Отзыв официального оппонента

на диссертацию Гайсиной Галии Ахтяровны "**Ряды экспонент правильного роста вблизи границы. Приложения**", представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Работа Г. А. Гайсиной относится к важному разделу комплексного анализа, связанному с представлением аналитических функций рядами экспонент. Хорошо известна основополагающая роль фундаментальных исследований А. Ф. Леонтьева в формировании современного облика этого раздела. За последние полвека много интересных и глубоких результатов в упомянутом направлении получено специалистами уфимской и ростовской математических школ. Близкие вопросы активно разрабатываюся математиками Москвы, Санкт-Петербурга, Красноярска и др., что свидетельствует о несомненной актуальности тематики диссертации.

Диссертация объемом в 105 стр. состоит из введения, четырёх глав и списка литературы из 60 источников. Выделим основные результаты работы.

Объектом изучения в первой главе является аналитическая функция, заданная суммой ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n s}, \qquad 0 < \lambda_n \uparrow +\infty,$$

абсолютно сходящегося в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Порядок функции F определяется, как известно, по правилу

$$\rho_F = \varlimsup_{\sigma \to 0+} \frac{1}{\ln(1/\sigma)}\, \ln \ln \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(\sigma + it)|.$$

Основной результат этой главы (теорема 1.1) показывает, что условие

$$\ln \ln n = o(\ln \lambda_n), \qquad n \to \infty,$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы порядок суммы указанного ряда Дирихле вычислялся через коэффициенты и показатели по формуле

$$\frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n}.$$

Достаточная часть теоремы была доказана А. М. Гайсиным ещё в 1981 году. Однако вопрос о справедливости теоремы в части необходимости оставался открытым до последнего времени.

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, а $d(z)$ — расстояние от точки $z \in G$ до границы ∂G. Во второй главе рассматривается класс $H(G, \Lambda)$ аналитических в G функций f конечного порядка

$$\rho_f \equiv \overline{\lim_{z \to \partial G}} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{\ln(1/d(z))},$$

представимых в G рядами экспонент с фиксированным множеством комплексных показателей $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. В случае последовательности Λ нулевой плотности с нулевым индексом конденсации в теореме 2.1 доказаны неулучшаемые оценки для величины порядка ρ_f, где $f \in H(G, \Lambda)$, в терминах опорной функции области G и структурных компонент ряда. Даны полезные следствия, приведены подкрепляющие примеры.

В небольшой главе III доказан такой результат (теорема 3.2): для того чтобы порядок по Ритту равномерно сходящегося во всей плоскости ряда Дирихле (с коэффициентами a_n и показателями λ_n) вычислялся по формуле

$$-\frac{1}{\rho_R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n},$$

необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю характеристика С. Танаки

$$T \equiv \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\ln N(x)}{x \ln x}, \qquad \text{где} \qquad N(x) = \sum_{[x] \leqslant \lambda_n < x} 1.$$

Наконец, в заключительной, четвёртой главе доказаны две теоремы о представлении рядами экспонент аналитических в правой полуплоскости функций из специальных классов, определяемых заданной мажорантой роста. Это потребовало разработки оригинального подхода. Полученные факты развивают результаты А. Ф. Леонтьева и А. М. Гайсина.

Все основные утверждения в диссертации являются новыми и строго доказаны. Построено несколько нетривиальных примеров, демонстрирующих точность установленных теорем. В необходимых случаях проведён сравнительный анализ имеющихся результатов.

Таким образом, диссертация Г. А. Гайсиной является актуальным научным исследованием, выполненным в рамках специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Диссертационная работа содержит ряд новых интересных результатов, подытоживающих достижения предшественников.

Автореферат правильно и в полной мере отражает содержание диссертации. Результаты автора прошли хорошую апробацию на нескольких научных семинарах и международных конференциях; опубликованы в 5 основных работах в отечественных журналах, входящих в базы данных Web of Science и Scopus.

Сделаем несколько замечаний по тексту диссертации.

1. В §1 введения к диссертации не было бы лишним отметить некоторые работы ростовских математиков, изучавших пространства функций заданного роста вблизи границы области аналитичности (см., например, кандидатскую диссертацию Т. М. Андреевой «Двойственная связь между пространствами голоморфных функций заданного роста вблизи границы и обобщенными классами Данжуа–Карлемана и ее приложения»). Список литературы полезно также дополнить небольшой, но содержащей эксклюзивные сведения, монографией Ю. Ф. Коробейника «Ряды экспонент с вещественными показателями». Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009.

2. В доказательстве теоремы 1.1 (стр. 41) нет нужды оценивать сверху явно вычисляемое значение $x_0 = (2q/\sigma)^{q/(1-q)}$, на котором достигается $\max\limits_{x\geqslant 0}\left(2x - x^{1/q}\sigma\right)$. Использование точного значения для x_0 даст чуть лучшую константу в оценке сверху величины $M_F(\sigma)$. Ниже (последняя строка на стр. 41) имеется опечатка — должно быть $2^{\frac{1}{1-q}}$ вместо $2^{\frac{q}{1-q}}$.

3. На стр. 68 для частного $\dfrac{(\lambda-\lambda_{nk})(\lambda-\lambda_{nk}^{(1)})}{Q(\lambda)}$ лучше использовать обозначение $F_{nk}(\lambda)$ вместо краткого $F(\lambda)$. Ниже на той же странице две опечатки: должно быть $Q(\lambda)$ вместо $L(\lambda)$ (11-я строка сверху); должно быть $F(\lambda_{nk}) = -\dfrac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_{nk})}$ вместо $F(\lambda_{nk}) = \dfrac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_{nk})}$ (3-я строка снизу). На стр. 72 (4-я строка сверху) не ясно, как именно применяется лемма 2.1. На стр. 77 (перед формулой (3.6)) должно быть $n \to \infty$ вместо $x \to \infty$.

4. В §1 главы 4 при изложении истории вопроса (стр. 82) необходимо хотя бы упомянуть об этапных результатах Ю. Ф. Коробейника по представлению аналитических в произвольной выпуклой области функций рядами экспонент со ссылкой, например, на его известную обзорную статью 1981 года в «Успехах математических наук».

Отмеченные замечания не могут повлиять на положительную оценку представленной к защите работы как полноценного научного исследования и не снижают объективной значимости полученных в ней результатов.

Тем самым диссертационная работа "**Ряды экспонент правильного роста вблизи границы. Приложения**" удовлетворяет требованиям п. 9 Положения ВАК о порядке присуждения учёных степеней, утверждённого Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 г. (с последующими изменениями), а её автор — Гайсина Галия Ахтяровна — безусловно заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»
Шерстюков Владимир Борисович
12 сентября 2023 года.
Докторская диссертация
защищена по специальности
01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.
Даю согласие на обработку персональных данных.

Адрес основного места работы:
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра математического анализа,
рабочий тел.:+7(495)939-18-01,
адрес электронной почты: shervb73@gmail.com

Подпись заверяю специалист по кадрам Карасева С.А.