ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертацию Гайсиной Галии Ахтяровны «Ряды экспонент правильного роста вблизи границы. Приложения», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена исследованию роста ряда экспонент вблизи границы области регулярности и поведения коэффициентов в терминах порядка (в случае полуплоскости и ограниченной выпуклой области), а для целых рядов Дирихле – порядка по Ритту, наиболее подходящей характеристики роста в этом случае. Перед соискателем была поставлена и задача нахождения достаточно универсального метода представления аналитических в полуплоскости функций в ряды Дирихле с учетом произвольной выпуклой мажоранты роста.

Хорошо известно, что порядок целой функции явно может быть подсчитан по тейлоровским коэффициентам. В случае, когда функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

аналитична только в круге $\{z: |z| < 1\}$ и не ограничена, соответствующая формула для порядка функции (1) была получена независимо Н.В. Говоровым (1959), Маклейном (1966), М.Н. Шереметой (1968) и др. Позже эти результаты рядом авторов были перенесены для класса $D_0(\Lambda)$ неограниченных аналитических функций, представимых рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \qquad s = \sigma + it, \qquad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{2}$$

абсолютно сходящимися лишь в полуплоскости $\Pi_0^- = \{s = \sigma + it: \sigma < 0\}$. В 1970 – 1980 гг. и позже данной задачей занимались многие математики, особенно – Индии, Китая, а также Советского Союза. При разных условиях на показатели λ_n (порой весьма жестких) была установлена формула

$$\frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n}, \tag{3}$$

для порядка ρ_F функции F. При этом почти ни в одной работе не ставился вопрос о точности условий на показатели ряда (*2*) (в случае ряда (*1*) этот вопрос не актуален). В относительно недавней работе Zhendong Gu и Daochun Sun «The growth Dirichlet series» (2012), выполненной в Институте математики Чешской академии наук был передоказан, хотя и в несколько иных терминах, считавшийся до сих пор наиболее общим результат А.М. Гайсина (1981). Таким образом, эта актуальная задача продолжает привлекать внимание специалистов. Однако, все же она не была доведена до конца, поскольку вопрос об оптимальности условий на λ_n для справедливости формулы (*3*) до недавнего времени оставался открытым. Путем построения достаточно тонкого примера диссертанту удалось показать, что выполнение условия

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}=0$$

не только достаточно, но и необходимо, чтобы была верна формула (*3*).

Это один из основных результатов первой главы (теорема 1.1).

Во второй главе рассматривается аналогичная задача для ограниченной выпуклой области. Как известно, в 1980 г. А.Ф. Леонтьевым было введено понятие порядка ρ_f аналитической в ограниченной выпуклой области $G\subset\mathbb{C}$ функции f. В случае, когда G – многоугольник, им было показано, что любую функцию $f\in H(G)$ порядка $\rho_f\le q$ можно представить в G рядом экспонент

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\lambda_n z} \tag{4}$$

так, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n e^{\lambda_n z}\right|$ будет иметь порядок не выше q. В случае, когда $\rho_f>1$, этот результат А.Ф. Леонтьева был перенесен на произвольную выпуклую область автором настоящего отзыва. Однако в этих случаях нельзя было ставить вопрос о какой-либо формуле типа (*3*), так как нет единственности разложения в ряд.

Решению этой актуальной задачи посвящена вторая глава диссертации. Здесь доказана теорема 2.1 (основной результат диссертации): пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_n\in\mathbb{C}$) имеет нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, G – ограниченная область с гладкой границей. Тогда для любой функции f вида (*4*), для которой G – область регулярности, для порядка ρ_f верны оценки:

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1}\le\beta\le\max\left(\frac{\rho_f}{\rho_f+1},q_0\right), \tag{5}$$

где β зависит от $|a_n|$, λ_n и опорной функции области G, а q_0 – от распределения точек λ_n, учитывающего их «концентрацию».

Из (*5*) легко вытекает формула для порядка, если $q_0\le\rho_f/(\rho_f+1)$.

Путем построения нетривиального примера показано, что оценки в (*5*) точны (теорема 2.2).

В главе III получено усиление результатов Дж. Ритта, К. Сугимуры и С. Танаки о связи R-порядка ρ_R целого ряда Дирихле со скоростью убывания коэффициентов. Так, формула для порядка ρ_R была доказана Дж. Риттом, а позже и С. Мандельбройтом и А.Ф. Леонтьевым в известных монографиях при

$$L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n}<\infty.$$

При более слабом предположении эту же формулу доказали К. Сугимура и С. Танака, причем последний получил ее из своих неравенств

$$-R\le-\frac{1}{\rho_R}\le-R+T$$

(R – характеристика Ритта, T – характеристика Танаки). Однако вопрос о точности этих оценок до сих пор оставался открытым.

В диссертации доказана теорема 3.1: для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, для которой $T > 0$, существует целый ряд Дирихле (2), такой, что

$$\frac{1}{\rho_R} = -R + T.$$

Следствие. Для того, чтобы для порядка целого ряда Дирихле (2) была верна формула Ритта-Сугимуры, необходимо и достаточно, чтобы $T = 0$.

В последней главе доказаны теоремы разложения аналитических в полуплоскости функций с учетом заданной выпуклой мажоранты роста. Достойны внимания тонкие методы исследования, основанные на преобразованиях Лежандра. В задачах, связанных с представлением функций рядами экспонент с учетом роста, этот подход, видимо, ранее не применялся.

Все основные результаты получены лично соискателем, являются новыми и представляют несомненный научный интерес. Они в достаточно полной мере опубликованы в виде 5 статей, из которых все 5 – в отечественных изданиях, которые входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования. Свои результаты Г.А. Гайсина неоднократно докладывала на различных семинарах и международных научных конференциях по теории функций.

Считаю, что диссертационная работа является законченным научным исследованием на актуальную научную тему и удовлетворяет п. 9 – 11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель
Доктор физико-математических наук
(01.01.01 – Математический анализ),
профессор, главный научный сотрудник
отдела теории функций и функционального
анализа Института математики с
вычислительным центром – обособленного
структурного подразделения Федерального
государственного бюджетного научного
учреждения Уфимского федерального
исследовательского центра Российской
академии наук

_______________ / Юлмухаметов
Ринад Салаватович

«18» мая 2023 г.

450008, г. Уфа, ул.Чернышевского, 112
Телефон: 8 (347) 272-59-36
E-mail: yulmukhametov@mail.ru

Подпись Юлмухаметова Р.С. заверяю
Ученый секретарь
ИМВЦ УФИЦ РАН, к.ф.-.м.н В.Ф. Вильданова