

ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию Гайсиной Галии Ахтяровны
"Ряды экспонент правильного роста вблизи границы.
Приложения" ,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.1 —вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Г. А. Гайсиной "Ряды экспонент правильного роста вблизи границы. Приложения" относится к классическому разделу комплексного анализа — теории роста аналитических функций, представимых рядами экспонент с, вообще говоря, комплексными показателями в различных областях комплексной плоскости. Особое место в ней занимают ряды Дирихле, когда показатели экспонент образуют возрастающую к бесконечности последовательность положительных чисел. С одной стороны, ряды экспонент являются естественным обобщением тейлоровских разложений, а с другой —, помимо большей общности, обладают по сравнению с последними рядом существенных преимуществ. В частности, экспоненты являются собственными элементами оператора дифференцирования и это обстоятельство позволяет эффективно использовать их в теории разрешимости дифференциальных уравнений и уравнений свертки. Отмечу здесь также фундаментальную роль работ А.Ф. Леонтьева, который в 60-70-х годах прошлого века доказал, что для любой выпуклой ограниченной области комплексной плоскости существует система экспонент с заведомо комплексными показателями, по которой можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся внутри нее ряд любую аналитическую в этой области функцию. Для сравнения — широко используемые в теории и приложениях степенные ряды годятся только для круговых областей. Приходится, правда, жертвовать единственностью разложений, но этот недостаток с избытком компенсируется большей общностью и более широкими возможностями экспоненциальных разложений. В свою очередь, ряды Дирихле имеют важные приложения в теории чисел — в их терминах и свойствах формулируются многие проблемы этой теории, ждущие по сей день своего окончательного решения. Несмотря на многолетнюю историю исследований по данной тематике, которой занимались многие видные математики, в ней остается еще немало открытых вопросов. Решению некоторых из них посвящена диссертация Г.А. Гайсиной. Вышесказанное позволяет мне с достаточной степенью уверенности утверждать, что тематика представленной работы является актуальной.

Выделю **основные результаты диссертации**, определяющие ее научный уровень. Буду без дополнительных пояснений использовать некоторые характеристики роста функций и обозначения классов функций из диссертации.

В первой главе доказаны две основные теоремы 1.1 и 1.2, в которых рассматриваются ряды Дирихле, сходящиеся в правой полуплоскости из классов $D_0(\Lambda)$ и $D_0(\mu, \alpha)$, определяемых ограничениями на их коэффициенты. Ранее было известно, что для таких рядов при определенных дополнительных условиях на показатели можно выписать точные формулы для их порядка ρ_F . В теоремах 1.1 и 1.2 установлено, что те же самые условия и необходимы для справедливости этих формул на указанных классах.

Во второй главе автор исследует класс $H(G, \Lambda)$ всех аналитических в выпуклой ограниченной области G функций, имеющих в ней конечный порядок и предста-

вимых рядами экспонент с показателями Λ . В теореме 2.1, являющейся одним из основных результатов диссертации, для последовательностей Λ , имеющих нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, доказана двусторонняя оценка, связывающая между собой порядок роста функций из $H(G, \Lambda)$ и характеристику β , отражающую поведение коэффициентов ряда ее представляющего относительно Λ и опорной функции области G . В следствии из этой теоремы и теореме 2.2 установлено, что обе оценки, нижняя и верхняя, точны.

В главе 3 доказана точность классической оценки С. Танаки для порядка по Ритту. Именно, в теореме 3.1 установлено существование целого ряда Дирихле, для которого в оценке С. Танаки имеет место знак равенства. Наконец, глава 4 содержит ряд результатов обобщающих и уточняющих известные ранее о представлении функций, аналитических в правой полуплоскости и удовлетворяющих определенным ограничениям на их рост.

Подводя итог рассмотрению диссертации, сделаем следующие **выводы**.

Диссертация Г. А. Гайсиной "Ряды экспонент правильного роста вблизи границы. Приложения" является научным трудом высокого уровня, выполненным в рамках актуального направления современного анализа. Достоверность полученных результатов подтверждается полными и строгими доказательствами, а также весомой апробацией на многочисленных авторитетных научных конференциях. Технически сложный математический текст подготовлен очень тщательно, практически без опечаток и стилистических погрешностей. Изложение достаточно подробное и логически последовательное. Постановка задач, описание предыстории их исследования и сравнение полученных в диссертации результатов с известными ранее сделаны четко и квалифицированно. Имеется внутреннее единство между отдельными частями диссертации как по предмету исследования, так и по применяемым методам.

В качестве **замечания** по тексту диссертации укажу лишь следующее:

В теореме 2.1 вместо требования о непустоте класса $H(G, \Lambda)$ следовало говорить о его нетривиальности, так как формально функция, тождественно равная нулю, всегда входит в этот класс. Кроме того, для полноты изложения формулировку следствия из этой теоремы нужно было бы дополнить конкретным примером, реализующим неравенство $q_0 \leq \frac{\rho_f}{\rho_f + 1}$.

Сделанное замечание ни в коей мере не снижает ценности и высокого научного уровня диссертации. Полученные в ней результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Южном федеральном университете, Южном математическом институте ВЦ РАН, Институте математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфимском университете науки и технологий и других исследовательских центрах. Тем самым, результаты диссертации имеют несомненную практическую значимость.

По результатам диссертационного исследования опубликованы 20 работ, 5 из которых входит в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus. Основные результаты диссертации прошли серьезную апробацию на научных семинарах и международных конференциях. Автореферат правильно и в полной мере отражает содержание диссертационной работы.

Таким образом, диссертация Г. А. Гайсиной "Ряды экспонент правильного роста вблизи границы. Приложения" удовлетворяет всем требованиям пп. 9–11, 13,

14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842 "О порядке присуждения ученых степеней", предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Гайсина Галия Ахтяровна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
(1.1.1 —вещественный, комплексный и функциональный анализ),
профессор, заведующий кафедрой математического анализа и геометрии
Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича
ФГАОУ ВО "Южный федеральный университет"
344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
e-mail: avabanin@sfedu.ru
тел. 8(863)2975115 доп. 303

А. Абанин

Абанин Александр Васильевич

14.09.2023 г.



Абанин А.В.

секретарь Совета
Южного федерального университета
Мирошниченко О.С.