На правах рукописи

Гайсина Галия Ахтяровна

РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ ПРАВИЛЬНОГО РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ. ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Уфа – 2023

Работа выполнена на кафедре программирования и экономической информатики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,
Юлмухаметов Ринад Салаватович

Официальные оппоненты: **Абанин Александр Васильевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет»,
заведующий кафедрой математического анализа и геометрии

Шерстюков Владимир Борисович,
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»,
профессор кафедры математического анализа

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань

Защита диссертации состоится 2 октября 2023 г. в 14^{00} на заседании объединенного диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте *https://uust.ru/*.

Автореферат разослан «___» __________ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Исаев Константин Петрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Асимптотические свойства целых или регулярных в круге функций в зависимости от поведения коэффициентов их степенного разложения исследовались многими математиками, в том числе: Ж. Адамар, Э. Борель, А. Виман, Ж. Валирон, Дж. Полиа, М. Фудзивара, Н.В. Говоров, А.Ф. Леонтьев, М.Н. Шеремета и другие (см., например, [1] – [8]). В трудах этих ученых был сформулирован ряд открытых проблем и гипотез. Среди них особенно привлекательными и актуальными оказались те, которые относились к лакунарным степенным рядам и рядам Дирихле.

В конце XX века особое значение приобрели вопросы разложения аналитических функций в ряды экспонент, в том числе – с учетом их роста вблизи границы области регулярности (см. [9], [10]). А.Ф. Леонтьевым и его последователями были получены фундаментальные результаты, относящиеся к этой проблеме. Им же была разработана эффективная методика исследования. Позднее А.М. Гайсиным и его учениками она была усовершенствована применением теорем типа Бореля-Неванлинны (см. [11]), а также уточнением оценок М.Н. Говорова ограниченной аналитической в единичном круге функции снизу (см. [12], [13]). Эта методика нашла свое применение и дальнейшее развитие в теории рядов Дирихле, в том числе – сходящихся только в полуплоскости (см. [14]).

Для изучения роста целых функций, представленных рядами Дирихле, обычно пользуются понятием R-порядка. Это понятие в свое время было введено Дж. Риттом. Им же были установлены формулы для вычисления этой величины через коэффициенты ряда Дирихле [15].

Рост функций, представленных рядами Дирихле, абсолютно сходящимися в полуплоскости, в терминах обычного порядка исследовали Е. Дагене [16], В. Бойчук [17], К. Нандан [18], [19], Ю. Шиа-Юн [20].

Задача, связанная с применением обобщенных порядков к изучению роста рядов Дирихле, сходящихся в полуплоскости, была рассмотрена в [21]. Позже в терминах R-порядка рост таких рядов в зависимости от коэффициентов был исследован в работах [22] – [24], а также в статьях [25], [26].

Так, в работе [22] упомянутый результат Дж. Ритта из [15] был полностью перенесен на случай полуплоскости, а в [27] – на ограниченную выпуклую область.

В теории рядов экспонент одним из основных является следующий наиболее общий результат А.Ф. Леонтьева: для любой ограниченной выпуклой области D найдется последовательность $\{\lambda_n\}$ комплексных чисел, зависящая только от данной области, такая, что любую функцию F, аналитическую в D, можно разложить в ряд экспонент $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ (сходимость – равномерная на компактах из D). Позже подобный результат о разложении в ряды экспонент, но с учетом роста, также был получен А.Ф. Леонтьевым для пространства аналитических функций конечного порядка в выпуклом многоугольнике (см. [9]). Этот факт в 1982 году был перенесен А.М. Гайсиным на полуплоскость (см. [28]).

В упомянутых выше работах речь идет о поведении суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности G в следующих случаях: G – левая полуплоскость $\Pi_0^- = \{z = x + iy\colon\ x < 0\}$ (или правая полуплоскость Π_0^+), конечная комплексная плоскость $\mathbb{C}$, ограниченная выпуклая область $D \subset \mathbb{C}$.

Кратко остановимся на результатах, полученных ранее и обозначим основные задачи, исследованию которых и посвящена диссертация.

Пусть функция f, определенная рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

аналитична только в круге $D(0,1) = \{z\colon |z| < 1\}$ и не ограничена.

Порядком ρ функции f называется величина (см. [2])

$$\rho = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Для таких функций независимо Н.В. Говоровым (1959), Г. Маклейном (1966) и М.Н. Шереметой (1968), была доказана формула для нахождения порядка ρ через тейлоровские коэффициенты (см. [3], [4], [29]).

Приведенные выше результаты работ [3], [4], [29] в свое время были обобщены для класса $D_0(\Lambda)$ неограниченных аналитических функций, представимых рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно сходящимися лишь в полуплоскости $\Pi_0^+ = \{s = \sigma + it\colon\ \sigma > 0\}$. В 1970 – 1980 гг. этой задачей занимались, в основном, многие математики Индии, Китая, а также Советского Союза. Суть этих работ заключалась, например, в том, чтобы найти ограничения на показатели ряда (1), при выполнении которых была бы верна формула

$$\frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n} \tag{2}$$

для порядка

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma\to 0+}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln\sigma}, \quad M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma+it)|.$$

Эти требования на показатели λ_n оказались самыми разными, порой неоправданно жесткими. При этом почти ни в одной работе не ставился вопрос о точности этих ограничений. В статье [30] все же было указано наиболее слабое условие на λ_n, существенность которого подтверждалась и примером, однако частного характера. В относительно недавней работе [31], выполненной в Институте математики Чешской академии наук в 2012 г., результат работы [30] был передоказан, хотя и в несколько иных терминах. Таким образом, хотя эта актуальная задача по сей день продолжает привлекать внимание специалистов, до сих пор не была доведена до конца. В диссертации ставится цель доказать и необходимую часть теоремы из статьи [30].

В работе А.Ф. Леонтьева [9] было введено понятие порядка ρ аналитической функции F в ограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$. В случае, когда G – выпуклый многоугольник, им было доказано, что любую функцию F, аналитическую в G и удовлетворяющую в G оценке

$$|F(z)| \le e^{\left(\frac{1}{r}\right)^{\rho+\varepsilon}}, \quad r < r_0(\varepsilon), \quad \forall\varepsilon > 0 \quad r = d(z) = \inf_{\xi\in\partial G} |z-\xi|, \tag{3}$$

можно представить в области G рядом экспонент

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \tag{4}$$

причем так, что ряд из модулей будет удовлетворять той же оценке (3). При $\rho > 1$ этот результат был распространен Р.С. Юлмухаметовым на произвольную выпуклую область [32].

Однако в работах [9], [32] нельзя было ставить вопрос о какой-либо формуле типа (2), ибо нет единственности разложения в ряд экспонент, поэтому и нет формул для коэффициентов ряда. В этом как раз и существенное отличие этого случая от полуплоскости.

Решение данной актуальной задачи и представлено в диссертационной работе (основной результат). Нами получены неулучшаемые двусторонние оценки для порядка в области G, откуда и выводится соответствующая формула для этой величины.

Все приведенные выше результаты, где рассматриваются аналоги порядка по Ритту (см. [22], [27]), восходят к работе [15], где было показано, что если

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} < \infty,$$

то для порядка по Ритту

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\sigma}$$

целого ряда Дирихле верна формула

$$-\frac{1}{\rho_R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln\lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} -R. \tag{5}$$

К. Сугимура получил ту же формулу при более слабом предположении (см. [33])

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln n(x)}{x\ln x} = 0, \quad n(x) = \sum_{\lambda_n\le x} 1.$$

Как показано в [34], в предположениях, сделанных в [33], ряд Дирихле (1) сходится во всей плоскости равномерно (в [15] ряд сходится и абсолютно, ибо $L<\infty$). А в этом случае верны двусторонние оценки (см. [34])

$$-R \le -\frac{1}{\rho_R} \le -R + T, \tag{6}$$

где

$$T = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln N(x)}{x\ln x}, \quad N(x) = \sum_{[x]\le\lambda_n<x} 1,$$

$[x]$ – целая часть x. Так как $T=0$ тогда и только тогда, когда $C=0$ (см. [35]), то результат К. Сугимуры есть следствие оценок (6). Тем не менее, в [34], видимо, и в более поздних работах вопрос о точности верхней оценки в (6) не рассмотрен. В диссертации ставится цель – доказать точность правой оценки в неравенствах (6) С. Танаки.

Наконец, ставится задача получить представление аналитических в полуплоскости Π_0^+ функций рядами экспонент с учетом заданной убывающей мажоранты роста, не ограниченной в окрестности нуля.

Объект исследования. Ряды Дирихле, сходящиеся в полуплоскости, во всей плоскости; ряды экспонент, область сходимости которых ограниченное выпуклое множество комплексной плоскости. Исследование роста суммы ряда экспонент вблизи границы в зависимости от поведения коэффициентов разложения и геометрических характеристик области регулярности. Вопросы разложения аналитических в полуплоскости функций в ряды Дирихле с учетом заданной мажоранты роста.

Степень разработанности темы. До сих пор вопросы о точной связи между ростом аналитической функции и поведением коэффициентов разложения в ряд Дирихле (или ряд экспонент) даже в терминах порядка – в случае полуплоскости, порядка по Ритту – во всей плоскости, особенно, порядка в ограниченной выпуклой области, оставались недостаточно разработанными. Задача, связанная с представлением аналитических в полуплоскости функций рядами Дирихле с учетом произвольной выпуклой мажоранты роста, по всей видимости, ранее вообще не рассматривалась.

Цель работы. Получить критерии справедливости формул для порядка суммы ряда Дирихле в полуплоскости, порядка по Ритту – во всей плоскости, зависящих только от коэффициентов и показателей ряда; найти неулучшаемые двусторонние оценки для порядка суммы ряда экспонент в ограниченной выпуклой области. Разработать метод представления аналитических в полуплоскости функций с учетом выпуклой мажоранты роста, основанный на тонких оценках теории преобразований Лежандра.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Методика исследования. В диссертации применяются как классические, так и современные методы вещественного и комплексного анализа, теории целых функций и рядов экспонент: формулы для коэффициентов А.Ф. Леонтьева, преобразования Фурье и Лежандра, методы касательной аппроксимации целыми функциями, аппарат теории дифференциальных операторов бесконечного порядка и др.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные в ней результаты и разработанная методика могут быть полезны не только в теории рядов экспонент, но и в теории аппроксимации в комплексной плоскости, в теории целых и субгармонических функций, а также в гармоническом анализе, дифференциальных уравнениях и спектральной теории. Они могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте имени В.А. Стеклова, Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В.А. Стеклова, Институте математики с ВЦ Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Южном федеральном университете, Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Казанском федеральном университете, Уфимском университете науки и технологий, Курском государственном университете, Московском педагогическом государственном университете.

Положения, выносимые на защиту:

1. Критерии справедливости формул для порядка в классах $D_0(\Lambda)$ и $D_0(\mu, \alpha)$.

2. Теоремы о точных двусторонних оценках для порядка и формуле для его вычисления в случае, когда область регулярности суммы ряда экспонент

ограниченная выпуклая область с гладкой границей.

3. Теорема о точности двусторонних оценок С. Танаки для R-порядка целого ряда Дирихле и критерий справедливости формулы для порядка по Ритту.

4. Результаты о представлении аналитических в полуплоскости функций с учетом выпуклой мажоранты роста: теорема представления с точной оценкой характеристической функции через нижнее преобразование Лежандра; теорема с оптимальной оценкой ряда из модулей членов представляющего ряда через заданную мажоранту.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на семинарах кафедры теории функций и функционального анализа, кафедры математического анализа Башкирского государственного университета, на Международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2016), на Международных научных конференциях «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (оз. Яктыкуль (Банное), 2018 – 2023), на Международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2017), на Международной конференции «Комплексный анализ и геометрия» (Уфа, 2018), на Международных научных конференциях «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2019 – 2021), на Международных конференциях «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2020, 2022), на Международной конференции «Комплексный анализ и смежные вопросы» (Казань, 2022) и на «32nd St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis» (Санкт-Петербург, 2023).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 20 работах, из которых 5 – в отечественных изданиях, которые входят в международные реферативные базы данных (Scopus и Web of Science). Список публикаций приводится в конце автореферата.

Личный вклад автора. Результаты диссертации получены лично соискателем.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на 11 параграфов, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 105 страниц. Библиография включает 60 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В **Главе I** исследуется оптимальность условий, при выполнении которых порядок ρ_R суммы F ряда Дирихле (1), сходящегося лишь в полуплоскости Π_0^+, может быть подсчитан при помощи формулы (2).

Пусть $D_0(\Lambda)$ – класс рядов Дирихле (1), сходящихся, причем абсолютно, в полуплоскости Π_0^+. Для произвольных, но фиксированных $\mu \in [0,\ 1]$, $\alpha \in [0,\ 1]$ через $D_0(\mu,\ \alpha)$ обозначим подкласс класса $D_0(\Lambda)$ рядов Дирихле (1), коэффициенты a_n и показатели λ_n которых удовлетворяют соответственно равенствам

$$\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}, \quad \alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}.$$

Как видно, в классе $D_0(\mu,\ \alpha)$, в отличие от $D_0(\Lambda)$, требуется некоторая согласованность показателей и коэффициентов.

В первой главе доказаны две теоремы.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы для любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ порядок ρ_F вычислялся по формуле (2), необходимо и достаточно, чтобы $\alpha = 0$.*

Теорема 1.2. *Пусть заданы μ ($0 \le \mu \le 1$), α ($0 \le \alpha \le 1$). Для того, чтобы порядок ρ_F любой функции $F \in D_0(\mu,\ \alpha)$ вычислялся по формуле (2), необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \le \mu$.*

Достаточность первой теоремы была доказана в [30], а второй теоремы – в [28]. Здесь нами доказаны необходимые части этих теорем.

В **Главе II** исследуется класс аналитических в ограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$ функций f конечного порядка ρ_f, представимых в ней рядом экспонент (4).

Уточним постановку задачи. Для этого кратко остановимся на истории вопроса.

Пусть D – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат, $K(\varphi)$ – опорная функция $\overline{D}$, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $L(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и простыми нулями λ_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots$. Пусть

$$|L(re^{i\varphi})| \le \frac{A}{r^\mu} e^{h(\varphi)r}, \quad \mu > 1,$$

и, кроме того, $L(\lambda)$ – функция вполне регулярного роста. Если для всякого $\varepsilon > 0$ при $k \ge k_0(\varepsilon)$

$$\ln|L'(\lambda_k)| \ge [h(\varphi_k) - \varepsilon]r_k, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}, \tag{7}$$

то любая функция f, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, представляется в области D рядом (4) (см. [7, гл. IV, §6, теорема 4.6.4]) (сходимость –

равномерная внутри D), причем

$$|a_k| \le B e^{[-h(\varphi_k)+\varepsilon]r_k}, \quad k \ge k_0(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0.. \tag{8}$$

Если же вместо (7) выполняется более сильное условие

$$|L'(\lambda_k)| \ge \frac{C}{r_k^p} e^{h(\varphi_k)r_k}, \quad k \ge 1, \tag{9}$$

то оценка (8) допускает качественное улучшение (см. [9]). Отметим, что А.Ф. Леонтьев был вынужден лишь постулировать это требование, ибо в общей ситуации не было известно, выполняется ли оно хотя бы для какой-то функции $L(\lambda)$. Если, например, D – выпуклый многоугольник, то условие (9) будет выполнено при $p = 2$ (см. [9]).

Рассматривая самую общую ситуацию, когда функция f только аналитична в D, А.Ф. Леонтьев показал (см. [7, гл. V, §2, теорема 5.2.1]), что существуют целая функция $M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ с ростом не выше первого порядка минимального типа и функция g, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, такие, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g^{(k)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z}, \quad b_k = a_k M(\lambda_k) \quad z \in D, \tag{10}$$

где a_k – коэффициенты разложения функции g в ряд экспонент вида (4). В случае (9)

$$|b_k| \le C r_k^p |M(\lambda_k)| e^{-h(\varphi)r_k}, \quad k \ge 1. \tag{11}$$

Если функция f вблизи ∂D имеет порядок

$$\rho_f = \overline{\lim_{z \to \partial D}} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{-\ln d(z)} \le q,$$

то, как показано в [9], функция $M(\lambda)$ имеет порядок не выше $q/(q+1)$, а порядок ряда из модулей $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k e^{\lambda_k z}|$ не больше q (это выводится с учетом оценок (11)).

Пусть $H(G, \Lambda)$ – класс аналитических в выпуклой ограниченной области G функций, имеющих конечный порядок и представимых в G рядами экспонент с множеством показателей $\Lambda = \{\lambda_k\}$. Показано, что для любой такой области G найдется последовательность Λ, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации

$$\delta = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right|, \quad Q(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \quad \lambda_k^2 \ne \lambda_n^2, \quad k \ne n,$$

такая, что $H(G, \Lambda) \ne \varnothing$.

Теорема 2.1. *Пусть G – произвольная ограниченная выпуклая область с гладкой границей, а $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, такая, что $H(G,\Lambda) \neq \varnothing$. Тогда порядок ρ_f любой функции $f \in H(G,\Lambda)$ удовлетворяет оценкам*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1} \leq \beta \leq \max\left(\frac{\rho_f}{\rho_f+1},\, q_0\right), \tag{12}$$

где

$$\beta = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right]}{\ln|\lambda_k|}, \quad q_0 = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln|\lambda_k|},$$

$\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}$, $K(\varphi)$ *– опорная функция области G.*

Следствие. *Если $q_0 \leq \rho_f/(\rho_f+1)$, то $\rho_f/(\rho_f+1) = \beta$.*

Отметим, что некоторые оценки типа (12) для порядка ρ_R по Ритту функции $f \in H(G,\Lambda)$ в области G ранее были получены в [27]. Во второй главе показано, что двусторонние оценки (12), как и подобные оценки для ρ_R, также неулучшаемы.

Ответ на вопрос о достижимости правой оценки в (12) дает

Теорема 2.2. *Существует последовательность Λ, существует функция $f \in H(G,\Lambda)$, такие, что*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1} < \beta = q_0.$$

В **Главе III** речь идет о рядах Дирихле (1), сходящихся во всей плоскости. Здесь получены необходимые и достаточные условия на показатели, при выполнении которых верна формула (5) Дж. Ритта. Все ранее известные результаты носили только достаточный характер. Так, формула (5) доказана и в известных работах С. Мандельбройта [36] и А.Ф. Леонтьева [7] в предположении $L < \infty$, хотя К. Сугимура гораздо раньше в [33] получил ту же формулу при существенно слабом предположении $C = 0$ (C – введенная выше характеристика Сугимуры). В 1953 году С. Танака получил более общий результат, доказав в [34] неравенства (6). Однако, как нам известно, вопрос о точности верхней оценки в (6) до сих пор оставался открытым.

Теорема 3.1. *Для любой последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, существует ряд Дирихле вида (1), равномерно сходящийся во всей плоскости, для которого*

$$-\frac{1}{\rho_R} = -R + T.$$

Отсюда вытекает

Теорема 3.2. *Для того, чтобы порядок ρ_R любого ряда Дирихле вида (1), равномерно сходящегося во всей плоскости, вычислялся по формуле (5), необходимо и достаточно, чтобы $T = 0$.*

В **Главе IV** речь идет о представлении аналитических в полуплоскости Π_0^+ функций рядами экспонент с учетом заданной мажоранты роста. Ранее подобный результат о разложении в ряды экспонент был получен А.Ф. Леонтьевым для пространства аналитических функций конечного порядка в выпуклом многоугольнике (см. [9]). Этот результат в 1982 году был перенесен А.М. Гайсиным на случай полуплоскости Π_0^+ (см. [28]).

Пусть K_0 – класс функций F, обладающих свойствами:

1. F регулярна в Π_0^+;

2. $F(z) \to 0$ при $z \to \infty$ в любой полуплоскости $\Pi_s^+ = \{z = x + iy\colon\ x \geq s > 0\}$ равномерно относительно $\arg z$;

3. для любого $s > 0$

$$T_F(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathrm{Re} z = s > 0} |F(z)||dz| < \infty.$$

Для $F \in K_0$ положим

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re} z = s > 0} F(z) e^{zt} dz.$$

Будем говорить, что $F \in K_1$ тогда и только тогда, когда F регулярна в полуплоскости Π_0^+ и непрерывна в ее замыкании $\overline{\Pi}_0^+$, причем

$$|F(z)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \in \overline{\Pi}_0^+, \quad |z| \to \infty.$$

Теорема 4.1. *Пусть $F \in K_0$, причем*

$$T_F(s) \leq A_F H(s), \quad s > 0,$$

где $H\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, H – убывающая функция, $H(s) \downarrow 0$ при $s \to +\infty$, $H(s) \uparrow \infty$ при $s \to 0+$, $H(d) = e$. Предположим также, что

$$\lim_{s \to 0} s^k H(s) = \infty \quad (k \text{ – любое}, k \in \mathbb{N}),$$

а функции $m(s) = \ln H(s)$ $(s > 0)$ и $m(e^{-t})$ $(t \in \mathbb{R})$ выпуклые. Тогда существуют целая функция

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n, \quad \ln|M(\lambda)| \leq C_M \varphi(|\lambda|),$$

функция $f \in K_1$, такие, что

$$F(z) = M(D) f(z) + \Phi(z), \quad z \in \Pi_0^+,$$

где Φ – некоторая целая функция,

$$\varphi(r) = \inf_{s>0}[m(s) + sr], \quad r = |\lambda|,$$

– нижнее преобразование Лежандра функции $m(s)$, $\varphi(r) = o(r)$ при $r \to \infty$, причем функция φ логарифмически выпуклая.

Теорема 4.2. *Пусть $F \in K_0$, причем*

$$T_F(s) \leq A_F H(s), \quad s > 0,$$

где мажоранта H удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Тогда имеется не зависящая от F последовательность показателей $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \tau$, $0 < \tau < \infty$ ($\rho > 1$ – любое), такая, что

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n z} + \text{ целая функция}, \quad z \in \Pi_0^+,$$

причем при некотором $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{-\lambda_n z}| \leq B H^k\left(\frac{x}{k}\right), \quad z = x + iy \in \Pi_0^+.$$

Замечание. Пусть мажоранта H совпадает с функцией $\exp\left[\left(\frac{1}{s}\right)^\mu\right]$, $\mu > 0$, при $0 < s \leq 1$.

Так как для функции H все условия теоремы 4.1 выполнены, то теорема 4.2 обобщает соответствующий результат из [28] о разложении с учетом порядка роста.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В диссертационной работе доказан критерий справедливости формулы для порядка суммы ряда Дирихле, абсолютно сходящегося лишь в полуплоскости.

- Для порядка суммы ряда экспонент, область регулярности которого ограниченная выпуклая область с гладкой границей, получены неулучшаемые двусторонние оценки для порядка через характеристики, зависящие только от показателей, коэффициентов ряда и опорной функции области. Как следствие получена формула для вычисления порядка.

- Доказана точность двусторонних оценок С. Танаки для порядка целого ряда Дирихле по Ритту и, тем самым, установлен критерий справедливости формулы Дж. Ритта для этого порядка.

- Получено представление аналитических в полуплоскости функций рядами экспонент с учетом заданной выпуклой мажоранты роста. Применение нового метода, основанного на преобразованиях Лежандра, позволило получить качественно новые результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hadamard, J. Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpement de Taylor/ J. Hadamard // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. – 1892. – Vol. 8, № 4. – P. 101–186.

[2] Fujiwara, M. On the relation between M(r) and coefficients of a power series / M. Fujiwara // Proceedings of the Japan Academy. – 1932. – Vol. 8, № 6. – P. 220–223.

[3] Говоров, Н.В. О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения / Н.В. Говоров // Труды Новочеркасского политехнического института. – 1959. – Т. 100. – С. 101–115.

[4] Мак-Лейн, Г. Асимптотические значения голоморфных функций / Г. Мак-Лейн. – Москва: Мир, 1966. – 104 с.

[5] Polya, G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen / G. Polya // Mathematische Zeitschrift. 1929. – Vol. 29. – P. 549–640.

[6] Шеремета, М.Н. Метод Вимана - Валирона для рядов Дирихле / М.Н. Шеремета // Украинский математический журнал. – 1978. Т. 30, № 4. – С. 488–497.

[7] Леонтьев, А.Ф. Ряды экспонент / А.Ф. Леонтьев. – Москва: Наука, 1976. – 536 с.

[8] Леонтьев, А.Ф. Представление целых функций рядами экспонент / А.Ф. Леонтьев // Труды математического института имени В.А. Стеклова. – 1981. – Т. 157. – С. 68–89.

[9] Леонтьев, А.Ф. Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1980. Т. 44, № 6. С. 1308 – 1328.

[10] Напалков, В.В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы / В.В. Напалков // Известия АН СССР. – 1987. – Т. 51, № 2. – С. 287–305.

[11] Гольдберг, А.А. Распределение значений мероморфных функций / А.А. Гольдберг, И.В. Островский. – Москва: Наука, 1970. – 592 с.

[12] Говоров, Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н.В. Говоров. – Москва: Наука, 1986. – 240 с.

[13] Говоров, Н.В. Об оценке снизу функции, субгармонической в круге / Н.В. Говоров // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1968. – № 6. – С. 130–150.
[14] Белоус, Т.И. Асимптотические свойства рядов Дирихле, сходящихся в полуплоскости: дис. ... канд. физ - мат. наук: 01.01.01 / Белоус Татьяна Ивановна. – Уфа, 2004. – 103 с.
[15] Ritt, J.F. On certain points in the theory of Dirichlet series / J.F. Ritt // American Journal of Mathematics. – 1928. – Vol. 50. – P. 73–86.
[16] Дагене, Е.Я. О центральном показателе ряда Дирихле // Литовский математический сборник. – 1968. – Т. 8, № 3.– С. 504–521.
[17] Бойчук, В.С. О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле / В.С. Бойчук // Матем. сб. – Киев: Наукова думка, 1976. – С. 238–240.
[18] Nandan, K. On the maximum terms a maximum modulus analytic functions represented by Dirichlet series / K. Nandan // Annales Polonici Mathematici. – 1973. – Vol. 28. – P. 213–222.
[19] Nandan, K. On the lower order of analytic functions represented by Dirichlet series / K. Nandan // Revue Roumaine de Mathematique Pures et Appliquees. – 1976. – Vol. 21, № 10. – P. 1361–1368.
[20] Chia-Yung, Y. Sur la croissance et la repartition de Dirichlet qui ne convergent que dans un demi-plan / Y. Chia-Yung // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. – 1979. – AB288, № 19. – A891–A893.
[21] Галь, Ю.М. О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле / Ю.М. Галь, М.Н. Шеремета // Доклады Академии наук УССР. Серия А. – 1978. – № 12. – С. 1065–1067.
[22] Гайсин, А.М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе / А.М. Гайсин // Математический сборник. – 1982. – Т. 117(159), № 3. – С. 412–424.
[23] Гайсин, А.М. Оценка ряда Дирихле в полуполосе в случае нерегулярного распределения показателей. II / А.М. Гайсин, Д.И. Сергеева // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 49, №2. – С. 281–299.
[24] Гайсин, А.М. Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах / А.М. Гайсин // Математические заметки. – 1987. – Т. 42, № 5. – С. 660–669.
[25] Скаскив, О.Б. О росте на горизонтальных лучах аналитических функций, представленных рядами Дирихле / О.Б. Скаскив, В.М. Сорокивский // Украинский математический журнал. – 1990. – Т. 42, № 3. – С. 363–371.
[26] Сорокивский, В.М. О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле / В.М. Сорокивский // Украинский математический журнал. – 1984. – Т. 36, № 4. – С. 524–528.

[27] Гайсин, А.М. Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности / А.М. Гайсин // Математические заметки. – 1990. – Т. 48, № 3. – С. 45–53.
[28] Гайсин, А.М. Поведение суммы ряда Дирихле вблизи границы области регулярности: дис. ... канд. физ - мат. наук: 01.01.01 / Гайсин Ахтяр Магазович. – Уфа, 1982. – 114 с.
[29] Шеремета, М.Н. О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений / М.Н. Шеремета // Известия вузов. Математика. – 1968. – № 6. – С. 115–121.
[30] Гайсин, А.М. О росте функции, представленной рядом Дирихле, вблизи прямой сходимости / А.М. Гайсин // Исследования по теории аппроксимации функций. – Уфа: Башкирский филиал АН СССР. – 1981. С. 5–13.
[31] Zhendog, G. The growth of Dirichlet series / G. Zhendog, S. Daochun // Czechoslovak Mathematical Journal. – 2012. – Vol. 62, № 1. – P. 29–38.
[32] Юлмухаметов, Р.С. Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций /Р.С. Юлмухаметов // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 264, №4. – С. 839–841.
[33] Sugimura, K. Transfer of some theorems from the theory of entire functions to Dirichlet series / K. Sugimura // Mathematical Journal. – 1928. – Vol. 29. – P. 264–277.
[34] Tanaka, C. Note on Dirichlet series (V). On the integral functions defined by Dirichlet series (I) / C. Tanaka // Tohoku Mathematical Journal. – 1953. – Vol. 2, № 3. – P. 67–78.
[35] Гайсин, А.М. Теоремы типа Ритта-Сугимуры / А.М. Гайсин, Г.А. Гайсина // Владикавказский математический журнал. – 2020. – Т. 22, № 3. – С. 47–57.
[36] Мандельбройт, С. Ряды Дирихле. Принципы и методы / С. Мандельбройт. – Москва: Мир, 1973.

Публикации по теме диссертации в в отечественных изданиях, которые входят в международные реферативные базы данных (Scopus и Web of Science)

1. Гайсин, А.М. Поведение коэффициентов ряда экспонент конечного порядка роста вблизи границы / А.М. Гайсин, Г.А. Гайсина // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры / Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Т. 162. – С. 15–24.
2. Гайсина, Г.А. Порядок роста суммы ряда Дирихле: зависимость от коэффициентов и показателей / Г.А. Гайсина // Уфимский матем. журнал. – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 31–41.

3. Гайсин, А.М. Теоремы типа Ритта-Сугимуры / А.М. Гайсин, Г.А. Гайсина // Владикавказский матем. журн. – 2020. – Т. 22, № 3. – С. 47–57.
4. Гайсина, Г.А. Порядок роста ряда экспонент вблизи границы области сходимости / Г.А. Гайсина // Алгебра и анализ. – 2021. – Т. 33, № 3. – С. 31–50.
5. Гайсина, Г.А. Представление аналитических функций рядами экспонент в полуплоскости с учетом мажоранты роста / Г.А. Гайсина // Уфимск. матем. журн. – 2021. – Т. 13, №4. – С. 8–16.

Публикации в других изданиях

6. Гайсина, Г.А. Об одном обобщении формулы Н.В. Говорова - Мак-Лейна - М.Н. Шеремета для вычисления порядка / Г.А. Гайсина // Вестник Башкирского университета. – 2016. – Т. 21, №3. – С. 556–559.
7. Гайсина, Г.А. Формула для вычисления порядка суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости / Г.А. Гайсина // Сборник трудов IX Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». – Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. – С. 22–29.

Тезисы конференций

8. Гайсина, Г.А. Формула Н.В. Говорова для вычисления порядка функции, регулярной в круге, и ее обобщение / Г.А. Гайсина // Тезисы докладов IX Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». – Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. – С. 299.
9. Гайсина, Г.А. Пример типа Макинтайра–Евграфова / Г.А. Гайсина // Сборник тезисов Международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2017. – С. 45–47.
10. Гайсина, Г.А. Формула для порядка ряда экспонент для области с гладкой границей / Г.А. Гайсина // Сборник тезисов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». – Уфа: Изд-во БГПУ, 2018. – С. 25–26.
11. Гайсина, Г.А. Формула для порядка ряда экспонент для области с гладкой границей / Г.А. Гайсина // Сборник тезисов Международной конференции «Комплексный анализ и геометрия». – Уфа: РИЦ БашГУ, 2018. – С. 16–17.
12. Гайсина, Г.А. Зависимость порядка ряда экспонент от коэффициентов и опорной функции области сходимости / Г.А. Гайсина // Сборник тезисов

Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 29–30.
13. Гайсина, Г.А. Порядок ряда экспонент: связь с коэффициентами разложения / Г.А. Гайсина // Сборник тезисов Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 63–65.
14. Гайсина, Г.А. Теоремы типа Н.В. Говорова – Г. Маклейна: окончательный результат / Г.А. Гайсина // Сборник тезисов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». – Уфа: РИЦ БашГУ, 2020. – С. 22–23.
15. Гайсина, Г.А. Теоремы типа Ритта для рядов экспонент. Сборник тезисов Международной конференции «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации». – Уфа: Аэтерна, 2020. – С. 19–20.
16. Гайсина, Г.А. Вычисление порядка при условии согласованности показателей и коэффициентов ряда Дирихле / Г.А. Гайсина // Сборник тезисов Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2020». – Уфа: Аэтерна, 2020. – Часть 1. С. 104–106.
17. Гайсина, Г.А. «Разложение функций с заданной мажорантой роста в ряды Дирихле / Г.А. Гайсина // Сборник тезисов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». – Уфа: Аэтерна, 2021. – С. 25–26.
18. Гайсина Г.А. Представление аналитических функций рядами экспонент в полуплоскости с учетом оценки целой составляющей / Г.А. Гайсина // Материалы Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2021». – Уфа: Аэтерна, 2021. – Т. 1. – С. 111–113.
19. Gaisina, G.A. Lower bound for an entire function with Fejer gaps on curves / G.A. Gaisina // Proceedings of the Mathematical Center named after N.I. Lobachevsky. International Conference "Complex Analysis and Related Topics". Abstracts. – Kazan: KFU, 2022. – Vol. 63. – P. 19–20.
20. Гайсина, Г.А. Ряды экспонент с заданной мажорантой роста вблизи границы / Г.А. Гайсина // Сборник материалов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». – Уфа: Аэтерна, 2023. – С. 37–38.

Диссертант Гаф Г.А. Гайсина