ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

На правах рукописи

ГАЙСИНА ГАЛИЯ АХТЯРОВНА

РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ ПРАВИЛЬНОГО РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ. ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Р.С. Юлмухаметов

Уфа – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

§1. Обзор результатов, актуальность темы и постановка задач

Асимптотические свойства целых или регулярных в круге функций в зависимости от поведения коэффициентов их степенного разложения исследовались многими математиками, в том числе: Ж. Адамар, Э. Борель, А. Виман, Ж. Валирон, Дж. Полиа, М. Фудзивара, Н.В. Говоров, А.Ф. Леонтьев, М.Н. Шеремета и другие (см., например, [1] – [8]). В трудах этих ученых был сформулирован ряд открытых проблем и гипотез. Среди них особенно привлекательными и актуальными оказались те, которые относились к лакунарным степенным рядам и рядам Дирихле.

В конце XX века особое значение приобрели вопросы разложения аналитических функций в ряды экспонент, в том числе – с учетом их роста вблизи границы области регулярности (см. [9], [10]). А.Ф. Леонтьевым и его последователями были получены фундаментальные результаты, относящиеся к этой проблеме. Им же была разработана эффективная методика исследования. Позднее А.М. Гайсиным и его учениками она была усовершенствована применением теорем типа Бореля-Неванлинны (см. [11]), а также уточнением оценок М.Н. Говорова ограниченной аналитической в единичном круге функции снизу (см. [12], [13]). Эта методика нашла свое применение и дальнейшее развитие в теории рядов Дирихле, в том числе – сходящихся только в полуплоскости (см. [14]).

В теории приближений линейными комбинациями экспонент $e^{\lambda_n z}$ $(n = 1, 2, ...)$ на различных множествах комплексной плоскости, а также в вопросах представления рядами экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$$

особая роль отводится целым функциям экспоненциального типа и вполне регулярного роста (см. [15]) с нулями λ_n $(n = 1, 2, , ...)$, в том числе и бесконечному произведению Вейерштрасса

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

В случае рядов Дирихле λ_n вещественны, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, а в случае рядов экспонент показатели λ_n – комплексные числа, пронумерованные в порядке неубывания их модулей: $0 < |\lambda_n| \nearrow \infty$ (см. [7, с. 7]).

В различных задачах вещественного и комплексного анализа, теории чисел, дифференциальных уравнений естественным образом возникают ряды Дирихле. Если в степенном ряде

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ мы сделаем замену $z = e^s$, то получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{ns}$, который называется рядом Тейлора-Дирихле. В случае, когда λ_n, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, не являются целыми числами, таким образом мы получим ряд Дирихле общего вида.

Для исследования роста целых функций, представленных рядами Дирихле, используется понятие R-порядка. В свое время оно было введено Дж. Риттом, который установил формулы для вычисления R-порядка через коэффициенты ряда Дирихле [16].

Е. Дагене [17], В. Бойчук [18], К. Нандан [19], [20], Ю. Шиа-Юн [21] изучали аналогичную задачу о росте функций, представленных рядами Дирихле, абсолютно сходящимися в полуплоскости, но в терминах обычного порядка.

В конце 60-х годов М.Н. Шереметой было введено понятия так называемых обобщенных порядков для изучения роста целых или аналитических в единичном круге функций. В [22] была рассмотрена задача, связанная с применением обобщенных порядков к изучению роста рядов Дирихле, сходящихся в полуплоскости. Позже в терминах R-порядка рост таких рядов в зависимости от коэффициентов был исследован в работах [23] – [25], а также в статьях [26], [27].

Так, в работе [23] упомянутый результат Дж. Ритта из [16] был полностью перенесен на случай полуплоскости, а в [28] – на ограниченную выпуклую область комплексной плоскости.

Одним из основных в теории рядов экспонент можно назвать следующий наиболее общий результат А.Ф. Леонтьева: для любой ограниченной выпуклой области D найдется последовательность $\{\lambda_n\}$ комплексных чисел, зависящая только от данной области, такая, что любую функцию F, аналитическую в D, можно разложить в ряд экспонент $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ (сходимость – равномерная на компактах из D). Позже аналогичный результат о разложении в ряды экспонент с учетом роста, был также получен А.Ф. Леонтьевым для пространства аналитических функций конечного порядка в выпуклом многоугольнике. Им при этом было показано, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n e^{\lambda_n z}\right|$ имеет ту же оценку сверху, что и исходная функция F (см. [9]). Этот факт в 1982 году был перенесен А.М. Гайсиным на полуплоскость (см. [29]).

В упомянутых выше работах речь идет о поведении суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности G в следующих случаях: G – левая полуплоскость $\Pi_0^- = \{z = x + iy\colon \ x < 0\}$ (или правая полуплоскость Π_0^+), конечная комплексная плоскость $\mathbb{C}$, ограниченная выпуклая область $D \subset \mathbb{C}$.

Более подробно остановимся на результатах, полученных ранее и обозначим основные задачи, исследованию которых и посвящена настоящая диссертация.

Как известно, непосредственным обобщением многочленов являются целые функции. Если

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{0.1}$$

– целая функция, по принципу максимума модуля имеем

$$M_f(r)\overset{\text{def}}{=}\max_{|z|=r}|f(z)|=\max_{|z|\le r}|f(z)|.$$

Так что $M_f(r)$ – неубывающая на $[0,\infty)$ функция, причем если $f(z)\not\equiv const$, то $M_f(r)$, строго возрастая, стремится к $+\infty$ при $r\to\infty$. Для многочлена f степени n

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M_f(r)}{\ln r}=n,$$

а для целых трансцендентных функций отношение $\frac{\ln M_f(r)}{\ln r}$ стремится к ∞. Поэтому рост $\ln M_f(r)$ сравнивают не с $\ln r$, а с более быстро растущими функциями, например, со степенными. Поступая таким образом, Э. Борель пришел к понятию порядка ρ целой функции, полагая

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Из сопоставления результатов Ж. Адамара (1893) и Э. Бореля (1896) было показано, что порядок целой функции (0.1) равен

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{\ln|1/a_n|}.$$

Пусть функция f, определенная рядом (0.1), аналитична только в круге $D(0,1)=\{z\colon |z|<1\}$ (в этом случае радиус сходимости ряда (0.1) равен единице). Будем предполагать, что функция f не ограничена в $D(0,1)$. Так что $M_f(r) \uparrow \infty$ при $r \uparrow 1$.

Порядком ρ неограниченной аналитической в круге $D(0,1)$ функции f называется величина (см. [2])

$$\rho = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}.$$

Для таких функций независимо друг от друга Н.В. Говоров (1959), Г. Маклейн (1966), М.Н. Шеремета (1968) установили следующую формулу (см. [3], [4], [30]):

$$\frac{\rho}{\rho+1} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln n}.$$

Если положить $z = e^{-s}$, $s = \sigma + it)$, то имеем:

$$F(s) = f(e^{-s}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}. \tag{0.2}$$

Поскольку при указанной замене полуплоскость $\Pi_0^+ = \{z = x + iy\colon\ x > 0\}$ отображается в круг $D(0,1)$ единичного радиуса, то

$$M(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma+it)| = M_f(r),$$

где $\sigma > 0, r = e^{-\sigma} < 1$. Проверяется, что $-\ln(1-r) \sim -\ln\sigma$ при $r \uparrow 1$ (при этом, очевидно, $\sigma \downarrow 0$). Учитывая это, имеем:

$$\rho = \rho_F \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\downarrow 0} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{-\ln\sigma}.$$

Таким образом, порядок ρ функции f в круге $D(0,1)$ равен соответствующей характеристике ρ_F роста ряда Тейлора-Дирихле (0.2). Ее называют обычным порядком или просто порядком функции F – суммы ряда (0.2). Это наблюдение приводит к понятию порядка общего ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{0.3}$$

с произвольной последовательностью показателей $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, сходящегося абсолютно (или просто равномерно) в некоторой полуплоскости

$$\Pi_b^+ = \{s = \sigma + it\colon\ \sigma > b\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, возникает задача о связи порядка функции F, аналитической в Π_b^+, с коэффициентами разложения этой функции в ряд Дирихле (0.3).

Следуя работе [31] Х. Бора, через σ_c, σ_a, σ_u будем обозначать абсциссы простой, абсолютной и равномерной сходимости ряда (0.3) соответственно. Как показал Ж. Валирон (см. [32], [33]),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} \le \sigma_c \le \sigma_u \le \sigma_a \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} + L, \tag{0.4}$$

где

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n}. \tag{0.5}$$

Вообще говоря (в отличие от степенных рядов), величины σ_c, σ_a, σ_u могут быть различными. Как видно из соотношений (0.4), при $L = 0$ они все совпадут. Может оказаться, что $\sigma_u \ne \sigma_a$ (тогда ряд (0.3) сходится только равномерно, а не абсолютно). В этом случае актуальна формула М. Кунияда [34]:

$$\sigma_u = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{T(x)}{x}, \quad T(x) = \sup_{|t|<\infty} \left| \sum_{[x]\le\lambda_n<x} a_n e^{-i\lambda_n t} \right|,$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

Если $\sigma_u = -\infty$, то сумма ряда Дирихле (0.3) представляет собой целую функцию F. В этой ситуации наиболее подходящей и удобной характеристикой роста функции F оказалось так называемое понятие R–порядка ρ_R, введенное Дж. Риттом (1928) [16].

По определению,

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\sigma},$$

где величина $M_F(\sigma)$ определена так же, что и выше (функция $\ln M_F(\sigma)$ является выпуклой по переменной $\sigma \in \mathbb{R}$ [7]). В предположении, что $\sigma_a = -\infty$, т.е. когда ряд Дирихле (0.3) сходится во всей плоскости абсолютно, Дж. Риттом была доказана следующая формула, позволяющая вычислять ρ_R (порядок по Ритту) через коэффициенты разложения:

$$-\frac{1}{\rho_R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln\lambda_n}. \tag{0.6}$$

Как было сказано, в работе [23] этот результат был перенесен на случай полуплоскости, а в [28] – на ограниченную выпуклую область плоскости $\mathbb{C}$. В последнем случае речь идет о рядах с комплексными показателями (рядах экспонент), область абсолютной сходимости которых, как известно, всегда выпукла [7]. В работах [23], [28] были указаны достаточные условия, при выполнении которых имеют место аналоги формулы Ритта (0.6), зависящие еще и от опорной функции области сходимости.

Более подробно сформулируем результаты работ [23], [28], а также приведем теорему из [35], которая не только усиливает соответствующее утверждение, но и носит характер критерия.

Пусть ряд Дирихле (0.3) сходится абсолютно лишь в полуплоскости Π_0^+. Другими словами, сумма ряда (0.3) принадлежит классу $D_0(\Lambda)$ (см. ниже, п. 1). В [23] введено понятие порядка ρ_R по Ритту для суммы F этого ряда следующим образом:

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma \downarrow 0}} \frac{\ln^+ \ln M_F(\sigma)}{\sigma^{-1}}.$$

В [23] доказано, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln n = 0, \tag{0.7}$$

то порядок ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ равен

$$\rho_R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln^+ |a_n|. \tag{0.8}$$

В действительности верна (см. [35])

Теорема 0.1. *Для того, чтобы для порядка ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ была верна формула (0.8), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (0.7).*

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < |\lambda_n| \nearrow \infty$, т.е.

$$0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le |\lambda_{n+1}| \to \infty,$$

– последовательность комплексных чисел, G – ограниченная выпуклая область, $0 \in G$. Для любой функции f, аналитической в области G, порядком по Ритту называется величина (см. [28])

$$\rho_G = \overline{\lim_{z \to \partial G}} d(z) \ln^+ \ln^+ |f(z)|,$$

где $d(z) = \inf_{\xi \in \partial G} |z - \xi|$.

Через $H_R(G, \Lambda)$ обозначим класс всех аналитических в области G функций f, имеющих конечный порядок ρ_G и представимых в G рядом экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}.$$

Всегда существует последовательность Λ, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, такая, что $H_R(G, \Lambda) \neq \varnothing$ (см. в [28]).

В [28] доказана

Теорема 0.2. *Пусть G – ограниченная выпуклая область с гладкой границей, $0 \in G$. Если $q = 0$ и выполняется условие*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \ln |\lambda_n|}{|\lambda_n|} = 0,$$

то порядок ρ_G любой функции $f \in H_R(G, \Lambda)$ вычисляется по формуле

$$\rho_G = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln |\lambda_n|}{|\lambda_n|} \ln^+ \left[|a_n| e^{K(-\varphi_n)|\lambda_n|} \right], \qquad (0.9)$$

где $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}$, $K(\varphi)$ – опорная функция области G, а

$$q = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln |\lambda_n|}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right|, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right),$$

$$\lambda_n^2 \neq \lambda_m^2,\ n \neq m.$$

В той же работе [28] приводится пример функции $f \in H_R(G, \Lambda)$, порядок ρ_G которой не равен правой части (0.9), если $q \neq 0$.

Приведенные выше результаты работ [3], [4], [30] в свое время были обобщены для класса $D_0(\Lambda)$ аналитических функций, представимых рядами Дирихле (0.3), абсолютно сходящимися лишь в полуплоскости Π_0^+. В 1970 – 1980 гг. этой задачей занимались, в основном, математики Индии, Китая, а также Советского Союза. Более подробный обзор этих многочисленных исследований приведем позже. Суть этих работ заключалась, например, в том, чтобы найти ограничения на показатели ряда (0.3), при выполнении которых была бы верна формула

$$\frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n} \tag{0.10}$$

для порядка

$$\rho_F = \varlimsup_{\sigma\to 0+} \frac{\ln \ln M_F(\sigma)}{-\ln \sigma}$$

(предполагается, что $M_F(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \downarrow 0$). Эти требования на показатели λ_n оказались самыми разными, порой неоправданно жесткими. При этом почти ни в одной работе не ставился вопрос о точности этих ограничений. В статье [36] все же было указано наиболее слабое условие на λ_n, существенность которого подтверждалась и примером, однако частного характера. В относительно недавней работе [37], выполненной в Институте математики Чешской академии наук в 2012 г., результат работы [36] был передоказан, хотя и в несколько иных терминах (в этом мы убедимся ниже). Таким образом, хотя эта достаточно простая, но безусловно актуальная задача по сей день продолжает привлекать внимание специалистов, до сих пор не доведена до конца.

В настоящей работе, в частности, будет доказана и необходимая часть теоремы из статьи [36]. Тем самым, будут указаны условия, которые являются не только достаточными, но и необходимыми для того, чтобы порядок любого ряда Дирихле из рассматриваемого класса может быть вычислен при помощи той же формулы (0.10).

В работе А.Ф. Леонтьева [9] было введено понятие порядка ρ аналитической функции F в ограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$. В случае, когда G – выпуклый многоугольник, им было доказано, что любую функцию F, аналитическую в G и удовлетворяющую в G оценке

$$|F(z)| \leq e^{\left(\frac{1}{r}\right)^{\rho+\varepsilon}}, \quad r = d(z) = \inf_{\xi \in \partial G} |z - \xi|, \tag{0.11}$$

$r < r_0(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ – любое, можно представить в области G рядом экспонент

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},$$

причем так, что ряд из модулей будет удовлетворять той же оценке (0.11). При $\rho > 1$ этот результат был распространен Р.С. Юлмухаметовым на произвольную выпуклую область [38].

Однако в работах [9], [38] нельзя было ставить вопрос о какой-либо формуле типа (0.10), ибо нет единственности разложения в ряд экспонент, поэтому и нет формул для коэффициентов ряда. В этом как раз и отличие этого случая от полуплоскости.

Решение данной актуальной задачи также будет представлено в диссертационной работе. Нами будут получены неулучшаемые двусторонние оценки для такого (обычного) порядка в области G, откуда и выводится соответствующая формула для этой величины.

Все приведенные выше результаты, где рассматриваются аналоги порядка по Ритту, восходят к работе [16]. Дж. Риттом в [16] было показано, что если $L < \infty$ (величина L определена выше равенством (0.5)), то для порядка ρ_R целого ряда Дирихле верна формула (0.6). К. Сугимура получил ту же формулу при более слабом предположении

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln n(x)}{x \ln x} = 0, \quad n(x) = \sum_{\lambda_n \le x} 1$$

(C – характеристика Сугимуры [39]). Как показано в [40], в предположениях, сделанных в [39], ряд Дирихле (0.3) сходится во всей плоскости равномерно. А в этом случае верны двусторонние оценки (см. [40])

$$-R \le -\frac{1}{\rho_R} \le -R + T, \tag{0.12}$$

где R – характеристика Ритта (по определению, величина $-R$ равна правой части (0.6)),

$$T = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln N(x)}{x \ln x}, \quad N(x) = \sum_{[x]\le\lambda_n<x} 1,$$

$[x]$ – целая часть x (T – характеристика Танаки). Так как $T = 0$ тогда и только тогда, когда $C = 0$ (см. [35]), то результат К. Сугимуры есть следствие оценок (0.12). Тем не менее, в [40] вопрос о точности верхней оценки в (0.12) не рассмотрен. В диссертации ставится цель – доказать точность правой оценки в неравенствах С. Танаки (левая граница в (0.12), как видно, достигается при $T = 0$). Тем самым, нами будет доказан критерий справедливости формулы (0.6) Дж. Ритта.

Наконец, ставится задача получить представление аналитических в полуплоскости Π_0^+ функций рядами экспонент с учетом заданной убывающей мажоранты роста, не ограниченной в окрестности нуля. Будет доказано утверждение, обобщающее соответствующий результат из [29] о разложении в полуплоскости Π_0^+ с учетом обычного порядка роста. Для этого привлекаются методы оценок, основанные на преобразованиях Лежандра.

§2. Основные результаты диссертации

В **Главе I** исследуется оптимальность условий, при выполнении которых порядок ρ_R суммы F ряда Дирихле (0.3), сходящегося лишь в полуплоскости Π_0^+, может быть подсчитан при помощи формулы (0.10). Для неограниченных аналитических в единичном круге функций формула такого типа в разные годы независимо была получена рядом специалистов, в том числе Н.В. Говоровым (1959), Маклейном (1966) и М.Н. Шереметой (1968). Позже был введен аналог этого понятия и для рядов Дирихле, абсолютно сходящихся в какой-то полуплоскости. Но соответствующая формула для порядка ряда Дирихле большинством авторов была установлена при существенных ограничениях. Во всех предшествующих работах были указаны условия, которые оказались только достаточными для справедливости этой формулы (более подробно об этом см. в Главе I). В первой главе найдены условия, которые являются не только достаточными, но и необходимыми для того, чтобы порядок любого ряда Дирихле из рассматриваемого класса мог быть вычислен при помощи той же формулы (0.10).

Сформулируем результаты первой главы.

Пусть $D_0(\Lambda)$ – класс рядов Дирихле (0.3), сходящихся, причем абсолютно, в полуплоскости Π_0^+. Для произвольных, но фиксированных $\mu \in [0,\ 1]$, $\alpha \in [0,\ 1]$ через $D_0(\mu,\ \alpha)$ обозначим подкласс класса $D_0(\Lambda)$ рядов Дирихле (0.3), коэффициенты a_n

которых удовлетворяют равенству

$$\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n}, \quad a^+ = \max(0,\ a),$$

а показатели λ_n – равенству

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n}.$$

Если $\mu = 1$, то $\alpha \le \mu$. В этом случае, как показано в [29], формула (0.10) верна, причем $\rho_R = \infty$. Поэтому в определении класса $D_0(\mu,\ \alpha)$, не ограничивая общности, можно считать, что $\mu < 1$. Как видно, в классе $D_0(\mu,\ \alpha)$, в отличие от $D_0(\Lambda)$, требуется некоторая согласованность показателей и коэффициентов.

В первой главе доказаны две теоремы.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы для любой функции* $F \in D_0(\Lambda)$ *порядок* ρ_F *вычислялся по формуле*

$$\frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n}, \tag{0.13}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\alpha = 0$, *т.е.*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} = 0.$$

Теорема 1.2. *Пусть заданы* μ $(0 \le \mu \le 1)$, α $(0 \le \alpha \le 1)$. *Для того, чтобы порядок* ρ_F *любой функции* $F \in D_0(\mu,\ \alpha)$ *вычислялся по формуле (0.13), необходимо и достаточно, чтобы* $\alpha \le \mu$.

Достаточность первой теоремы была доказана в [36], а второй теоремы – в [29]. Здесь нами доказаны необходимые части этих теорем.

В **Главе II** исследуется класс аналитических в заданной ограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$ функций f конечного порядка ρ_f, представимых в ней рядом экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}.$$

В терминах порядка ρ_f изучается поведение коэффициентов a_n разложения в данный ряд.

Прежде, чем сформулировать основную теорему второй главы (основной результат диссертации), уточним постановку задачи. Для этого кратко остановимся на истории вопроса, которая, как известно, берет начало с известной работы А.Ф. Леонтьева [9].

Пусть D – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат, $K(\varphi)$ – опорная функция $\overline{D}$, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $L(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и простыми нулями λ_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots$. Если предположить, что

$$|L(re^{i\varphi})| \leq \frac{A}{r^{\mu}} e^{h(\varphi)r}, \quad \mu > 1, \tag{0.14}$$

то аналитические продолжения функций

$$\psi_k(t) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_0^{\infty e^{i\varphi_0}} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\operatorname{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0)$$

(они образуют систему, биортогональную к системе экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$), как известно, регулярны вне $\overline{D}$, непрерывны вплоть до границы ∂D и $\psi_k(\infty) = 0$ (см. [7, гл. IV, §1, п. 3]). Поэтому каждой функции f, аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$, ставится в соответствие ряд экспонент

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(t)\psi_k(t)dt, \quad k \geq 1. \qquad (0.15)$$

Хорошо известно, что при условии (0.14) функции ψ_k на ∂D удовлетворяют оценкам (см. [7, гл. IV, §1, п. 3])

$$|\psi_k(t)| \leq \frac{A}{|L'(\lambda_k)|}, \quad t \in \partial D, \quad k \geq 1,$$

где постоянная A не зависит от k. Так что коэффициенты ряда (0.15) имеют оценки

$$|a_k| \leq \frac{A}{|L'(\lambda_k)|} \max_{t \in \partial D} |f(t)|, \quad k \geq 1. \qquad (0.16)$$

Пусть выполнено условие (0.14) и, кроме того:

1) $L(\lambda)$ – функция вполне регулярного роста;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ при $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\ln |L'(\lambda_k)| \geq [h(\varphi_k) - \varepsilon] r_k, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}. \qquad (0.17)$$

Тогда любая функция f, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, представляется в области D рядом (0.15) (см. [7, гл. IV, §6, теорема 4.6.4]), т.е.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$$

(сходимость – равномерная внутри D), причем, как следует из (0.16), (0.17), для всякого $\varepsilon > 0$ при $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$|a_k| \leq Be^{[-h(\varphi_k)+\varepsilon]r_k}. \tag{0.18}$$

Если же вместо (0.17) выполняется более сильное условие (см. [9])

$$|L'(\lambda_k)| \geq \frac{C}{r_k^p} e^{h(\varphi_k)r_k}, \quad k \geq 1, \tag{0.19}$$

то оценка (0.18), очевидно, допускает качественное улучшение. Отметим, что А.Ф. Леонтьев был вынужден лишь постулировать это требование, ибо в общей ситуации не было известно, выполняется ли оно хотя бы для какой-то функции $L(\lambda)$. Если, например, D – выпуклый многоугольник, то условие (0.19) будет выполнено при $p = 2$ (см. [9]).

Рассматривая самую общую ситуацию, когда функция f только аналитична в D, А.Ф. Леонтьев показал (см. [7, гл. V, §2, теорема 5.2.1]), что существуют целая функция $M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ с ростом не выше первого порядка минимального типа и функция g, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, такие, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g^{(k)}(z), \quad z \in D.$$

Тогда, представляя функцию g рядом (0.15), получим представление

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z}, \quad b_k = a_k M(\lambda_k), \quad z \in D. \tag{0.20}$$

Учитывая неравенства (0.16) для a_k, замечаем, что соответствующие оценки для коэффициентов b_k ряда (0.20) зависят от оценок снизу для $|L'(\lambda_k)|$ и оценок сверху для $|M(\lambda_k)|$. В случае (0.19), например, имеем:

$$|b_k| \le C r_k^p |M(\lambda_k)| e^{-h(\varphi) r_k}, \quad k \ge 1. \tag{0.21}$$

При этом данные оценки, как видно, никакой дополнительной информации о поведении $|M(\lambda_k)|$ при $k \to \infty$ не доставляют. Однако, если функция f вблизи ∂D имеет заданный рост, например, если для любого $\varepsilon > 0$ при $r < r_0(\varepsilon)$

$$|f(z)| \le \exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\varepsilon}\right], \quad r = d(z),$$

где $d(z) = \rho(z, \partial D) = \inf_{\xi \in \partial D} |z - \xi|$, то, как показано в [9], функция $M(\lambda)$ имеет порядок не выше $q/(q+1)$, и тогда из (0.21) сразу следует, что

$$|b_k| \le e^{r_k^{p+\varepsilon} - h(\varphi_k) r_k}, \quad k \ge k_0(\varepsilon), \quad p = \frac{q}{q+1}. \tag{0.22}$$

Таким образом, в этом случае любая аналитическая в D функция f порядка

$$\rho_f = \varlimsup_{z \to \partial D} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{-\ln d(z)}, \quad a^+ = \max(a,\, 0),$$

не превышающего q, допускает разложение в ряд экспонент (0.20), причем при $r < r_0(\varepsilon)$ (см. в [9])

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k e^{\lambda_k z}| \le \exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\varepsilon}\right], \quad r = d(z),$$

$\varepsilon > 0$ – любое.

Во второй главе диссертации речь идет о классе $H(G, \Lambda)$ аналитических в выпуклой ограниченной области G функций, имеющих конечный порядок и представимых в G рядами экспонент с множеством показателей $\Lambda = \{\lambda_k\}$. Будет показано, что для любой такой области G найдется последовательность Λ, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации

$$\delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right|, \quad Q(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right),$$

$$\lambda_k^2 \neq \lambda_n^2 \,\text{при}\, k \neq n,$$

такая, что $H(G, \Lambda) \neq \varnothing$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть G – произвольная ограниченная выпуклая область с гладкой границей, а $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, такая, что $H(G, \Lambda) \neq \varnothing$. Тогда порядок ρ_f любой функции $f \in H(G, \Lambda)$ удовлетворяет оценкам*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} \leq \beta \leq \max \left(\frac{\rho_f}{\rho_f + 1}, q_0 \right), \tag{0.23}$$

где

$$\beta = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right]}{\ln |\lambda_k|}, \quad q_0 = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln |\lambda_k|},$$

$\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}$, $K(\varphi)$ – опорная функция области G.

Следствие. *Если $q_0 \leq \rho_f/(\rho_f + 1)$, то $\rho_f/(\rho_f + 1) = \beta$.*

Таким образом, левая оценка в (0.23) точна.

Отметим, что некоторые оценки типа (0.23) для порядка по Ритту

$$\rho_R = \overline{\lim_{z\to\partial G}} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{\frac{1}{d(z)}}$$

функции $f \in H(G, \Lambda)$ в области G ранее были получены в [28]. Во второй главе нами показано, что двусторонние оценки (0.23), как и соответствующие оценки для ρ_R, также неулучшаемы.

Замечание 2.1. При $q_0 = 0$ из оценок (0.23) формально вытекает известная формула для порядка в полуплоскости $\Pi_0^- = \{s = \sigma + it\colon\ \sigma < 0\}$ (см. [41]), ибо $\tau = 0$, а $K(-\varphi_k) = 0$ для $\lambda_k > 0$. Отметим также, что при $q_0 = 0$ индекс конденсации (см. выше, а также в [7, гл. II, §6, п. 2]) равен нулю. Однако заметим, что в случае полуплоскости показатели $\lambda_k > 0$ вообще могут и не быть нулями целой функции экспоненциального типа. В [41] показано, что выполнение условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} = 0,$$

необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции $f \in H(\Pi_0^-, \Lambda)$ имело место равенство

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} = \beta.$$

В этой ситуации, как видим, вообще не фигурируют ни q_0, ни τ – они могут быть любыми (не исключается возможность

$q_0 = \tau = \infty$). Дело в том, что в случае Π_0^-, в отличие от области G, были использованы только неравенства Коши

$$|a_k| \leq M_f(\sigma) e^{\lambda_k \sigma}, \quad k \geq 1, \tag{0.24}$$

где $M_f(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |f(\sigma + it)|$, $\sigma < 0$. Для справедливости неравенств (0.24), как известно, достаточно лишь выполнения условия $L = 0$ (см. [7]).

Ответ на вопрос о достижимости правой оценки в (0.23) дает

Теорема 2.2. *Существует последовательность Λ, существует функция $f \in H(G, \Lambda)$, такие, что*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} < \beta = q_0.$$

В **Главе III** речь идет о рядах Дирихле (0.3), сходящихся во всей плоскости $\mathbb{C}$ – обсуждается одна старая задача, связанная с результатами Дж. Ритта, К. Сугимуры и С. Танаки. Как выяснилось, в исследованиях этих авторов до сих пор оставался один открытый вопрос, связанный с точностью правой оценки в оценках (0.12) С. Танаки. В данном разделе диссертации ставится цель восполнить этот пробел, а именно, дать ответ на этот вопрос.

Краткая история обсуждаемой задачи следующая.

В конце девятнадцатого века Э. Борель естественным образом ввел понятие порядка целой функции, а затем была получена соответствующая формула для вычисления этой величины через коэффициенты тейлоровского разложения данной функции. Позже Дж. Риттом это понятие было распространено и для целых функций, представленных рядами Дирихле с положительными показателями. Он же получил аналогичную формулу для этой характеристики (R–порядка), явно зависящую от коэффициентов и показателей ряда Дирихле (см. [16]). В работах А.М. Гайсина этот результат был полностью перенесен на случай полуплоскости, а также для ограниченной выпуклой области (см. [23], [28]).

В данной главе в терминах порядка по Ритту (R–порядка) изучается связь между ростом целого ряда Дирихле и скоростью убывания коэффициентов разложения. В частности, получены необходимые и достаточные условия на показатели, при выполнении которых верна известная формула Дж. Ритта, позволяющая вычислить эту величину через коэффициенты ряда. Все ранее известные результаты такого типа носили только достаточный характер. Более того, нами показана точность оценок (0.12) С. Танаки для R–порядка.

Суть полученных в этой главе результатов следующая.

Дж. Риттом было показано, что если $L < \infty$, то [16]

$$-\frac{1}{\rho_R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} -R, \quad R \geq 0, \tag{0.25}$$

где

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\sigma}$$

– порядок по Ритту, введенный в [16] (R – характеристика Ритта).

Формула (0.25) была передоказана и в известных работах С. Мандельбройта [42] и А.Ф. Леонтьева [7] также в предположении $L < \infty$, хотя К. Сугимура гораздо раньше (в том же 1928 году, что и Дж. Ритт) в статье [39] получил формулу (0.25) при существенно слабом предположении $C = 0$ (C – введенная выше характеристика Сугимуры). В 1953 году С. Танака показал, что этот результат К. Сугимуры есть следствие более общего результата, а именно неравенств (0.12) (см. [40]). Однако, как нам известно, вопрос о точности верхней оценки в (0.12) до сих пор оставался открытым.

В третьей главе нами показана точность правой оценки в (0.12), а именно, доказана

Теорема 3.1. *Для любой последовательности* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, *существует ряд Дирихле вида (0.3), равномерно сходящийся во всей плоскости, для которого*

$$-\frac{1}{\rho_R} = -R + T$$

(T – характеритика Танаки, введенная в §1 введения).

Отсюда вытекает

Теорема 3.2. *Для того, чтобы порядок* ρ_R *любого ряда Дирихле вида (0.3), равномерно сходящегося во всей плоскости, вычислялся по формуле (0.25), необходимо и достаточно, чтобы* $T = 0$.

В **Главе IV** речь идет о представлении аналитических в полуплоскости Π_0^+ функций рядами экспонент с учетом заданной мажоранты роста. Ранее подобный результат о разложении в ряды экспонент был получен А.Ф. Леонтьевым для пространства аналитических функций конечного порядка $\rho \leq q$ в выпуклом многоугольнике (см. [9]). Им при этом было показано, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n e^{\lambda_n z}\right|$ имеет также порядок не выше q. Этот факт в 1982 году был перенесен А.М. Гайсиным на полуплоскость Π_0^+ (см. [29]).

В данной главе исследуется аналогичный случай, когда в качестве функции сравнения берется некоторая убывающая выпуклая мажоранта, не ограниченная около нуля. Доказана теорема, которая обобщает соответствующий результат А.М. Гайсина о разложении аналитических в полуплоскости Π_0^+ функций с учетом порядка роста в ряды экспонент.

Сформулируем результаты четвертой главы. Предварительно введем некоторые определения.

Через K_0 обозначим класс функций F, обладающих свойствами:

1. F регулярна в Π_0^+;

2. $F(z) \to 0$ при $z \to \infty$ в любой полуплоскости $\Pi_s^+ = \{z = x + iy\colon\ x \geq s > 0\}$ равномерно относительно $\arg z$;

3. для любого $s > 0$

$$T_F(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathrm{Re} z = s > 0} |F(z)||dz| < \infty.$$

Если для $F \in K_0$ положить

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re} z = s > 0} F(z) e^{zt} dz, \tag{0.26}$$

то верна формула обращения (см. [43, гл. VI, §1, п. 79])

$$F(z) = \int\limits_0^{+\infty} A(t) e^{-zt} dt, \quad z \in \Pi_0^+.$$

Введем еще один класс функций. Будем говорить, что $F \in K_1$ тогда и только тогда, когда F регулярна в Π_0^+, непрерывна в полуплоскости $\overline{\Pi}_0^+$ и удовлетворяет в $\overline{\Pi}_0^+$ условию: при $|z| \to \infty$

$$|F(z)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

Теорема 4.1. *Пусть $F \in K_0$, причем*

$$T_F(s) \le A_F H(s), \quad s > 0,$$

где $H\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, H – убывающая функция, $H(s) \downarrow 0$ при $s \to +\infty$, $H(s) \uparrow \infty$ при $s \to 0+$, $H(d) = e$. Предположим также, что

$$\lim_{s \to 0} s^k H(s) = \infty \quad (k \text{ – любое}, k \in \mathbb{N}),$$

а функции $m(s) = \ln H(s)$ $(s > 0)$ и $m(e^{-t})$ $(t \in \mathbb{R})$ выпуклые. Тогда существуют целая функция

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n,$$

удовлетворяющая оценке

$$\ln |M(\lambda)| \leq C_M \varphi(|\lambda|),$$

функция $f \in K_1$, *такие, что*

$$F(z) = M(D)f(z) + \Phi(z), \quad z \in \Pi_0^+,$$

где Φ *– некоторая целая функция,*

$$\varphi(r) = \inf_{s>0}[m(s) + sr], \quad r = |\lambda|,$$

– нижнее преобразование Лежандра функции $m(s)$, $\varphi(r) = o(r)$ *при* $r \to \infty$, *причем функция* φ *логарифмически выпуклая.*

Как следствие из теоремы 4.1 получена

Теорема 4.2. *Пусть* $F \in K_0$, *причем*

$$T_F(s) \leq A_F H(s), \quad s > 0,$$

где мажоранта H *удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Тогда имеется не зависящая от* F *последовательность показателей* $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \tau,$$

$0 < \tau < \infty$ *(*$\rho > 1$ *– любое), такая, что*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n z} + \text{ целая функция}, \quad z \in \Pi_0^+, \qquad (0.27)$$

причем при некотором $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{-\lambda_n z}| \leq BH^k\left(\frac{x}{k}\right), \quad z = x + iy \in \Pi_0^+.$$

Замечание. Пусть мажоранта H совпадает с функцией $\exp\left[\left(\frac{1}{s}\right)^{\mu}\right]$, $\mu > 0$, при $0 < s \leq 1$ (в этом случае $d = 1$). Именно эта функция используется как функция сравнения при изучении класса аналитических в полуплоскости Π_0^+ функций в терминах порядка ρ (см. [29], [41]). В рассматриваемой здесь ситуации

$$\rho = \varlimsup_{s\to 0+} \frac{\ln\ln T_F(s)}{\ln\frac{1}{s}}$$

– порядок функции $T_F(s)$.

Так как для функции H все условия теоремы 4.1 выполнены (они проверяются непосредственно), то теорема 4.2 обобщает соответствующий результат из [29] о разложении с учетом порядка роста.

Отметим, что если мажоранта H для исходной функции F удовлетворяет билогарифмическому условию Левинсона

$$\int\limits_0^d \ln\ln H(x)dx < \infty, \tag{0.28}$$

то и мажоранта $H_k(x) = BH^k\left(\frac{x}{k}\right)$ для ряда из модулей в (0.27) подчинена условию (0.28). Этот момент имеет существенное значение в вопросах, связанных с нормальностью семейства голоморфных функций, а именно в теоремах типа Левинсона - Щёберга - Волфа (см., например, в [44] – [46]). Оказывается, если выполняется условие (0.28), то в некоторых случаях можно получить ответ на следующий вопрос: при каких требованиях целая функция в разложении (0.27) будет ограничена в вертикальной полосе $\{z = x + iy\colon\ |x| < 1\}$ (см. [47])?

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [35], [41], [48] – [51].

Глава I. Порядок суммы ряда Дирихле в полуплоскости: теоремы типа Говорова - Маклейна

§1. Случай произвольных коэффициентов

Будем далее предполагать, что $L = 0$ (эта величина определена формулой (0.5)), $\sigma_c = 0$. Тогда ряд Дирихле (0.3) будет сходиться абсолютно и равномерно в полуплоскости Π_0^+, а его сумма F будет аналитична в Π_0^+. Считаем, что $M_F(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \downarrow 0$, где

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|, \quad \sigma > 0.$$

Пусть, по-прежнему, $D_0(\Lambda)$ – класс всех аналитических в полуплоскости Π_0^+ функций, представимых в ней рядами Дирихле (0.3). Величина

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma \downarrow 0}} \frac{\ln \ln M_F(\sigma)}{- \ln \sigma}$$

называется порядком суммы ряда Дирихле (0.3). Именно так порядок определяется, например, в работах [36], [17], [18], [21], [22]. В [19], [20] порядок функции $F \in D_0(\Lambda)$ определяется по формуле

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma \downarrow 0}} \frac{\ln \ln M_F(\sigma)}{- \ln (1 - e^{-\sigma})},$$

что, очевидно, совпадает с введенным выше порядком. В перечисленных работах [18] – [22] без доказательства приводится формула

$$\frac{\rho_F}{\rho_F+1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n}, \tag{1.1}$$

справедливость которой утверждается в них лишь при некоторых дополнительных ограничениях на показатели λ_n и коэффициенты a_n ряда (0.3). Эти ограничения весьма разные, порой очень жесткие. Так, в [19], [20] предполагается, что последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, т.е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = \tau < \infty.$$

Это условие, как будет видно, слишком сильное. С другой стороны, в [21] утверждается, что формула (1.1) верна при выполнении условий

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = 0.$$

Здесь же будет показано, что лишь при этих требованиях формула (1.1) не верна (см. также [36]). В статье [17] формула (1.1) доказана, но при

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = \gamma < \infty. \tag{1.2}$$

На самом деле это условие может быть существенно ослаблено.

Обозначим, как и прежде,

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n}.$$

Положим также
$$\mu = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n}.$$

В статье [18] утверждается, что если $\alpha \le \mu$, то
$$\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F + 1},$$
т.е. верна формула (1.1). Недостатком этого результата является то, что условие $\alpha \le \mu$ содержит дополнительное ограничение на коэффициенты a_n ряда Дирихле (0.3). Поэтому, согласно [18], формула для порядка ρ_F имеет место не для любой функции F из класса $D_0(\Lambda)$. Об этом и пойдет речь в §2 данной главы.

Равенство
$$\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F + 1}$$
доказано в [36] при $\alpha = 0$. А это условие слабее требования (1.2). Действительно, если $\gamma < \infty$, то, очевидно, $L = 0$ и $\alpha = 0$. Но существует последовательность Λ, для которой $\alpha = 0$, $L = 0$, но $\gamma = \infty$ (достаточно положить $\lambda_n = e^{\sqrt{n}}$, $n \ge 1$).

В [36] показано еще следующее: существует последовательность Λ с $\alpha > 0$, существует функция $F \in D_0(\Lambda)$, для которой $\mu \ne \frac{\rho_F}{\rho_F+1}$.

Наша цель – показать, что условие $\alpha = 0$ на самом деле является необходимым. Верна следующая

Теорема 1.1. *Для того, чтобы для любой функции* $F \in$

$D_0(\Lambda)$ *порядок* ρ_F *вычислялся по формуле*

$$\frac{\rho_F}{\rho_F+1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}, \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n} = 0.$$

Из теоремы 1.1 как следствие вытекает формула Говорова - Маклейна - Шереметы для вычисления порядка ρ функции f, заданной в круге $D(0,1)$ рядом (0.1).

Отметим, что в работе [37], опубликованной в 2012 г., приводится доказательство равенства

$$\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F+1}$$

в предположении $\alpha_0 = 0$, где

$$\alpha_0 = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln^+\ln(p_k+1)}{\ln k} = 0,$$

где $p_k + 1$ – число точек λ_n из полуинтервала $[k, k+1)$. Но это утверждение есть на самом деле только достаточная часть теоремы, полное доказательство которой приведено в [36] А.М. Гайсиным в 1981 г. Действительно, убедимся, что $\alpha_0 = 0$ в том и только в том случае, когда $\alpha = 0$. В самом деле, если $\alpha = 0$, то, очевидно, $\alpha_0 = 0$. Действительно, пусть λ_j – ближайшая слева к (k+1) точка. Тогда

$$\frac{\ln\ln(p_k+1)}{\ln k} \le \frac{\ln\ln j}{\ln k} \le \frac{\ln(k+1)}{\ln k}\frac{\ln\ln j}{\ln\lambda_j} \to 0$$

при $j \to \infty$. Значит, $\alpha_0 = 0$.

Обратно, пусть $\alpha_0 = 0$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ при $i > i_0(\varepsilon)$ имеем:

$$p_i + 1 < e^{i^\varepsilon}.$$

Пусть $\lambda_n \in [k, k+1)$. Тогда при $i > i_1(\varepsilon) > i_0(\varepsilon)$

$$n \le n(i_0) + \sum_{i=i_0+1}^{k} e^{i^\varepsilon} \le n(i_0) + e^{k^\varepsilon} k < 2\lambda_n e^{\lambda_n^\varepsilon}.$$

Отсюда видно, что $L = 0$. Значит, $\sigma_c = \sigma_a = \sigma_u = 0$. Более того, при $n > n_0(\varepsilon)$

$$\ln n < 2\lambda_n^\varepsilon.$$

Значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} \le \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ – любое, то отсюда заключаем, что $\alpha = 0$.

Приступим к доказательству теоремы 1.1.

Д о с т а т о ч н о с т ь теоремы 1 доказана в [36]. При этом формула верна и для случая $\rho_F = \infty$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\alpha > 0$, где

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n}.$$

Это означает, что для любого β, $0 < \beta < \alpha$, найдется последовательность $\{n_m\}$ натуральных чисел n_m, $n_m \uparrow \infty$, такая, что

$$\frac{\ln\ln n_m}{\ln \lambda_{n_m}} \ge \beta > 0. \tag{1.4}$$

Так как, по предположению, $L = 0$, то, как легко проверить, $\alpha \le 1$. Но тогда $\beta < 1$.

Рассмотрим ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1.5}$$

где $a_n = e$. Как и ранее, предполагаем, что выполнено условие $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Ряд (1.5) сходится, в силу условия $L = 0$ и абсолютно в правой полуплоскости Π_0^+. Вычисляя порядок по формуле (1.3), имеем: $\rho_F = 0$. Убедимся, что на самом деле порядок $\rho_F > 0$. Это будет означать также, что сумма ряда (1.5) не ограничена в Π_0^+, т. е. $F \in D_0(\Lambda)$.

Действительно, так как $a_n > 0$, то

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)| \ge |F(\sigma)| = e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \sigma}, \quad \sigma > 0.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$M_F(\sigma) \le e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \sigma}.$$

Следовательно, $M_F(\sigma) = |F(\sigma)|$. Пользуясь оценкой $M_F(\sigma) \ge |F(\sigma)|$, для любого натурального N имеем:

$$M_F(\sigma) \ge e \sum_{n=[\frac{N}{2}]}^{N} e^{-\lambda_n \sigma} \ge e \frac{N}{2} e^{-\lambda_N \sigma} \ge N e^{-\lambda_N \sigma},$$

где $[a]$ – целая часть a. Учитывая (1.4), теперь положим $N = n_m$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда получим

$$M_F(\sigma) \ge n_m e^{-\lambda_{n_m} \sigma} = \exp[\ln n_m - \lambda_{n_m} \sigma], \qquad \sigma > 0.$$

Далее, из соотношения (1.4) видно, что

$$\lambda_{n_m} \le (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad m \ge 1.$$

Следовательно, из предыдущего имеем

$$M_F(\sigma) \ge \exp[\ln n_m - (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}}\sigma], \qquad m \ge 1, \tag{1.6}$$

где $0 < \beta < \alpha \le 1$, $\sigma > 0$ – любое.

Так как $\beta < 1$, то в качестве σ можем взять решение σ_m уравнения

$$\ln n_m = 2(\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}}\sigma,$$

или, что то же самое,

$$2(\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}-1} = \frac{1}{\sigma}, \qquad 0 < \beta < 1. \tag{1.7}$$

Тогда, учитывая (1.7), из (1.6) получаем

$$\ln M_F(\sigma_m) \ge (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}}[(\ln n_m)^{1-\frac{1}{\beta}} - \sigma_m] =$$

$$= (\ln n_m)^{\frac{1}{\beta}}\sigma_m = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}, \quad m \ge 1. \tag{1.8}$$

Следовательно, из (1.8) получаем, что при $m \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_m) \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

Отсюда окончательно имеем:

$$\ln\ln M_F(\sigma_m) \ge [1 + o(1)]\frac{\beta}{1-\beta}\ln\frac{1}{\sigma_m}, \qquad m \to \infty.$$

Так как $\sigma_m \to 0$ при $m \to \infty$, то

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma\downarrow 0}}\frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln\sigma} \ge \frac{\beta}{1-\beta}, \quad 0 < \beta < \alpha \le 1.$$

Поскольку $\beta < \alpha$ – любое положительное число, то отсюда видно, что если $\alpha = 1$, то $\rho_F = \infty$. При $\alpha < 1$ из предыдущего имеем:

$$\rho_F \geq \frac{\alpha}{1-\alpha} > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Покажем, для полноты рассуждений, что порядок ρ_F равен $\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} < q, \quad q = \alpha + \varepsilon. \tag{1.9}$$

Так как $\alpha < 1$, то за счет выбора $\varepsilon > 0$ можем считать, что $q < 1$.

Таким образом,

$$M_F(\sigma) \leq e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp[(2\ln n - \lambda_n \sigma)] \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2 e}{6} \exp[\max_{n\geq 1}(2\ln n - \lambda_n \sigma)], \quad \sigma > 0. \tag{1.10}$$

Учитывая (1.9), (1.10), получим

$$M_F(\sigma) \leq \frac{\pi^2 e}{6} \exp[\max_{x\geq 0}(2x - x^{\frac{1}{q}}\sigma)].$$

Максимум достигается в точке x_0, не превосходящей x_1, где x_1 – корень уравнения $2x = x^{\frac{1}{q}}\sigma$, т.е. $2x^{\frac{q-1}{q}} = \sigma$. Отсюда

$$x_1 = 2^{\frac{q}{1-q}} \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{q}{1-q}}.$$

Так что

$$M_F(\sigma) \leq \frac{\pi^2 e}{6} e^{2x_1} = \frac{\pi^2 e}{6} \exp\left[2^{\frac{q}{1-q}} \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{q}{1-q}}\right].$$

Следовательно, учитывая соотношение $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$, имеем:

$$\frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln\sigma} \le [1+o(1)]\frac{q}{1-q}.$$

Это означает, что

$$\rho_F \le \frac{q}{1-q}, \quad q = \alpha + \varepsilon.$$

Но $\varepsilon > 0$ – любое. Следовательно,

$$\rho_F \le \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

и с учетом обратного неравенства заключаем, что действительно

$$\rho_F = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Поскольку, очевидно, $F \in D_0(\Lambda)$, необходимость теоремы полностью доказана.

§2. Случай согласованности показателей и коэффициентов

Докажем теперь аналогичную теорему при некотором условии согласования между λ_n и коэффициентами a_n ряда Дирихле.

Пусть

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}. \tag{1.11}$$

Было показано, что $0 \le \alpha \le 1$. Обозначим

$$\mu = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n}. \tag{1.12}$$

В статье [18] утверждается, что если α фиксировано, а параметр μ удовлетворяет требованию $\mu \ge \alpha$, то

$$\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F + 1},$$

т. е. верна формула (1.3). Полное доказательство этого утверждения приведено в [29]. Недостатком этого результата является то, что условие $\alpha \le \mu$ при фиксированном Λ содержит дополнительное ограничение на коэффициенты a_n ряда Дирихле (0.3). Поэтому формула для порядка ρ_F может не иметь места для какой-то функции F из класса $D_0(\Lambda)$. Следовательно, естественно ставить вопрос о существенности условия $\mu \ge \alpha$ для справедливости формулы (1.3). Ниже будет дан ответ на этот вопрос.

Пусть μ $(0 \le \mu \le 1)$, α $(0 \le \alpha \le 1)$ – заданные числа. Через $D_0(\mu, \alpha)$ обозначим подкласс класса $D_0(\Lambda)$ рядов Дирихле (0.3), коэффициенты a_n которых удовлетворяют равенству (1.12), а показатели λ_n – равенству (1.11). Как было сказано выше (см. [29]) при $\alpha \le \mu$ порядок ρ_F любой функции $F \in D_0(\mu, \alpha)$ может быть вычислен при помощи формулы (1.3).

Отметим, что ограничения $0 \le \alpha \le 1$ и $0 \le \mu \le 1$ следуют из равенств (1.11), (1.12).

Для $\mu = 1$ формула (1.3) верна, так как в этом случае $\alpha \le \mu$. При этом

$$\mu = \frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = 1$$

т. е. $\rho_F = \infty$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\mu < 1$. Будет показано, что для любых чисел α $(0 \le \alpha \le 1)$, μ $(0 \le \mu < 1)$ таких, что $\mu < \alpha$, всегда существует функция $F \in D_0(\mu, \alpha)$, для которой порядок ρ_F не может быть найден по формуле (1.3). Это будет означать, что справедлива

Теорема 1.2. *Пусть заданы μ $(0 \le \mu < 1)$, α $(0 \le \alpha \le 1)$. Для того, чтобы порядок ρ_F любой функции $F \in D_0(\mu, \alpha)$ вычислялся по формуле (1.3), необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \le \mu$.*

Д о с т а т о ч н о с т ь данной теоремы доказана в [29].

Н е о б х о д и м о с т ь условия $\alpha \le \mu$. Пусть $\mu < \alpha$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $\{n_m\}$ натуральных чисел n_m, $n_m \uparrow \infty$, такая, что

$$\beta_1 \le \frac{\ln \ln n_m}{\ln \lambda_{n_m}} \le \beta_2, \quad m \ge 1, \tag{1.13}$$

где $\beta_1 = \alpha - \varepsilon$, $\beta_2 = \alpha + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \alpha)$.

Фиксируя последовательность $\{n_m\}$, построим соответствующий пример функции $F \in D_0(\mu, \alpha)$. Для этого выберем коэффициенты a_n и показатели λ_n ряда Дирихле вида (0.3) специальным образом, но удовлетворяющим, соответственно, условиям (1.11) и (1.12).

Положим

$$a_n = \exp[(\ln n_m)^{\frac{\mu}{\alpha}}], \quad n_m \le n < n_{m+1}, \quad m \ge 1$$

(показатели λ_n ряда (0.3) выберем позже). Ясно, что для этого ряда с такими коэффициентами область сходимости (и абсолютной сходимости) есть Π_0^+ [52]. Обозначая для выбранных таким образом коэффициентов a_n величину

$$\nu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n},$$

убедимся, что $\nu = \mu$. Действительно, пусть $n_m \le n < n_{m+1}$. Тогда

$$\frac{\ln \ln |a_n|}{\ln \lambda_n} = \frac{\mu}{\alpha} \frac{\ln \ln n_m}{\ln \lambda_n} \le \frac{\mu}{\alpha} \frac{\ln \ln n_m}{\ln \lambda_{n_m}}.$$

Учитывая (1.13), отсюда получаем, что $\nu \le \frac{\mu}{\alpha}(\alpha + \varepsilon)$. Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то $\nu \le \mu$. С другой стороны,

$$\nu \ge \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_{n_m}|}{\ln \lambda_{n_m}} = \frac{\mu}{\alpha} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln \ln n_m}{\ln \lambda_{n_m}}.$$

Следовательно, учитывая левую оценку в (1.13), отсюда получаем, что $\nu \ge \frac{\mu}{\alpha}(\alpha - \varepsilon)$, т. е. $\nu \ge \mu$. Таким образом, действительно $\nu = \mu$.

Если порядок ρ_F ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 0, \tag{1.14}$$

вычислялся бы по формуле (1.3), имели бы

$$\rho_F = \frac{\mu}{1 - \mu}. \tag{1.15}$$

Убедимся, что при подходящем выборе показателей ряда (1.14) это не так. Действительно, так как $a_n > 0$, то имеем

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)| \geq |F(\sigma)| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma}, \qquad \sigma > 0.$$

Следовательно,

$$M_F(\sigma) \geq \sum_{n=n_m}^{2n_m} a_n e^{-\lambda_n \sigma} \geq n_m exp[(\ln n_m)^{\frac{\mu}{\alpha}} - \lambda_{2n_m}\sigma]. \qquad (1.16)$$

Положим теперь $\lambda_n = (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}$, $n \geq 2$. Тогда для последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ условие (1.11) выполнено, а $\lambda_{2n_m} = (\ln 2n_m)^{\frac{1}{\alpha}}$. Таким образом, из (1.16) получаем

$$\ln M_F(\sigma) \geq \ln n_m + (\ln n_m)^{\frac{\mu}{\alpha}} - (\ln 2n_m)^{\frac{1}{\alpha}}\sigma, \quad \sigma > 0. \qquad (1.17)$$

Выберем $\sigma = \sigma_m$ как решение уравнения

$$(\ln n_m)^{\frac{\mu}{\alpha}} = (\ln 2n_m)^{\frac{1}{\alpha}}\sigma. \qquad (1.18)$$

Так как $(\ln 2n_m)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+o(1))(\ln n_m)^{\frac{1}{\alpha}}$ при $m \to \infty$, то из (1.18) следует, что при $m \to \infty$

$$\frac{1}{\sigma_m} = (1 + o(1))(\ln n_m)^{\frac{1-\mu}{\alpha}}. \qquad (1.19)$$

Таким образом, учитывая (1.18), (1.19) из (1.17) получаем, что при $m \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_m) \geq \ln n_m = (1 + o(1)) \left(\frac{1}{\sigma_m}\right)^{\frac{\alpha}{1-\mu}}.$$

Это означает, что

$$\rho_F \geq \frac{\alpha}{1 - \mu}.$$

Но, согласно (1.15),

$$\rho_F = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Значит, если учесть предыдущую оценку, то

$$\frac{\mu}{1-\mu} \geq \frac{\alpha}{1-\mu} \quad (0 \leq \mu < 1),$$

что противоречит предположению $\mu < \alpha$.

Пример построен.

Пусть $D(0,1)$ – круг сходимости степенного ряда (0.1). Для ряда Тейлора - Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}$$

обычный порядок ρ_F совпадает с порядком ρ функции f вида (0.1). Так как в данном случае $\lambda_n = n$, то

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} = 0,$$

и поэтому из теоремы 1.1 сразу вытекает упомянутая в самом начале формула Говорова - Маклейна - Шереметы для вычисления порядка ρ функции f, заданной в круге $D(0,1)$ рядом (0.1).

Глава II. Порядок суммы ряда экспонент в ограниченной выпуклой области

В данной главе речь будет идти о классе $H(G,\Lambda)$ аналитических в выпуклой ограниченной области G функций, имеющих конечный порядок и представимых в G рядами экспонент с множеством показателей $\Lambda = \{\lambda_k\}$.

Будет доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть G – произвольная ограниченная выпуклая область с гладкой границей, а $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, такая, что $H(G,\Lambda) \neq \varnothing$. Тогда порядок ρ_f любой функции $f \in H(G,\Lambda)$ удовлетворяет оценкам (0.23), т.е.*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1} \le \beta \le \max\left(\frac{\rho_f}{\rho_f+1},\, q_0\right),$$

где

$$\beta = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+\left[|a_k|e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right]}{\ln|\lambda_k|}, \quad q_0 = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln^+\ln\frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln|\lambda_k|},$$

$\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\varphi_k}$, $K(\varphi)$ – опорная функция области G.

Будет показано, что оценки для β неулучшаемы.

§1. Вспомогательные утверждения

Нам понадобятся некоторые вспомогательные факты.

Лемма 2.1. *Пусть D – конечная выпуклая область, $K(\varphi)$ – опорная функция $\overline{D}$, $h(\varphi)=K(-\varphi)$, $\{\lambda_k\}$ – последовательность комплексных чисел с конечной верхней плотностью*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k}{|\lambda_k|}=\tau<\infty.$$

Если для любого $\varepsilon>0$ при $n\geq n_0(\varepsilon)$

$$|a_k|\leq\exp\left[-h(\varphi_k)|\lambda_k|+|\lambda_k|^{p+\varepsilon}\right], \tag{2.1}$$

$\varphi_k=\arg\lambda_k,\ 0\leq p<1$, то для любого $\nu>0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_ke^{\lambda_kz}|\leq\exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\nu}\right], \tag{2.2}$$

где $r=d(z),\ q=p/(1-p),\ z\in D,\ r<r_0(\nu)$.

Лемма доказана в [9]. Отметим только следующее.

Если $z\in D,\ \arg\lambda=\varphi,\ \arg z=\psi$, то

$$|e^{\lambda z}|=\exp\left[|\lambda||z|\cos(\varphi+\psi)\right],$$

где выражение $|z|\cos(\varphi+\psi)$ есть проекция вектора z на луч $\{t:\arg t=-\varphi,\, t>0\}$. Очевидно, что

$$|z|\cos(\varphi+\psi)<h(\varphi)-d(z),\quad z\in D. \tag{2.3}$$

Так что из (2.1), (2.3) получаем

$$|a_ke^{\lambda_kz}|\leq A(\varepsilon)\exp\left[|\lambda_k|^{p+\varepsilon}-r|\lambda_k|\right],\quad k\geq 1,$$

где $r = d(z)$, $0 \le p < 1$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\lambda_k z}| \le A(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \exp[|\lambda_k|^{p+\varepsilon} - r|\lambda_k|] \le$$

$$\le A(\varepsilon) \exp\left[\max_{k\ge1}\left(2|\lambda_k|^{p+\varepsilon} - r|\lambda_k|\right)\right] \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\lambda_k|^{p+\varepsilon}}. \qquad (2.4)$$

Максимум явно подсчитывается, а поскольку $\tau < \infty$, то последний ряд сходится. Как показано в [9], правая часть в (2.4) не превосходит величины

$$B(\nu)\exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{q+\nu}\right] \quad (r > 0),$$

$\nu > 0$ – любое.

Таким образом, оценка (2.2) имеет место для любой ограниченной выпуклой области D. При этом в лемме 2.1, как видно, никаких дополнительных условий на границу ∂D не требуется. Однако если вместо условия $\tau < \infty$ выполнено более слабое требование $\ln k = \mathrm{o}(|\lambda_k|)$ при $k \to \infty$, то лемма 2.1 вообще неверна (см. [9]). В то же самое время, если последовательность показателей ряда экспонент

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \qquad (2.5)$$

имеет конечную верхнюю плотность, а функция f – конечный порядок ρ_f, $\rho_f \le q$, то в общей ситуации оценка (2.1) для коэффициентов a_k может также не иметь места. Дело в том, что сумма ряда экспонент (2.5) в области D может равняться нулю тождественно, а его коэффициенты не равны нулю и могут иметь гораздо больший рост, нежели правая часть в оценках (2.1).

Рассмотрим соответствующий пример. Пусть $\varphi(r)$ – любая положительная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, такая, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\varphi(r)}{r}=0.$$

Известно (см. [7, гл. I, §3, п. 6, теорема 1.3.6]), что существует целая функция $L(\lambda)$ вполне регулярного роста с индикатрисой роста $h(\varphi)=K(-\varphi)$ ($K(\varphi)$ – опорная функция $\overline{D}$), для которой выполняется условие (0.17) и

$$|L(re^{i\varphi})|\le\frac{e^{h(\varphi)}r}{\varphi(r)}.$$

Тогда имеем (см. [7, Дополнение]):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}=0,\quad z\in D. \tag{2.6}$$

В [9] показано, что для коэффициентов $a_k=|L'(\lambda_k)|^{-1}$ ряда (2.6) имеют место оценки: при $k\ge k_0$

$$|a_k|\ge A^{-1}\varphi(|\lambda_k|-1)e^{-h(\varphi_k)|\lambda_k|},\quad A=\exp\big(\max_{t\in\overline{D}}|t|\big).$$

Видим, что сумма ряда (2.6) равна нулю в D, а коэффициенты a_k за счет выбора $\varphi(r)$ могут не иметь оценок типа (2.1). Действительно, можно, например, взять функцию

$$\varphi(r)=\exp\left[\frac{r}{\ln(r+e)}\right],\quad r\ge 0.$$

Таким образом, в подобной ситуации, когда λ_k ($k = 1, 2, ...$) – простые нули некоторой целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$, для которой $\overline{D}$ – сопряженная диаграмма, нельзя ставить вопрос о какой-либо формуле, выражающей зависимость порядка ρ_f произвольной аналитической в D функции f от коэффициентов ее разложения в ряд экспонент (2.5). Другое дело, если соответствующий ряд экспонент сходится в большей области G, $G \supset \overline{D}$. В этом случае система экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}$ не полна в пространстве аналитических в G функций, и можно указать формулы для коэффициентов (см. [48], [52, гл. II, §2, п. 7]). Но тогда при некоторых дополнительных условиях на показатели λ_k можно вести речь о какой-либо связи между порядком ρ_f суммы ряда (2.5) в области G и коэффициентами разложения a_k.

Итак, пусть ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z} \tag{2.7}$$

сходится в области $G \supset \overline{D}$. Поскольку верхняя плотность $\tau < \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = 0,$$

и потому область сходимости G совпадает с областью абсолютной сходимости ряда (2.7). Поэтому область G выпукла (см. [7, гл. III, §1, п. 1]).

Для исследуемых здесь задач нам вполне подходит функция $Q(\lambda)$, определенная в §1 введения. Поведение этой функции полностью определяется распределением точек λ_k, показателей ряда (2.7), и наоборот.

Известно (см. [52, гл. II, §3, теорема 3.1]), что при выполнении условий

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k}{|\lambda_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_k)}\right| = 0 \qquad (2.8)$$

область сходимости G ряда (2.7) совпадает с областью H регулярности его суммы. Поэтому в дальнейшем будем считать, что выполнены условия (2.8).

Так как плотность $\tau = 0$, то $\overline{D} = \{0\}$, где $\overline{D}$ – сопряженная диаграмма функции $Q(\lambda)$. Следовательно, имеем (см. [52, гл. II, §2, п. 7])

$$a_k = e^{-\lambda_k z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\delta} \psi_k(t) f(t+z)dt, \quad k \geq 1, \qquad (2.9)$$

причем для каждого $z \in G$ величина $\delta > 0$ выбирается так, чтобы $t + z \in G$ для всех $t, |t| = \delta$. Здесь

$$\psi_k(t) = \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \int\limits_0^{\infty e^{i\varphi_0}} \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad t \in \Pi(\varphi_0),$$

где

$$\Pi(\varphi_0) = \{t : \mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) \geq \delta\}.$$

Отсюда следует, что для всех φ_0, $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, равномерно

$$\max_{t\in\Pi(\varphi_0)} |\psi_k(t)| \leq \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{\infty} \max_{|\lambda|=r} \left|\frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right| e^{-\delta r} dr, \qquad (2.10)$$

где $r = |\lambda|$.

Покажем, что для всякого $k \geq 1$

$$\max_{|\lambda|=r} \left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \right| \leq M(1)M(r), \tag{2.11}$$

где

$$M(r) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_k|^2} \right).$$

Действительно, для всякого $k \geq 1$

$$\left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \right| = \frac{1}{|\lambda_k|} \left| 1 + \frac{\lambda}{\lambda_k} \right| \prod_{k \neq n} \left| 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right|. \tag{2.12}$$

Поскольку еще

$$\frac{1}{|\lambda_k|} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|\lambda_k|^2} \right),$$

а

$$1 + \frac{r}{|\lambda_k|} \leq 2 \left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_k|^2} \right), \quad r = |\lambda|,$$

то оценка (2.11) легко следует из (2.12). Поскольку правая часть в (2.10) не зависит от φ_0, то будем иметь

$$\max_{|t|=\delta} |\psi_k(t)| \leq \frac{M(1)}{|Q'(\lambda_k)|} \int_0^{\infty} M(r) e^{-\delta r} dr, \quad k \geq 1.$$

В итоге из (2.9) получим оценки: для всех $z \in G$, $k = 1, 2, \ldots$

$$|a_k| \leq \frac{|e^{-\lambda_k z}|}{|Q'(\lambda_k)|} M(1) \delta H(\delta) \max_{|\xi - z| \leq \delta} |f(\xi)|,$$

где

$$H(\delta) = \int_0^{\infty} M(r) e^{-\delta r} dr, \quad \delta < \rho(z, \partial G) = \inf_{t \in \partial G} |z - t|.$$

Лемма 2.2. *Целая функция* $Q(\lambda)$ *имеет порядок не выше*

$$q = \frac{\rho_f}{\rho_f + 1}$$

тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ *при* $0 < \delta < \delta_0(\varepsilon)$

$$H(\delta) \leq \exp\left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho_f+\varepsilon}\right]. \tag{2.13}$$

Для функции

$$H_0(\delta) = \int\limits_0^\infty M_0(r) e^{-\delta r} dr,$$

где

$$M_0(r) = \max_{|\lambda|=r} |Q(\lambda)|, \quad r = |\lambda|,$$

лемма доказана в [48]. Здесь вместо $H_0(\delta)$ рассматривается функция $H(\delta)$, определяемая через $M(r) = Q_1(ir)$, где

$$Q_1(\lambda) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{|\lambda_k|^2}\right).$$

Но функции $Q(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ имеют один и тот же порядок, равный (см. [52, гл. I, §3, п. 5])

$$\inf\left\{\mu\colon\ \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|\lambda_k|^\mu} < \infty\right\}.$$

Поэтому лемма 2.2 есть аналог леммы из [48]. Из нее следует, что

$$\varlimsup_{\delta\downarrow 0} \frac{\ln\ln H(\delta)}{-\ln\delta} \leq \rho_f$$

тогда и только тогда, когда целая функция $Q(\lambda)$ имеет порядок не выше $\rho_f/(\rho_f+1)$.

Нам понадобится и следующее утверждение из [31].

Лемма 2.3. Пусть G – ограниченная выпуклая область с гладкой границей ∂G, $z_0 \in \partial G$, N_0 – нормаль в точке z_0. Тогда при $z \in G \cap N_0$ и $z \to z_0$

$$|z - z_0| = d(z)(1 + o(1)),$$

где $d(z) = \rho(z, \partial G) = \min_{\xi \in \partial G} |z - \xi|$.

§2. Доказательство основной теоремы

Приступим к доказательству теоремы. Для этого воспользуемся оценками для коэффициентов a_k (они были установлены выше), переписав их в виде: для всех $z \in G$, $\delta < \rho(z, \partial G)$

$$|a_k| \leq M(1)\frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}\delta H(\delta)|e^{-\lambda_k z}|\max_{|t|=\delta}|f(t+z)|, \quad k \geq 1. \quad (2.14)$$

Пусть $\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\varphi_k}$, а z_k – точка границы ∂G, такая, что $\mathrm{Re}(z_k e^{i\varphi_k}) = K(-\varphi_k)$ (здесь $K(\varphi)$ – опорная функция компакта $\overline{G}$). Если N_k – нормаль в точке z_k, а $z \in G \cap N_k$, $z \to z_k$, то, по лемме 2.3,

$$-\mathrm{Re}(\lambda_k z) = -K(-\varphi_k)|\lambda_k| + \mathrm{Re}\,[\lambda_k z_k - \lambda_k z] \leq$$

$$\leq -K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k||z_k - z| = -K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|(1 + o(1))d(z),$$

где $d(z) = \rho(z, \partial G)$. Учитывая это и лемму 2.2, из (2.13), (2.14) получаем: для всякого $\varepsilon > 0$, $\delta < \delta_0(\varepsilon)$

$$|a_k| \leq \frac{e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|(1+o(1))d(z)}}{|Q'(\lambda_k)|} e^{\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\rho_f+\varepsilon}} \max_{|t|=\delta} |f(t+z)| \qquad (2.15)$$

при $z \to z_k,\ z \in G \cap N_k$.

Положим $\delta = \gamma d(z)$, где γ – фиксированное число из интервала $(0, 1)$. Тогда $\delta < d(z)$. Так как функция $d(z) = \rho(z, \partial G)$ удовлетворяет условию Липшица в G (см. [53, гл. II, §6]), т. е. для всех $z',\ z''$ из G

$$|d(z') - d(z'')| \leq |z' - z''|,$$

то

$$d(t+z) \geq d(z) - \delta = (1-\gamma)d(z), \quad 0 < \gamma < 1. \qquad (2.16)$$

Функция f имеет порядок ρ_f. Значит, в силу (2.16),

$$\max_{|t|=\delta} |f(t+z)| \leq \exp\left[\left(\frac{1}{(1-\gamma)d(z)}\right)^{\rho_f+\varepsilon}\right],$$

если $d(z) < d_1(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ – та же величина, что и в формуле (2.15)), γ ($0 < \gamma < 1$) фиксировано. Значит, для заданного $\varepsilon > 0$ при $d(z) < d_2(\varepsilon) < d_1(\varepsilon)$

$$|a_k| \leq \frac{e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k|}}{|Q'(\lambda_k)|} \exp\left[\left(\frac{1}{d(z)}\right)^{\rho_f+2\varepsilon} + 2|\lambda_k| d(z)\right].$$

Отсюда, переходя к независимой переменной d, имеем

$$|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \leq \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} e^{\inf_{0<d<d_2}\left[\left(\frac{1}{d}\right)^{\rho_f+2\varepsilon} + 2d|\lambda_k|\right]}. \qquad (2.17)$$

Проверяется, что для любого $\varepsilon > 0$

$$I = \inf_{0<d<d_2} \left[\left(\frac{1}{d} \right)^{\rho_f + 2\varepsilon} + 2d|\lambda_k| \right] \leq N_{\rho_f}(\varepsilon) |\lambda_k|^{\rho_1/(\rho_1+1)},$$

где $\rho_1 = \rho_f + 2\varepsilon$. Значит, для любого $\nu > 0$

$$I \leq |\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu}$$

при $k \geq k_0(\nu)$. Учитывая это, из (2.17) получаем: для любого $\nu > 0$ при $k \geq k_0(\nu)$

$$|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \leq \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} e^{|\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu}}.$$

Следовательно,

$$\ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right] \leq \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} + |\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu},$$

а отсюда

$$\ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right] \leq 2 \max \left(\ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|},\ |\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu} \right),$$

$k \geq k_0(\nu)$.

Таким образом,

$$\frac{\ln^+ \ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right]}{\ln |\lambda_k|} \leq$$

$$\leq \frac{\ln 2}{\ln |\lambda_k|} + \max \left(\frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln |\lambda_k|},\ \frac{\rho_f}{\rho_f + 1} + \nu \right),$$

$k \geq k_0(\nu),\ \nu > 0$ – любое. Значит,

$$\beta = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right]}{\ln |\lambda_k|} \leq \max \left(\frac{\rho_f}{\rho_f + 1},\ q_0 \right),$$

где
$$q_0 = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln|\lambda_k|}.$$

Далее, если $\beta \geq 1$, то
$$\beta > \frac{\rho_f}{\rho_f + 1}$$
(мы предположили, что $\rho_f < \infty$). Пусть теперь $\beta < 1$. Докажем, что
$$\beta \geq \frac{\rho_f}{\rho_f + 1}.$$
Действительно, из определения величины β имеем: для любого $\varepsilon > 0$ при $k \geq k_0(\varepsilon)$
$$\ln^+ \ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|}\right] < (\beta + \varepsilon) \ln |\lambda_k|,$$
т. е.
$$|a_k| < e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|^{\beta+\varepsilon}}, \quad \beta < 1.$$

Воспользуемся теперь леммой 2.1 (в ней следует положить $\tau = 0$, $h(\varphi_k) = K(-\varphi_k)$). Тогда для любого $\nu > 0$ при $d(z) < d_0(\nu)$
$$|f(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\lambda_k z}| \leq \exp\left[\left(\frac{1}{d(z)}\right)^{q+\nu}\right],$$
где $q = \beta/(1-\beta)$, $z \in G$. Так что порядок ρ_f функции не превышает $q = \beta/(1-\beta)$, т. е.
$$\beta \geq \frac{\rho_f}{\rho_f + 1}.$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Следствие. *Если*

$$q_0 \leq \frac{\rho_f}{\rho_f + 1},$$

то

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} = \beta.$$

Таким образом, левая оценка для β в (0.23) точна.

Отметим, что некоторые оценки типа (0.23) для порядка по Ритту

$$\rho_R = \varlimsup_{z \to \partial G} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{\frac{1}{d(z)}}$$

функции $f \in H(G, \Lambda)$ в области G ранее были получены в [31]. Ниже будет показано, что двусторонние оценки (0.23), как и соответствующие оценки для ρ_R, также неулучшаемы.

Замечание 2.1. При $q_0 = 0$ из оценок (0.23) формально вытекает известная формула для порядка в полуплоскости $\Pi_0^- = \{s = \sigma + it\colon\ \sigma < 0\}$ (см. [41]), ибо $\tau = 0$, а $K(-\varphi_k) = 0$ при $\lambda_k > 0$. Отметим также, что при $q_0 = 0$ индекс конденсации (см. [7, гл. II, §6, п. 2]) равен нулю. Однако заметим, что в случае полуплоскости показатели $\lambda_k > 0$ вообще могут и не быть нулями целой функции экспоненциального типа. В [41] показано, что условие

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции

$f \in H(\Pi_0^-, \Lambda)$ имело место равенство

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} = \beta.$$

Теперь ставится вопрос о достижимости правой оценки для β в (0.23).

§3. Точность двусторонних оценок для порядка

Справедлива следующая

Теорема 2.2. *Существует последовательность* Λ, *существует функция* $f \in H(G, \Lambda)$, *такие, что*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} < \beta = q_0.$$

Для доказательства данного утверждения нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения[1].

Уточненным порядком называется функция $\rho(r)$ $(r > 0)$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho, \quad \lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0.$$

Если для целой функции $\varphi(z)$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_\varphi(r)}{r^{\rho(r)}} = \sigma \neq 0,\ \infty, \quad M_\varphi(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)|,$$

то $\rho(r)$ называется уточненным порядком целой функции $\varphi(z)$, а σ – типом этой функции при уточненном порядке.

[1]По поводу сведений, приводимых ниже, более подробно см. в [15].

Пусть $n(r)$ – число точек последовательности Λ, лежащих в круге $\{z\colon |z| \le r\}$, а $n(r, \theta_1, \theta_2)$ – число точек из этого множества, лежащих в секторе $\{z\colon |z| \le r,\ \theta_1 \le \arg z \le \theta_2\}$. Если $\rho(r)$ – уточненный порядок и существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} = \Delta,$$

то говорят, что множество Λ имеет плотность Δ при показателе $\rho(r)$. Если для всех θ_1, θ_2, за исключением, быть может, счетного множества, существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \theta_1, \theta_2)}{r^{\rho(r)}} = \Delta(\theta_1,\, \theta_2),$$

то говорят, что множество Λ имеет *угловую плотность* $\Delta(\theta_1,\, \theta_2)$ при показателе $\rho(r)$.

Последовательность Λ, имеющая угловую плотность при показателе $\rho(r)$, при ρ *нецелом* (нас будет интересовать только этот случай) называется *правильно распределенным множеством при показателе* $\rho(r)$, а последнее называется *регулярным*, если при некотором $d > 0$

$$|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| > d|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}.$$

Индикатор (или *индикатриса*) роста целой функции $\varphi(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$ определяется равенством

$$h_\varphi(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\varphi(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}}.$$

Как известно, индикатор – непрерывная функция с периодом 2π.

C_R–кружками множества Λ называются кружки

$$\{z\colon |z-\lambda_k|<d_0|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}\},\quad d_0>0.$$

Верна следующая теорема (см., например, в [7, гл. I, § 2, п. 6]), которую мы сформулируем, для удобства, применительно к функции $Q(\lambda)$, введенной выше.

Теорема А. *Если $\Lambda=\{\lambda_k\}$ – регулярное множество при показателе $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$, $r\to\infty$ (ρ – нецелое), то вне исключительных C_R–кружков*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|Q(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}}=H(\theta), \tag{2.18}$$

где

$$H(\theta)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int\limits_{\theta-2\pi}^{\theta}\cos\rho(\theta-\psi-\pi)d\Delta(\psi),$$

а функция $\Delta(\psi)$ (она определяется с точностью до аддитивного слагаемого) характеризует распределение нулей λ_k:

$$\Delta(\theta_2)-\Delta(\theta_1)=\Delta(\theta_2,\,\theta_1).$$

Если $\lambda_k=|\lambda_k|e^{i\varphi_k}$, то для всякого $\varepsilon>0$

$$\ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_k)}\right|<-[H(\varphi_k)-\varepsilon]|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, k\geq k_0(\varepsilon). \tag{2.19}$$

Замечание 2.2. (см. [7, гл. I, §2, п. 6]). Если $\rho_k=d_0|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}\to\infty$ при $k\to\infty$, то равенство (2.18) имеет место вне кружков $\{z\colon |z-\lambda_k|<\gamma_0\}$, где $\gamma_0>0$ – любая фиксированная постоянная. Например, если $\rho(r)\equiv\rho$, $0<\rho<1$, то, очевидно, $\rho_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.2. Рассмотрим кольца

$$K_n = \{z\colon \quad P_n < |z| < P_{n+1}\},$$

где $P_n = n^{1/\gamma},\ 0 < \gamma < 1$ (γ выберем позже).

В каждом кольце K_n выберем точки λ_{nk}, расположенные по спирали (см. рис. 1),

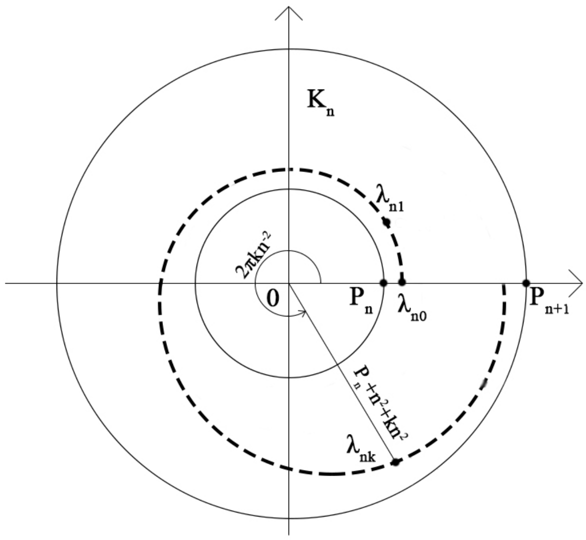

Рис. 1

а именно, положим:

$$\lambda_{nk} = [c_n + d_{nk}]e^{i\theta_{nk}}, \quad \theta_{nk} = \frac{2\pi}{n^2}k, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, ...,\, n^2 - 1;$$

$$d_{nk} = kn^2, \quad c_n = P_n + n^2.$$

Как видно, число точек λ_{nk} в кольце K_n равно n^2. Перенумеруем, упорядочивая по возрастанию, точки множества

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n^2-1} \{\lambda_{nk}\}.$$

Полученную последовательность обозначим $\Lambda_1 = \{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$. Подберем γ ($0 < \gamma < 1/3$) так, чтобы последовательность Λ_1

имела плотность (отличную от 0 и ∞) при некотором показателе $\rho < 1$, а это возможно. Действительно, если $\lambda_m^{(1)} \in K_n$, то, очевидно, имеем

$$\frac{n(\lambda_m^{(1)})}{|\lambda_m^{(1)}|^\rho} \sim \frac{1+2^2+...+n^2}{P_n^\rho} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^{\frac{\rho}{\gamma}}} \sim \frac{1}{3}\frac{n^3}{n^{\frac{\rho}{\gamma}}}, \quad n \to \infty.$$

Значит, последовательность Λ_1 при показателе $\rho = 3\gamma$ имеет плотность, равную 1/3. Далее, если $\lambda_m^{(1)}$, $\lambda_{m+1}^{(1)}$ принадлежат K_n, то

$$|\lambda_{m+1}^{(1)}| - |\lambda_m^{(1)}| \geq n^2. \tag{2.20}$$

Если $\lambda_m^{(1)} \in K_n$, а $\lambda_{m+1}^{(1)} \in K_{n+1}$, то оценка (2.20), как видно, тоже будет иметь место. Далее, если при некотором $\rho = 3\gamma$, $0 < \gamma < \frac{1}{3}$,

$$n^2 \geq |\lambda_m^{(1)}|^{1-\rho} \sim n^{(1-\rho)/\gamma}, \quad n \to \infty, \tag{2.21}$$

то, учитывая (2.20), при некотором $d_0 > 0$ получим

$$|\lambda_{m+1}^{(1)}| - |\lambda_m^{(1)}| \geq d_0|\lambda_m^{(1)}|^{1-\rho}. \tag{2.22}$$

А чтобы выполнялось (2.21), потребуем, чтобы

$$2 \geq \frac{1}{\gamma}(1-\rho) = \frac{1}{\gamma}(1-3\gamma),$$

т.е. $\gamma \geq 1/5$. Таким образом, при выбранном γ ($1/5 \leq \gamma < 1/3$) последовательность Λ_1 имеет плотность 1/3 при показателе $\rho = 3\gamma$ и справедливы оценки (2.22) (они будут иметь место для любых $m \geq 1$).

По теореме о среднем, имеем:

$$P_{n+1} - P_n = (n+1)^{1/\gamma} - (n)^{1/\gamma} = \frac{1}{\gamma} c^{1/\gamma - 1}, \quad n \le c \le n-1.$$

Отсюда, если положить $\gamma = 1/5$,

$$P_{n+1} - P_n \ge \frac{1}{\gamma} n^{1/\gamma - 1} = 5n^4.$$

И тогда имеем также:

$$|\lambda_{n\,1} - P_n| = n^2 \ge 1, \quad P_{n+1} - |\lambda_{n\,n^2-1}| =$$

$$= P_{n+1} - (P_n + n^4) \ge 4n^4 \ge 1.$$

Положим теперь

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n^2-1} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{n\,k}^2}\right).$$

Поскольку $\gamma = 1/5$, то $\rho = 3\gamma = 3/5$. Так что последовательность Λ_1 при показателе $\rho = 3/5$ имеет плотность, равную $1/3$, а значит, показатель сходимости $\tau_0 = 3/5$. Поэтому L_1 – целая функция порядка $\rho = 3/5$ (см., например, [52, гл. I, §3, п. 5]). Более того,

$$|\lambda_{n+1}^{(1)}| - |\lambda_n^{(1)}| \ge d_0 |\lambda_n^{(1)}|^{1-\rho} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Значит, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n^{(1)}|} = 0, \quad |\lambda_{n+1}^{(1)}| - |\lambda_n^{(1)}| \ge h > 0, \quad n \ge 1.$$

Так что индекс конденсации последовательности Λ_1 равен нулю (см. [52, гл. II, §3, п. 1]):

$$\delta^{(1)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n^{(1)}|} \ln \left| \frac{1}{L_1'(\lambda_n^{(1)})} \right| = 0.$$

Далее, поскольку аргументы θ_{nk} точек λ_{nk} $\left(\theta_{nk} = \frac{2\pi}{n^2}k\right)$ равномерно распределены на отрезке $[0,\, 2\pi]$, а последовательность Λ_1 имеет плотность $1/3$, то существует угловая плотность

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\,\theta_1,\,\theta_2)}{r^\rho} = \Delta(\theta_1,\,\theta_2),$$

равная, очевидно,

$$\Delta(\theta_1,\,\theta_2) = \frac{1}{6\pi}(\theta_2 - \theta_1).$$

Таким образом, последовательность Λ_1 правильно распределена при показателе $\rho = 3/5$, а в силу (2.22), образует при этом показателе регулярное множество. Но $\rho_k = d_0|\lambda_k^{(1)}|^{1-\rho} \to \infty$ при $k \to \infty$. Значит, вне кружков

$$D_n = \{z\colon |z - \lambda_n| < 1\}$$

для любого $\varepsilon > 0$ имеем (см. выше):

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \ln|L_1(re^{i\theta})| > [H_1(\theta) - \varepsilon]r^\rho;\\ &\text{б)}\ \ln|L_1(re^{i\theta})| < [H_1(\theta) + \varepsilon]r^\rho, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где $\rho = 3/5$, $H_1(\theta)$ – индикатор функции $L_1(\lambda)$.

Поскольку $\tau_0 = \rho = 3/5$, τ_0 – нецелое, а последовательность Λ_1 имеет плотность $1/3$ при данном показателе ρ, то функция $L_1(\lambda)$ имеет нормальный тип σ_1 при порядке ρ (см., например, в [7, гл. I, §1, п. 3]).

Введем в рассмотрение еще одну целую функцию

$$L_2(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=0}^{n^2-1}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda_{nk}^{(1)})^2}\right),$$

где $\lambda_{nk}^{(1)} = \lambda_{nk} + \varepsilon_{nk}$, $\varepsilon_{nk} \downarrow 0$, $n \to \infty$ (ε_{nk} позже выберем специальным образом).

Положим $Q(\lambda) = L_1(\lambda)L_2(\lambda)$,

$$F(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_{nk})(\lambda - \lambda_{nk}^{(1)})}{Q(\lambda)}.$$

Если

$$\sum_{n,k} \varepsilon_{nk} < \infty,$$

то обычным образом показывается (см. [7, гл. I, §2, п. 9]), что вне кружков постоянного радиуса $L_1(\lambda) \asymp L_2(\lambda)$, т.е. при некоторых $0 < c_1 < c_2 < \infty$ верны оценки

$$c_1|L_1(\lambda)| \le |L_2(\lambda)| \le c_2|L_1(\lambda)|.$$

Следовательно, вне кружков D_n для функции $L(\lambda)$ также будут справедливы оценки типа (2.23), но с правыми частями, равными $2[H_1(\theta) \pm \varepsilon]r^{\rho}$.

Далее, по принципу максимума и минимума модуля,

$$|F(\lambda_0)| = \min_{|\lambda - \lambda_{nk}|=1} |F(\lambda)| \le \max_{|\lambda - \lambda_{nk}|=1} |F(\lambda)| = |F(\lambda_0^{(1)})|,$$

где $|\lambda_{nk} - \lambda_0| = |\lambda_{nk} - \lambda_0^{(1)}| = 1$. Но

$$F(\lambda_{nk}) = \frac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_{nk})}, \quad F(\lambda_{nk}^{(1)}) = \frac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_{nk}^{(1)})}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{|Q(\lambda_0)|} \le \left|\frac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_m)}\right| \le 2\frac{1}{\left|Q(\lambda_0^{(1)})\right|},$$

где $\lambda_m = \lambda_{nk}$ или $\lambda_m = \lambda_{nk}^{(1)}$, $m \geq m_0$. Положим теперь $\varepsilon_{nk} = e^{-|\lambda_{nk}|^p}$, $0 < \rho < p < 1$ $(\rho = 3/5)$. Тогда, учитывая оценки типа (2.23), будем иметь: для всех $m \geq m_0$

$$|\lambda_{nk}|^p - 2(H_1(\theta) + \varepsilon)|\lambda_m|^\rho \leq \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_m)}\right| \leq$$

$$\leq |\lambda_{nk}|^p - 2(H_1(\theta) - \varepsilon)|\lambda_m|^\rho, \qquad (2.24)$$

$(\lambda_m = \lambda_{nk}$ или $\lambda_m = \lambda_{nk}^{(1)})$. Для построенной последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\} \cup \{\lambda_n^{(1)}\}$ плотность при порядке 1 равна нулю, а как видно из (2.24), индекс конденсации $\delta = 0$, $q_0 = p$.

Пусть Γ_n – контур, образованный отрезками лучей $\{z\colon \arg z = \pm(\theta_{n_0} + \theta_{n_1})/2\}$ и дугами окружностей $\{z\colon |z| = P_n\}$ и $\{z\colon |z| = P_{n+1}\}$ (см. рис. 2).

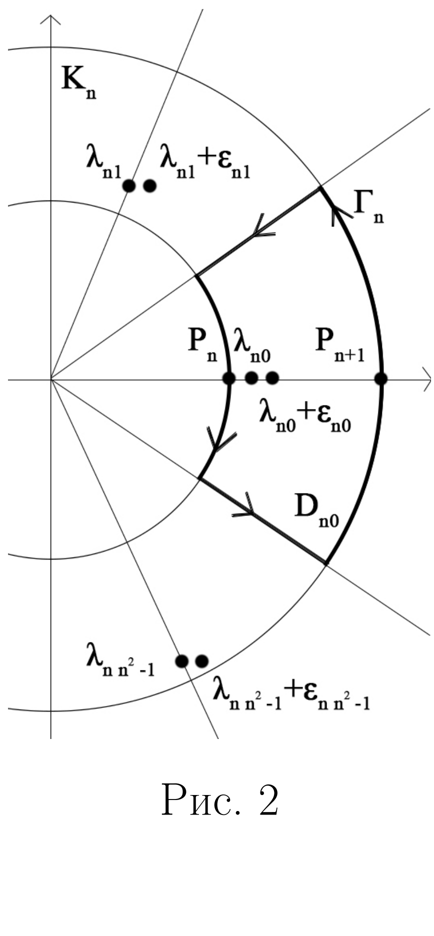

Рис. 2

Рассмотрим теперь ряд экспонент

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \tag{2.25}$$

коэффициенты которого определим следующим образом:

$$a_k = \begin{cases} \alpha_{nk}(Q'(\lambda_k))^{-1}, \quad \alpha_{nk} = e^{-h(0)|\lambda_{n_0}|}, \text{ если } \lambda_k \in D_{n0}, \\ e^{-h(\varphi_k)|\lambda_k|}, \text{ если } \lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k} \notin D_{n0}. \end{cases}$$

Здесь D_{n0} – область, ограниченная контуром Γ_n, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $K(\varphi)$ – опорная функция замыкания области G. Ясно, что G – область сходимости для ряда (2.25).

Подсчитаем, чему равна величина β. Достаточно найти β только по точкам $\lambda_n \in D_{n0}$.

Область D_{n0} содержит только две точки: λ_{n0} и $\lambda_{n0}^{(1)} = \lambda_{n0} + \varepsilon_{n0}$. Если $\lambda_k = \lambda_{n0}$, то

$$a_k = \frac{e^{-h(0)|\lambda_{n_0}|}}{|Q'(\lambda_{n0})|},$$

и поскольку $\rho < p$, то из оценок (2.24) имеем также:

$$\beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ [|a_k| e^{K(0)|\lambda_{n_0}|}]}{\ln |\lambda_{n0}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ \frac{1}{|Q'(\lambda_{n0})|}}{\ln |\lambda_{n0}|} = p.$$

Если $\lambda_k = \lambda_{n0}^{(1)}$, то, аналогично,

$$\beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ \frac{1}{|Q'(\lambda_{n0}^{(1)})|}}{\ln |\lambda_{n0}^{(1)}|} = p.$$

Таким образом, $\beta = p = q_0$.

Убедимся, что для ряда экспонент (2.25)

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1} < \beta = p,$$

где ρ_f – порядок суммы f этого ряда. Действительно, имеем

$$A_n = \sum_{\lambda_k \in D_{n0}} a_k e^{\lambda_k z} = e^{-h(0)|\lambda_{n0}|} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{e^{\xi z}}{Q(\xi)} d\xi.$$

Так как $Q(\lambda) = L_1(\lambda) L_2(\lambda)$, $L_1(\lambda) \asymp L_2(\lambda)$, то, учитывая первую оценку из (2.23), имеем:

$$|A_n| \leq e^{-h(0)|\lambda_{n0}|} e^{bP_n^\rho} |\Gamma_n| e^{|\xi_0|(h(\varphi)-d(z))}, \tag{2.26}$$

где $\xi_0 = |\xi_0| e^{i\varphi}$ – некоторая точка контура Γ_n, а $|\Gamma_n|$ – длина Γ_n. Мы воспользовались тем, что

$$\mathrm{Re}(\xi_0 z) \leq |\xi_0| [h(\varphi) - d(z)],$$

где $d(z) = \inf_{t \in \partial G} |z - t|$ (см. [31]).

Но, как известно, (см. [52, гл. II, §2, п. 5])

$$|\xi_0| h(\varphi) - |\lambda_{n0}| h(0) \leq |\xi_0 - \lambda_{n0}| \max_{t \in \overline{G}} |t|. \tag{2.27}$$

Далее, так как $\theta_{n1} = 2\pi n^{-2} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\begin{gathered} |\xi_0 - \lambda_{n0}| \leq M(P_{n+1} - P_n) = M((n+1)^{1/\gamma} - n^{1/\gamma}) \leq \\ \leq M \tfrac{1}{\gamma} (n+1)^{1/\gamma - 1} = M \tfrac{1}{\gamma} (n+1)^4 \leq N_0 P_n^{4/5}, \end{gathered} \tag{2.28}$$

где M, N_0 – некоторые постоянные, не зависящие от n, $0 < M < N_0 < \infty$. Значит, принимая во внимание, что $\rho = 3/5$, и с учетом (2.27), (2.28) из (2.26) имеем:

$$|A_n| \leq e^{N_1 P_n^{4/5} + K P_n^{3/5} - P_n d(z)}, \quad z \in G.$$

Так что

$$|f(z)| \leq B \sum_{n=1}^{\infty} e^{L_0 P_n^{4/5} - P_n d(z)}, \quad z \in G, \tag{2.29}$$

где $L_0 = \max(N_1, K)$, $0 < K < \infty$ (K не зависит от n). Теперь воспользуемся леммой 2.1, откуда будет следовать, что порядок ρ_f суммы ряда (2.25) удовлетворяет оценке:

$$\rho_f \leq q = \frac{\alpha}{1-\alpha},\ \alpha = \frac{4}{5}.$$

Значит, $\rho_f \leq 4$. Но тогда из-за возрастания функции $\rho_f/(\rho_f+1)$ получаем, что

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1} \leq \frac{4}{5}.$$

До сих пор величина p была произвольной, но $3/5 < p < 1$. Возьмем $p > 4/5$. Тогда $\beta = q_0 = p > 4/5$. Значит, окончательно,

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1} < \beta.$$

Пример построен.

Таким образом, в оценках (0.23) достигается и правая граница.

Замечание 2.3. Из доказанной теоремы следует, что правая оценка для β, полученная в [48], не точна. Тем самым теорема 2.2 опровергает утверждение, приведенное без доказательства в [48].

Глава III. R–порядок целого ряда Дирихле: теоремы типа Сугимура - Танаки

В данной главе обсуждается вопрос о порядке Ритта целой функции, заданной рядом Дирихле (0.3), и его связи с коэффициентами разложения в этот ряд.

§1. Уточнение теоремы С. Танаки

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, а ряд Дирихле (0.3) сходится во всей плоскости $\mathbb{C}$. При

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} < \infty$$

этот ряд сходится там и абсолютно.

Дж. Риттом было показано, что если $L < \infty$, то [16]

$$-\frac{1}{\rho_R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln\lambda_n} \overset{\mathrm{def}}{=} -R, \quad R \geq 0, \tag{3.1}$$

где

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\sigma}$$

– порядок по Ритту, введенный им в [16] (R – характеристика Ритта). При $L < \infty$ доказательство формулы (3.1) приводится также в [7], [42]. Оно основано на неравенствах типа Коши

$$|a_n| \leq M_F(\sigma)e^{\lambda_n\sigma}, \quad n \geq 1, \tag{3.2}$$

непосредственно вытекающих из формул для коэффициентов

$$a_n e^{-\lambda_n \sigma} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \int\limits_{y_0}^{y} F(\sigma + it) e^{i\lambda_n t} dt, \quad n \geq 1, \tag{3.3}$$

где y_0 – любое фиксированное число из $\mathbb{R}$.

Из доказательства усматривается, что формулы (3.3) на самом деле верны и в том случае, когда ряд (0.3) сходится в плоскости (или в какой-то полуплоскости) равномерно (см. [42]). Но даже при абсолютной сходимости ряда условие $L < \infty$ слишком сильное. Действительно, при доказательстве оценки $\rho_R \leq R^{-1}$ все сводится к сходимости при любом $\varepsilon > 0$ ряда (см. [7], [42])

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon \lambda_n \ln \lambda_n}, \tag{3.4}$$

которая при $L < \infty$ выводится из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-c(\ln n) \ln \lambda_n}, \quad c > L.$$

На самом деле можно только предположить, что $\sigma_u = -\infty$ и воспользоваться следующим простым утверждением.

Лемма. *Ряд (3.4) сходится при любом $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда*

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln n(x)}{x \ln x} = 0, \quad n(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$$

(C – характеристика Сугимуры [39]).

Действительно, если $C = 0$, то для любого $\delta > 0$ при $n \geq n_0(\delta)$ имеем:

$$\frac{1}{\delta}\ln n < \lambda_n \ln \lambda_n.$$

Если взять $\delta = \varepsilon/2$, то ряд (3.4), очевидно, сходится. Обратно, если при любом $\varepsilon > 0$ ряд (3.4) сходится, то из монотонности членов ряда будем иметь: при $n \to \infty$

$$ne^{-\varepsilon\lambda_n \ln \lambda_n} \to 0.$$

Отсюда при $n \geq n_1(\varepsilon)$

$$ne^{-\varepsilon\lambda_n \ln \lambda_n} \leq 1,$$

или

$$\frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n} \leq \varepsilon.$$

Из-за произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем, что $C = 0$.

К. Сугимура в [39] доказал следующее утверждение: если ряд (0.3) сходится во всей плоскости и $0 < R \leq \infty$, то при $C = 0$ верна формула (3.1) Ритта.

Как показано в [40], в предположениях, сделанных в [39], ряд Дирихле (0.3) сходится во всей плоскости равномерно ($\sigma_u = -\infty$). Поэтому результат К. Сугимуры есть следствие следующей более общей теоремы С. Танаки.

Теорема В [40]. *Пусть ряд Дирихле (0.3) сходится равномерно во всей плоскости. Тогда для порядка ρ_R по Ритту верны оценки:*

$$-R \leq -\frac{1}{\rho_R} \leq -R + T, \tag{3.5}$$

где R – характеристика Ритта,

$$T = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln N(x)}{x\ln x}, \quad N(x) = \sum_{[x]\le\lambda_n<x} 1,$$

[x] – целая часть числа x (T – характеристика Танаки).

Отсюда следует, что если $T = 0$, то верна формула $\rho_R = 1/R$.

Отметим, что нижняя оценка в (3.5) получается так же, как и в [7], [42], если учесть, что неравенства типа Коши (3.2) справедливы и в случае равномерной сходимости ряда (0.3).

Далее, так как $N(x) \le n(x)$, то при $C = 0$ и $T = 0$. Обратно, пусть $T = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $x \ge x_0(\varepsilon) > \lambda_1$ имеем:

$$N(x) < e^{\varepsilon x\ln x}.$$

Следовательно, учитывая монотонность мажоранты $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon x\ln x$, отсюда получаем, что

$$n(x) \le n(x_0) + ([x]+1)e^{\varepsilon x\ln x}, \quad x \ge x_0(\varepsilon).$$

Но

$$\ln^+(a+b) \le \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c^+ = \max(c, 0)$. Поэтому при $x \ge x_0(\varepsilon)$

$$\frac{\ln n(x)}{x\ln x} \le \frac{\ln 2 + \ln n(x_0)}{x\ln x} + \frac{\ln([x]+1)}{x\ln x} + \varepsilon.$$

Отсюда из произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $C = 0$.

Таким образом, $C = 0$ тогда и только тогда, когда $T = 0$.

Отметим, что теорема B содержательна лишь в случае, когда $T < \infty$. При этом она охватывает и случай $R = 0$ (при $R = 0$ порядок $\rho_R = \infty$).

Наша цель – доказать точность правой оценки в (3.5).

Имеет место следующая теорема

Теорема 3.1. *Для любой последовательности* $\Lambda = \{\lambda_n\},\ 0 < \lambda_n \uparrow \infty$, *существует ряд Дирихле вида (0.3), равномерно сходящийся во всей плоскости, для которого*

$$-\frac{1}{\rho_R} = -R + T.$$

Из оценок (3.5) и теоремы 3.1 вытекает

Теорема 3.2. *Для того, чтобы порядок* ρ_R *любого ряда Дирихле, равномерно сходящегося во всей плоскости, вычислялся по формуле (3.5), необходимо и достаточно, чтобы* $T = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.1. Пусть $T > 0$. Тогда существует последовательность $\{x_n\},\ 1 < x_n \uparrow \infty$, такая, что при $x \to \infty$

$$\frac{\ln N(x_n)}{x_n \ln x_n} = (1 + \mathrm{o}(1))T. \tag{3.6}$$

Обозначая

$$\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n, \quad \omega_n = [[x_n], x_n)$$

(при подходящем выборе последовательности $\{x_n\}$ из (3.6) следует, что $\omega_n \cap \Lambda \neq \varnothing$, $n \geq 1$), рассмотрим ряд Дирихле вида (0.3), коэффициенты которого определим следующим образом:

для любого $A > T$ положим

$$a_k = \begin{cases} 0, \ \lambda_k \notin \omega; \\ e^{-Ax_n \ln x_n}, \ \lambda_k \in \omega_n. \end{cases}$$

Можем считать, что $x_n > n, \ \ n \geq 1$. Тогда ряд (0.3) будет сходиться во всей плоскости абсолютно. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{-\lambda_k s}| = \sum_{n\geq 1} \sum_{\lambda_k \in \omega_n} a_k e^{-\lambda_k \sigma}, \quad s = \sigma + it.$$

Но

$$A_n = \sum_{\lambda_k \in \omega_n} a_k e^{-\lambda_k \sigma} = e^{-Ax_n \ln x_n} \sum_{\lambda_k \in \omega_n} e^{-\lambda_k \sigma} \leq$$
$$\leq e^{-Ax_n \ln x_n} N(x_n) e^{[x_n]|\sigma|}.$$

Поскольку $A > T$, то при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и $n \geq n_0$

$$A_n \leq e^{-(x_n \ln x_n)[A-(1+\mathrm{o}(1))T]} e^{[x_n]|\sigma|} \leq e^{-\varepsilon_0 [x_n] \ln [x_n] + [x_n]|\sigma|}.$$

Так как $x_n > n$, то отсюда видно, что действительно для любого $s \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{-\lambda_k s}| < \infty.$$

Далее, так как $\lambda_k \sim \lambda_n$ при $\lambda_k \in \omega_n$ и $n \to \infty$, то $R = A$, а поскольку $a_k \geq 0$, то имеет место равенство

$$M_F(\sigma) = \sum_{\lambda_k \in \omega} a_k e^{-\lambda_k \sigma}.$$

Отсюда для любого $n \geq 1$

$$M_F(\sigma) \geq \sum_{[x_n] \leq \lambda_k < x_n} a_k e^{-\lambda_k \sigma} = e^{-Ax_n \ln x_n} \sum_{[x_n] \leq \lambda_k < x_n} e^{-\lambda_k \sigma}.$$

Следовательно, при $\sigma < 0$

$$M_F(\sigma) \geq e^{-Ax_n \ln x_n} N(x_n) e^{-(x_n - 1)\sigma}.$$

Отсюда, если учесть (3.6), при $\sigma < 0$ и $n \to \infty$ имеем:

$$\ln M_F(\sigma) \geq x_n[-(A - (1 + \mathrm{o}(1))T \ln x_n + (1 + \mathrm{o}(1))|\sigma|]. \quad (3.7)$$

Возьмем

$$\sigma = \sigma_n = -(A - T + \varepsilon) \ln x_n, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.8)$$

Тогда из (3.7) будем иметь: при $n \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_n) \geq \varepsilon(1 + \mathrm{o}(1)) x_n \ln x_n.$$

Отсюда, если учесть (3.8), получим: при $n \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_n) \geq \varepsilon(1 + \mathrm{o}(1)) \frac{|\sigma_n|}{A - T + \varepsilon} e^{(A - T + \varepsilon)^{-1} |\sigma_n|}.$$

Следовательно, при $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln \ln M_F(\sigma_n) > \frac{|\sigma_n|}{A - T + 2\varepsilon}.$$

Значит,

$$\rho_R \geq \frac{1}{A - T + 2\varepsilon},$$

а поскольку $\varepsilon > 0$ – любое, то

$$\rho_R \geq \frac{1}{A - T}.$$

Таким образом,

$$-\frac{1}{\rho_R} \geq -A + T = -R + T.$$

Тогда с учетом правой оценки из (3.5) отсюда окончательно заключаем, что

$$-\frac{1}{\rho_R} = -R + T.$$

Теорема 3.1 доказана полностью.

Глава IV. Разложение аналитических в полуплоскости функций в ряды экспонент с учетом мажоранты роста

Глава посвящена задаче разложения аналитических в полуплоскости функций в ряды экспонент с учетом роста, определяемым некоторой выпуклой мажорантой.

§1. История вопроса и постановка задачи

Пусть D – выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $A(D)$ – пространство аналитических в D функций с топологией равномерной сходимости на компактах из D.

В теории рядов экспонент одним из основных является следующий результат А.Ф. Леонтьева (см. [7, гл. V, §3, п. 1]):

Пусть D – ограниченная выпуклая область. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D, такая, что любую функцию F из $A(D)$ можно в D разложить в ряд экспонент

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}.$$

В данной теореме последовательность показателей λ_n ($n = 1, 2, ...$) выбирается как простые нули целой функции L экспоненциального типа и вполне регулярного роста с подходящими оценками для $|L'(\lambda_n)|$ снизу. Такая целая функция всегда существует (см. [7, гл. IV, §6, п. 2]). В этой связи напомним, что задача о существовании целых функций с заданными асимптотическими свойствами в наиболее общем виде решена в [54], а в [55] этот результат был уточнен как в смысле оценок целой функции, так и размеров исключительных множеств (см. [56]).

В [7] показано также, что любую целую функцию Φ можно во всей плоскости представить рядом экспонент

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\nu_n z},$$

причем показатели ν_n $(n = 1, 2, ...)$ (их можно выбрать как минимум на трех лучах) являются нулями целой функции L уточненного порядка $\rho(r)$, $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = 1$ (см. [7, гл. VIII, §1, п. 3]).

Особый интерес представляют собой вопросы представления рядами экспонент в бесконечных областях D, $D \neq \mathbb{C}$. В [7] рассмотрен случай таких областей специального вида. Позже выяснилось, что любую функцию $F \in A(D)$, где D – произвольная бесконечная область, можно в D представить рядом

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\mu_n z}$$

(см. [57]). Это вытекает из результатов работ [55], [38] об аппроксимации субгармонических функций логарифмом модуля целой функции. Нас же будет интересовать здесь случай полуплоскости, который рассмотрен в работе [7] отдельно. Отметим также, что в статье [58] Р.С. Юлмухаметовым изучается пространство $H(q)$ аналитических в D функций порядка не выше q, где в терминах преобразования Лапласа получено описание пространства $H'(q)$, сопряженного с $H(q)$.

Теорема С [7]. *Пусть F – функция, регулярная в левой полуплоскости $\Pi_0^- = \{z = x + iy\colon\ x < 0\}$. Тогда имеется не зависящая от F последовательность $\{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n^\rho} = \tau,$$

$0 < \tau < \infty$ ($\rho > 1$ – любое), такая, что

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\mu_n z} + \text{целая функция}, \quad z \in \Pi_0^-. \tag{4.1}$$

Отметим, что в данной теореме требование $\rho > 1$ вызвано существом дела: показатели μ_n ($n = 1,\ 2,\ \ldots$) не могут быть нулями целой функции экспоненциального типа (более подробно об этом см. [7, гл. VIII, §1, п. 3]).

Теорема С выводится из следующего утверждения (см. [7, гл. VIII, §1, п. 3]):

Пусть F – функция, регулярная в полуплоскости Π_0^-. Тогда имеется функция f, регулярная в Π_0^- и непрерывная в замыкании $\overline{\Pi}_0^-$, и удовлетворяющая в $\overline{\Pi}_0^-$ условию $f(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$, существуют целая функция

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$$

с ростом не выше первого порядка минимального типа, целая функция Φ, *такие, что*

$$F(z) = M(D)f(z) + \Phi(z), \quad z \in \Pi_0^-.$$

Напомним, что дифференциальным оператором бесконечного порядка $M(D)$ можно действовать на функцию f во всей области регулярности (в данном случае – в Π_0^-). Действительно, функция $M(\lambda)$ растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа, а потому

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!|c_n|} = 0. \tag{4.2}$$

Пусть a – произвольная точка из Π_0^-. Так как f регулярна в некоторой окрестности $\{z\colon |z-a| < \rho\}$ точки a, то

$$\sup_{|t-a|<\rho} |f(t)| = K < \infty,$$

в силу чего

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \le \frac{\rho K}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+1}}, \quad |z-a| \le \frac{\rho}{2}.$$

Но тогда, учитывая (4.2), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|c_n f^{(n)}(z)| \le A(\varepsilon)K\left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\right)^n, \quad |z-a| \le \frac{\rho}{2}, \quad n \ge 0,$$

и потому

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n f^{(n)}(z)| \le A(\varepsilon)K \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\varepsilon}{\rho}\right)^n = \frac{A(\varepsilon)K}{1-q},$$

если $q = \frac{2\varepsilon}{\rho} < 1$. Значит, данный ряд равномерно сходится в достаточно малой окрестности точки $a \in \Pi_0^-$. Кроме того,

$$|M(D)f(z)| \leq B \max_{|t-a|\leq\rho} |f(t)|, \quad |z-a| \leq \frac{\rho}{2}.$$

В статье обсуждается следующая задача:

Пусть рост функции F, $F \in A(\Pi_0^-)$, вблизи мнимой оси контролируется в определенном смысле некоторой мажорантой $H\colon\ [-1,0) \to (0,+\infty)$, $H(x) \uparrow 0$ при $x \to 0-$. Требуется получить разложение вида (4.1), чтобы рост ряда из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{\mu_n z}|$ также был подчинен мажоранте H.

Отметим, что в терминах порядка роста данная задача впервые была исследована А.Ф. Леонтьевым в [9] для выпуклых многоугольников, а позже – А.М. Гайсиным в [29] для полуплоскости.

§2. Необходимые сведения

Вкратце остановимся на некоторых свойствах преобразования Лежандра.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $H\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – убывающая функция, $H(y) \downarrow 0$ при $y \to \infty$, $H(y) \uparrow \infty$ при $y \to 0+$. Выберем точку $d > 0$ из условия $m(d) = 1$, где $m(y) = \ln H(y)$.

Рассмотрим нижнее преобразование Лежандра функции $m(y)$:

$$\varphi(x) = (Lm)(x) = \inf_{0<y\leq d}[m(y) + yx], \quad x > 0. \qquad (4.3)$$

Как нижняя огибающая возрастающих линейных функций, $\varphi(x) = (Lm)(x)$ – вогнутая и возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, $\varphi(x) \geq 0$. Ясно, что $\varphi(x) \uparrow \infty$ при $x \to +\infty$.

Наибольшая выпуклая миноранта $h(y)$ функции $m(y)$ называется верхним преобразованием Лежандра функции $\varphi(x)$:

$$h(y) = (U\varphi)(y) = \sup_{x>0}[\varphi(x) - xy], \quad y > 0.$$

Лемма 4.1 (см. [44], [45]). *Интегралы*

$$\int_0^{d_0} \ln h(y)dy, \quad \int_0^d \ln m(y)dy, \quad \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}dx$$

сходятся и расходятся одновременно (точка d_0 выбрана из условия $h(d_0) = 1$).

В силу этой леммы и для упрощения дальнейших рассуждений, можем считать, что функция $m(y)$ сама выпуклая. Так что в этом случае $h(y) \equiv m(y)$.

Пусть функция H (она введена выше) удовлетворяет условию Левинсона

$$\int_0^d \ln\ln H(y)dy < \infty. \tag{4.4}$$

Тогда функция φ обладает свойствами: $0 \leq \varphi(x) \uparrow \infty$, $\varphi(x) = \mathrm{o}(x)$ при $x \to \infty$, более того,

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}dx < \infty. \tag{4.5}$$

Обычно предполагается, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y \to 0} y^k H(y) = \infty.$$

Тогда, как легко проверить,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{\ln x} = \infty. \tag{4.6}$$

Верна

Лемма 4.2 [46]. *Если функции $m(y) = \ln H(y)$ $(y > 0)$ и $m(e^{-s})$ $(s \in \mathbb{R})$ выпуклые, то функция φ логарифмически выпуклая (т.е. $\varphi(e^t)$ выпуклая по $t > 0$).*

Лемма легко проверяется в случае, когда $m(y)$ – функция класса $C^2(\mathbb{R}_+)$. Действительно, пусть

$$\varphi(x) = \inf_{y>0}[m(y) + yx] = m(y(x)) + y(x)x,$$

где функция $y = \varphi(x)$ единственным образом определяется из уравнения $m'(y) = -x$ (так как $m(y)$ – убывающая выпуклая функция, то $y(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$). Далее,

$$[\varphi(e^t)]' = x\varphi'(x), \quad [\varphi(e^t)]'' = x[\varphi'(x) + x\varphi''(x)], \quad x = e^t.$$

Нас интересует знак выражения $\xi(x) = \varphi'(x) + x\varphi''(x)$. Но

$$\varphi'(x) = y, \quad \varphi''(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{-m''(y)},$$

так как $m'(y) = -x$, $y = y(x)$. Значит,

$$\varphi'(x) + x\varphi''(x) = y + \frac{x}{-m'(y)} = \frac{ym''(y) + m'(y)}{m''(y)}.$$

Но $m''(x) \geq 0$ (m – выпуклая). Поскольку $m(e^{-t})$ выпуклая, то

$$0 \leq [m(e^{-t})]'' = y[m''(y)y + m'(y)], \quad y > 0.$$

Отсюда

$$m''(y)y + m'(y) \geq 0.$$

Значит,

$$\varphi'(x) + x\varphi''(x) \geq 0,$$

т.е. $\varphi(e^t)$ выпуклая функция по $t > 0$.

Нам понадобится и следующая

Лемма 4.3 (Y. Domar) [59]. *Если функция φ, $0 \leq \varphi(x) \uparrow \infty$, удовлетворяет условиям (4.5), (4.6), причем φ логарифмически выпуклая, то существует четная целая функция экспоненциального типа*

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}, \quad a_{2n} \geq 0, \quad z = x + iy,$$

принадлежащая классу сходимости, т.е. такая, что

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln G(x)}{x^2} dx < \infty,$$

причем

$$0 < c_1 \leq G(x) e^{-2\varphi(x)} \leq c_2 |x|^{2k}, \quad |x| \geq 1, \tag{4.7}$$

где $k \in \mathbb{N}$, c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные, не зависящие от x.

Отметим, что если функция φ не удовлетворяет условию (4.5), то G удовлетворяет лишь оценкам (4.7).

§3. Разложение аналитических в полуплоскости функций заданного роста в ряды экспонент

Пусть $\Pi_0^+ = \{z = x + iy\colon\ x > 0\}$. Через K_0, K_1 обозначим классы функций F, введенные в §2 введения. Пусть

$$T_F(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathrm{Re}z=s>0} |F(z)||dz|.$$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат М.В. Келдыша об аппроксимации голоморфных функций целыми функциями (см. [60]):

Пусть Γ – кривая Жордана, начинающаяся и оканчивающаяся в бесконечности, E – область, ограниченная линией Γ, f – голоморфная в E функция, непрерывная на $E \cup \Gamma$ (исключая бесконечно удаленную точку).

Каковы бы ни были положительные ε и η, существует целая функция g, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \exp\left[-|z|^{\frac{1}{2}-\eta}\right]$$

в $\overline{E}$ ($\overline{E}$ – замыкание E).

Теорема 4.1. *Пусть $F \in K_0$, причем*

$$T_F(s) \le A_F H(s), \quad s > 0,$$

где $H\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, H *– убывающая функция,* $H(s) \downarrow 0$ *при* $s \to +\infty$, $H(s) \uparrow \infty$ *при* $s \to 0+$, $H(d) = e$. *Предположим также, что*

$$\lim_{s\to 0} s^k H(s) = \infty, \quad k \text{ – любое}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а функции $m(s) = \ln H(s)$ $(s > 0)$ *и* $m(e^{-t})$ $(t \in \mathbb{R})$ *выпуклые. Тогда существуют целая функция*

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n,$$

удовлетворяющая оценке

$$\ln |M(\lambda)| \leq C_M \varphi(|\lambda|),$$

функция $f \in K_1$, *такие, что*

$$F(z) = M(D)f(z) + \Phi(z), \quad z \in \Pi_0^+,$$

где Φ *– некоторая целая функция,* $\varphi(r)$ $(r = |\lambda|)$ *– нижнее преобразование Лежандра функции* $m(s)$, $\varphi(r) = o(r)$ *при* $r \to \infty$, *причем функция* φ *логарифмически выпуклая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция F принадлежит классу K_0. Поэтому функция $A(t)$, определенная формулой (0.26), непрерывна на $\mathbb{R}$, $A(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$. Она не зависит от $s > 0$. Оценим ее сверху.

Имеем: для $t > 0$ и любого $s > 0$

$$|A(t)| \leq T_F(s)e^{st} \leq A_F \exp[m(s) + st], \quad m(s) = \ln H(s).$$

Отсюда

$$|A(t)| \le A_F e^{\varphi(t)}, \quad t > 0, \tag{4.8}$$

где

$$\varphi(t) = (Lm)(t) = \inf_{0<s\le d}[m(s) + st],$$

φ – вогнутая возрастающая при $t > 0$ функция. По лемме 4.2, она выпуклая по переменной $\ln t$ (т.е. логарифмически выпуклая). Далее, для всех $t > 0$, $0 < s \le d$, очевидно, $\varphi(t) - st \le m(s)$. Отсюда

$$m^*(s) = \sup_{t>0}[\varphi(t) - ts] \le m(s), \quad 0 < s \le d.$$

Следовательно, $\varphi(t) = \mathrm{o}(t)$ при $t \to \infty$. Действительно, в противном случае существует $\varepsilon_0 > 0$, найдется последовательность t_n, $t_n \to \infty$, такие, что $\varphi(t_n) \ge \varepsilon_0 t_n$. Но тогда имели бы $m^*(s) \equiv \infty$ на $(0, \varepsilon_0)$, что невозможно.

Пусть G – четная целая функция из леммы 4.3. Она удовлетворяет оценкам (4.7). Поэтому с учетом (4.8)

$$\left|\frac{A(t)}{G(t)}\right| \le A_F c_1^{-1} e^{-\varphi(t)}, \quad t > 0.$$

Если принять во внимание условие (4.6), то

$$\varphi(t) \ge N \ln t \ge \ln(1 + t^2), \quad N > 2, \quad t \ge t_0.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{A(t)}{G(t)}\right| \le B_F \frac{1}{1+t^2}, \quad t > 0. \tag{4.9}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \int_0^\infty \frac{A(t)}{G(t)} e^{-zt} dt, \quad z \in \Pi_0^+.$$

Из (4.9) следует, что функция Ψ регулярна в Π_0^+ и непрерывна в $\overline{\Pi}_0^+$. В качестве искомой функции M возьмем G:

$$M(\lambda) = G(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty a_{2n}\lambda^{2n}, \quad a_{2n} \geq 0.$$

Тогда

$$M(D)e^{-zt} = \left(\sum_{n=0}^\infty a_{2n}t^{2n}\right) e^{-zt} = G(t)e^{-zt}.$$

Поэтому

$$M(D)\Psi(z) = \int_0^\infty A(t)e^{-zt}dt = F(z), \quad z \in \Pi_0^+.$$

Таким образом,

$$F(z) = M(D)\Psi(z), \quad z \in \Pi_0^+.$$

К функции Ψ применим теорему М.В. Келдыша, полагая в ней $E = \Pi_0^+$, $\Gamma = i\mathbb{R}$ (Ψ регулярна в Π_0^+, непрерывна в $\overline{\Pi}_0^+$). Тогда найдется целая функция g, такая, что

$$|\Psi(z) - g(z)| < \exp\left(-|z|^{\frac{1}{3}}\right), \quad z \in \overline{\Pi}_0^+.$$

Положим $f(z) = \Psi(z) - g(z)$. Тогда $f \in K_1$ и

$$F(z) = M(D)\Psi(z) = M(D)f(z) + M(D)g(z).$$

Функция $\Phi(z) = M(D)g(z)$ – целая. Следовательно,

$$F(z) = M(D)f(z) + \Phi(z), \quad z \in \Pi_0^+.$$

Осталось оценить рост целой функции M. Имеем:

$$|M(\lambda)| \leq \max_{|\mu|=r} |G(\mu)| = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} r^{2n}, \quad a_{2n} \geq 0.$$

Учитывая (4.7), отсюда будем иметь

$$|M(\lambda)| \leq c_2 r^{2k} e^{2\varphi(r)} \leq c_3 e^{3\varphi(r)}, \quad r > 0.$$

Таким образом,

$$\ln M(|\lambda|) \leq C_M \varphi(|\lambda|).$$

Теорема доказана.

В качестве следствия докажем теорему разложения в ряд экспонент.

Теорема 4.2. *Пусть $F \in K_0$, причем*

$$T_F(s) \leq A_F H(s), \quad s > 0,$$

где мажоранта H удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Тогда имеется не зависящая от F последовательность показателей $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho}} = \tau,$$

$0 < \tau < \infty$ ($\rho > 1$ – любое), такая, что

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n z} + \text{ целая функция}, \quad z \in \Pi_0^+,$$

причем при некотором $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{-\lambda_n z}| \le BH^k\left(\frac{x}{k}\right), \quad z = x + iy \in \Pi_0^+.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 4.1, имеем:

$$F(z) = M(D)f(z) + \Phi(z), \quad f \in K_1, \tag{4.10}$$

Φ – целая функция. Поскольку $f \in K_1$, то (см. [7, гл. VIII, §1, п. 2]) в полуплоскости Π_0^+

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 e^{-\lambda_n z} + \text{ целая функция}, \tag{4.11}$$

где $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \tau,$$

$0 < \tau < \infty$, $\rho > 1$ – любое, $A_n^0 = \mathrm{O}(\lambda_n^2)$ при $n \to \infty$. Так что из (4.10), (4.11) получим представление

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 M(\lambda_n) e^{-\lambda_n z} + \text{ целая функция}, \quad z \in \Pi_0^+. \tag{4.12}$$

Оценим ряд из модулей

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{-\lambda_n z}|, \quad B_n = A_n^0 M(\lambda_n), \quad z \in \Pi_0^+.$$

Оценки для $M(\lambda_n)$ были получены в теореме 4.1. Учитывая их, имеем:

$$|B_n| \le \frac{1}{\lambda_n^\nu} \lambda_n^{2+\nu} e^{C_M \varphi(\lambda_n)} \le \frac{1}{\lambda_n^\nu} e^{L_M \varphi(\lambda_n)}, \quad n \ge 1, \quad \nu > 0,$$

L_M – постоянная, не зависящая от n. Но в (4.11) λ_n таковы, что $\lambda_n^\rho > \tau_0 n$ при некотором $\tau_0 > 0$, $n \geq 1$. Выберем ν таким, чтобы $\nu > 2\rho$. Тогда $\lambda_n^\nu > \tau_1 n^2$, $n \geq 1$, $\tau_1 = \tau_0^2$. Следовательно, для $z \in \Pi_0^+$

$$B(z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_1 n^2} \exp\left[L_M \varphi(\lambda_n) - \lambda_n x\right].$$

Отсюда при некотором $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$,

$$B(z) \leq B \exp\left[\sup_{n\geq 1}(k\varphi(\lambda_n) - \lambda_n x)\right] \leq B e^{km\left(\frac{x}{k}\right)},$$

где $m(x) = (U\varphi)(x)$ – верхнее преобразование Лежандра функции φ.

Таким образом, если $T_F(x) \leq A_F H(x)$, то справедливо представление (4.12), причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|A_n^0 M(\lambda_n) e^{-\lambda_n z}\right| \leq B H^k\left(\frac{x}{k}\right),$$

где B – положительная постоянная, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.2 доказана.

Замечание. Пусть мажоранта H совпадает с функцией $\exp\left[\left(\frac{1}{s}\right)^\mu\right]$ $(\mu > 0)$ при $0 < s \leq 1$ (в этом случае $d = 1$). Именно эта функция используется как функция сравнения при изучении класса аналитических в полуплоскости Π_0^+ функций в терминах порядка ρ (см. [29], [41]). В рассматриваемой здесь ситуации

$$\rho = \overline{\lim_{s\to 0+}} \frac{\ln\ln T_F(s)}{\ln\frac{1}{s}}$$

– порядок функции $T_F(s)$.

Для функции $m(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{\mu}$ имеем:

$$m''(s) = \mu(\mu+1)s^{-\mu-2} > 0.$$

Значит функция $m(s)$ выпуклая. Функция $m(e^{-t})$ тоже выпуклая, ибо $m(e^{-t}) = e^{t\mu}$, $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, $H(s) \uparrow \infty$ при $s \to 0+$, $H(s) \downarrow e$ при $s \to 1-$. Поэтому, согласно теореме 4.2, имеет место разложение (4.12), причем для некоторых $B > 0$, $k \in \mathbb{N}$

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| A_n^0 M(\lambda_n) e^{-\lambda_n z} \right| \leq B H^k \left(\frac{x}{k}\right) = B e^{k\left(\frac{k}{s}\right)^{\mu}}.$$

Таким образом, если

$$T_F(s) \leq A_F \exp\left[\left(\frac{1}{s}\right)^{\mu}\right],$$

то в (4.12)

$$B(z) \leq B e^{b\left(\frac{1}{s}\right)^{\mu}}, \quad b = k^{1+\mu}.$$

Теорема 4.2, тем самым, обобщает соответствующий результат из [29] о разложении аналитических в Π_0^+ функций с учетом порядка роста в ряды экспонент.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hadamard, J. Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpement de Taylor / J. Hadamard // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. – 1892. – Vol. 8, № 4. – P. 101–186.

[2] Fujiwara, M. On the relation between M(r) and coefficients of a power series / M. Fujiwara // Proceedings of the Japan Academy. – 1932. – Vol. 8, № 6. – P. 220–223.

[3] Говоров, Н.В. О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения / Н.В. Говоров // Труды Новочеркасского политехнического института. – 1959. – Т. 100. – С. 101–115.

[4] Мак-Лейн, Г. Асимптотические значения голоморфных функций / Г. Мак-Лейн. – Москва: Мир, 1966. – 104 с.

[5] Polya, G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen / G. Polya // Mathematische Zeitschrift. – 1929. – Vol. 29. – P. 549–640.

[6] Шеремета, М.Н. Метод Вимана - Валирона для рядов Дирихле / М.Н. Шеремета // Украинский математический журнал. – 1978. Т. 30, № 4. – С. 488–497.

[7] Леонтьев, А.Ф. Ряды экспонент / А.Ф. Леонтьев. – Москва: Наука, 1976. – 536 с.

[8] Леонтьев, А.Ф. Представление целых функций рядами экспонент / А.Ф. Леонтьев // Труды математического института имени В.А. Стеклова. – 1981. – Т. 157. – С. 68–89.

[9] Леонтьев, А.Ф. Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1980. Т. 44, № 6. С. 1308 – 1328.

[10] Напалков, В.В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы / В.В. Напалков // Известия АН СССР. – 1987. – Т. 51, № 2. – С. 287–305.

[11] Гольдберг, А.А. Распределение значений мероморфных функций / А.А. Гольдберг, И.В. Островский. – Москва: Наука, 1970. – 592 с.

[12] Говоров, Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н.В. Говоров. – Москва: Наука, 1986. – 240 с.

[13] Говоров, Н.В. Об оценке снизу функции, субгармонической в круге / Н.В. Говоров // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1968. – № 6. – С. 130–150.

[14] Белоус, Т.И. Асимптотические свойства рядов Дирихле, сходящихся в полуплоскости: дис. ... канд. физ - мат. наук:

01.01.01 / Белоус Татьяна Ивановна. – Уфа, 2004. – 103 с.

[15] Левин, Б.Я. Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

[16] Ritt, J.F. On certain points in the theory of Dirichlet series / J.F. Ritt // American Journal of Mathematics. – 1928. – Vol. 50. – P. 73–86.

[17] Дагене, Е.Я. О центральном показателе ряда Дирихле // Литовский математический сборник. – 1968. – Т. 8, № 3. – С. 504–521.

[18] Бойчук, В.С. О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле / В.С. Бойчук // Математический сборник. – Киев: Наукова думка, 1976. – С. 238 – 240.

[19] Nandan, K. On the maximum terms a maximum modulus analytic functions represented by Dirichlet series / K. Nandan // Annales Polonici Mathematici. – 1973. – Vol. 28. – P. 213–222.

[20] Nandan, K. On the lower order of analytic functions represented by Dirichlet series / K. Nandan // Revue Roumaine de Mathematique Pures et Appliquees. – 1976. – Vol. 21, № 10. – P. 1361–1368.

[21] Chia-Yung, Y. Sur la croissance et la repartition de Dirichlet qui ne convergent que dans un demi-plan / Y. Chia-Yung //

Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. – 1979. – AB288, № 19. – A891–A893.

[22] Галь, Ю.М. О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле / Ю.М. Галь, М.Н. Шеремета // Доклады Академии наук УССР. Серия А. – 1978. – № 12. – С. 1065–1067.

[23] Гайсин, А.М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе / А.М. Гайсин // Математический сборник. – 1982. – Т. 117(159), № 3. – С. 412–424.

[24] Гайсин, А.М. Оценка ряда Дирихле в полуполосе в случае нерегулярного распределения показателей. II / А.М. Гайсин, Д.И. Сергеева // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 281–299.

[25] Гайсин, А.М. Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах / А.М. Гайсин // Математические заметки. – 1987. – Т. 42, № 5. – С. 660–669.

[26] Скаскив, О.Б. О росте на горизонтальных лучах аналитических функций, представленных рядами Дирихле / О.Б. Скаскив, В.М. Сорокивский // Украинский математический журнал. – 1990. – Т. 42, № 3. – С. 363–371.

[27] Сорокивский, В.М. О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле / В.М. Сорокивский //

Украинский математический журнал. – 1984. – Т. 36, № 4. – С. 524–528.

[28] Гайсин, А.М. Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности / А.М. Гайсин // Математические заметки. – 1990. – Т. 48, № 3. – С. 45–53.

[29] Гайсин, А.М. Поведение суммы ряда Дирихле вблизи границы области регулярности: дис. ... канд. физ - мат. наук: 01.01.01 / Гайсин Ахтяр Магазович. – Уфа, 1982. – 114 с.

[30] Шеремета, М.Н. О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений / М.Н. Шеремета // Известия вузов. Математика. – 1968. – № 6. – С. 115–121.

[31] Bohr, H. Collected Mathematical Works in three Volumes / H. Bohr. – Copenhagen, 1952. – 3 vol.

[32] Valiron, G. Sur e'abscisse de convergence des series de Dirichlet / G. Valiron // Bulletin de la Societe Mathematique de France. – 1924. – Vol. 52. – P. 166–174.

[33] Valiron, G. Entire functions and Borel's directions / G. Valiron // Proceedings of the National Academy of Sciences. USA. – 1934. – Vol. 20. – P. 211–215.

[34] Kuniyeda, M. Uniform convergence – abscissa of general Dirichlet series / M. Kuniyeda // Tohoku Mathematical

Journal. – 1916. – Vol. 9. – P. 7–27.

[35] Гайсин, А.М. Теоремы типа Ритта-Сугимуры / А.М. Гайсин, Г.А. Гайсина // Владикавказский математический журнал. – 2020. – Т. 22, № 3. – С. 47–57.

[36] Гайсин, А.М. О росте функции, представленной рядом Дирихле, вблизи прямой сходимости / А.М. Гайсин // Исследования по теории аппроксимации функций. – Уфа: Башкирский филиал АН СССР. – 1981. С. 5–13.

[37] Zhendog, G. The growth of Dirichlet series / G. Zhendog, S. Daochun // Czechoslovak Mathematical Journal. – 2012. – Vol. 62, № 1. – P. 29–38.

[38] Юлмухаметов, Р.С. Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций /Р.С. Юлмухаметов // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 264, № 4. – С. 839–841.

[39] Sugimura, K. Transfer of some theorems from the theory of entire functions to Dirichlet series / K. Sugimura // Mathematical Journal. – 1928. – Vol. 29. – P. 264–277.

[40] Tanaka, C. Note on Dirichlet series (V). On the integral functions defined by Dirichlet series (I) / C. Tanaka // Tohoku Mathematical Journal. – 1953. – Vol. 2, № 3. – P. 67–78.

[41] Гайсина, Г.А. Порядок роста суммы ряда Дирихле: зави-

симость от коэффициентов и показателей / Г.А. Гайсина // Уфимский математический журнал. – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 31–41.

[42] Мандельбройт, С. Ряды Дирихле. Принципы и методы / С. Мандельбройт. – Москва: Мир, 1973.

[43] Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – Москва: Наука. 1987.

[44] Koosis, P. The logarithmic Integral. I / P. Koosis // Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 12. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.

[45] Beurling, A. Analytic continuation across a linear boundary / A. Beurling // Acta Mathematica. – 1972. – P. 153–182.

[46] Matsaev, V. Asymptoties of Fourier and Laplace transforms in weighted spaces of analytic functions / V. Matsaev, M. Sodin // Algebra i Analiz. – 2002. – Vol. 14, № 4. – P. 107–140.

[47] Gaisin, A.M. Representation of analytic functions by exponential series in half-plane / A.M. Gaisin, G.A. Gaisina // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, № 6. – P. 1513–1518.

[48] Гайсин, А.М. Поведение коэффициентов ряда экспонент

конечного порядка роста вблизи границы / А.М. Гайсин, Г.А. Гайсина // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2019. – Т. 162. – С. 15–24.

[49] Гайсина, Г.А. Порядок роста ряда экспонент вблизи границы области сходимости / Г.А. Гайсина // Алгебра и анализ. – 2021. – Т. 33, № 3. – С. 31–50.

[50] Гайсина, Г.А. Представление аналитических функций рядами экспонент в полуплоскости с учетом мажоранты роста / Г.А. Гайсина // Уфимский математический журнал. – 2021. – Т. 13, № 4. – С. 8–16.

[51] Гайсина, Г.А. Об одном обобщении формулы Н.В. Говорова - Мак-Лейна - М.Н. Шереметы для вычисления порядка / Г.А. Гайсина // Вестник Башкирского университета. – 2016. – Т. 21, № 3. – С. 556–559.

[52] Леонтьев, А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент / А.Ф. Леонтьев. – Москва: Наука, 1983. – 176 с.

[53] Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ. I / Б.В. Шабат. – Москва: Наука, 1976. – 321 с.

[54] Азарин, В.С. О лучах вполне регулярного роста целой функции / В.С. Азарин // Математический сборник. – 1969. – Т. 79(121), № 4. – С. 464–476.

[55] Юлмухаметов, Р.С. Аппроксимация субгармонических функций / Р.С. Юлмухаметов // Analysis Mathematica. – 1985. – Т. 11, № 3. – С. 257–282.

[56] Исаев, К.П. Представление рядами экспонент функций в локально-выпуклых пространствах / К.П. Исаев, К.В. Трунов, Р.С. Юлмухаметов // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9, № 3. – С. 50–62.

[57] Леонтьев, А.Ф. Представление функций рядами экспонент / А.Ф. Леонтьев. – Уфа: Диалог, 2017. – 128 с.

[58] Юлмухаметов, Р.С. Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы / Р.С. Юлмухаметов // Математические заметки. – 1982. – Т. 32, № 1. – С. 41–57.

[59] Domar, Y. Closed primary ideals in a class of Banach algebras / Y. Domar // Mathematica Scandinavica. – 1959. – Vol. 7. – P. 109–125.

[60] Келдыш, М.В. О приближении голоморфных функций целыми функциями / М.В. Келдыш // Доклады АН СССР. – 1945. – Т. 47. – С. 243–245.