^{i\sigma_m}$ ,  $\sigma_m = \pi m / (2n)$ ,  $m = \overline{0, n-1}$ , а в сумме (3.2.6) сохранялось конечное число  $n$  слагаемых. Кроме того, требовалось выполнение уравнения замкнутости (при обходе ЭИ) и уравнения, задающего положение ЭИ относительно исходной поверхности анода. Получаемая при этом система  $n+2$  нелинейных уравнений относительно параметров  $d_m$  ( $m = \overline{1, n}$ ),  $q$ ,  $\beta$  решалась методом Ньютона с регулированием шага. На каждом шаге вычисления невязок решалось уравнение (3.2.16). Для

установления связи значений  $\xi_m$  и  $\zeta_m$  сначала определялись значения  $\varpi(\xi_m)$ , затем решалось уравнение (3.2.15)  $\chi(\zeta_m) = \varpi(\xi_m) - \gamma_1 + \gamma$ .

### 3.3. Численные результаты

На рис. 3.3.1 и рис. 3.3.2 приведены формы анодной поверхности в различные моменты времени  $\tau=1,2,\dots,r+1$  (кривые 1, 2, ...) для  $r=5$  и 10, что соответствует сдвигу ординаты центра круглого ЭИ  $y_0$  вниз от начального положения  $y_0(\tau) = r + 1 - \tau$ . На рис. 3.3.1, а и рис. 3.3.2, а для сравнения показаны формы обрабатываемой поверхности при постоянном выходе по току ( $\alpha=\infty$ ), полученные при решении нестационарной задачи [24]. Рис. 3.3.1, б и рис. 3.3.2, б ( $\alpha=1$ ) показывают увеличение локализации растворения и приближение формы обрабатываемой поверхности (особенно, в верхней части) к экспериментальной (рис. 3.1.1, а). Вблизи точки, разграничивающей зону растворения от зоны его отсутствия, образуется решение, аналогичное решению гидродинамической задачи об отрыве свободной поверхности от прямолинейного щита, что впервые было обнаружено в [11]. В этом решении кривизна свободной поверхности в точке отрыва бесконечна. Остальная часть обрабатываемой поверхности при  $\alpha=1$  практически эквидистантна поверхности ЭИ.

При дальнейшем увеличении безразмерного времени, когда круглый ЭИ начинает заглубляться в тело заготовки, напряженность в верхней части обрабатываемой поверхности начинает уменьшаться. При этом некоторая часть искривленной поверхности перестает растворяться. Это означает, что процесс перестает быть квазистационарным. Квазистационарное решение в этом случае не будет правильно моделировать нестационарный процесс (рис. 3.3.3). Однако расчеты показывают, что до момента заглубления до середины ЭИ такого уменьшения напряженности не происходит и нестационарный процесс моделируется точно.

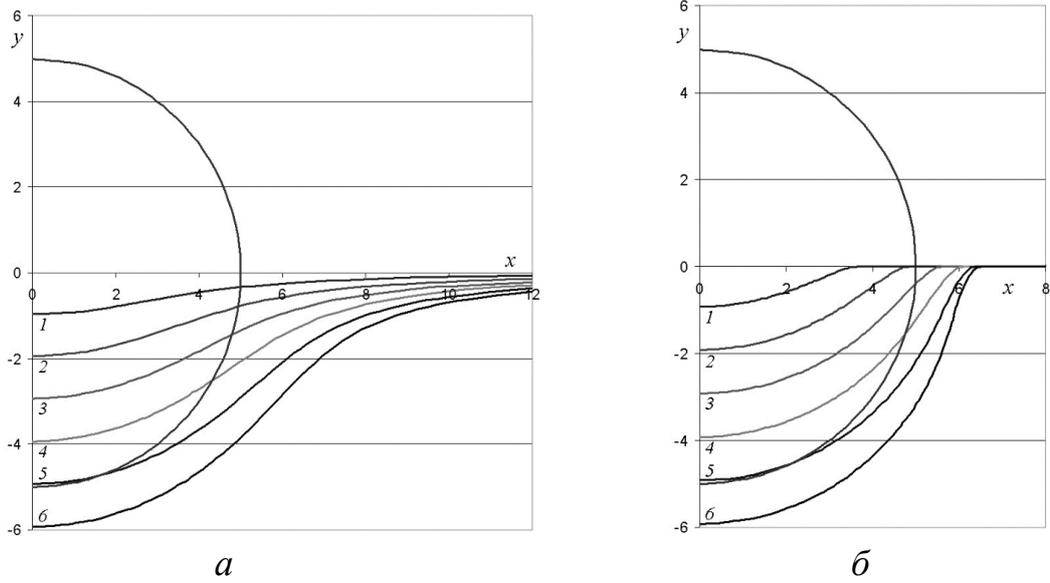


Рис. 3.3.1. Формы МЭП для  $r=5$ :  
 $a - \alpha = \infty$  [24];  $b - \alpha = 1$

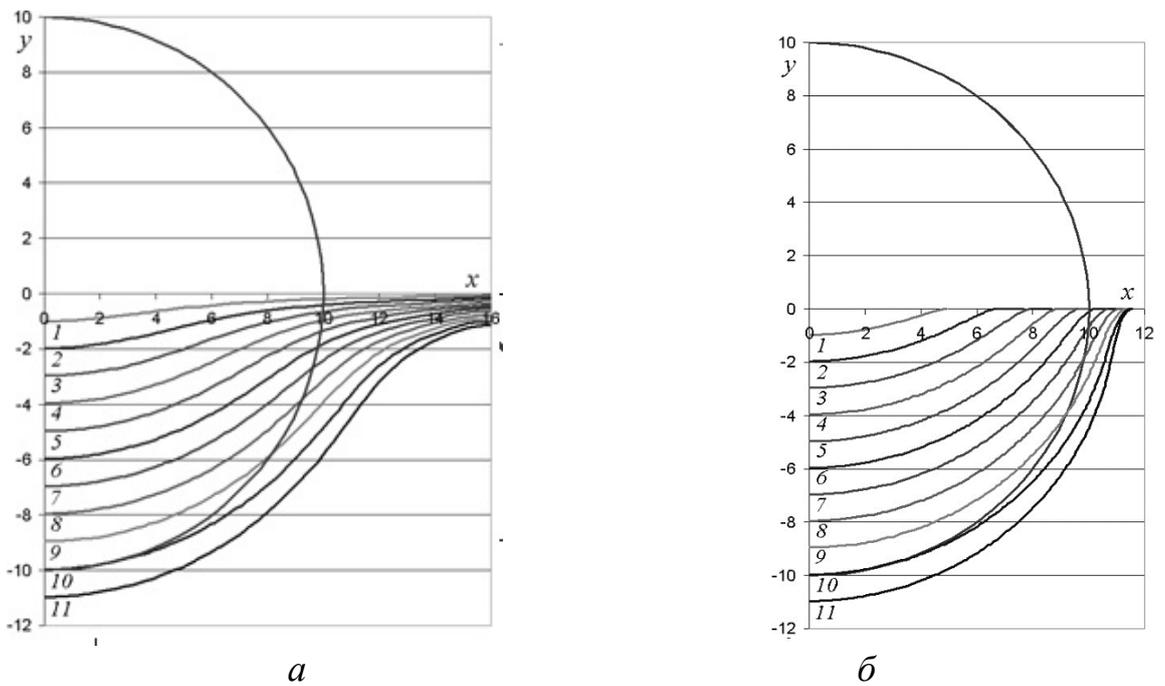


Рис. 3.3.2. Формы МЭП для  $r=10$ :  $a - \alpha = \infty$  [24];  $b - \alpha = 1$

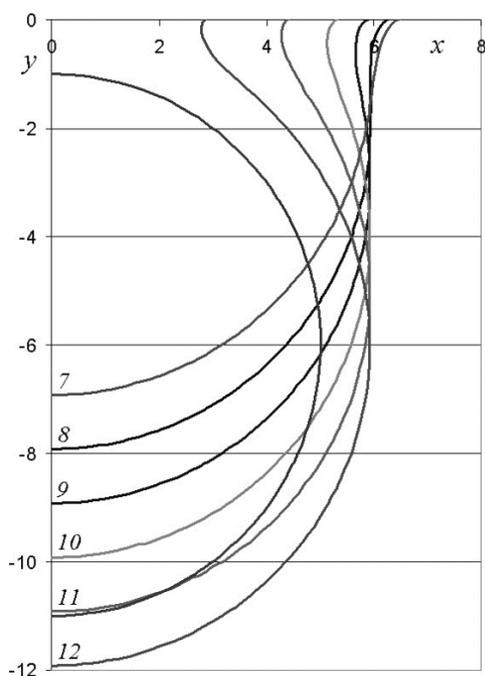


Рис. 3.3.3. Формы МЭП для  $r=5$ ,  $\alpha=1$  при  $y_0=-1, -2, \dots -6$

### 3.4. Осесимметричная задача об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите. Постановка и метод решения

Плоские задачи с монотонной зависимостью анодного потенциала  $\Phi_a(J)$  решались в [4, 5, 42] для двугранного и криволинейного бесконечного анода, при этом требование монотонности  $\Phi_a(J)$  было существенно для предложенных методов решения задач. В [36, 38, 56] при решении плоских задач с немонотонной зависимостью нормальной составляющей плотности тока  $J_n = F_1(\Phi_a)$  использовались степенные ряды, условие сходимости которых существенно ограничивает вид краевого условия. Вследствие этого в [36, 38, 56] использовалась упрощенная зависимость  $J_n = F_1(\Phi_a)$ , далекая от зависимости, аппроксимирующей экспериментальные данные [22, 68, 89]. В [16, 80] решены плоские задачи обработки точечным ЭИ с экспериментальной зависимостью  $J_n = F_1(\Phi_a)$  методом, использующим интеграл Шварца [48].

Рассмотрим осесимметричную задачу о распределении электрического поля между точечным электродом-инструментом (ЭИ)  $S$ , расположенным на

расстоянии  $h$  от плоского анода  $AB$  (рис. 3.4.1, а),  $Z=X+iY$ . Примем во внимание, что анодный потенциал анода зависит от плотности тока. Используется реальная зависимость плотности тока от  $\Phi_a$ , т.е. нормальная составляющая  $J_n = F_1(\Phi_a)$  [22].

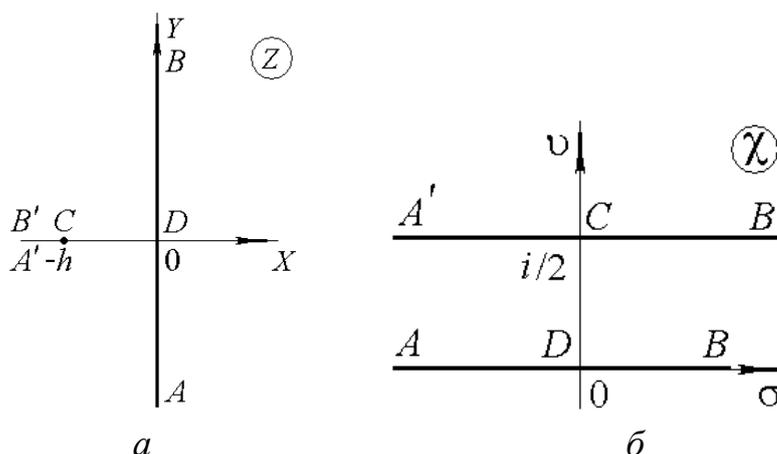


Рис. 3.4.1 Формы области на плоскостях: а – физической; б – параметрической

Задача решается в параметрическом виде. В качестве области изменения параметрического переменного  $\chi = \sigma + i\nu$  удобно выбрать полосу ширины  $1/2$  с соответствием точек, указанным на рис. 3.4.1, б.

Функция

$$Z(\chi) = ih \operatorname{sh} \pi \chi \quad (3.4.1)$$

при  $h > 0$  конформно отображает полосу плоскости  $\chi$  на левую полуплоскость с разрезом. При этом граница  $\chi = \sigma$  отображается на поверхность  $ADB$ , граница  $\chi = \sigma + i/2$  – на разрез  $A'CB'$ . Положение точечного источника  $Z(i/2) = -h$ .

При допущении об однородности среды электрическое поле является потенциальным и соленоидальным, и для решения плоских задач такого типа широко применяются методы теории аналитических функций комплексного переменного [5, 22, 36, 38, 42, 56], поскольку удовлетворяются уравнения Коши-Римана для потенциала  $\Phi$  и функции тока  $\Psi$  [48]. Для осесимметричного поля соответствующие уравнения выглядят следующим образом

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad (3.4.2)$$

(если осью симметрии является ось  $X$ ). Наличие множителя  $1/Y$  в правых частях уравнений не позволяет напрямую использовать аналитические функции для моделирования распределения потенциала и функции тока. Однако Г.Н. Положим [64] были разработаны интегральные преобразования аналитических функций комплексного переменного  $f(Z)$ , позволяющие получить нужные зависимости

$$\Phi(X_0, Y_0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{X_1}^{Z_0} f(Z) \frac{dZ}{\sqrt{(Z - Z_0)(Z - \bar{Z}_0)}}, \quad (3.4.3)$$

$$\Psi(X_0, Y_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{X_1}^{Z_0} f(Z) \frac{(Z - X_0)dZ}{\sqrt{(Z - Z_0)(Z - \bar{Z}_0)}}, \quad (3.4.4)$$

где  $Z_0 = X_0 + iY_0$  – внутренняя или граничная точка поля;  $X_1 + i0$  – некоторая точка на оси симметрии  $X$ ;  $\bar{Z}_0 = X_0 - iY_0$ .

Таким образом, осесимметричная задача решается путем сведения ее к вспомогательной плоской задаче. Потенциал и функция тока осесимметричного поля получаются путем интегральных преобразований (3.4.3), (3.4.4), примененных к функции  $f(Z) = dw/dZ$  [22], где  $w(Z)$  – комплексный потенциал плоского поля.

Нормальная и тангенциальная составляющие плотности электрического тока на аноде равны

$$J_n = v_1 J_x, \quad J_x = \frac{\partial \Phi_a}{\partial X} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sh} \pi \sigma \operatorname{ch} \pi \sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad (3.4.5)$$

$$J_t = v_1 J_y, \quad J_y = \frac{\partial \Phi_a}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \sigma} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \sigma}. \quad (3.4.6)$$

где  $v_1$  – коэффициент, определяемый ниже.

Способ решения задачи заключается в представлении потенциала и функции тока в виде сумм

$$\begin{aligned} \Phi(X_0, Y_0) &= \Phi_0(X_0, Y_0) + \Phi_1(X_0, Y_0) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{v_2}{\sqrt{(X_0+1)^2 + Y_0^2}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial w_1}{\partial \sigma}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

$$\begin{aligned} \Psi(X_0, Y_0) &= \Psi_0(X_0, Y_0) + \Psi_1(X_0, Y_0) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{v_2(X_0+1)}{\sqrt{(X_0+1)^2 + Y_0^2}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial w_1}{\partial \sigma}(\sigma) \frac{(Z-X_0)d\sigma}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

где первые слагаемые представляют собой потенциал и функцию тока точечного источника [22].

Будем искать решение в виде функции

$$f_1(\chi) = \frac{\partial w_1}{\partial \chi}(\chi).$$

Искомыми параметрами аналогично [23], будут значения действительной части функции  $\operatorname{Re} f_1(\sigma_m) = f_m$  в узловых точках  $\sigma_m$ , ( $m = 1, \dots, n-1$ ). При  $\sigma = \sigma_0 = 0$   $\operatorname{Re} f_1(\sigma_0) = 0$ . При  $\sigma = \sigma_n$  примем  $\operatorname{Re} f_1(\sigma_n) = 0$ . Значения  $\operatorname{Re} f_1(\sigma)$  в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна  $S(\sigma)$ .

Функция  $f_1(\chi)$  должна обладать определенными свойствами: при  $\chi = \sigma + i0$  ее действительная часть должна быть нечетной функцией  $\sigma$ , при  $\chi = \sigma + i/2$   $f_1(\sigma + i/2)$  должна быть чисто действительной. Тогда ее, согласно принципу симметрии [48], можно аналитически продолжить на полосу единичной ширины. При этом  $\operatorname{Re} f_1(\sigma + i) = \operatorname{Re} f_1(\sigma + i0)$ .

Для восстановления функции  $f_1(\chi)$  используем формулу Шварца [48]

$$f_1(\chi) = i \left[ \int_0^{\infty} S(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma - \int_0^{\infty} S(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma \right].$$

Интегралы вычисляются модифицированным методом Гаусса [23]. Зависимости (3.4.7), (3.4.8) интерполируются сплайнами, при этом коэффициенты этих сплайнов равны значениям производных этих зависимостей, которые используются в (3.4.5), (3.4.6) для вычисления составляющих плотности тока.

Рассмотрим зависимость анодного потенциала, аппроксимирующую экспериментальные результаты [22, 39, 88] (рис. 3.4.2):

$$J_n(\Phi_a) = 0,025 - 0,692\Phi_a + 1,298\Phi_a^2 - 0,965\Phi_a^3 + 0,223\Phi_a^4 + 0,17 \operatorname{tg}(0,655\Phi_a) + \frac{0,0143\Phi_a}{\Phi_a^7 + (0,5712)^7}; \Phi_a \geq 0. \quad (3.4.9)$$

Такая зависимость характерна для обработки в пассивирующих электролитах [22, 39, 42, 69, 88].

Поскольку согласно рис. 3.4.2  $J_n(0) > 0$ , примем, что потенциал электрического поля  $\Phi^*(\chi) = \Phi(\chi) + \Delta\Phi_a$ , где  $\Delta\Phi_a \approx 0,7\text{ В}$  – значение анодного потенциала при отсутствии тока в цепи.

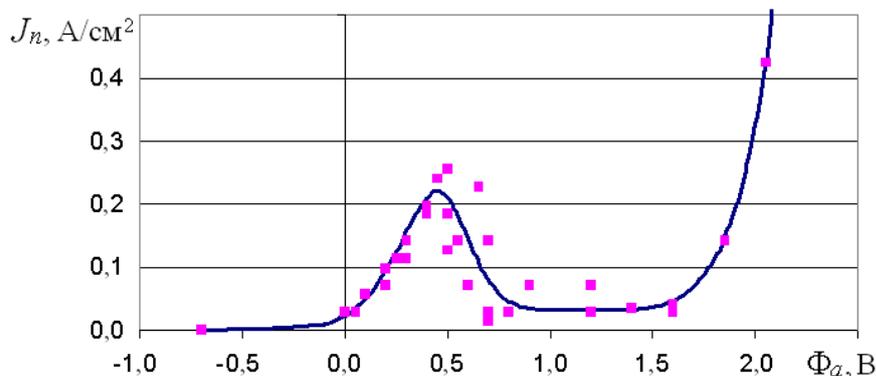


Рис. 3.4.2. График аппроксимирующей зависимости (3.2.9): ■ – результаты эксперимента [22] ( $\Phi_a$  в вольтах,  $J_n$  – в  $\text{А}/\text{см}^2$ )

Задача решается методом коллокаций. Равенство (3.4.9) выполняется в дискретных точках  $\chi_m = \sigma_m + i0$ ;  $m = 1, \dots, n-1$ . Полученная таким образом система  $n-1$  нелинейных уравнений решается методом Ньютона с регулированием шага.

Задача решается в условно-размерных единицах, чтобы привести полученные результаты к зависимости (3.4.9) и результатам эксперимента [22, 88]. При этом значения  $\nu_1=2.6$ ;  $\nu_2=10$  подобраны экспериментально.

### 3.5. Численное решение

На рис. 3.5.1 показано распределение потенциала по поверхности анода, на рис. 3.5.2 – распределение тангенциальной составляющей, на рис. 3.5.3 – полной плотности тока, на рис. 3.5.4 – нормальной составляющей плотности тока.

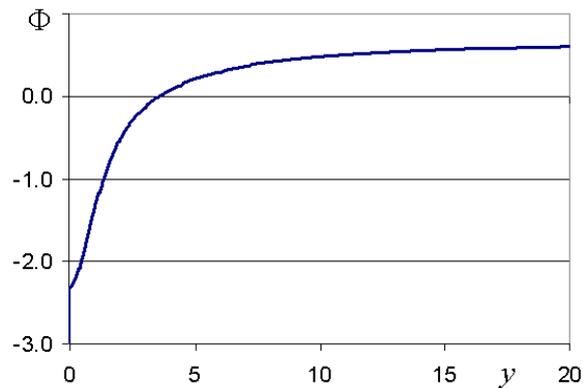


Рис. 3.5.1 Распределение потенциала по поверхности анода

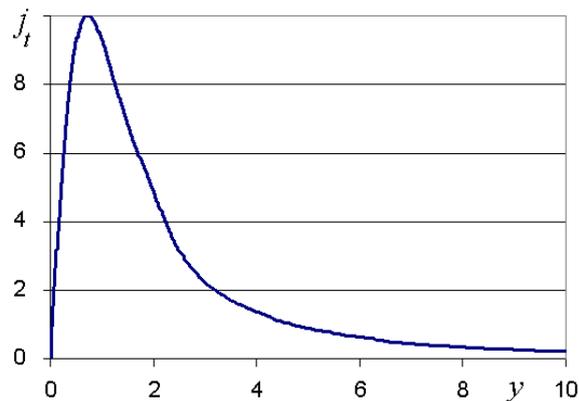


Рис. 3.5.2 Распределение тангенциальной составляющей плотности тока по поверхности анода

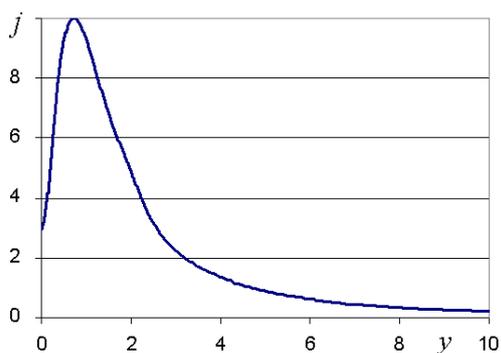


Рис. 3.5.3 Распределение полной плотности тока по поверхности анода

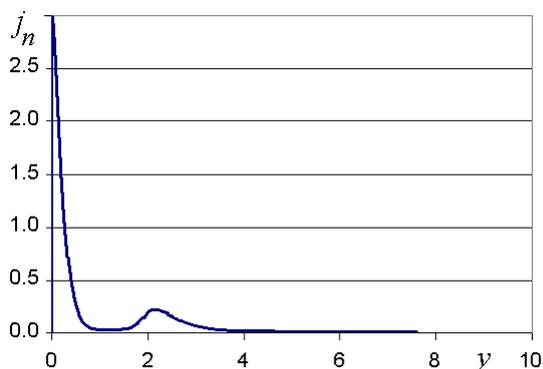


Рис. 3.5.4 Распределение нормальной составляющей плотности тока по поверхности анода

Оценка погрешности численного решения проводилась методом фильтрации результатов вычислений [27, 31, 35, 106]. На рис. 3.5.5 результаты фильтрации представлены в логарифмическом масштабе. По оси ординат отмечены десятичные логарифмы абсолютных величин полученных оценок абсолютных погрешностей  $\Delta - \lg \Delta$  (точность полученных данных). По оси абсцисс отложены десятичные логарифмы числа отрезков разбиения  $n$  (которое изменялось от 20 до 640 с увеличением в 2 раза). В качестве оцениваемых параметров на рис. 3.5.5, а рассмотрен потенциал центральной точки  $y_D=0$ , а на рис. 3.5.5, б – нормальная составляющая плотности тока в той же точке. Цифрой 0 отмечены оценки точности вычисленных данных, цифрами 1, 2, ... результаты первой, второй и т.д., фильтрации. Разность ординат между двумя кривыми представляет собой логарифм отношения оценок для разных фильтраций. Это отношение называется размытостью оценки. На уровне 3-го знака наблюдается нарушение регулярности, вызванное погрешностью округления и ухудшением

обусловленности матриц. С помощью фильтрации получены и подтверждены значения  $\Phi_D=2.317\pm 10^{-3}$ ,  $J_G=3.00\pm 10^{-2}$ . Следует отметить, что вследствие (3.4.5) значения параметров в точках близких к оси симметрии определяются с наихудшей точностью.

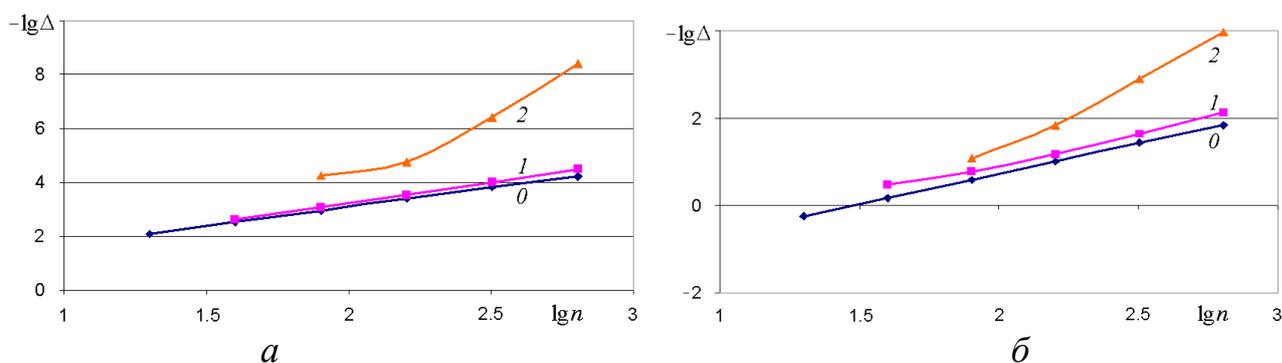


Рис. 3.5.5 Оценка абсолютной погрешности решения осесимметричной задачи:  $a$  – потенциала центральной точки  $D$ ;  $b$  – напряженности в точке  $D$

### Выводы по главе 3

Таким образом, в данной главе предложен численно-аналитический метод решения квазистационарной задачи моделирования электрохимического копирования круглого электрод-инструмента, основанный на конформных отображениях и методе коллокаций. Результаты численных расчетов позволили определить форму заготовки в различные моменты времени и диапазон безразмерного времени, в котором квазистационарное решение совпадает с нестационарным. Показано, что применение модели скачкообразной зависимости выхода по току позволяет получить формы, существенно более близкие к экспериментальным. Предложенный метод может быть применен для моделирования процесса копирования электрод - инструментов различных форм.

Также предложен метод численного решения задачи начальной электрохимической обработки точечным электродом-инструментом в осесимметричной постановке, основанный на интегральных преобразованиях аналитической функции.

Найдены распределения составляющих напряженности и численные значения, характеризующие эти значения.

Проведена оценка погрешности параметров, показавшая, что значения потенциала границы вычислены с точностью до 3-х значащих цифр.

## Глава 4. Численно-аналитическое решение задачи о прорезании пазов вращающимся электрод-инструментом, исследование результатов вычислительного эксперимента.

### 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную задачу ЭХО с помощью пластинчатого ЭИ конечной толщины. Форма межэлектродного пространства показана на рис. 4.1.1. Центр ЭИ движется внутри заготовки со скоростью  $V_C$  вниз вдоль оси ординат. Одновременно ЭИ вращается относительно своего центра с угловой скоростью  $\omega$ . Начальное отверстие в заготовке имеет некоторую форму (обычно, круглую), разность потенциалов между электродами равна  $U$ . Вращение ЭИ создает условия для более интенсивного обмена электролита в рабочей области и избежания проблем, связанных с зашламливанием [37].

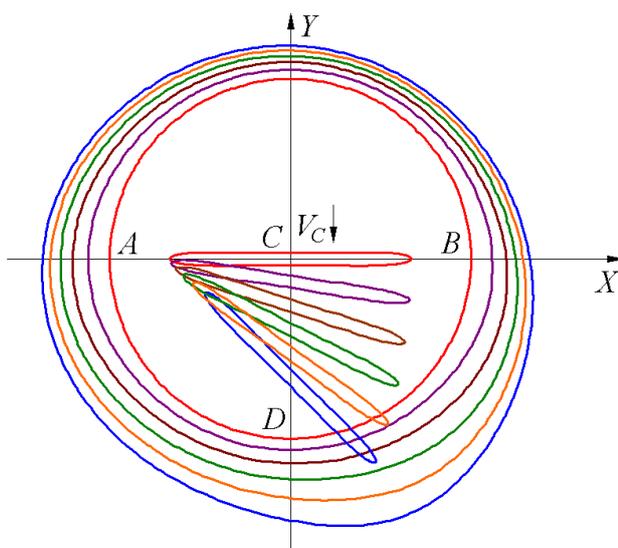


Рис. 4.1.1. Схема МЭП:  $ADB$  – обрабатываемая поверхность (анод);  
 $C$  – ЭИ (катод)

Процесс электрохимического растворения материала анода определяется законами Фарадея и Ома [41]

$$V_{ecm} = kE, \quad E = j/\kappa, \quad k = \kappa\eta\varepsilon/\rho, \quad (4.1.1)$$

где  $V_{ecm}$  – скорость электрохимического растворения (сдвига границы);  $E$ ,  $j$  – напряженность и плотность тока на границе анода;  $\kappa$  – электропроводность электролита;  $\eta$  – выход по току;  $\varepsilon$  – электрохимический эквивалент;  $\rho$  –

плотность растворяемого материала.

Электрическое поле считается потенциальным и соленоидальным, поэтому потенциал  $\Phi(X, Y)$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$ .

Значения потенциала на аноде и катоде равны

$$\Phi_a = 0, \quad \Phi_c = -U. \quad (4.1.2)$$

Перейдем к безразмерным величинам. Безразмерные величины  $x$ ,  $y$ ,  $\tau$  и  $\varphi$  определяются следующим образом

$$x = \frac{X}{l}, \quad y = \frac{Y}{l}, \quad \tau = \frac{V_C}{l} t = \frac{kU}{l^2} t, \quad \varphi = \frac{\Phi}{U}, \quad (4.1.3)$$

где  $l = kU/V_C$  – величина стационарного зазора в задаче об обработке плоским горизонтальным ЭИ.

Центр ЭИ движется, как показано на рис. 4.1.1 со скоростью  $V_C$ . При этом

$$v_C = -\frac{dy_C}{dt} = -\frac{1}{V_C} \frac{dY_C}{dt} = 1. \quad (4.1.4)$$

Граница детали также подвижна, нормальная скорость ее движения определяется уравнением (4.1.1). Представим (4.1.1) в безразмерном виде

$$\frac{dx_a}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos n, \quad \frac{dy_a}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \sin n. \quad (4.1.5)$$

Здесь  $x_a(\tau)$ ,  $y_a(\tau)$  – координаты точек на обрабатываемой поверхности (ОП);  $n$  – единичный вектор внешней нормали к ОП.

Перемещение точек поверхности ЭИ в процессе обработки можно определить следующим образом

$$x_c(\tau) = \operatorname{Re}\left[\left(x_c^0 + iy_c^0\right)e^{i\alpha(\tau)}\right], \quad y_c(\tau) = -\tau + \operatorname{Im}\left[\left(x_c^0 + iy_c^0\right)e^{i\alpha(\tau)}\right], \quad (4.1.6)$$

где  $x_c^0$ ,  $y_c^0$  – координаты точек на исходной поверхности ЭИ (при  $\tau = 0$ );  $\alpha(\tau) = -\omega\tau$  – угол поворота ЭИ вокруг своей оси относительно начального положения (на рис. 4.1.1 величина  $\alpha$  изменяется от 0 до  $-\pi/2$ ).

При численном решении безразмерное время дискретизируется, т. е. разбивается на некоторое количество шагов, на каждом шаге решается краевая задача для уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \text{ с условиями } \varphi_a = 0, \varphi_c = -1. \quad (4.1.7)$$

При этом определяются нормальные производные  $\partial\varphi/\partial n$ . Далее, согласно (4.1.5) и (4.1.6) производится шаг по времени (например, по методу Эйлера). Далее процесс повторяется.

Известны решения задач ЭХО, полученные на основе методов конечных разностей и конечных элементов [57, 84, 85], граничных элементов [3, 55, 62, 100,]. Тем не менее, возникает много вопросов о погрешностях полученных численных решений.

## 4.2. Численно-аналитическое решение методом граничных элементов

### *Описание метода*

Решение краевой задачи для уравнения Лапласа с граничными условиями первого рода (4.1.7) на основе интеграла Грина сводится к граничному интегральному уравнению [3, 62]

$$\frac{1}{2}\varphi(v) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{1}{r(v,\xi)} \frac{\partial r}{\partial n} \varphi(\xi) d\Gamma + \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \ln \frac{1}{r(v,\xi)} \frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n} d\Gamma, \quad \forall v \in \Gamma, \quad (4.2.1)$$

где  $v$  – точка наблюдения,  $\xi$  – точка расположения источника;  $r(v,\xi)$  – расстояние между точкой наблюдения и источником;  $\Gamma$  – граница области, проходимая так, что область находится слева.

Для решения интегрального уравнения (4.2.1) будем использовать метод граничных элементов [43]. Для упрощения расчетов, аналогично [3], будем использовать постоянные граничные элементы, в которых напряженность электрического поля имеет постоянные значения. При этом граница  $\Gamma$  разбивается на  $n$  прямолинейных элементов.

Фундаментальное решение уравнения Лапласа и его нормальная производная в двумерном случае имеет вид:

$$G(v,\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(v,\xi)}, \quad F(v,\xi) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n},$$

где  $r(v, \xi) = |v - \xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (v_i - \xi_i)^2}$  – расстояние между точками  $v$  и  $\xi$ .

Разобьем границу  $\Gamma$  на  $n$  прямолинейных граничных элементов  $\Gamma_m$ .  
Координаты граничных точек этих отрезков

$$z_m = (x_m, y_m), m = \overline{0, n}.$$

Координаты середин элементов

$$(x_m^c, y_m^c) = \left( \frac{x_{m-1} + x_m}{2}, \frac{y_{m-1} + y_m}{2} \right), m = \overline{1, n}.$$

Расчетные точки (узлы) расположим в середине граничного элемента.  
Дискретная форма уравнения (4.2.1) будет иметь вид

$$\frac{1}{2} \varphi_k = \sum_{m=1}^n F_{km} \varphi_m + \sum_{m=1}^n G_{km} \varphi_m', \quad (4.2.2)$$

где

$$G_{km} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \ln \frac{1}{r(v_k, \xi)} d\Gamma, \quad F_{km} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \frac{1}{r(v_k, \xi)} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma. \quad (4.2.3)$$

(при наличии особенности во втором интеграле в (4.2.3) берется его главное значение).

Рассмотрим комплексную плоскость  $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ . Ось  $x$  направим параллельно нормали к  $m$ -му элементу, а начало координат совместим с серединой  $k$ -го элемента (рис. 4.2.1). Обозначим точки начала и конца отрезка интегрирования  $\Gamma_m$   $z_{km}^b = x_{km}^b + iy_{km}^b$  и  $z_{km}^e = x_{km}^e + iy_{km}^e$  соответственно. При этом расстояния от середины  $k$ -го элемента до начала и конца  $m$ -го элемента равны

$$r_{km}^b = \sqrt{(x_k^c - x_m^b)^2 + (y_k^c - y_m^b)^2}, \quad r_{km}^e = \sqrt{(x_k^c - x_m^e)^2 + (y_k^c - y_m^e)^2}.$$

Обозначим  $\theta_{km}^b$ ;  $\theta_{km}^e$  – углы между отрезками, соединяющими середину  $k$ -го граничного элемента с начальной и конечной точкой  $m$ -го граничного элемента, соответственно и внешней нормалью к  $m$ -му граничному элементу при прохождении границы



где  $n_1, n_2$  – числа элементов на аноде и катоде.

Матрица СЛАУ – заполненная, поэтому для решения задачи можно применить, например, метод Гаусса.

Полученные значения нормальных производных применяются на следующих шагах алгоритма решения нестационарной задачи.

Способ сдвига узлов заключается в первоначальном сдвиге угловых точек полигона (рис. 4.3.1).

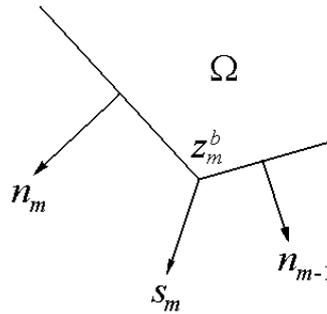


Рис. 4.3.1. Сдвиг вершин полигона

При этом сдвиг поводится по средневзвешенным значениям напряженностей и углов

$$\theta_m^{av} = \frac{l_{m-1}\theta_{m-1}^n + l_m\theta_m^n}{l_{m-1} + l_m}, \quad m = \overline{2, n_1}, \quad \theta_1^{av} = \frac{l_{n_1}\theta_{n_1}^n + l_1\theta_1^n}{l_{n_1} + l_1}, \quad (4.3.2)$$

$$\varphi_m^{'av} = \frac{l_{m-1}\varphi_{m-1}' + l_m\varphi_m'}{l_{m-1} + l_m}, \quad m = \overline{2, n_1}, \quad \varphi_1^{'av} = \frac{l_{n_1}\varphi_{n_1}' + l_1\varphi_1'}{l_{n_1} + l_1}, \quad (4.3.3)$$

где  $l_j$  – длины элементов.

Шаг осуществляется по методу Эйлера

$$\Delta x_m^e = \varphi_m^{'av} \cos \theta_m^{av} \cdot \Delta t, \quad \Delta y_m^e = \varphi_m^{'av} \sin \theta_m^{av} \cdot \Delta t, \quad m = \overline{1, n}. \quad (4.3.4)$$

Рассмотрим задачу об эллипсе внутри эллипса (рис. 4.3.2, а).

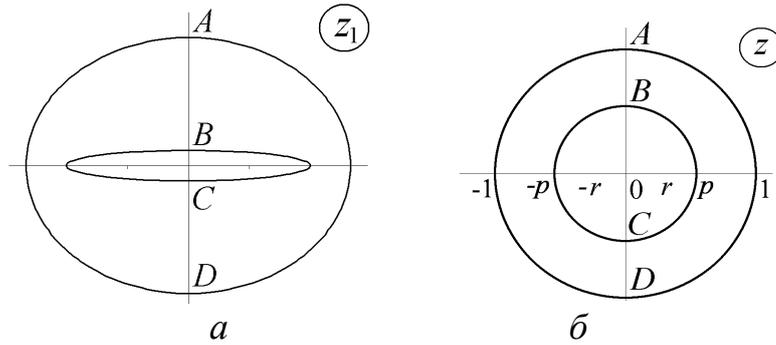


Рис. 4.3.2. Образы МЭП в задаче об эллипсе внутри эллипса:  
 $a$  – физическая плоскость;  $b$  – параметрическая плоскость

Задача решена в параметрическом виде в [33]. В качестве параметрической плоскости выбирается кольцо плоскости  $z$  (рис. 4.3.2, б)

$$z_1(z) = \frac{g}{2} \left( \frac{z}{r} + \frac{r}{z} \right), \quad z(z_1) = r \left( \frac{z_1}{g} + \sqrt{\frac{z_1^2}{g^2} - 1} \right), \quad r < p. \quad (4.3.5)$$

При этом

$$\varphi = -\frac{1}{\ln p} \ln |z| = -\frac{1}{\ln p} \ln \left| r \left( \frac{z_1}{g} + \sqrt{\frac{z_1^2}{g^2} - 1} \right) \right|, \quad \bar{E} = -\frac{1}{\ln p} \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - g^2}}.$$

На рис. 4.3.3 приведены результаты фильтрации по формуле (1.2.2) решения системы уравнений (4.3.1). Показаны значения  $\partial \varphi_a / \partial n$  и  $\partial \varphi_c / \partial n$  в точках с наибольшей погрешностью.

Чтобы улучшить результат вычисления напряженности используется следующее распределение узлов на катоде

$$z_m = e^{i\sigma_m}, \quad m = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \quad \sigma_m = \pi \left( \arctg \beta - \arctg \left( \beta - 2\beta \frac{m}{n_1} \right) \right) / \arctg \beta. \quad (4.3.6)$$

На рис. 4.3.3 приведены результаты расчетов при  $\beta=5$  для отношения полуосей катода  $k_1 = 0.1$ . Оценка погрешности показывает 4 верных знака на аноде и 3 знака на катоде для  $n=320$ , что вполне приемлемо для расчетов.

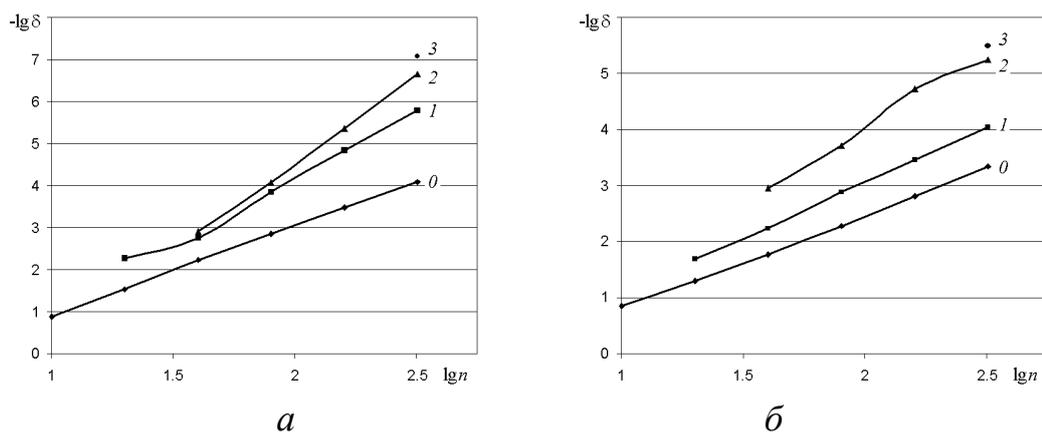


Рис. 4.3.3. Результаты вычисления напряженности: *a* – на аноде; *б* – на катоде

#### 4.4. Вычислительный эксперимент. Оценка погрешности

Зададим начальную форму МЭП в соответствии с (4.3.5) (эллипс в эллипсе, рис. 4.3.2, *a*). Зададим отношение полуосей внутреннего эллипса (ЭИ)

$$k_1 = \frac{\operatorname{Im} z_1(ip)}{\operatorname{Re} z_1(p)} = \frac{p^2 - r^2}{p^2 + r^2}, \quad (4.4.1)$$

а также отношение больших полуосей внешнего и внутреннего эллипса

$$k_2 = \frac{\operatorname{Re} z_1(1)}{\operatorname{Re} z_1(p)} = p \frac{r^2 + 1}{p^2 + r^2}. \quad (4.4.2)$$

Величину  $g$  выберем так, чтобы полуширина внутреннего эллипса равнялась заданному значению  $L$

$$g = L \frac{2r}{r^2 + 1}. \quad (4.4.3)$$

Решая систему уравнений (4.4.1), (4.4.2) найдем  $r$  и  $p$

$$r = p \sqrt{\frac{1 - k_1}{1 + k_1}}, \quad p = \frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - 1 + k_1}}{1 - k_1}. \quad (4.4.4)$$

На рис. 4.4.1 представлены результаты численного решения задачи для

$\alpha = -\pi/2$  (движение ЭИ вертикально вниз)  $L=1$ ;  $k_2=1.5$ ;  $n=320$ ;  $k_2=1.5$ ;  $k_1=0.1$ . При расчете шаг по безразмерному времени  $\Delta\tau=0.01$ , на рисунке показаны конфигурации при  $\tau_j = 0, 10, 20, \dots, 100$ .

Было отмечено, что при отсутствии регулирования расположения узлов, несмотря на их начальное сгущение, при увеличении  $\tau$  происходит расхождение узлов, что приводит к потере точности и устойчивости решения.

Поэтому было решено использовать равномерное по длине  $l(s)$  разбиение анодной границы. При совершении шага очередная конфигурация  $x_m, y_m$   $m = \overline{0, n}$  интерполируется сплайнами (отдельно  $x(s)$ ,  $y(s)$  и  $l(s)$  - длина участка границы, отсчитываемая от 0-й точки; изначально  $s_m = m$ ), задается положение узлов  $l_m$ , и решаются уравнения по определению параметра  $s = s_m$ , при котором  $l(s_m) = l_m$ . Координаты  $m$ -го узла с помощью сплайнов заменяются на  $x_m^e(s_m), y_m^e(s_m)$ .

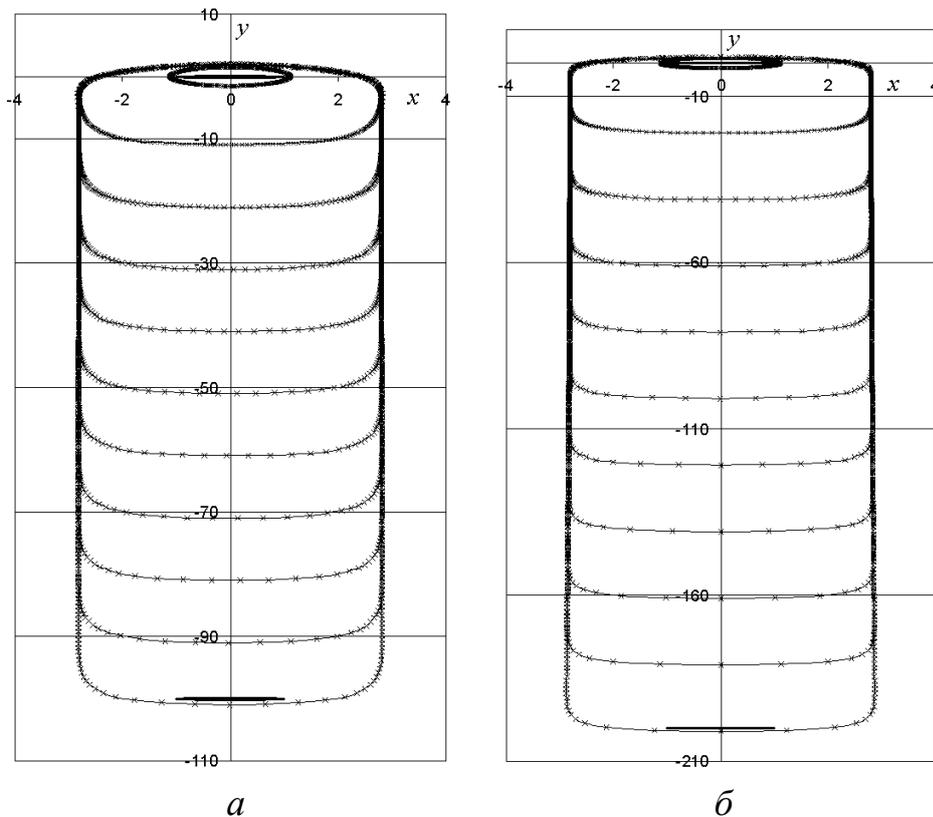


Рис. 4.4.1. Обработка эллипсоидальным ЭИ для  $k_1=0.1$ :  
 $a - \Delta\tau=10, \tau_{\max} = 100$ ;  $b - \Delta\tau=20, \tau_{\max} = 200$

Это позволяет расширить диапазон исследуемого времени процесса. На рис. 4.4.1, *a* диапазон по безразмерному времени (равному величине сдвига ЭИ по безразмерной ординате) равен 100. За счет удлинения границы анода узлы расходятся, однако это не носит такого катастрофического характера, как без регулирования положения узлов в процессе решения.

Чтобы найти границы диапазона  $\tau_{\max}$ , в котором можно производить вычисления по этой схеме, был произведен эксперимент по увеличению  $\tau_{\max}$  в два раза. При  $\tau_{\max} = 100$  погрешность визуально не обнаруживается (рис. 4.4.1, *a*), но при  $\tau > 100$  в нижней части картины возникает расширение, увеличивающееся с возрастанием  $\tau$  (рис. 4.4.1, *б*).

Для визуализации погрешности на рис. 4.4.2 изображены участки анодной границы в измененном масштабе. На рис. 4.4.2, *a* ( $\tau_{\max} = 100$ ) расширение границы не превышает 1%, на рис. 4.4.2, *б* ( $\tau_{\max} = 200$ ) около 4% (в отношении к полуширине паза).

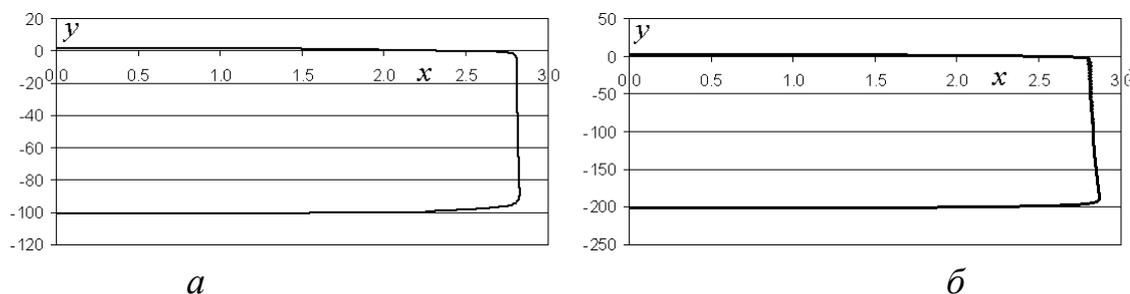


Рис. 4.4.2. Визуализация погрешности: *a* –  $\tau_{\max} = 100$ ; *б* –  $\tau_{\max} = 200$

Для большей наглядности рис. 4.4.3, *a* картина растянута в ширину. Цифрой 1 обозначено решение для  $\tau_{\max} = 100$ ; цифрой 2 –  $\tau_{\max} = 200$ . Становится видным колебание границы для  $\tau_{\max} = 200$ . Было отмечено, что в связи с начальной погрешностью (порядка  $10^{-16}$ ) вычисления  $x$ -координаты первой точки сетки возникает ненулевая проекция вектора напряженности на ось  $x$ , увеличивающая сдвиг точки в ту же сторону при шаге по времени. При длительном процессе сдвиг существенно увеличивается, и первая точка смещается на боковую часть границы.

Фиксация первой точки позволяет существенно уменьшить осцилляцию (кривая 3 на рис. 4.4.3, *a*).

На рис. 4.4.3, *б* совмещены нижние части кривых для  $\tau_{\max} = 100$  (кривая 1) и  $\tau_{\max} = 200$  (кривая 2). Отстояние кривых друг от друга в этом месте не превышает 5% (в отношении к вертикальному зазору).

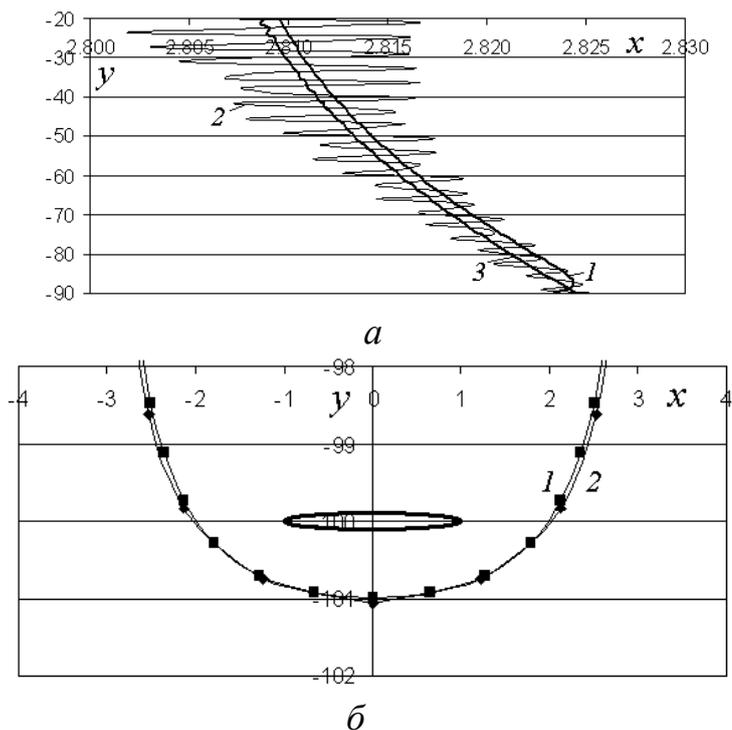


Рис. 4.4.3. Визуализация погрешности:

*a* – средняя часть кривых; *б* – нижняя часть кривых ( $\tau_{\max} = 100$ )

Для оценки погрешности были проведены расчеты с разным числом элементов  $n = n_1 = n_2$  и разными шагами по времени  $\Delta_\tau$ . Поскольку основные расчеты проводились при  $n=320$ ,  $\Delta_\tau = 0.01$ , то проводилось последовательное уменьшение  $n$  в два раза и синхронное увеличение  $\Delta_\tau$  в два раза. Это позволило одновременно оценить влияние на погрешность дискретизации по пространству и времени.

На рис. 4.4.4 приведены результаты фильтрации для  $\tau_{\max} = 10$  двух характерных параметров: вертикального зазора и боковой полуширины паза в точке, соответствующей началу элемента с номером  $n_1/4$ . Буквой  $\delta$  обозначена

оценка относительной погрешности (в отношении к рассматриваемому параметру). Результаты фильтрации показывают, что при  $\tau_{\max} = 10$  прямой расчет позволяет достичь точности 3 и более значащих цифр, фильтрация позволяет увеличить точность на 2-3 цифры.

Для  $\tau_{\max} = 100$  (рис. 4.4.5) картина качественно сохраняется, однако видно, что по зазору максимальная точность немного превышает 1 значащую цифру (конкретней  $\delta \approx 0.5 \cdot 10^{-1}$  или 5% от величины зазора), а по боковому полуразмеру 2-3 знака (точнее  $\delta \approx 3 \cdot 10^{-3}$ ). Фильтрация позволяет существенно повысить точность, в особенности, по зазору.

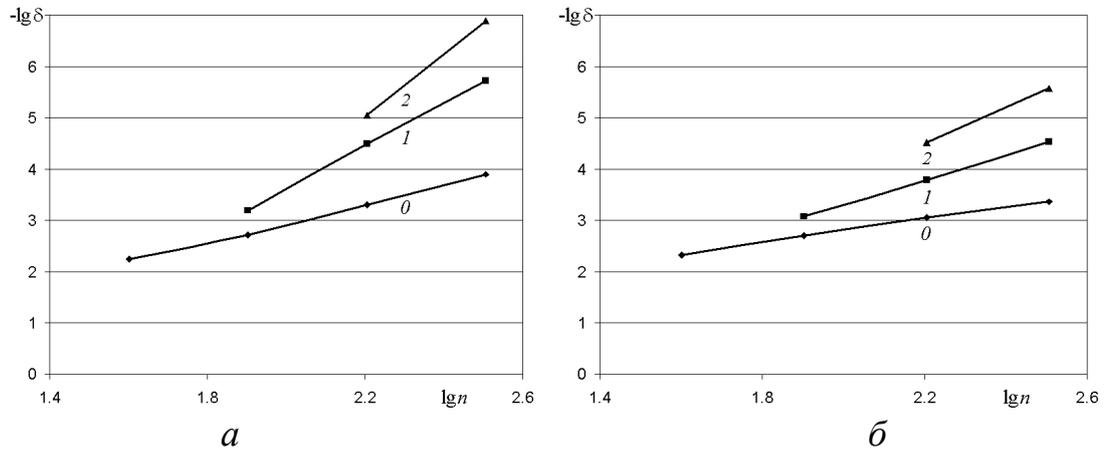


Рис. 4.4.4. Оценка погрешности при  $\tau_{\max} = 10$ :  
*a* – вертикального зазора; *б* – бокового полуразмера

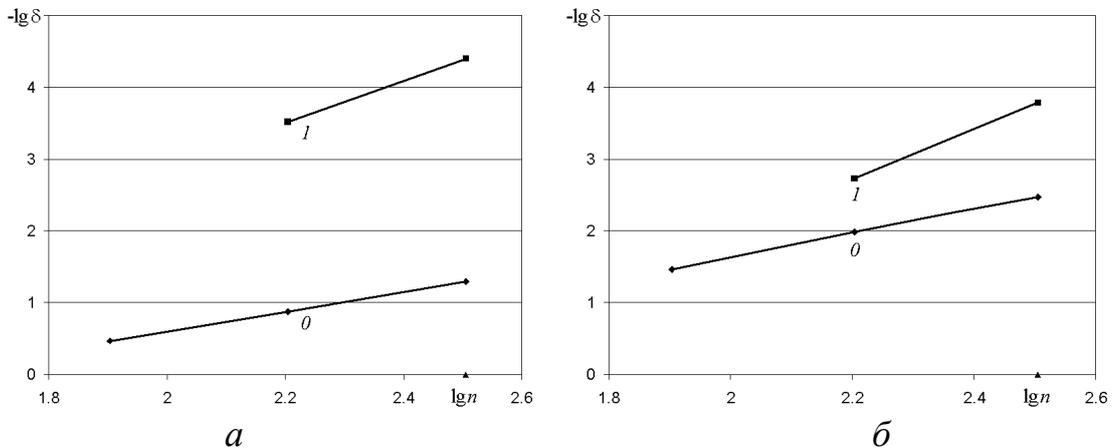


Рис. 4.4.5. Оценка погрешности при  $\tau_{\max} = 100$ :  
*a* – вертикального зазора; *б* – бокового полуразмера

#### 4.5. Исследование влияния частоты вращения электрода-инструмента на форму боковой поверхности

На рис. 4.5.1 и рис. 4.5.2 приведены формы границ для различных значений круговой частоты  $\omega$  вращения ЭИ для  $\tau=0, 2, 4, \dots, 20$ . Видно, что для малых частот левая боковая граница паза приобретает существенную волнообразность формы, причем максимальная амплитуда волн наблюдается при  $\omega \approx \pi/8$ . При  $\omega \geq \pi/2$  волнообразность практически исчезает.

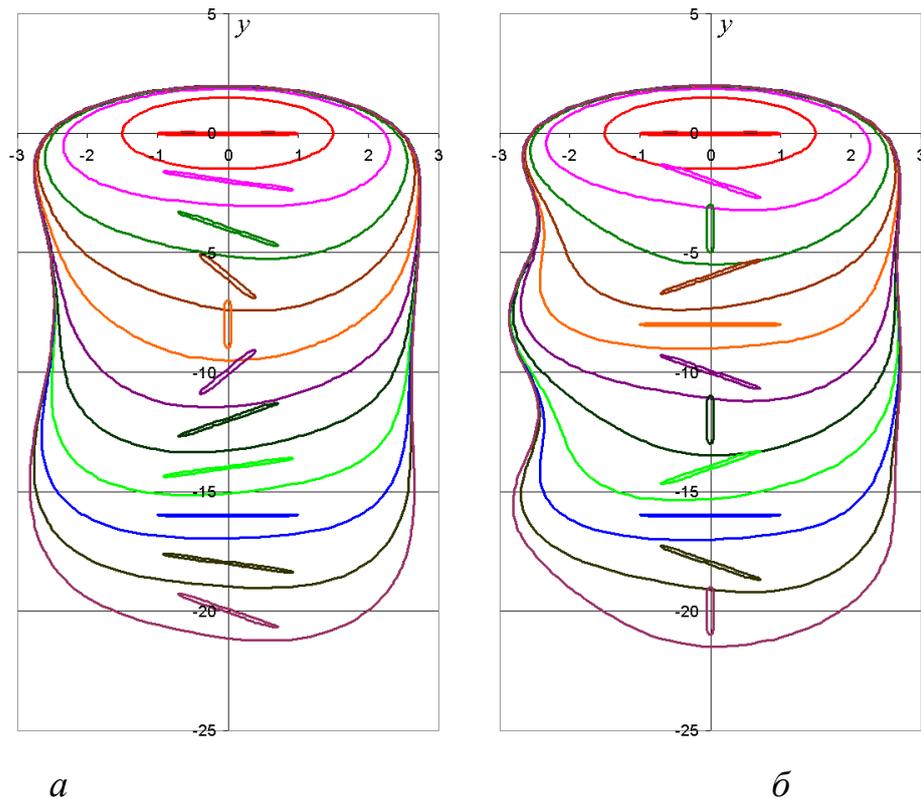


Рис. 4.5.1. Формы обрабатываемой поверхности: *а* –  $\omega = \pi/16$ ; *б* –  $\omega = \pi/8$

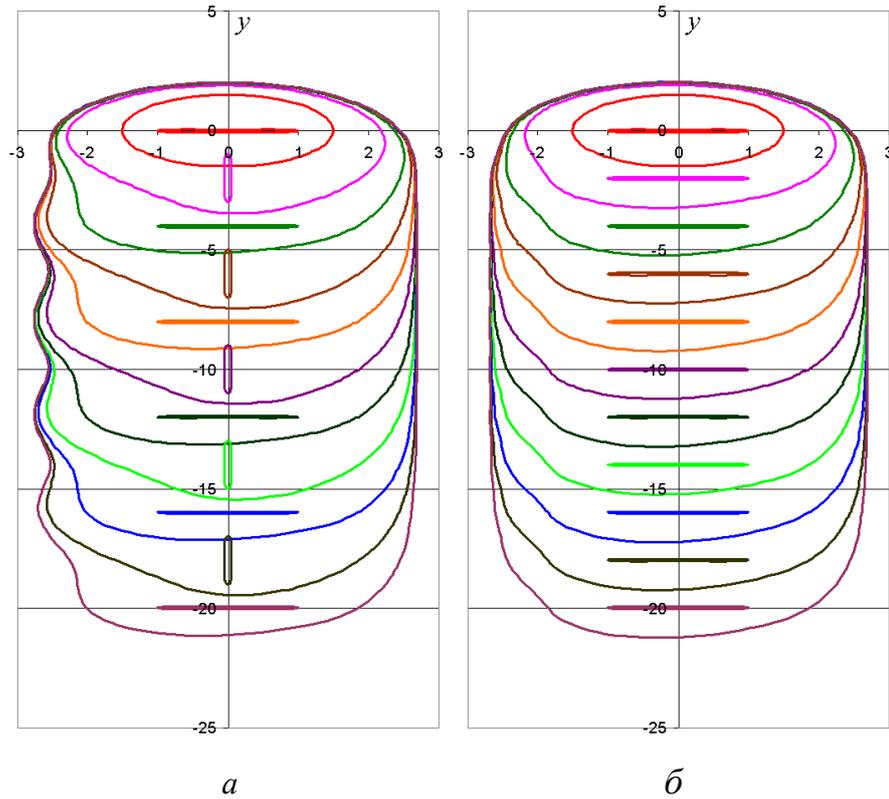


Рис. 4.5.2. Формы обрабатываемой поверхности:  $a - \omega = \pi/4$ ;  $b - \omega = \pi/2$

Явление образования волнообразной формы боковой части ОП можно объяснить следующим образом. При прохождении левой части зоны обработки кромка ЭИ движется вверх, поскольку ЭИ вращается по часовой стрелке, но центр ЭИ движется вниз. Тем самым, скорость движения кромки ЭИ относительно ОП уменьшается, и количество растворенного материала в левой части ОП увеличивается. При углах наклона ЭИ к оси  $x$ , близких к  $\pi n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), можно определить мгновенный центр вращения ЭИ  $C_t$  (рис. 4.5.3).

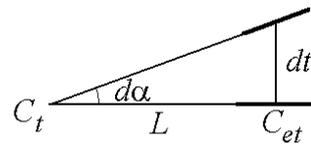


Рис. 4.5.3. К определению положения центра вращения ЭИ

Расстояние  $L$  от  $C_t$  до центра ЭИ  $C_{et}$  определяется из уравнения

$$-\operatorname{tg}(d\alpha) \approx -d\alpha = \frac{dt}{L}.$$

Отсюда при  $d\alpha = -\omega dt$  найдем  $L = 1/\omega$ .

Существует значение  $\omega$ , при котором центр вращения находится на левой границе ОП. При  $\omega = \pi/8$  величина  $L$  равна 2.55, что, судя по рис. 4.5.2, б приблизительно соответствует полуширине невозмущенного паза. Это же значение приближенно соответствует максимальной амплитуде волны, что подтверждается вычислительным экспериментом (рис. 4.5.1, 4.5.2). При увеличении  $\omega$  время прохождения центра вращения пропорционально уменьшается, но уменьшается и период волны на ОП, что компенсирует и то, и другое. Поэтому наблюдаемый факт образования волнообразной формы левой границы максимальной амплитуды можно объяснить наиболее сильным «замиранием» кромки ЭИ вблизи левой части ОП при расположении мгновенного центра вращения ЭИ на границе ОП.

#### **4.6. Исследование влияния синхронного с вращением электрода-инструмента включения напряжения**

Для уменьшения ширины паза возможно использовать включение напряжения только на части периода вращения ЭИ. Рассмотрим влияние угла между осью ЭИ и вертикалью  $\Delta\theta$ , при котором включается напряжение на **обоих торцах** ЭИ. На рис. 4.6.1 показаны конфигурации с соотношением полуосей эллиптического ЭИ  $a/b=0.5$  для  $n_1=n_2=n=160$ . Видно, что частичное включение напряжения существенно влияет на ширину паза.

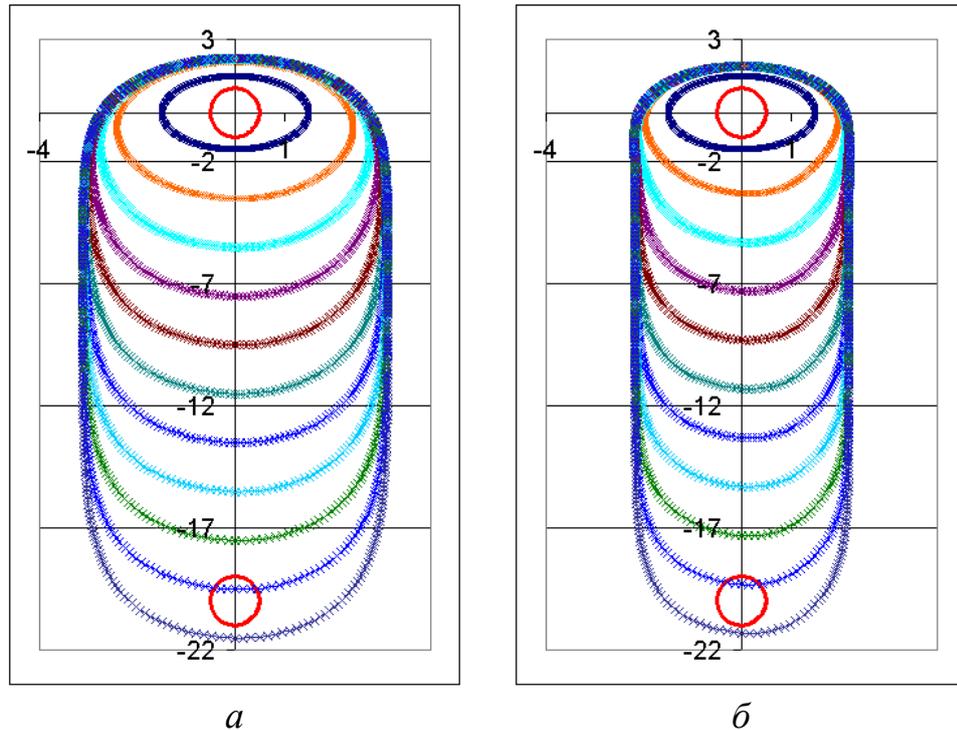


Рис. 4.6.1. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
 $a$  –  $\omega=2\pi$  без отключения;  $b$  –  $\omega=2\pi$ ,  $\Delta\theta=90^\circ$

На рис. 4.6.2 показаны конфигурации с  $a/b=0.25$  с двумя начальными положениями угла поворота ЭИ. По сравнению с рис. 4.6.1,  $b$  видно некоторое уменьшение ширины паза и появление утолщения паза в начале процесса. Начальное положение ЭИ на форму паза практически не влияет.

На рис. 4.6.3 показаны начальные конфигурации с  $a/b=0.5$  с двумя значениями  $\Delta\theta$ . Видно, что при  $\Delta\theta=60^\circ$  происходит самопересечение границ. Проблему снимает увеличение частоты вращения ЭИ (рис. 4.6.4,  $a$ ).

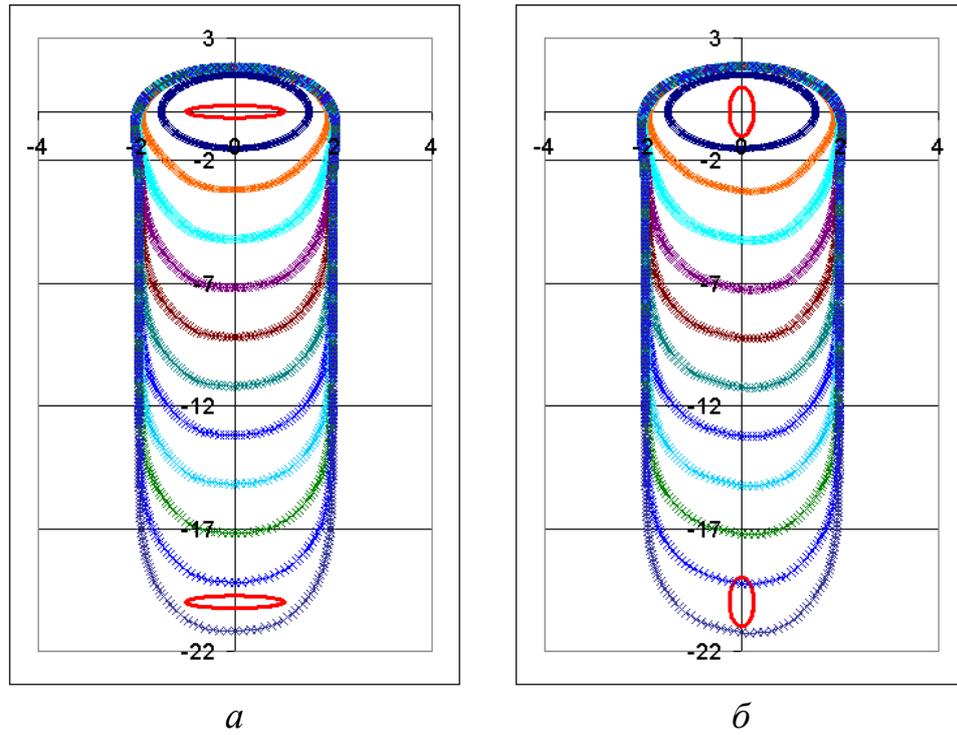


Рис. 4.6.2. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.25$ :  
*a* –  $\omega=2\pi$ ,  $\Delta\theta=90^\circ$ ; *б* –  $\omega=2\pi$ ,  $\Delta\theta=90^\circ$

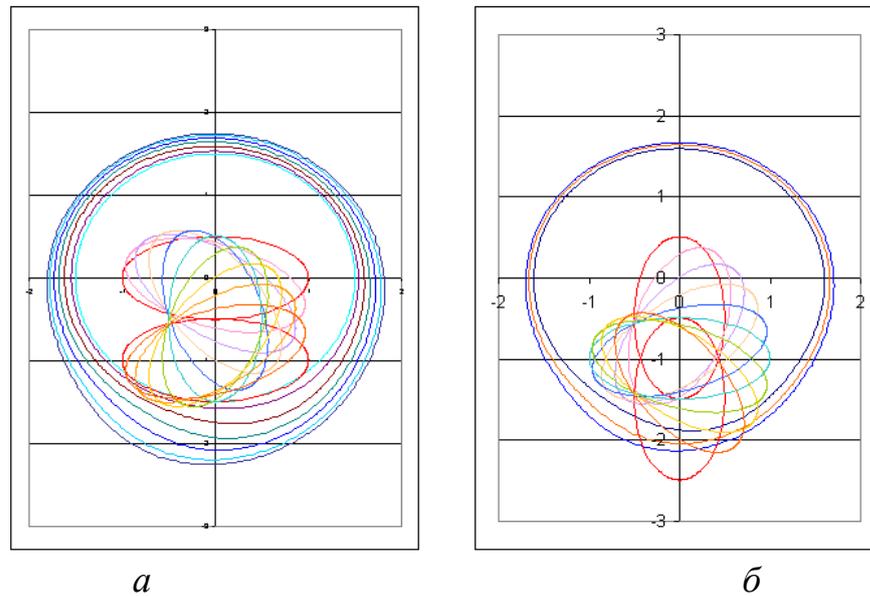


Рис. 4.6.3. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
*a* –  $\omega=2\pi$ ,  $\Delta\theta=90^\circ$ ; *б* –  $\omega=2\pi$ ,  $\Delta\theta=60^\circ$

На рис. 4.6.4 и рис. 4.6.5 показаны начальные конфигурации с  $a/b=0.5$  с четырьмя значениями  $\Delta\theta$  с горизонтальным начальным расположением ЭИ. Видно постепенное уменьшение ширины паза.

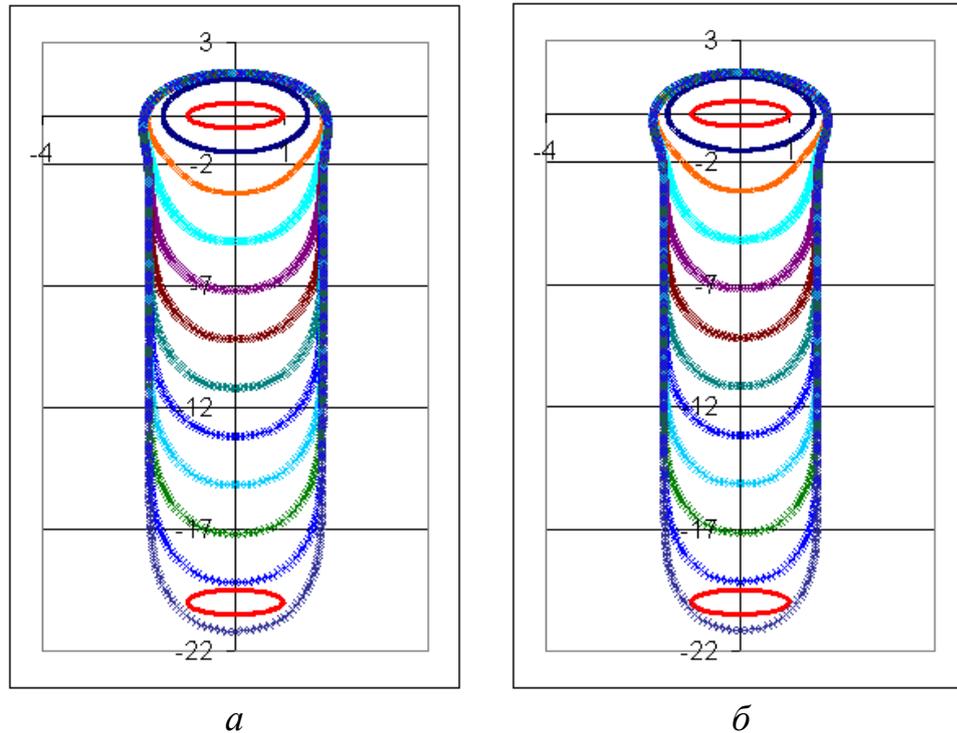


Рис. 4.6.4. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
*a* –  $\omega=3\pi$ ,  $\Delta\theta=60^\circ$ ; *б* –  $\omega=3\pi$ ,  $\Delta\theta=45^\circ$

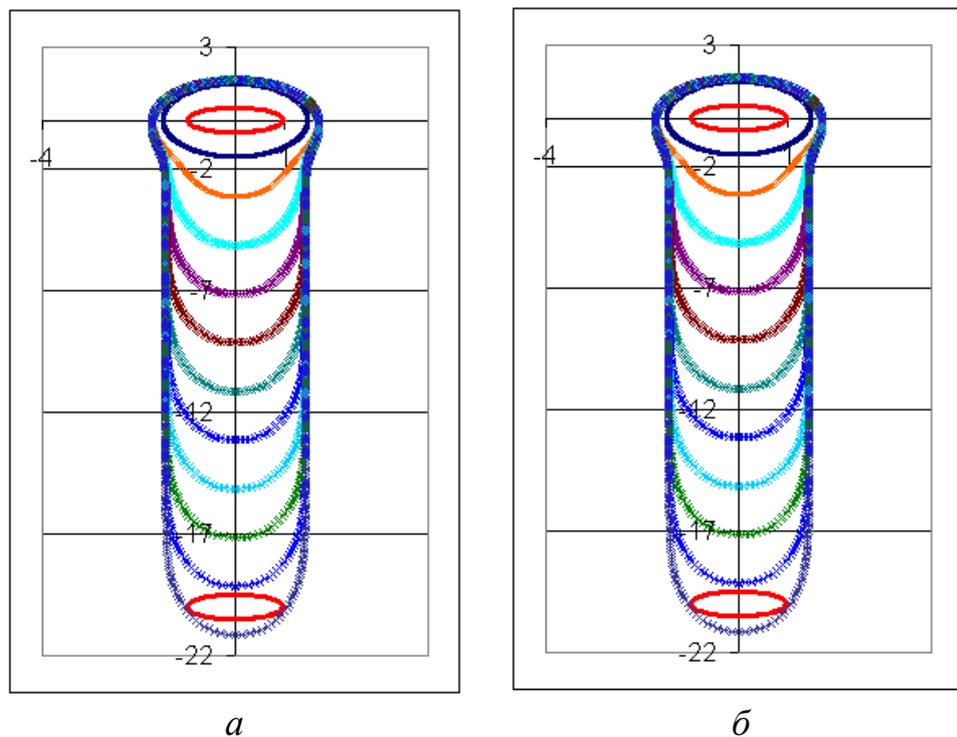


Рис. 4.6.5. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
*a* –  $\omega=4\pi$ ,  $\Delta\theta=36^\circ$ ; *б* –  $\omega=4\pi$ ,  $\Delta\theta=30^\circ$

Однако рис. 4.6.6 показывает, что при  $\Delta\theta=30^\circ$  происходит самопересечение границ в момент отключения напряжения.

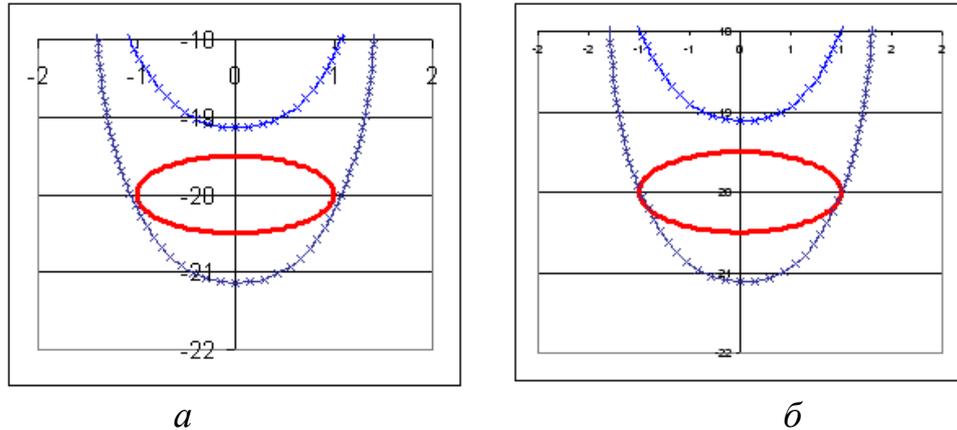


Рис. 4.6.6. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
 $a - \omega=4\pi, \Delta\theta=36^\circ$ ;  $б - \omega=4\pi, \Delta\theta=30^\circ$

Это ограничивает величину  $\Delta\theta$  снизу.

Далее рассмотрим движение ЭИ с поворотом направления движения на  $90^\circ$  с сохранением синхронизации подачи напряжения (рис. 4.6.7 – рис. 4.6.9).

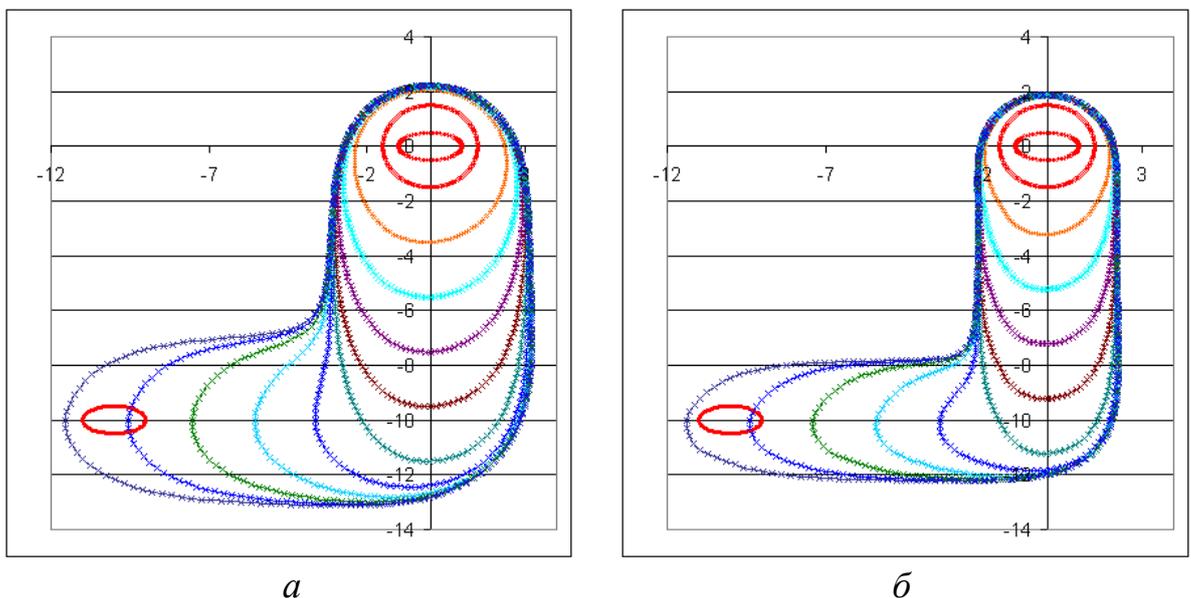


Рис. 4.6.7. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
 $a - \omega=\pi$ , без отключения;  $б - \omega=\pi, \Delta\theta=90^\circ$

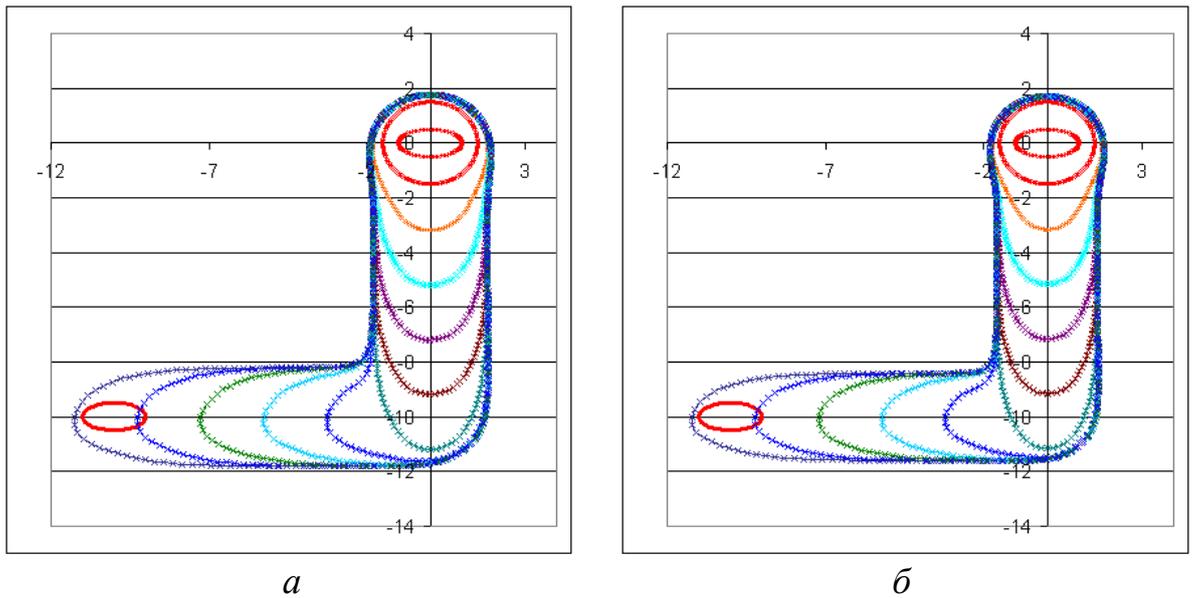


Рис. 4.6.8. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
 $a - \omega=2\pi, \Delta\theta=60^\circ$ ;  $б - \omega=3\pi, \Delta\theta=45^\circ$

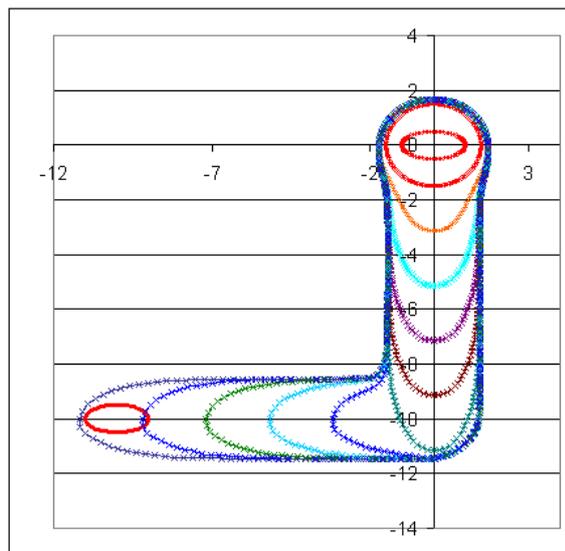


Рис. 4.6.9. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  $\omega=4\pi, \Delta\theta=36^\circ$

Рассмотрим результаты с  $n=320$ . Рис. 4.6.10,  $a$  показывает, что при повороте может произойти самопересечение границ. При увеличении частоты этот эффект исчезает, но некоторый момент расстояние между электродами становится весьма малым. Т.е. поворот – опасный маневр. На рис. 4.6.11 показан момент начала поворота при  $\Delta\theta=45^\circ$ .

На рис. 4.6.12 и рис. 4.6.13 приведены конфигурации для различных значений  $\omega$  и  $\Delta\theta$ , рассчитанные при  $n=320$ .

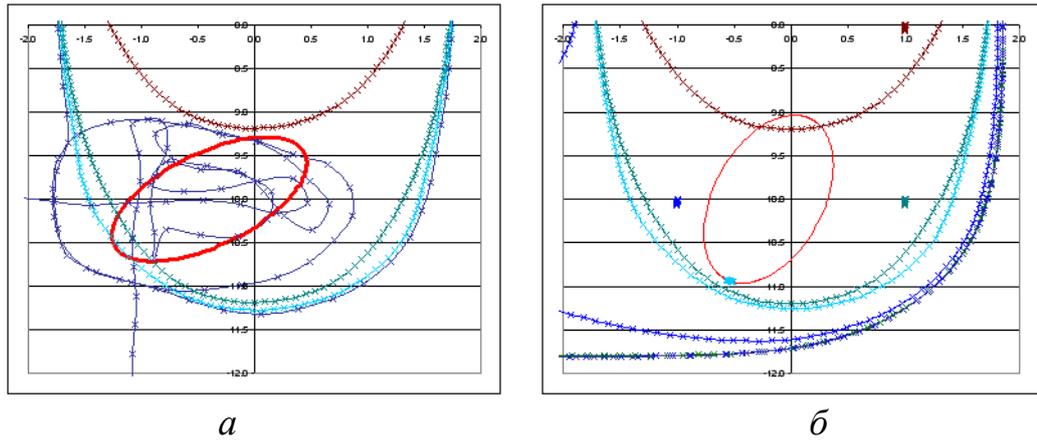


Рис. 4.6.10. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
 $a - \omega=2\pi, \Delta\theta=60^\circ$ ;  $b - \omega=3\pi, \Delta\theta=60^\circ$

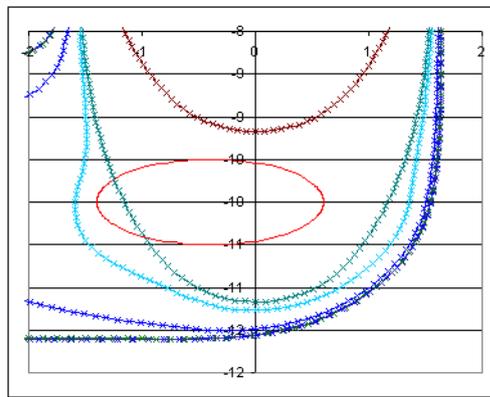


Рис. 4.6.11. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  $a - \omega=5\pi, \Delta\theta=45^\circ$

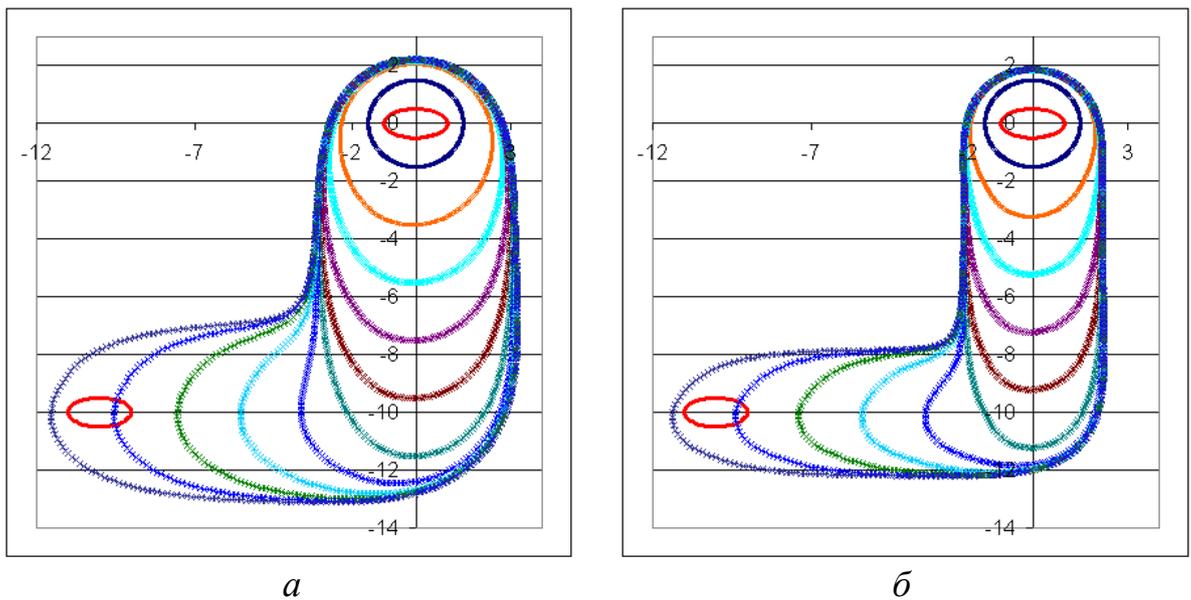


Рис. 4.6.12. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
 $a - \omega=\pi$ , без отключения;  $b - \omega=\pi, \Delta\theta=90^\circ$

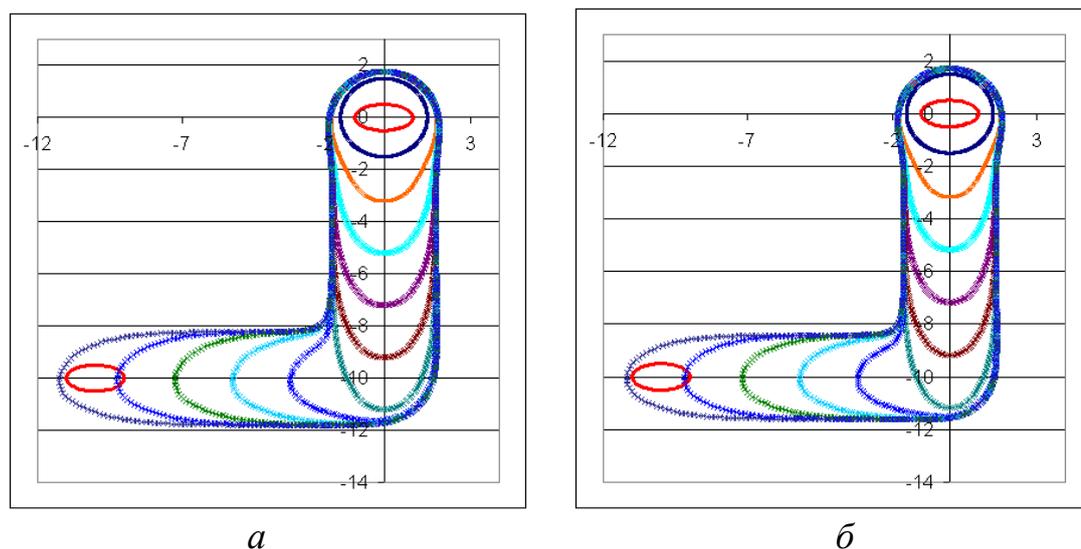


Рис. 4.6.13. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
 $a - \omega=3\pi, \Delta\theta=60^\circ$ ;  $b - \omega=5\pi, \Delta\theta=45^\circ$

Рассмотрим вариант включения напряжения только на одном торце ЭИ ( $\Delta\theta=90^\circ$ , рис. 4.6.14,  $a$ ). Для сравнения на рис. 4.6.14,  $b$  приведены формы для случая включения напряжения на обоих торцах для  $\Delta\theta=45^\circ$ . Имеет место некоторое увеличение ширины паза при включении напряжения на одном торце. При уменьшении угла  $\Delta\theta$  происходит самопересечение границ.

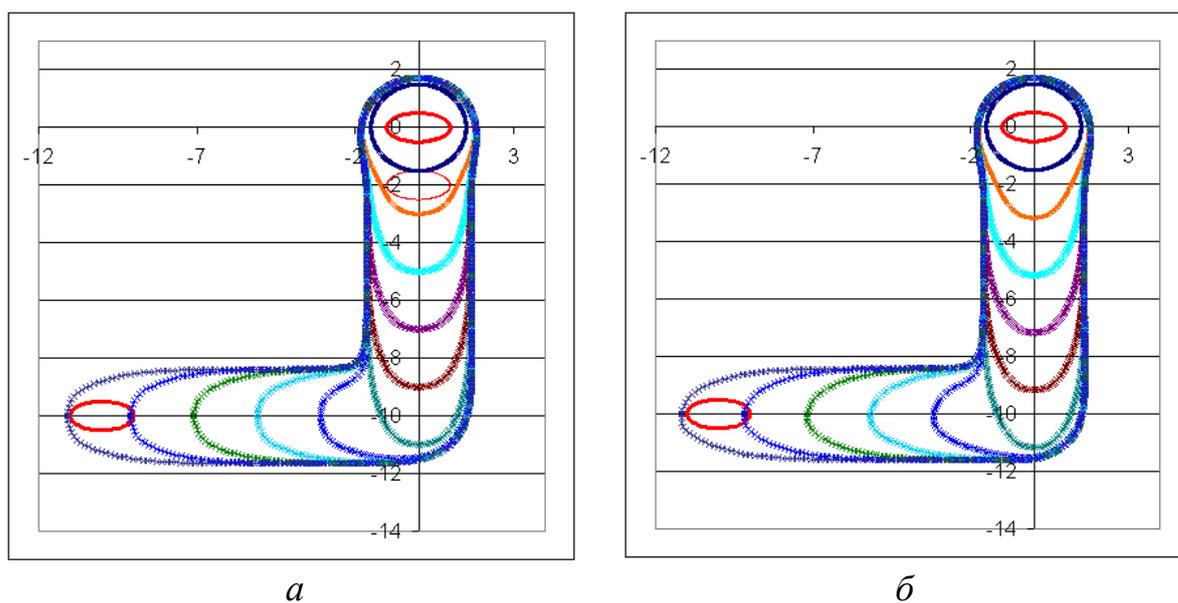


Рис. 4.6.14. Формы обрабатываемой поверхности при  $a/b=0.5$ :  
 $a - \omega=5\pi, \Delta\theta=90^\circ$  (на одном торце);  $b - \omega=5\pi, \Delta\theta=45^\circ$  (на обоих торцах)

## Выводы по главе 4

Проведен вычислительный эксперимент с различными способами задания узловых точек сетки на анодной поверхности, которая в нестационарном процессе претерпевает большие растяжения. Была выбрана равномерная сетка на каждом шаге. Для этого после каждого шага по измененной сетке строились сплайны (отдельно по  $x$  и  $y$ ), и по сплайнам восстанавливалась равномерная сетка.

С помощью этого алгоритма были проведены исследования для эллипсоидального электрод-инструмента с различными соотношениями полуосей и различной продолжительностью процесса  $\tau_{\max}$ . Были получены результаты для  $\tau_{\max} = 20$ ,  $\tau_{\max} = 100$  и  $\tau_{\max} = 200$ .

Проведена оценка погрешности с использованием численных данных, полученных для сеток с разным числом узлов и разной величины шага по времени.

Проведен вычислительный эксперимент с различными значениями угловой скорости  $\omega$  вращения ЭИ по часовой стрелке. Эксперимент показал, что левая граница прорезаемого паза при малых частотах приобретает волнообразную форму. При некотором значении  $\omega$  амплитуда волн имеет максимальное значение. Это было объяснено совпадением мгновенного центра вращения ЭИ, совершающего вращательное движение с одновременным поступательным движением его центра, с некоторой точкой на ОП. Это способствует наиболее длительному нахождению кромки ЭИ вблизи ОП и увеличению количества растворяемого материала.

Проведен вычислительный эксперимент при включении напряжения только на части периода вращения ЭИ. Найдены ограничения на величину этой части для избежания самопересечения границ.

## Заключение

1. Согласно результатам главы 2 можно сделать вывод о том, что фильтрация, выполняемая на этапе постпроцессорной обработки данных численного эксперимента, дает возможность получить достоверные оценки погрешности и существенно повысить точность и эффективность численных алгоритмов. Тестирование с помощью решений, полученных другим способом, позволило подтвердить эти оценки. Был разработан метод решения задачи о солитоне Стокса с увеличенной длиной мантиссы машинного слова, что дало возможность декларировать точность вычисления параметров до двух единиц 15-го разряда. В соответствии с этими результатами показано, что оценкам, полученным ранее, можно доверять. Это подтверждает работоспособность метода фильтрации для уточнения решения.

2. В главе 3 предложен численно-аналитический метод решения плоской квазистационарной задачи моделирования электрохимического копирования круглого электрода-инструмента, основанный на конформных отображениях и методе коллокаций. Результаты численных расчетов позволили определить форму заготовки в различные моменты времени и диапазон безразмерного времени, в котором квазистационарное решение с точностью более 3-х значащих цифр совпадает с нестационарным. Показано, что применение модели скачкообразной зависимости выхода по току позволяет получить формы, существенно более близкие к экспериментальным, что подтверждает адекватность применяемых моделей. Предложенный метод может быть применен для моделирования процесса копирования электродов-инструментов различных форм.

3. Разработан численно-аналитический метод решения осесимметричной задачи об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите, позволивший использовать для моделирования экспериментальные данные, а именно, немонотонную зависимость особого вида плотности тока от анодного потенциала. В отличие от плоской задачи для определения напряженности электрического поля использовались интегральные

преобразования аналитической функции. Полученное решение позволяет объяснить появление в натурном эксперименте на обрабатываемой поверхности трех зон: зоны активного растворения, зоны отсутствия растворения, соответствующей падающей части зависимости, и зоны слабого растворения, которая соответствует малым плотностям тока.

4. В главе 4 проведен вычислительный эксперимент по моделированию электрохимической резки плоским и эллипсоидальным вращающимся ЭИ с различными значениями угловой скорости  $\omega$  вращения ЭИ. Вычислительный эксперимент показал, что левая (при вращении по часовой стрелке) граница прорезаемого паза при малых частотах приобретает волнообразную форму. При некотором значении  $\omega$  амплитуда волн имеет максимальное значение. Это было объяснено совпадением мгновенного центра вращения ЭИ, совершающего вращательное движение с одновременным поступательным движением его центра, с некоторой точкой на обрабатываемой поверхности. Проведен вычислительный эксперимент при импульсном включении напряжения на части периода вращения ЭИ. Найдены ограничения на величину этой части для избежания короткого замыкания.

## Условные обозначения и сокращения

### Условные обозначения

$V_{ест}$  – скорость электрохимического растворения (сдвига границы по нормали);

$\varepsilon$  – электрохимический эквивалент;

$\rho$  – плотность растворяемого материала;

$j$  – плотность тока на анодной границе;

$\kappa$  – электропроводность электролита;

$\eta = \eta(j)$  – выход по току (доля тока, участвующего в реакции растворения металла);

$E = j/\kappa$  – напряженность электрического поля (закон Ома);

$\Phi, \varphi$  – потенциал;  $\Psi, \psi$  – функция тока;  $S, s$  – зазор;

$Z = X + iY; z = x + iy$  – координаты точек;

$W = \Phi + i\Psi; w = \varphi + i\psi$  – комплексный потенциал.

### Сокращения

ЭХО – электрохимическая обработка;

ЭИ – электрод-инструмент (катод);

ОП – обрабатываемая поверхность (анод);

МЭП – межэлектродное пространство,

ТФКП – теория функций комплексного переменного,

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений.

**Список литературы**

1. Амромин Э.Л., Бушковский В.А., Садовников Д.Ю. Уединенные волны Стокса при течении несжимаемой жидкости в щель //Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. №6. С. 173–176
2. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. О наличии трех решений при обтекании препятствий сверхкритическим установившимся потоком тяжелой жидкости // ПМТФ. 1999. Т.40. №1. С.27-35
3. Волгин В. М., До Ван Донг, Давыдов А. Д. Моделирование электрохимической обработки проволочным электродом-инструментом // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2013. Вып. 11. С. 122–136.
4. Газизов Е.Р. Анодное формообразование криволинейным катодом при неравномерной поляризации анода // Изв. КГАСУ. Казань. 2006. № 1 (5). С. 132–135.
5. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Изв. вузов. Авиационная техника. 2002. № 4. С. 55–57.
6. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей / М.П. Галанин, Е.Б. Савенков. – Москва; Изд-во МГТУ, 2010. – 590 с. : ил.; 24 см."
7. Галина И.Л. Истечение струи из канала с гибким ограждением // Прикл. матем. и мех. 1979. Т.43. №1. С.91–98.
8. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979, 536с.
9. Житников В. П., Шерыхалина Н. М. Моделирование течений несжимаемой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. Акад. Наук Респ. Башкортостан, Отд-ние техн. наук. Уфа: Гилем, 2009. -335с.
10. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Соколова А. А. Предельно-квазистационарное копирование круглого электрод-инструмента // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, №1. С. 173–179.

11. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Зиннатуллина О.Р. Моделирование прецизионной электрохимической обработки секционированным катодом // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 185–192.
12. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании // Изв. Вузов. Математика. – 2010, № 10. – С. 77-81.
13. Житников В. П., Соколова А.А. Решение задачи о солитоне Стокса с краевыми условиями, заданными в дифференциальном виде // Тр. Росс. научн.-техн. конф. Мавлютовские чтения, Уфа, УГАТУ, 2016, Т. 4. С. 37 – 41.
14. Житников В. П., Соколова А.А., Шерыхалин К.О. Закономерности накопления погрешности округления при решении некоторых вычислительных задач // Труды 5-й межд. конф. «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений», 16 - 19 мая, Уфа, Россия, 2017., Т.1. С. 165 – 169.
15. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Федорова Г.И., Соколова А.А. Математическое моделирование процессов гидродинамики и электрохимической обработки с помощью численно-аналитических методов // Системная инженерия и информационные технологии. – 2021. –Том 3, № 1 (5). – С. 58-64.
16. Житников В. П., Шерыхалина Н.М., Зарипов А.А. Моделирование электрохимического формообразования в условиях немонотонной зависимости анодного потенциала от плотности тока // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, №4. С. 25–31.
17. Житников В. П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Моделирование электрохимической обработки вращающимся пластинчатым электрод-инструментом // Международный научно-исследовательский журнал. 2017. № 06 (60). Часть 3. С. 127–132.
18. Житников В. П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Осесимметричная задача об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите // Южно-Сибирский научный вестник. 2019. № 2(26). С. 175-179.

19. Житников В. П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Оценка погрешности и ее обоснование с помощью фильтрации численных результатов, полученных при разных числах узловых точек сетки // Известия Самарского научного центра РАН. 2017. Т.19, № 1(2). С. 401–405.
20. Житников В.П. Решение плоских и осесимметричных задач с помощью методов теории функций комплексного переменного. Уфа: УГАТУ, 1994. 106 с.
21. Житников В.П., Терентьев А.Г. Струйное обтекание гибкой оболочки потоком идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1982. – №6. – С. 43-48.
22. Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка // М.: Машиностроение, 2007. – 407 с.
23. Житников В.П., Зиннатуллина О.Р., Житникова Н.И. Модификация методов численного интегрирования для решения осесимметричных задач // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19, № 2 (68). С. 179–182.
24. Житников В.П., Муксимова Р.Р., Зарипов А.А. Моделирование прецизионной нестационарной электрохимической обработки круглым и пластинчатым электрод-инструментом // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19, №1 (67). С. 92–99.
25. Житников В.П., Ошмарина Е.М., Федорова Г.И. Точные решения двух задач предельного квазистационарного электрохимического формообразования // Известия вузов. Математика, 2011. №12. – С. 21-29.
26. Житников В.П., Терентьев А.Г. Безотрывное обтекание гибкой оболочки // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1984. - №5 - С. 15-20.
27. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Методы верификации математических моделей в условиях неопределенности // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. -С. 53-60.
28. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Оценка достоверности численных результатов при наличии нескольких методов решения задачи // Вычислительные технологии. 1999. Том 4, № 6. С. 77-87.
29. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Моделирование процесса прорезания пазов вращающимся электрод-инструментом // Южно-сибирский научный вестник, 2019, № 4 (28). С. 146–151.

30. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Чукалова А.О., Соколова А.А. Моделирование нестационарной электрохимической обработки эллипсоидальным электрод-инструментом // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, №1. С. 24–32.
31. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Поречный С. С. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // СПб. Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. №3(80). С. 105–110.
32. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Поречный С. С., Зарипов А. А. Исследование свойств численных методов с помощью вычислительного эксперимента: учеб. пособие // Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа : РИК УГАТУ, 2019. – 287 с.
33. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Муксимова Р.Р. Дополнительные главы теории функций комплексного переменного: учебное электронное издание локального доступа // Уфа: УГАТУ, 2014. – 85 с. № гос. регистрации 0321402284.
34. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Многокомпонентный анализ численных результатов. Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. 389 с.
35. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Обоснование методов фильтрации результатов численного эксперимента // Вестник УГАТУ, 2007. – Т. 9, – №3 (21). –С. 71-79.
36. Житникова Н.И., Зарипов А.А., Федорова Г.И. Моделирование электрохимической обработки круглым электрод-инструментом в условиях непостоянства электродных потенциалов // Тенденции развития науки и образования: сб. науч. тр. по материалам XXIX междунар. науч.-практ. конф. 31 августа 2017 г. Ч. 3. Самара, изд. НИЦ «Л-Журнал», 2017. С. 5–9.
37. Зайцев А.Н. Патент РФ №2647413 В23Н 3/02 Способ электрохимической обработки непрофилированным электродом-инструментом и устройства для его осуществления / Салахутдинов Р.М., Зайцев А.Н., Безруков С.В, Косарев Т.В., Идрисов Т.Р.- Оpubл. БИ №8 15.03.2018.

38. Зарипов А.А. Моделирование электрохимической обработки стержневым электрод-инструментом в пассивирующем электролите // Сб. науч. тр. по материалам VIII Междунар. науч.-практ. конф. «Теоретические и прикладные аспекты современной науки». Ч. 1. Белгород, 2015. С. 8–14.
39. Идрисов Т.Р., Зайцев А.Н., Амирханова Н.А. Исследование электродных потенциалов в нестационарных условиях при электрохимической обработке // Электронная обработка материалов. 2001. – № 1. – С. 4-8.
40. Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И. Методы расчета электрохимического формообразования. – Казань: КГУ, 1990. – 387 с.
41. Клоков В.В. Электрохимическое формообразование. Казан. гос. ун-т, 1984. - 80 с.
42. Клоков В.В., Шишкин С.Е. Стационарное анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Тр. семин. по краевым задачам. Казань, Казанск. ун-т. 1985. Вып. 22. С. 117–124.
43. Коннор Дж., Бребия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – М.: Мир, 1981.
44. Котляр Л.М. Миназетдинов Н.М. Об одном методе расчета газожидкостного слоя при стационарной электрохимической обработке// Тр. семин. по краевым задачам. – Казань: Изд-во КГУ, 1993. – Вып. 28. – С. 51-58.
45. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ. – М.: Academia, 2005. – 200 с.
46. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ. – 2003. – Т. 44, №3. – С. 179-184.
47. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Эволюция формы анодной границы при электрохимической размерной обработке металлов // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск: 2004. – Т. 45, №4, – С. 7-12.
48. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

49. Леврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – 2-е изд., 1977. – 407с.
50. Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения. Итоги науки и техники ВИНТИ. Совр. пробл. мат.: фундам. направление. – 1988. – Т. 27. – С. 131-228.
51. Маклаков Д. В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. Янус-К, М., 1997.
52. Маклаков Д.В., Шишкин С.Е. Метод возмущений в задачах стационарной электрохимической обработки // Тр. семин. по краевым задачам. – Казань: Казанск. ун-т, 1987. – Вып. 23. – С. 164-168.
53. Маннапов А.Р., Зайцев А.Н. Технологические показатели электрохимического формирования вставок щёточных уплотнений // Вестник УГАТУ, 2008. – № 11. – С. 23-28.
54. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика / Перевод с англ. А.А. Петрова [и др.]; Под ред. Н.Н. Моисеева. – Москва; Мир, 1964. -655 с."
55. Миназетдинов Н.М. Об одной задаче размерной электрохимической обработки // ПМТФ. 2009, т. 50, №3. – С. 214-220.
56. Муксимова Р.Р., Житников В.П., Зарипов А.А. Исследование влияния неравномерности потенциала при электрохимической обработке в пассивирующем электролите // Материалы III Междунар. науч.-практ. конф. «Теория и практика современных электрохимических производств». СПб., 2014. С. 37–38.
57. Мустьянцэ А.Н., Эрлихман Ф.М., Энгельгардт Г.Р., Дикусар А.И. Электрохимическое формообразование в условиях локальной изоляции анодной поверхности. I. Теоретический анализ // Электронная обработка материалов, Кишинёв, Штиинца, 1989, №3: 11-15 .
58. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов; учебное пособие. – Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 94 с."
59. Ошмарина Е. М. Квазистационарное приближение в задачах электрохимического формообразования // Сб. ст. шестой Всероссийск. зимн.

- шк.-семинара аспирантов и молодых ученых, Уфа: УГАТУ, 2011. Том 2. – С. 332–336.
60. Ошмарина Е.М., Салимьянов А.Р. Квазистационарное электрохимическое формообразование точечным электрод-инструментом // Принятие решений в условиях неопределенности. Вып. 7. – Уфа: УГАТУ. 2010. – С. 44-48.
61. Ошмарина Е.М., Ураков А.Р., Федорова Г.И. Квазистационарная задача электрохимической обработки угловым электродом-инструментом // Сб. трудов Девятой молодежн. научн. школы - конф. «Лобачевские чтения - 2010» том 40. – Казань, 1 – 6 октября 2010. – С. 256-261
62. Петров А. Г. Схема без насыщения для обтекания решетки профилей и вычисление точек отрыва в вязкой жидкости // Ж. выч. мат.и мат. физ. 2011, т. 51, № 7, с. 1326–1338.
63. Плотников П.И. Неединственность решения задачи об уединенных волнах и бифуркации критических точек гладких функционалов // АН СССР. Серия математическая. 1991. Т.55. №2. С.339-366.
64. Положий Г.Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Киев. ун-т, 1965. – 442 с.
65. Прудников А.П., Бычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука. – 1981. – 800 с.
66. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ РФ №2018619757. Программа расчета параметров солитона Стокса / Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Зарег. М.: Роспатент. 10.08.2018.
67. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ РФ №2025611363. Решение осесимметричной задачи ЭХО точечным электрод-инструментом /Соколова А.А., Шерыхалина Н.М. Зарег. М.: Роспатент. 17.01.2025.
68. Седыкин Ф.В. Размерная электрохимическая обработка деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 301 с.

69. Седыкин Ф.В., Орлов Б.П., Матасов В.Ф. Исследование анодного тока при электрохимической обработке при постоянном и импульсном напряжении // Технология машиностроения. 1975. № 39. С. 3–10.
70. Скорульская Ю.Ю., Муксимова Р.Р., Ошмарина Е.М. Решение задачи о стационарной электрохимической обработке плоским конечным электрод-инструментом с помощью разложения в ряд // Сб. трудов межд. научно-технической и образовательной конф. – Образование и наука – производству – ч.1. кн.1. Набережные Челны. 28-31 марта 2010. – С. 148-151.
71. Соколова А.А. Альтернативный метод решения задачи о солитоне Стокса как доказательство ранее полученных оценок погрешности // Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений 2017 (СПММОИиПВ-2017): труды Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 4–11 сентября 2017 г.) Том I; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт», 2017. С. 253–260."
72. Соколова А.А. Кавитационное обтекание оболочки по несимметричной схеме Рябушинского // Межвузовский научный конгресс. Высшая школа: Научные исследования. Москва, 27 сентября, 2019г. Изд. Инфинити. С. 220 – 230.
73. Соколова А.А. Стационарная электрохимическая обработка вертикальным пластинчатым катодом при ступенчатой функции выхода по току // Всерос. молодежн. научн. конф. «Мавлютовские чтения»: сб. тез. докл. Уфа: УГАТУ, 2011. Т.5. С. 71–72.
74. Соколова А.А. Стационарная электрохимическая обработка круглым катодом // Всерос. молодежн. научн. конф. «Мавлютовские чтения»: сб. трудов. Уфа: УГАТУ, 2012. Т.5 (Часть 1). С. 71-73.
75. Соколова А.А. Уточнение результатов вычислений методом численной фильтрации на примере производной элементарной функции // Научно-методический журнал XXI век, 2021, № 4 (56). С. 98-101.
76. Ураков А.Р., Гуцунаев А.В. Об одном подходе к решению нестационарных задач электрохимического растворения // Труды Междунар. конф. – Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. Прикладная

- математика. – Уфа: Изд. Института математики УНЦ РАН, 2000. – Т.4. – С. 201-205
77. Федорова Г.И. Методы расчета формообразования поверхности при нестационарной электрохимической обработке: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Уфа: 2004. – 158 с.
78. Федорова Г.И., Соколова А.А., Максютова Г.Р. Моделирование квазистационарной электрохимической обработки горизонтально движущимся электродом-инструментом с изолированной передней поверхностью // Труды XXXVI-й межд. науч. конф. "Современные концепции научных исследований", февраль 2018, Москва. Евразийское научное объединение № 2 (36). С. 17–20.
79. Шаймарданова Е.Р., Соколова А.А. Кавитационное обтекание мягкой воздухоопорной оболочки // Мавлютовские чтения: труды XVIII Всерос. молодежн. научн. конф. – Уфа: УУНиТ, 2024. Т.5. С. 167 – 170.
80. Шерыхалина Н. М. Численное исследование особенностей электрохимического растворения при обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите // Межд. науч.-иссл. журнал. 2017, №. 09(63), часть 3. С. 82–87.
81. Шерыхалина Н. М., Зиннатуллина О.Р., Соколова А.А. Моделирование стационарного процесса электрохимического осесимметричного формообразования точечным электродом-инструментом // Успехи современной науки. Белгород. 2017. Том 2, № 8. С 137 – 144.
82. Шерыхалина Н.М. Математическое моделирование технических объектов и процессов на основе методов многокомпонентного анализа результатов вычислительного эксперимента: Дисс. ... д-ра техн. наук. Уфа, 2012. – 376 с.
83. Шерыхалина Н.М. О проблеме обоснования достоверности оценки погрешности вычислений / Н. М. Шерыхалина // ITIDS+rrs'2014 : Proceedings of the 2 nd International Conference "Information Technologies for Intelligent Decision Making Support", Уфа, 18–21 мая 2014 года. Том 1. – Уфа: ГОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет", 2014. – С. 92-103. – EDN SHRYUD.

84. Ястребов В.Н., Каримов А.Х. Математическое моделирование нестационарного процесса электрохимического скругления кромок деталей ГТД // Электрохимические и электрофизические методы обработки материалов. – Казань: КАИ, 1989. – Вып. 1. – С.23 – 34.
85. Christiansen S., Rasmussen H. Numerical solutions for two-dimensional annular electrochemical machining problems // J. Inst. Maths. Applics. – 1976. – №18, – PP. 295 – 307.
86. Evans, W. A. B. & Ford, M. J. 1996 An exact integral equation for solitary waves (with new numerical results for some internal properties). Proc. R. Soc. Lond. A 452, 373-390. (DOI: 10.1098/rspa.1996.0020.)
87. Fox, M. J. H. 1977 Nonlinear effects in surface gravity waves on water. PhD thesis. Cambridge Univ.
88. Kosarev T.V., Idrisov T.R., Zaitsev A.N., Zhitnikov V.P. Investigation and Simulation of Topology of Passivity and Active Dissolution Areas on Anode for Electrochemical Machining with Additional Cathode // Proc. of 15th intern. symposium on electromachining ISEM-15. Pittsburgh, Pennsylvania – USA, April 23–27 2007. P. 305–308.
89. Kotlyar L.M., Minazetdinov N.M. Modeling of electrochemical machining with the use of a curvilinear electrode and a stepwise dependence of the current efficiency on the current density. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Pleiades Publishing, Ltd., 2016. vol. 57. no.1, pp.127–135. DOI:10.1134/S0021894416010144
90. Longuet-Higgins M.S., Fenton J.D. On the mass, momentum, energy and circulation of the solitary wave // Proc. R. Soc. Lond. 1974. V.340. P. 471-493.
91. Novak P., Rousaz I., Kimla A. etc. Mathematical simulation of electrochemical machining // Материалы междунар. шк. – ЭХОМ-88, Любневицы (ПНР), 1988. – С. 100 – 115.
92. Paluri N.S.V., Sondur S. Experiments with Range Computations Using Extrapolation // Reliable Computing. 2007. Vol. 13. No 1. P. 1 – 23.

93. Sherykhalina N.M., Sokolova A.A., Shaymardanova E.R. The practical application of numerical filtering method by example of calculating the simple functions derivative // Системная инженерия и информационные технологии. – 2022. –Том 4, № 2 (9). – С. 24-29.
94. Sherykhalina N.M., Sokolova A.A., Shaymardanova E.R. Numerical investigation of the different interpolation methods // Системная инженерия и информационные технологии. – 2023. –Том 5, № 1 (10). – С. 67-75.
95. Sherykhalina N.M., Zhitnikov V.P. Application of extrapolation methods of numerical results for improvement of hydrodynamics problem solution // Computational Fluid Dynamics Journ. Vol. 10, No. 3, 2001, pp. 309-314.
96. Smith D.A., Ford W.F. Numerical comparisons of non-linear convergence accelerations. – Mathematics of Computation, 1982. V. 38. 158. P. 481 – 499.
97. Sokolova A.A., Shaymardanova E.R., Sherykhalina N.M., Porechny S.S. Researching of influence of rotation angle of tool electrode for electrochemical machining of material // Системная инженерия и информационные технологии. – 2024. –Том 6, № 1 (16). – С. 16-22.
98. Volgin V. M., Davydov A. D. Modeling of multistage electrochemical shaping. // Journal of Materials Processing Technology. Elsevier, UK, 2004. – V. 3. – PP. 466 – 471.
99. Volgin V.M., Lyubimov V.V., Gnidina I.V., Davydov A.D., Kabanov T.B. Effect of Current Efficiency on Electrochemical Micromachining by Moving Electrode. Procedia CIRP. 2016. vol. 55. P. 65 – 70. DOI: 10.1016/j.procir.2016.08.031
100. Volgin, V.M., Do, V.D., Davydov, A.D. Modeling of wire electrochemical machining. Chem. Eng. Trans. 2014, 41, 91-96.
101. Wilkinson J.H. Rounding Errors in algebraic processes. – Englewood Cliffs, N.J.: PrenticeHall, 1963. ISBN 0-486-67999-3.
102. Williams J.M. Limiting gravity waves in water of finite depth. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond, 1981. A302. N1466. P. 139 – 188.

103. Zhitnikov V. P., Sherykhalina N.M., Sokolova A.A. Problem of Reliability Justification of Computation Error Estimates // *Mediterranean Journ. Soc. Sci.*, 2015, Vol. 6, no. 2, pp. 65 – 78.
104. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Zaripov A.A., Sokolova A.A. Quasi-stationary solution of a problem of electrochemical copying of a cogged surface // *Russian Mathematics*. 2017, Vol. 61, no 8, pp. 76 –80.
105. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Porechny S.S., Sokolova A.A. Modelling of the axisymmetric precision electrochemical shaping // *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS, Chelyabinsk, Russia)*, 2020, vol. 13, no 1, pp. 39-51.
106. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Porechny S.S., Sokolova A.A. Multi-stage filtering of numerical solutions with an application to the Hele-Shaw problem // *7th All-Russian Scientific Conference on Information Technologies for Intelligent Decision Making Support (ITIDS 2020)*. October 6-9, Ufa – Stavropol-Khanty-Mansiysk, Russia, 2020, *Advances in Intelligent Systems Research*, Vol. 174, pp. 178-185.

## Приложение А

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018619757

Программа расчета параметров солитона Стокса

Правообладатели: *Житников Владимир Павлович (RU), Шерыхалина  
Наталья Михайловна (RU), Соколова Александра Алексеевна  
(RU)*

Авторы: *Житников Владимир Павлович (RU), Шерыхалина  
Наталья Михайловна (RU), Соколова Александра Алексеевна  
(RU)*

Заявка № 2018616473

Дата поступления 22 июня 2018 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 10 августа 2018 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ибрагимов

## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2025611363

Решение осесимметричной задачи ЭХО точечным  
электрод-инструментом

Правообладатель: *Соколова Александра Алексеевна (RU)*

Авторы: *Соколова Александра Алексеевна (RU),  
Шерыхалина Наталия Михайловна (RU)*

Заявка № 2024693132

Дата поступления 18 ноября 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 17 января 2025 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

документ подписан электронной подписью  
Сертификат 0692e7e1d63006b154f24016700cc2026  
Владелец: *Зубов Юрий Сергеевич*  
Действителен с 10.07.2024 по 03.10.2025

*Ю.С. Зубов*

## Приложение Б

Утверждаю  
Генеральный директор  
ООО «СЕМАТ»



О.С. Сергеенко

21.02.2022

Акт

о внедрении результатов диссертационной работы  
Соколовой Александры Алексеевны  
на тему: «Математическое моделирование течений жидкости и  
электрохимического формообразования с использованием методов  
численной фильтрации»

Мы, нижеподписавшиеся, технический директор Идрисов Тимур Рашитович, инженер-конструктор Курохтин Всеволод Сергеевич составили настоящий акт о том, что следующие результаты диссертационной работы Соколовой Александры Алексеевны на соискание ученой степени кандидата технических наук, включающие:

1. Моделирование предельно квазистационарного режима обработки при копировании круглого электрод-инструмента,
2. Полученные расчетные значения безопасного проведения нового технологического процесса электрохимической обработки вращающимся электрод-инструментом с выполнением маневра «поворот ЭИ»,
3. Математическую методику обработки получаемых численных расчетных значений и их уточнение

прошли апробацию и опытную эксплуатацию в ООО «Семат» при моделировании технологических процессов ЭХО для изготовления опытных образцов.

Практическое применение новой модели и методики постпроцессорной обработки численных результатов позволило сократить время отладки процесса электрохимической обработки деталей на 30 %, улучшить параметры технологического процесса, в частности, повысить производительность процесса на 5% за счет оптимизации траектории движения электрода-инструмента.

Технический директор ООО «Семат»,  
к.т.н. Идрисов Т.Р.

 21.02.2022

Инженер-конструктор ООО «Семат»  
Курохтин В.С.

 21.02.2022

Акт  
о внедрении результатов диссертационной работы  
Соколовой Александры Алексеевны  
на тему: «Математическое моделирование течений жидкости и  
электрохимического формообразования  
с использованием методов численной фильтрации»

Мы, нижеподписавшиеся, генеральный директор ЗАО «НПО Параллель», к.т.н. Иванов Александр Васильевич, руководитель сервисно-монтажной службы Руднев Андрей Александрович составили настоящий акт о том, что следующие результаты диссертационной работы Соколовой Александры Алексеевны на соискание ученой степени кандидата технических наук, включающие:

1. Полученные расчетные значения безопасного проведения технологического процесса электрохимической обработки вращающимся электрод-инструментом с выполнением маневра «поворот ЭИ»,
  2. Методику постпроцессорной обработки получаемых численных расчетных значений, их уточнение и обоснование достоверности
- прошли апробацию и опытную эксплуатацию в научно-производственном объединении «Параллель» при моделировании технологических процессов электрохимической обработки для изготовления опытных образцов.

Практическое применение полученных характеристик нестационарных процессов формообразования при обработке вращающимся электродом-инструментом позволило оптимизировать параметры обработки индукторов для индукционных нагревательных установок (ИН) и токопроводящих деталей для плавильных установок (ИПТ), повысить производительность технологических процессов на 3% и снизить вероятности возникновения коротких замыканий за счет минимизации резких изменений траектории движения электрода-инструмента и на 25% уменьшить время настройки оборудования.

Генеральный директор  
ЗАО «НПО Параллель», к.т.н.



Иванов А.В.

Руководитель сервисно-монтажной  
службы

Руднев А.А.

*Заверяю. Мух. ОК Лосф Лосев А.Ю.  
10.12.2024 г.*



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор УУНиТ  
по развитию образования

Ю.В. Рахманова

(подпись)

« 24 » декабря 2024 г.

### Акт

об использовании результатов диссертационной работы  
Соколовой Александры Алексеевны

«Математическое моделирование течений жидкости и электрохимического формообразования с использованием методов численной фильтрации», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, в учебном процессе кафедры вычислительной математики и кибернетики.

Мы, нижеподписавшиеся, составили настоящий акт о том, что научные и практические результаты исследований, полученные в процессе выполнения диссертационной работы Соколовой Александры Алексеевны «Математическое моделирование течений жидкости и электрохимического формообразования с использованием методов численной фильтрации», а именно:

- модели и методы для повышения точности результатов расчетов и обоснования их достоверности при решении задач численными методами;
- алгоритмическое, информационное обеспечение и программная реализация для получения численных расчетных значений, их уточнения и оценки погрешности

внесены в учебный процесс кафедры вычислительной математики и кибернетики и используются в процессе выполнения расчетно-графических и лабораторных работ при изучении дисциплин «Методы вычислений», «Приближенные вычисления», а также выпускных квалификационных работ при подготовке бакалавров по направлениям «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и «Программная инженерия».

Использование указанных материалов диссертационной работы позволяет обеспечить повышение качества процесса обучения.

Зав. каф. ВМиК

Директор ИИМРТ

Г.Р. Шахматова

О.А. Кривошеева

## Приложение В

Листинг программы решения задачи о солитоне Стокса

```
#include <quadmath.h>
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <complex>
#include <fstream>
#include <string.h>
#include <iomanip>
#include <stdio.h>
#include <ctime>
using namespace std;
#define pi 3.1415926535897932384626433832795028Q
#define COMPLEX_ASSIGN(z_, r_, i_) {__real__(z_) = (r_); __imag__(z_) = (i_);}
ofstream st("sigma.xls");
ofstream fl("beta.xls");
ofstream st3("Dfr.xls");
ofstream st4("P1.xls");
ofstream st5("Newton1.xls");
__float128
xB,yB,xC,yC,x0,r0,aL,tetaA,tetaB,tetaC,am,ak,alamda,tauP,Q0,alpha,cza,amass,poten,aimp,akin,cir
c,circ1,ind3,ii0,nn0;
const int NM=6000;
int N=5;
__float128 a[NM][NM];
__float128 shg[2*NM+1], chg[2*NM+1];
__float128 pe,hist,sighi,beta1,c[2],ind2,g,vkl;
__float128
fin[NM+1],sh[NM+1],ch[NM+1],X2[NM+1],x2Gs[NM+1],X[NM+1],dys[2*NM+1],dxs[2*NM+1],fing[
2*NM+1],Y[NM+1],Px[NM+1],SigS[NM+1], Y2[NM+1];
__float128 xss[NM+1],dxs[NM+1],dxs2[NM+1],p1[NM+1],dwdz[NM+1],P[NM+1],
DYT[NM+1],dy2t[NM+1], DXT[NM+1], dx2t[NM+1];
__float128 dxs2[NM+1],dys2[NM+1], dyf[NM+1],dyf2[NM+1],dyf3[NM+1],P2[NM+1],
SIG[NM+1], SIG2[NM+1],SIGn1[NM+1];
__float128 teta[NM],tau[NM],P1[NM];
__float128 dzdtbet,dzcdt,dzdsbeta,dbetadt,Vkl,Y0,R,R1,bt,da;
__float128 gg0(__float128 pp);
__float128 Fr, DFr;
int INDPR, IND0;
__float128 eps=10e-20Q;
__float128 hx=1.5e-8Q;
__float128 Q=1.0Q; //коэфф масшт
__float128 beta=0.5Q;
__float128 ak1=1.0Q/sqrtq(3.0Q);
//***** Омега 2 *****/////
__complex128 omega(__float128 sig,__float128 &dtau)
{ __complex128 omg, omg1, omg2;
__complex128 fz,df,dtau1,le;
```

```

__float128 fz1;
__float128 ex2;
COMPLEX_ASSIGN(le,0,1);
fz1=(1.0Q-expq(-pi*sig));
fz=(1.0Q+le*expq(-pi*0.5Q*sig));
omg1= le/3.0Q*(logq(fz1)-2.0Q*clogq(fz));
omg2= le*cza*(cexpq(beta*(logq(fz1)-2.0*clogq(fz)))-1.0);
omg=omg1+omg2;
ex2=expq(-pi*sig/2);
df=pi*ex2*(ex2+le)/cpowq((1.0Q+le*ex2),3.0Q);
dtau1=-pi/6.0Q/coshq(pi*sig/2.0)+le*pi/3.0Q/sinhq(pi*sig);
    dtau1=dtau1+le*beta*cza*cexpq((beta-1.0)*(logq(fz1)-2.0Q*clogq(fz)))*df;
    dtau=cimagq(dtau1);
return omg;
}
__float128 RIBBON(__float128 X[NM],__float128 Y[NM],__float128 P[NM],int N,__float128
pv0,__float128 pvn)
{
    __float128 AN[NM],AK[NM],a1,h1,h,F;
    AN[0]=pv0;
    AK[0]=0.0;
    for (int i=1;i<=N-1;i++)
    { h=X[i+1]-X[i];
      h1=X[i]-X[i-1];
      a1=h/h1;
      F=3*h/h1*(Y[i]-Y[i-1])/h1+3*(Y[i+1]-Y[i])/h;
      AN[i]=(F-a1*AN[i-1])/(2*(1+a1)+a1*AK[i-1]);
      AK[i]=-1/(2*(1+a1)+a1*AK[i-1]);
    }
    P[N]=pvn;

    for(int i=N-1;i>0;i--)
    {
    P[i]=AN[i]+AK[i]*P[i+1];
    }
    return 0;
}
__float128 RIBBON21(__float128 X[NM],__float128 Y[NM],__float128 P[NM],int N,__float128
p2v0,__float128 pvn)
{
    __float128 AN[NM],AK[NM],a1,h1,h,F;
    h=X[1]-X[0];
    AN[0]=-p2v0*h/4.0+1.5*(Y[1]-Y[0])/h;
    AK[0]=-0.5;
    for (int i=1; i<=N-1; i++)
    {
    h=X[i+1]-X[i];
    h1=X[i]-X[i-1];
    a1=h/h1;

```

```

F=3*h/h1*(Y[i]-Y[i-1])/h1+3*(Y[i+1]-Y[i])/h;
AN[i]=(F-a1*AN[i-1])/(2*(1+a1)+a1*AK[i-1]);
  AK[i]=-1/(2*(1+a1)+a1*AK[i-1]);
}
P[N]=pvn;
  for(int i=N-1; i>=0; i--)
  {
    P[i]=AN[i]+AK[i]*P[i+1];
  }
return 0;
}
__float128 razloj(__float128 sig)
{
  __float128 sum =0, fact=1;
  __float128 razl;
  if(sig<=0.15)
  {
    razl=1-expq(-sig);
  }

  if(sig>0.15)
  {
    for (int i=1; i <=30; i++)
      fact=fact*i;
    sum = sum + fact;
    razl=sum;
  }

return razl;
}
__float128 SPLINE(__float128 T, int NN, __float128 X[NM], __float128 Y[NM], __float128 P[NM],
int KI, int J)
{
  __float128 S=0;
  int IA=1,IB=2,I0;
  __float128 A,B;
  if((J<0) || (J>N-1)) goto m7;
  IA=J;
  IB=J+1;
  if((T>=X[IA])&&(T<=X[IB])) goto m2;
m7:
  IA=0;
  IB=N;
m1:
  I0=(IA+IB)/2;
  if(T<=X[I0])
  {
    IB=I0;
    if (IB-IA-1==0) goto m2;
    if (IB-IA-1<0) goto m10;

```

```

        else goto m1;
    }
else
    {
    IA=I0;
    if (IB-IA-1==0) goto m2;
    if (IB-IA-1<0) goto m10;
    else goto m1;
    }
m10:
    return 999;
m2:
    J=IA;
    A=X[J];
    B=X[J+1];
    if ((T<A) || (T>B)) return 998;
    __float128 h=B-A;
    if (KI<=-1)
        {
        S=powq((B-T),4)*(2*Y[J]+h*P[J])/(4*powq(h,3));
        S=S-powq((B-T),3)*(3*Y[J]+h*P[J])/(3*h*h);
        S=S-powq((T-A),4)*(2*Y[J+1]-h*P[J+1])/(4*h*h*h);
        S=S+powq((T-A),3)*(3*Y[J+1]-h*P[J+1])/(3*h*h);
        __float128 s1=0;
        for (int i=J+1; i<=N-1; i++)
            {
            __float128 h1=X[i+1]-X[i];
            s1=s1+h1/2*(Y[i+1]+Y[i])+(h1*h1)/12*(P[i]-P[i+1]);
            }
        S=S-s1-Y[J+1]*h/2+P[J+1]*h*h/12;
        goto m11;
        }
    if(KI-1<0) goto m3;
    if(KI-1==0) goto m4;
    if(KI-1>0) goto m5;
m3:
    S=powq((B-T),2)*(2*(T-A)+h)/(h*h*h)*Y[J];
    S=S+powq((T-A),2)*(2*(B-T)+h)/(h*h*h)*Y[J+1];
    S=S+powq((B-T),2)*(T-A)/(h*h)*P[J];
    S=S+powq((T-A),2)*(T-B)/(h*h)*P[J+1];
    return S;
m4:
    S=(-2*(B-T)*(2*(T-A)+h)+2*(B-T)*(B-T))/(h*h*h)*Y[J];
    S=S+(2*(T-A)*(2*(B-T)+h)-2*(T-A)*(T-A))/(h*h*h)*Y[J+1];
    S=S+(-2*(B-T)*(T-A)+(B-T)*(B-T))/(h*h)*P[J];
    S=S+(2*(T-A)*(T-B)+(T-A)*(T-A))/(h*h)*P[J+1];
    return S;
m5:
    if(KI>=3) goto m6;

```

```

S=(2*(2*(T-A)+h)-8*(B-T))/(h*h*h)*Y[J];
S=S+(2*(2*(B-T)+h)-8*(T-A))/(h*h*h)*Y[J+1];
S=S+(2*(T-A)-4*(B-T))/(h*h)*P[J];
S=S+(2*(T-B)+4*(T-A))/(h*h)*P[J+1];
return S;
m6:
    S=-12/(h*h*h)*(Y[J+1]-Y[J])+6/(h*h)*(P[J+1]+P[J]);
return S;
m11:
return S;
}
int param (int nf,int nl,int is)
{
// nf- 1-действит. ось 2- мнимая ось; nl- 1-интеграл по действит. оси, 2-интеграл по мним оси.
is - 0 - функция,1-производная
int J=0;
    __float128 hi,x1g,x2g;
    __float128 aksi;
    __float128 gau=(1.0)/sqrtq(3.0); // Значение первого Гауссовского узла
    if ((is!=0)&(is!=1)) return 0;
    if (nl==1)
    {
        for (int i=0; i<=N; i++)
        {
            if (nf==1)
            {
                sh[i]=sinhq(pi*SIG[i]);
                ch[i]=coshq(pi*SIG[i]);
            }
            else
            {
                sh[i]=sinhq(pi*SIG2[i]);
                ch[i]=-coshq(pi*SIG2[i]);
            }
        }
    }
    if (nf==1) // действит ось
        for (int i=0; i<=N; i++)
        {
            if (is==0) fin[i]=teta[i];
            if (is==1) fin[i]=P1[i]; // 1-я произв
                //st3<<fin[i]<<"\n";
        }
    else
        for (int i=0; i<=N; i++)
        {
            if (is==0) fin[i]=Y2[i];
            if (is==1) fin[i]=P2[i];
        }
}

```

```

if (nf==1)
  for (int i=1; i<=N; i++)
  {
    x1g=(SIG[i-1]+SIG[i])/2-(SIG[i]-SIG[i-1])/2*gau;// перебор отрезка разбиения
    x2g=(SIG[i-1]+SIG[i])/2+(SIG[i]-SIG[i-1])/2*gau;
    shg[2*i-1]=sinhq(pi*x1g);
    chg[2*i-1]=coshq(pi*x1g);
    shg[2*i]=sinhq(pi*x2g);
    chg[2*i]=coshq(pi*x2g);
    fing[2*i-1]=SPLINE(x1g,N,SIG,teta,P1,is,J); // действит. омега в неузловых точках
    fing[2*i]=SPLINE(x2g,N,SIG,teta,P1,is,J);
  }
else
  for (int i=1; i<=N; i++)
  {
    x1g=(SIG2[i-1]+SIG2[i])/2-(SIG2[i]-SIG2[i-1])/2*gau;
    x2g=(SIG2[i-1]+SIG2[i])/2+(SIG2[i]-SIG2[i-1])/2*gau;
    shg[2*i-1]=sinhq(pi*x1g);
    chg[2*i-1]=coshq(pi*x1g);
    shg[2*i]=sinhq(pi*x2g);
    chg[2*i]=coshq(pi*x2g);
    fing[2*i-1]=SPLINE(x1g,N,SIG2,Y2,P2,is,J);
    fing[2*i]=SPLINE(x2g,N,SIG2,Y2,P2,is,J);
  }
return 0;
}
__float128 Integral(int is,int kk,__float128 sig ,__float128 *X,__float128 *Y,__float128 *P,int NN
{
  __complex128 SUMMA, SUM2;
  __float128 sigk,Ssigk,Csigk,QforX;
  int K=0;
  if (kk>=0)
  {
    sigk=X[kk];
    Ssigk=-sh[kk];
    Csigk=-ch[kk];
  }
  else
  {
    sigk=sig;
    Ssigk=-sinhq(pi*sigk);
    Csigk=-coshq(pi*sigk);
  }

  QforX=0;
  if (is==1)
  {
    Ssigk=-Ssigk;

```

```

Csigk=-Csigk;
if (kk>=0)
    QforX=fin[kk];
else
    QforX=SPLINE(sigk,N,X,Y,P,0,K);
}
if (is==-1)
{
Ssigk=1;
Csigk=0;
}
SUMMA=0;
for (int i=0; i<=N; i++)
    SUMMA=SUMMA+((fing[2*i-1]-QforX)/(chg[2*i-1]-Csigk)+(fing[2*i]-
QforX)/(chg[2*i]-Csigk))*(X[i]-X[i-1])/2;
    SUM2=SUMMA*Ssigk;
if (is==1)
    if (sigk!=X[N])
        SUM2=SUM2-QforX*sigk+QforX*logq((expq(pi*X[N])-
expq(pi*sigk))/(expq(pi*X[N])-expq(-pi*sigk)))/pi;
return crealq(SUM2);
}
__float128 DIntegral(int is,int kk,__float128 sig ,__float128 *X,__float128 * Y,__float128 *P,int NN
)
{
    __float128 SUMMA=0;
    __float128 sigk,Ssigk,Csigk,DQforX;
    if (kk>=0)
    {
        sigk=X[kk];
        Ssigk=-sh[kk];
        Csigk=-ch[kk];
    }
    else
    {
        sigk=sig;
        Ssigk=-sinhq(pi*sigk);
        Csigk=-coshq(pi*sigk);
    }
    DQforX=0;
    if (is==1)
    {
        Ssigk=-Ssigk;
        Csigk=-Csigk;
        DQforX=fin[kk];
    }
    if (is==-1)
    {
        Ssigk=1;
        Csigk=0;
    }
}

```

```

    DQforX=0;
    }
    for (int i=1; i<=NN; i++)
        SUMMA=SUMMA+((fing[2*i-1]*shg[2*i-1]-DQforX*Ssigk)/(chg[2*i-1]-
Csigk)+(fing[2*i]*shg[2*i]-DQforX*Ssigk)/(chg[2*i]-Csigk))*(X[i]-X[i-1])/2;
        if (is==1)
            if (sigk!=X[NN])
                SUMMA=SUMMA-DQforX*sigk+DQforX*logq((expq(pi*X[NN])-
expq(pi*sigk))/(expq(pi*X[NN])-expq(-pi*sigk)))/pi;
        return SUMMA;
    }
__float128 IntDYT1(__float128* X, __float128 *Y, __float128 *P, int NN)
{ __float128 SUMMA=0;
  for(int i=1;i<=N;i++)
      SUMMA=SUMMA+(fing[2*i-1]+fing[2*i])*(X[i]-X[i-1])/2;
  return SUMMA;
}
int gauss (__float128 a[NM][NM], __float128 b[NM], int n, int &ks)
{
    int icol, irow, indxc[NM], indxr[NM], ipiv[NM];
    __float128 big, dum, pivinv;
    ks=0;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        ipiv[i] = 0;
    }
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        big = 0.0;
        for(int j = 1; j <= n; j++)
        {
            if(ipiv[j] != 1)
            {
                for(int k = 1; k <= n; k++)
                {
                    if(ipiv[k] == 0)
                    {
                        if(fabsq(a[j][k]) > big){
                            big = fabsq(a[j][k]);
                            irow = j;
                            icol = k;
                        }
                    }
                }
                else{
                    if(ipiv[k] > 1)
                    {
                        ks = 1;
                        return 0;
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        }
    }
}
ipiv[icol] = ipiv[icol]+1;
if(irow != icol)
{
    for(int l = 1; l <= n; l++)
    {
        __float128 dum = a[irow][l];
        a[irow][l] = a[icol][l];
        a[icol][l] = dum;
    }
    dum = b[irow];
    b[irow] = b[icol];
    b[icol] = dum;
}
indxr[i] = irow;
indxc[i] = icol;
if(a[icol][icol] == 0)
{
    ks = 1;
    return 0;
}
pivinv = 1.0 / a[icol][icol];
a[icol][icol] = 1.0;
for(int l = 1; l <= n; l++)
    a[icol][l] = a[icol][l]*pivinv;
b[icol] = b[icol]*pivinv;
for(int ll = 1; ll <= n; ll++)
{
    if(ll != icol)
    {
        dum = a[ll][icol];
        a[ll][icol] = 0.0;
        for(int l = 1; l <= n; l++)
            a[ll][l] = a[ll][l] - a[icol][l] * dum;

        b[ll] = b[ll] - b[icol] * dum;
    }
}
}
for(int l = n; l >= 1; l--)
{
    if(indxr[l] != indxc[l])
    {
        for(int k = 1; k <= n; k++){
            dum = a[k][indxr[l]];
            a[k][indxr[l]] = a[k][indxc[l]];

```

```

        a[k][indxc[l]] = dum;
    }
}
return 0;
}
//////////SYST//////////
int SYST(__float128 *DX,__float128 *YY)
{ __float128 dtau;
  __complex128 omegam;
  Fr=DX[1];
  cza=DX[2];
  YY[1]=1e10;
  for (int i=1; i<=N-1; i++)
  { teta[i]=DX[i+2];
  }
  teta[0]=0;
  teta[N]=0;
  RIBBON21 (SIG, teta,P1,N,0.0,0.0);
  param(1,1,0);
  for (int i=0; i<=N; i++)
  {
    tau[i]=-DIntegral(1,i,SIG[i],SIG,teta,p1,N);
  }
  RIBBON(SIG,tau,P,N,0.0,0.0);
  Q=1;
  __float128 eps=1e-8;
  __float128 indpr=3;
  __float128 z=0;
  for (int m=1; m<=N-1; m++)
  {
    omegam=omega(SIG[m],dtau);
    __float128 tetam=teta[m]+crealq(omegam);
    __float128 taum=tau[m]+cimagq(omegam);
    dtau=P[m]+dtau;
    YY[m]= expq(3.0*taum)*dtau-1.0/(Fr*Fr)*sinq(tetam);
  }
  YY[N]=teta[N-1]; //P1[0]-pi/6.0;
  YY[N+1]=cza-tau[0]+logq(3.0/(pi*powq(Fr,2.0)))/3.0;
return 0;
}
int Newton(int n, __float128 *x,__float128 *y, __float128 hx, __float128 eps)
{
  int ks1;
  __float128 B[NM], XC[NM], YC[NM], XT[NM], T[3], F[3];
  cout<<N<<"Newton beginig\n";
  st5<<N<<"Newton beginig\n";
  if(n > NM){
    cout << "N > NM" << endl;

```

```

    }

m101:
    SYST(x, y);
    __float128 G = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        if (fabsq(y[i]) > G) G=fabsq(y[i]);
    }
    if(G < eps)
        return 0;

    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        XC[i]=x[i];
        YC[i]=y[i];
    }

    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        x[i]=XC[i]-hx;
        SYST(x,y);
        B[i]=-YC[i];
        for (int j = 1; j <= n; j++)
        {
            a[j][i]=(y[j]-YC[j])/(-hx);
        }
        x[i]=XC[i];
    }
    ks1 = 0;
    gauss(a, B, n, ks1);
    if (ks1 == 1)
    {
        cout<<"vyrogdennanya matrix, n="<<n;
        return 99;
    }
    __float128 GR = 0.0;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        XT[i] = B[i];
        GR = GR + YC[i] * YC[i];
    }
    __float128 GH = -2.0 * GR;
    __float128 P = 0.0;
    cout<<setiosflags(std::ios_base::scientific);
    st5<<setiosflags(std::ios_base::scientific); // exp forma
    char buft[50];
    char bufs0[50];
    quadmath_snprintf(buft, sizeof buft, "%+.#*.34Qe",P,GR);

```

```
quadmath_snprintf(bufs0, sizeof bufs0, "%+-.#*.34Qe", GR);
cout<<"newton P="<<buft<<"GR="<<bufs0<<"\n";
st5<<"newton "<<buft<<" "<<bufs0<<"\n";
```

m301:

```
    P = 1.0;

    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        x[i] = XC[i] + P * XT[i];
    }
    SYST(x, y);
    __float128 G0 = 0.0;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        B[i] = -y[i];
        if (fabsq(y[i]) > G0) G0 = fabsq(y[i]);
    }
    if (G0 < eps)
    {
        return 0;
    }
    G = 0.0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        G = G + y[i] * y[i];
    }

    if(G > GR/2) goto m300;

    GR = G;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        XC[i] = x[i];
        XT[i] = 0;
        for(int j = 0; j <= n; j++)
            XT[i] = XT[i] + a[i][j] * B[j];
    }
    goto m301;
```

m300:

```
T[0] = 0.0;
T[1] = 0.0;
T[2] = 0.0;
T[1] = 0.0;
T[0] = GH;
int l1 = 0;
int l2 = 0;
P = 1.0;
__float128 G1 = G;
```

m102:

```

int K = 0;
__float128 PP = P / 100.0;
P = P + PP / 2;
goto m104;

m103:
P = P - PP;
K = 1;

m104:
    for(int i = 1; i <= n; i++)
        x[i] = XC[i] + P * XT[i];
    SYST(x, y);
    G0 = 0.0;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
        if (fabsq(y[i]) > G0) G0 = fabsq(y[i]);
    if (G0 < eps) return 0;
    G = 0.0;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
        G = G + y[i] * y[i];
    char bufs[128];
    char bufg[128];
    quadmath_snprintf(buft, sizeof buft, "%+-.34Qe", T[2]);
    quadmath_snprintf(bufs, sizeof bufs, "%+-.34Qe", G);
    quadmath_snprintf(bufg, sizeof bufg, "%+-.34Qe", G0);
    cout<<"Newton"<<buft<<" " <<bufs <<"\n";
    cout<<"g="<<bufg<<"\n";
    st5<<"Newton " <<buft<<" " <<bufs<<"\n";
    st5<<"g0="<<bufg<<"\n";
    st5.flush();
    if(G <= GR || K != 0) goto m118;
    P = (T[2] + P - PP / 2.0) / 2.0;
    if(P < 1e-5)goto m126;
    goto m102;

m118:
    if(K != 0) goto m119;
    G1 = G;
    goto m103;

m119:
    T[2] = P + PP / 2;
    F[2] = (G1 - G) / PP;
    if(F[0] != 0) goto m120;
    T[0] = T[2];
    F[0] = F[2];
    P = P / 2;
    goto m102;

m120:
    if(F[1]*F[2] < 0) goto m105;
    if(F[0]*F[1] > 0) goto m121;
    else goto m106;

```

```

m121:          if(F[0]/F[1]-1.0 > 0) goto m105;
                else goto m106;
m105:
                T[0] = T[2];
                F[0] = F[2];
                l1 = 0;
                l2 = l2 + 1;
                goto m107;
m106:
                T[1] = T[2];
                F[1] = F[2];
                l2 = 0;
                l1 = l1 + 1;
m107:
                if(T[0] == T[1]) goto m101;
                if(l1 + l2 - 6 > 0) goto m122;
                else goto m123;
m122:
                P = (T[0] + T[1]) / 2;
                goto m125;
m123:
                P = T[2] - F[2] * (T[1] - T[0]) / (F[1] - F[0]);
m125:
                if((F[1] - F[0]) / (T[1] - T[0]) < 0) P = 2*T[2];
                if(P <= 0.0) P = T[2] / 2.0;
                if(fabsq((P - T[2]) / P) > 0.1) goto m102;
m126:
    for(int i = 1; i <= n; i++)
        x[i] = XC[i] + P * XT[i];
    goto m101;

    return 0;
}
int main()
{ __float128 xx [NM+1]={0.0,1.2525,-0.24701,0.052120,0.14137,-0.0014175,0.00025385};
  __float128 yy [NM+1];
  char buf[128];
  __float128 f56;
  setlocale(LC_ALL,"rus");
  st.precision(16);
  __float128 alp=3.0;
  __float128 MMM=1000;
  __float128 Smax=40;
  cout << "Enter N: ";
  cin >> N;
  st3 << "\tFr\tDfr\n";
L13: bt=beta+(pi/2-
(atanq((beta+1)/ak1))/beta)*beta*beta/(beta*ak1/((beta+1)*(beta+1)+ak1*ak1)-
atanq((beta+1)/ak1));

```

```

if(bt<=0)
    {
        bt=beta/2;
    }
if(fabsq(bt-beta)<=1e-20)
{
    goto L10;
}
    da=beta-bt;
    beta=bt;
    goto L13;
L10: for(int i=0; i<=N; i++)
{
    SIG[i]=Smax/(MMM+alp)*((MMM-1)*powq((i/(N*1.0)),(alp+1.0))+(alp+1.0)*i/(N*1.0));
}
    //обращение к спуску
int AA=Newton(N+1, xx, yy, hx, eps);
cout<<"NewtonOut" <<"\t" <<"\n";
if (AA==99)
{
    goto m16;
}
DFr= Fr-1.290890455863341;////////////////////////////////////
st3.precision(20);
st3 << N << "\t";
quadmath_snprintf(buf,sizeof buf,"%+-.#*.34Qe",Fr);
st3 << buf << "\t";
quadmath_snprintf(buf,sizeof buf,"%+-.#*.34Qe",DFr);
st3 << buf <<"\n";
st3.flush();
    if (N*2>NM) goto m16;
    for(int i=0; i<=N*2; i++)
{
SIGn1[i]=Smax/(MMM+alp)*((MMM-1)*powq((i/(N*2*1.0)),(alp+1.0))+(alp+1.0)*i/(N*2*1.0));
    }
for(int i=0; i<=N*2; i++)
{ int J=0;
yy[i]=SPLINE(SIGn1[i],N,SIG,teta,P1,0,J);
}
for(int i=1; i<=N*2; i++)
{
    xx[2+i]=yy[i];
}
    N=N*2;
    if (N<=NM) goto L10 ;
m16: getchar();
    return 0;
}

```