

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ



Иванов Павел Александрович

ОПЕРАТОРЫ ОБРАТНОГО СДВИГА И ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДЮАМЕЛЯ
В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ
МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2025

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Южный федеральный университет»

Научный руководитель: **Мелихов Сергей Николаевич**
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»

Официальные оппоненты: **Напалков Валерий Валентинович**
доктор физико-математических наук,
научный сотрудник отдела теории функций
и функционального анализа ИМВЦ УФИЦ РАН

Шишкин Андрей Борисович
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математики,
информатики, естественнонаучных и
общетехнических дисциплин филиала
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»
в г. Славянске-на-Кубани

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва

Защита состоится 12 декабря 2025 года в 12-00 на заседании объединенного диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д.12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте <https://uust.ru/>

Автореферат разослан «___»_____ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

д.ф.-м.н.



Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основными объектами изучения в данной диссертации являются операторы обратного сдвига в пространствах голоморфных функций многих комплексных переменных и связанные с ними свертки. В случае одной переменной оператор обратного сдвига $D_0(f)(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t}$ в различных пространствах голоморфных функций исследован достаточно подробно. Он естественно возникает при изучении последовательных остатков ряда Тейлора функции f , голоморфной в окрестности точки 0. Одна из ключевых задач для них — получить условия полноты системы $\{D_0^n(f) \mid n \geq 0\}$, т.е. цикличности вектора f относительно D_0 , в соответствующем пространстве. К ней непосредственное отношение имеют проблемы описания коммутанта D_0 в алгебре всех линейных непрерывных операторов, действующих в этом пространстве, и замкнутых инвариантных подпространств D_0 .

Пусть $H(\Omega)$ — пространство всех функций, голоморфных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $0 \in \Omega$. К настоящему времени получено полное описание циклических векторов оператора D_0 и его одномерного возмущения и их замкнутых инвариантных подпространств в $H(\Omega)$ (М.Г. Хапланов, Ю.А. Казьмин, Н.Е. Линчук, Ю.С. Линчук, О.А. Иванова, С.Н. Мелихов), в весовых (LF)–пространствах целых в $\mathbb{C}$ функций (О.А. Иванова, С.Н. Мелихов). Циклические векторы и инвариантные подпространства D_0 в банаховых пространствах функций, голоморфных в единичном круге, изучали Р. Дуглас, Г. Шапиро, А. Шилдс, Й. Цима, У. Росс, А. Алеман, С. Рихтер, К. Сандберг, циклические векторы обобщенного сдвига влево в банаховом пространстве исследовали Г. Годфруа и Дж. Шапиро. Значительное число работ посвящено и проблемам, связанным с описанием коммутанта D_0 и свойствам операторов из него. Соответствующие задачи для оператора D_0 и его одномерного возмущения в $H(\Omega)$ и в счетном индуктивном пределе весовых пространств Фреше целых в $\mathbb{C}$ функций решали Н.И. Нагнибида, Н.Е. Линчук, И. Димовски и В. Христов, Ю.С. Линчук, О.А. Иванова, С.Н. Мелихов. Коммутант обобщенного сдвига влево в банаховом пространстве изучался Г. Годфруа и Дж. Шапиро. В монографии Ю.Ф. Коробейника¹ исследован коммутант оператора обобщенного дифференцирования, в частности, оператора сдвига влево в пространствах числовых семейств;

¹Коробейник, Ю. Ф. Операторы сдвига на числовых семействах // Ростов-на-Дону: изд-во РГУ. — 1983. — 155 с.

его частным случаем является D_0 .

Существенную стимулирующую роль в изучении оператора D_0 и его одномерного возмущения сыграла статья², в которой оператор Поммье $D_z(f)(t) = \frac{f(t)-f(z)}{t-z}$ использован для построения абстрактной версии интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева, широко применяющейся в теории рядов экспонент и операторов свертки.

Как показано О.А. Ивановой и С.Н. Мелиховым при $N = 1$, с помощью сдвигов, ассоциированных с D_0 , в сопряженном пространстве задается умножение по правилу свертки; оно естественно связано с представлением линейных непрерывных операторов, перестановочных с D_0 . С ним это сопряженное пространство является ассоциативной и коммутативной алгеброй. Изучение такого умножения актуально. Это подтверждается, например, тем, что во многих ситуациях оно реализуется как произведение Дюамеля, изучаемое в значительном числе работ и имеющее довольно много приложений. Оно применяется в операторном исчислении, восходящем к монографии Я. Микусинского, при решении дифференциальных уравнений, в спектральной теории в обобщенном смысле (в смысле А. Бисваса, А. Ламберта и С. Петровича, в задаче о спектральной кратности линейного оператора, в проблеме наклонного берега, в теории операторов Теплица с вертикальным символом. В последние десятилетия достаточно интенсивно изучаются алгебры Дюамеля (М.Т. Караев, Р. Тапдигоглу, Х. Садраоуи, Х. Гuedeири, Б. Халоуани, З. Занг, Ю. Лиу, С. Поннусам).

Во многих распространенных ситуациях при использовании преобразования Лапласа или Фурье–Лапласа сопряженным к D_0 оператором является оператор интегрирования $J_0(f)(t) = \int_0^t f(t)dt$ или $-iJ_0$. Это позволяет некоторые утверждения для D_0 двойственным образом интерпретировать для J_0 (и наоборот). Такая взаимосвязь использовалась В.А. Ткаченко, построившим теорию оператора обобщенного интегрирования в пространстве аналитических функционалов. В.А. Ткаченко определил его как оператор, сопряженный к оператору обобщенного обратного сдвига $f \mapsto \frac{f(t)-e^{P(t)}f(0)}{t}$ (P — многочлен, $P(0) = 1$), действующему в счетном индуктивном пределе весовых банаховых пространств целых в $\mathbb{C}$ функций, задаваемых ρ -тригонометрически выпуклой функцией.

Для голоморфных функций многих комплексных переменных результа-

²Иванова, О. А. Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 6, № 3. С.17–27.

тов подобного рода получено значительно меньше. Отметим в связи с этим статьи К. Меррифилда, С. Уотсона, С. Салтана, Я. Эзела, М.Т. Караева, Р. Тапдигоглу, Н. Альтвайжри, в которых исследовалось и применялось произведение Дюамеля в пространстве функций, голоморфных в полидиске, или в его подпространствах. В этой диссертации предлагается соответствующий многомерный подход. В ней изучается система операторов частного обратного сдвига по переменной при фиксированных остальных и решается ряд связанных с ней задач уже в многомерной ситуации. В частности, разработанные здесь методы позволили получить приложения к решению некоторых типов задач Коши в пространствах голоморфных и бесконечно дифференцируемых функций многих переменных.

Цели работы.

- 1) Исследовать систему $\mathcal{D}_0$ операторов частного обратного сдвига в пространстве $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных в полицилиндрической области Ω в $\mathbb{C}^N$, содержащей точку 0, и в счетных индуктивных пределах весовых пространств Фреше целых в $\mathbb{C}^N$ функций.
- 2) Описать коммутант системы $\mathcal{D}_0$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$. Доказать критерий обратимости оператора из этого коммутанта.
- 3) Изучить циклические векторы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$.
- 4) Исследовать умножение $\otimes$ в топологическом сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$, задаваемое по правилу свертки с помощью сдвигов, ассоциированных с системой $\mathcal{D}_0$. Получить реализации алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$.
- 5) Описать коммутант системы $\mathcal{D}_0$ в весовом (LF)–пространстве $E(V)$ целых в $\mathbb{C}^N$ функций и изучить умножение $\otimes$ в топологическом сопряженном $E(V)'$ к $E(V)$.
- 6) Изучить коммутант системы операторов частного интегрирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$.
- 7) Доказать критерии обратимости элемента в алгебре $H(\Omega)$ с произведением Дюамеля и оператора Дюамеля в $H(\Omega)$.
- 8) Решить проблему деления на многочлен с разделяющимися переменными в сопряженном $E(V)'$. Получить применения к задаче Коши для уравнения в частных производных конечного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве $H(\Omega)$ и в пространствах бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций в выпуклой полицилиндрической области в $\mathbb{R}^N$, а также к задаче Коши для уравнения с производными

Гельфонда–Леонтьева в пространстве всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные положения, выносимые на защиту:

- 1) Описан коммутант системы $\mathcal{D}_0$ операторов частного обратного сдвига в алгебре всех линейных непрерывных операторов в пространстве $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных в полицилиндрической области Ω в $\mathbb{C}^N$, содержащей точку 0; получено интегральное представление и доказан критерий обратимости операторов из этого коммутанта.
- 2) Установлен критерий цикличности относительно системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$ функции с разделяющимися переменными, голоморфной в Ω .
- 3) Исследовано умножение $\otimes$ в топологическом сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$, задаваемое по правилу свертки с помощью сдвигов, ассоциированных с системой $\mathcal{D}_0$. Получены реализации алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ в виде пространства ростков голоморфных функций с операцией поточечного умножения и пространства целых функций экспоненциального типа с многомерным произведением Дюамеля.
- 4) Описан коммутант системы $\mathcal{D}_0$ в весовом (LF)–пространстве $E(V)$ целых в $\mathbb{C}^N$ функций и изучено умножение $\otimes$ в топологическом сопряженном $E(V)'$ к $E(V)$.
- 5) Введен и изучен класс областей в $\mathbb{C}^N$, полизвездных относительно точки 0. Для выпуклой полизвездной относительно точки 0 области Ω получена реализация $\otimes$ в $H(\Omega)$ в виде многомерного произведения Дюамеля.
- 6) Для полизвездной относительно точки 0 области Ω получено представление в виде произведения Дюамеля операторов из коммутанта системы операторов частного интегрирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$.
- 7) Доказаны критерии обратимости элемента в алгебре $H(\Omega)$ с произведением Дюамеля $*$ и оператора Дюамеля в $H(\Omega)$. Показано, что алгебра $(H(\Omega), *)$ локальна.
- 8) Доказаны однозначная разрешимость задачи деления на многочлен с разделяющимися переменными в сопряженном $E(V)'$ и представление ее решения, удовлетворяющего нулевым условиям, в виде обобщенного произведения Дюамеля в $E(V)'$.
- 9) Получены применения проблемы деления к задаче Коши для уравнения в частных производных конечного порядка с постоянными коэффициента-

ми в пространстве $H(\Omega)$ для выпуклой полизвездной относительно точки 0 области Ω и в пространствах бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций в выпуклой полицилиндрической области в $\mathbb{R}^N$, а также к задаче Коши для уравнения с производными Гельфонда–Леонтьева в пространстве всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций.

Методы исследования.

В работе используются методы теории голоморфных функций одного и многих комплексных переменных, анализа Фурье, линейного функционального анализа (теории двойственности локально выпуклых пространств, теории линейных операторов в них).

Теоретическая ценность и практическая значимость.

В диссертации получены результаты теоретического характера. Они могут быть использованы в теории голоморфных функций одного и многих комплексных переменных, операторов свертки в функциональных пространствах, в представлениях функций многомерными рядами экспонент, в спектральной теории в расширенном смысле, при решении дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, в теории операторов, связанных с операторами обратного сдвига и интегрирования.

Апробация работы. Результаты настоящего исследования были представлены на следующих конференциях и семинарах:

- International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis (ОТНА–2017)», 23–28 апреля 2017, г. Ростов–на–Дону;
- International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis (ОТНА–2018)», 22–27 апреля 2018, г. Ростов–на–Дону;
- Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVI. Теория операторов и дифференциальные уравнения», 20–25 сентября 2021, РСО–А, г. Владикавказ;
- Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа», 28 сентября–1 октября 2022, г. Уфа;
- Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVII: Теория операторов», 20–25 сентября 2023, г. Уфа;

ров и дифференциальные уравнения», 29 июня–5 июля 2023, РСО–А, г. Дзинага;

- Семинар «Комплексный и гармонический анализ» ИМВЦ УФИЦ РАН 20 июня 2025 г. (руководитель — Мусин И.Х.), г. Уфа.

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертационного исследования изложены в 9 научных публикациях. Статьи [1], [4] опубликованы в журналах, входящих в международную базу данных Scopus; [3], [5] — в базы данных Web of Science и Scopus; статья [2] — в издании, входящем в Перечень ВАК РФ и RSCI. Работы [6–9] опубликованы в материалах конференций.

В совместных работах [1, 3, 4, 5] С.Н. Мелихову принадлежат постановка задач, указание методов исследования. Окончательные формулировки и доказательства результатов этих работ, представленных в диссертации, принадлежат соискателю.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 81 наименование. Объем работы составляет 106 страниц.

Благодарности. Автор искренне благодарит своего научного руководителя Сергея Николаевича Мелихова за постановку задач, ценные замечания, постоянное внимание и поддержку.

Часть настоящего исследования выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-21-00062, <https://rscf.ru/project/-025-21-00062/>).

Содержание работы

Для $N \in \mathbb{N}$ полагаем $P_N := \{1, 2, \dots, N\}$. Для $t = (t_j)_{j=1}^N, z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$ символом $t_{\sigma,z}$ обозначим точку в $\mathbb{C}^N$ такую, что $(t_{\sigma,z})_k := z_k$, $k \in \sigma$, и $(t_{\sigma,z})_k := t_k$, $k \in P_N \setminus \sigma$; $t_{j,z} := t_{\{j\},z}$. Пусть Ω_j , $j \in P_N$, — области в $\mathbb{C}$, содержащие 0, $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах Ω . Для $f \in H(\Omega)$, $j \in P_N$, $z, t \in \Omega$ положим ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$D_{j,z}(f)(t) := \frac{f(t) - f(t_{j,z})}{t_j - z_j}, \quad T_{j,z}(f)(t) := \frac{t_j f(t) - z_j f(t_{j,z})}{t_j - z_j},$$

$$D_0^\alpha := D_{1,0}^{\alpha_1} \cdots D_{N,0}^{\alpha_N}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \quad T_z := T_{1,z} \cdots T_{N,z}.$$

Основное внимание в первой главе уделено коммутанту $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ системы $\mathcal{D}_0 := \{D_{j,0} \mid j \in P_N\}$ в алгебре всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов. Он исследован в § 1.2. Главным здесь является представление операторов из этого коммутанта, совпадающего с коммутантом системы $\{T_z \mid z \in \Omega\}$, в виде соответствующей свертки. Далее в главе 1 предполагается, что $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0.

Теорема 1.2.1. *Следующие условия равносильны:*

- (i) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.
- (ii) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$.
- (iii) *Существует функционал $\varphi \in H(\Omega)'$ такой, что*

$$B(f)(z) = \varphi(T_z(f)), \quad z \in \Omega, \quad f \in H(\Omega).$$

Для любого оператора $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ функционал $\varphi \in H(\Omega)'$, как в (iii), единственен.

Известные ранее результаты об описании $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ относятся только к случаю $N = 1$. Н.И. Нагнибида³ показал, что для круга $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ($0 < R \leq +\infty$) множество $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ в точности состоит из D_0 -операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами (он использовал представления линейных непрерывных операторов с помощью бесконечных матриц). При $N = 1$ для произвольной области Ω в расширенной комплексной плоскости, содержащей точку 0, Н.Е. Линчук⁴ доказала равносильность утверждений (i) и (iii) теоремы 1.2.1. В статье использована теория характеристических функций линейных непрерывных операторов Г. Кете⁵. Этот метод тесно связан со спецификой пространства $H(\Omega)$. Равносильность утверждений (i)–(iii) теоремы 1.2.1 для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, по сути, доказана И. Димовским и В. Христовым⁶. В диссертации существенно используется метод доказательства статьи⁶, более алгебраический. Ю.С. Линчук⁷ описал линейные непрерывные операторы в $H(\Omega)$,

³Нагнибида, Н. И. О линейных непрерывных операторах в аналитическом пространстве, перестановочных с оператором дифференцирования / Н. И. Нагнибида // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. межвед. науч. сб. — Харьков. — 1966. — №2. С. 160—164.

⁴Линчук, Н. Е. Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения / Н. Е. Линчук // Математические заметки. — 1988. — Т. 44, № 6. С. 794—802.

⁵Köthe, G. Dualität in der Funktionentheorie / G. Köthe // J. Reine Angew. Math. — 1953. — Vol. 191. P. 30—49.

⁶Dimovski, I. N. Commutants of the Pommiez operator / I. N. Dimovski, V. Z. Hristov // Int. J. Math. and Math. Science. — 2005. — Vol. 8. P. 1239—1251.

⁷Linchuk, Yu. S. Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable / Yu. S. Linchuk // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2006. — Vol. 12, № 4. P. 384—388.

которые перестановочны с одномерным возмущением оператора Поммье D_0 , а именно, с оператором $D_0 + h\delta_0$, где h – фиксированная функция, голоморфная в Ω , а $\delta_0(f) := f(0)$.

В главе 1 систематически используется многомерный аналог двойственности Силвы–Кете–Гротендика, доказанный Х.–Г. Тильманом⁸. Основным аналитическим средством этого применения является интегральное представление операторов из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$, полученное в п. 1.2.2.

Положим

$$B_\varphi(f)(z) := \varphi(T_z(f)), z \in \Omega, f \in H(\Omega), \varphi \in H(\Omega)',$$

$$\tilde{\varphi}(t) := \varphi_z \left(\frac{1}{(t_1 - z_1) \cdots (t_N - z_N)} \right),$$

$$C\Omega := (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1) \times \cdots \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_N).$$

В п. 1.2.3 доказан критерий обратимости оператора B_φ .

Теорема 1.2.2. Пусть $\varphi \in H(\Omega)'$. Оператор $B_\varphi : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ обратим тогда и только тогда, когда функция $t^1 \tilde{\varphi}(t)$ не имеет нулей в $C\Omega$.

Циклические векторы системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$ изучены в п. 1.2.4. При этом $f \in H(\Omega)$ называется циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$, если система $\{D_0^\alpha(f) \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $H(\Omega)$. Установлен критерий цикличности функции с разделяющимися переменными, аналогичный одномерному.

Теорема 1.2.3. Пусть $f(z) = f_1(z_1) \cdots f_N(z_N)$, $z \in \Omega$, $f_j \in H(\Omega_j)$, $j \in P_N$. Следующие условия равносильны:

- (i) f является циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$.
- (ii) Каждая функция f_j , $j \in P_N$, не является рациональной функцией переменной z_j .

Ранее циклические векторы оператора обратного сдвига были исследованы для $N = 1$. М.Г. Хапланов⁹ получил достаточные условия полноты системы $\{D_0^n(f) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ в $H(\Omega)$ для круга $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ (он пользовался матричным представлением линейных непрерывных операторов в соответствующем пространстве). Ю.А. Казьмин доказал критерий полноты такой системы в $H(\Omega)$ для односвязной области Ω в $\mathbb{C}$. Метод доказательства теоремы 1.2.3, примененный в диссертации, как и в¹⁰, ос-

⁸Tillmann, H.-G. Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen / H.-G. Tillmann // Math. Zeitschr. — 1953. — Vol. 59. P. 61–83.

⁹Хапланов, М. Г. О полноте некоторых систем аналитических функций / М. Г. Хапланов // Уч. зап. Ростовск. гос. пед. ин-та: Сб статей. Ростов-на-Дону. — 1955. — Т. 3. С. 53–58.

¹⁰Казьмин, Ю. А. О последовательных остатках ряда Тейлора / Ю. А. Казьмин // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, Механика. — 1963. — № 5. С. 35–46.

новывается на специальных интегральных представлениях. Н.Е. Линчук¹¹ доказала упомянутый критерий в общем случае — для произвольной области Ω в расширенной комплексной плоскости. Ю.С. Линчук¹² для односвязной области Ω в $\mathbb{C}$ доказал условия цикличности функций в $H(\Omega)$ относительно оператора оператора $D_0 + h\delta_0$, где h — фиксированная функция, аналитическая в Ω . При этом предполагалось, что функция $1 - zh(z)$ не обращается в 0 в Ω . От этого предположения удалось избавиться в¹³. Циклические векторы оператора обратного сдвига в пространстве Харди H^2 в единичном круге исследованы в¹⁴; в¹⁵ получены общие результаты о циклических векторах обобщенного сдвига влево в банаховых пространствах.

В § 1.3 изучено умножение $\otimes$ в топологическом сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$, определяемое по правилу свертки с помощью ассоциированных операторов сдвига: для $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))), \quad f \in H(\Omega).$$

Нижний индекс у функционала показывает, по каким переменным он действует. Показано, что сильное сопряженное $H(\Omega)'_b$ является унитарной ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй с умножением $\otimes$.

Для реализации алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ привлекаются преобразования Коши и Лапласа. Пусть $H_0(C\Omega)$ — пространство ростков всех голоморфных функций на $C\Omega$, равных 0 в каждой точке, хотя бы одна координата которой равна ∞ .

Установлено, что преобразование Коши является изоморфизмом алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ на алгебру $H_0(C\Omega)$ с поточечным умножением $(gh)(t) = t^1 g(t)h(t)$ (если хотя бы одна координата точки t равна ∞ , то $t^1 g(t)h(t) := 0$).

Преобразование Лапласа реализует $\otimes$ уже как произведение Дюамеля.

¹¹Линчук, Н. Е. Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения / Н. Е. Линчук // Математические заметки. — 1988. — Т. 44, № 6. С. 794—802.

¹²Linchuk, Yu. S. Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable / Yu. S. Linchuk // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2006. — Vol. 12, № 4. P. 384—388.

¹³Иванова, О. А. Об орбитах аналитических функций относительно оператора типа Поммье / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Уфимский математический журнал. — 2015. — Т. 7, № 4. С. 75—79.

¹⁴Douglas, R. G. Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator / R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. I. Shields // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1970. — Vol. 20, № 1. P. 37—76.

¹⁵Godefroy, G. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds / G. Godefroy, J. H. Shapiro // J. of Funct. Anal. — 1991. — Vol. 98. P. 229—269.

Положим

$$e_\lambda(z) := e^{\langle \lambda, z \rangle}, \quad \langle \lambda, z \rangle = \sum_{j=1}^N \lambda_j z_j, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}^N.$$

Для $\varphi \in H(\Omega)'$

$$\mathcal{F}(\varphi)(\lambda) := \widehat{\varphi}(\lambda) := \varphi(e_\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}^N, \quad \varphi \in H(\Omega)'.$$

Пусть $E_\Omega := \mathcal{F}(H(\Omega)')$. Преобразование Лапласа $\mathcal{F}$ — линейный изоморфизм $H(\Omega)'$ на E_Ω . В E_Ω вводится локально выпуклая топология так, что $\mathcal{F} : H(\Omega)'_b \rightarrow E_\Omega$ является и топологическим изоморфизмом.

Следуя К. Меррифилду и С. Уотсону, введем произведение Дюамеля $*$: для $g, h \in H(\mathbb{C}^N)$, $t \in \mathbb{C}^N$

$$(g * h)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_N \dots \partial t_1} \int_0^{t_N} \dots \int_0^{t_1} g(t - \xi) h(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_N.$$

Оно является умножением в E_Ω . Установлено, что преобразование Лапласа $\mathcal{F}$ — изоморфизм алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ на алгебру $(E_\Omega, *)$.

Полученное в § 1.2 описание коммутанта $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ интерпретируется далее в алгебраических терминах; оно позволяет получить представление $(H(\Omega)', \otimes)$ в $H(\Omega)$. Справедлива

Теорема 1.3.3. (i) *Отображение $\rho(\varphi) := B_\varphi$, $\varphi \in H(\Omega)'$, является изоморфизмом алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ на алгебру $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.*

(ii) *ρ — топологический изоморфизм $H(\Omega)'_b$ на $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ с топологией ограниченной сходимости.*

Во второй главе исследуется система $\mathcal{D}_0$ операторов частного обратного сдвига в счетном индуктивном пределе $E(V)$ весовых банаховых пространств целых в $\mathbb{C}^N$ функций и произведение Дюамеля в $H(\Omega)$. Для неубывающей последовательности непрерывных функций $v_n : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, определим весовые банаховы пространства

$$E_n(V) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) \mid \|f\|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(v_n(z))} < +\infty \right\}$$

с нормой $\|\cdot\|_n$. Положим $E(V) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n(V)$. Введем в $E(V)$ топологию индуктивного предела пространств $E_n(V)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $E(V)$: $E(V) := \varinjlim_{n \rightarrow} E_n(V)$. Относительно весов, задающих $E(V)$, делается два общих предположения:

$$\forall n \exists m(n) \geq n \exists C(n) \geq 0 :$$

$$\sup_{|t-z|_\infty \leq 1} v_n(t) + \log(1 + |z|) \leq \inf_{|t-z|_\infty \leq 1} v_{m(n)}(t) + C(n), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad (1)$$

и

$$\forall n \exists k(n) \geq n \exists D(n) \geq 0 :$$

$$v_n(t_{\sigma,z}) \leq v_{k(n)}(t) + v_{k(n)}(z) + D(n), \quad t, z \in \mathbb{C}^N, \sigma \subset P_N. \quad (2)$$

Второе условие автоматически выполняется при $N = 1$, если функция v_1 ограничена снизу; оно связано со структурой операторов частного обратного сдвига и дает возможность (вместе с первым условием) определить в $E(V)$ операторы частного обратного сдвига. Семейство рассмотренных пространств $E(V)$ достаточно широкое. Оно содержит весовые пространства, реализующие сопряженные к пространствам голоморфных, бесконечно дифференцируемых функций, ультрараспределений и квазианалитических функционалов.

В § 2.2 описан коммутант системы $\mathcal{D}_0 = \{D_{j,0} \mid j \in P_N\}$ (он совпадает с коммутантом системы $\mathcal{T} := \{T_z \mid z \in \mathbb{C}^N\}$) в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $E(V)$.

Теорема 2.2.1. *Предположим, что $\mathbb{C}[z]$ плотно в $E(V)$.*

Следующие утверждения равносильны:

(i) $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$.

(ii) $B \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$.

(iii) *Существует функционал $\varphi \in E(V)'$ такой, что $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E(V)$.*

Для любого оператора $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0) = \mathcal{K}(\mathcal{T})$ функционал $\varphi \in E(V)'$ такой, как в (iii), единственен.

В § 2.3 изучается умножение $\circledast$ в топологическом сопряженном $E(V)'$ к $E(V)$, связанное со сверточным представлением операторов из $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$. Алгебра $(E(V)', \circledast)$ изоморфна алгебре $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$, умножением в которой является композиция операторов. Основное внимание уделяется реализации $(E(V)', \circledast)$. В п. 2.3.3 вводятся и изучаются полизвездные относительно точки 0 множества. Для $z \in \mathbb{C}^N$ полагаем

$$\Pi(z) := [0, z_1] \times \cdots \times [0, z_N].$$

Множество Q в $\mathbb{C}^N$ назовем полизвездным относительно точки 0, если $\Pi(z) \subset Q$ для любого $z \in Q$.

Класс областей с таким свойством содержит все произведения плоских областей, звездных относительно точки 0, полные области Рейнхарта с центром в точке 0. Если область Ω выпуклая, свойство полизвездности равно-

сильно тому, что опорные функции последовательности выпуклых компактов, исчерпывающих Ω изнутри, удовлетворяют второму предположению о весах (это подтверждает его естественность).

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. В п. 2.3.4 в $H(\Omega)$ введено многомерное произведение Дюамеля $*$: для $g, h \in H(\Omega)$

$$(g * h)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_1 \cdots \partial t_N} \int_0^{t_N} \cdots \int_0^{t_1} g(t - \xi) h(\xi) d\xi_1 \cdots d\xi_N, \quad t \in \Omega.$$

Пространство $H(\Omega)$ является алгеброй с умножением $*$. Для $N = 1$ в $H(\Omega)$ оно введено и изучено И. Райчиновым¹⁶ и Н. Уигли¹⁷. Умножения $\circledast$ и $*$ связаны следующим образом. Если область Ω дополнительно выпуклая, то опорные функции последовательности выпуклых компактов, исчерпывающих Ω изнутри, задают пространство $E_\Omega := E(V)$. Преобразование Лапласа $\mathcal{F}$ сопряженное пространство $H(\Omega)'$ биективно отображает на E_Ω . Пусть $\mathcal{F}' : E'_\Omega \rightarrow H(\Omega)$ — сопряженное к $\mathcal{F}$ отображение.

Теорема 2.3.2. Пусть Ω — выпуклая полизвездная относительно точки 0 область в $\mathbb{C}^N$. Тогда $\mathcal{F}'$ — изоморфизм алгебры $(E'_\Omega, \circledast)$ на алгебру $(H(\Omega), *)$.

В § 2.4 проанализирована связь операторов Поммье D_z с многомерным вариантом интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева, использованной В.П. Громовым¹⁸ при разложении в ряды экспонент аналитических функций двух комплексных переменных, В.В. Напалковым¹⁹ для решения уравнений свертки в полиобластях.

В § 2.5 продолжено изучение произведение Дюамеля в $H(\Omega)$ без дополнительного предположения о выпуклости области Ω , полизвездной относительно точки 0. Для $k \in P_N$ введем операторы частного интегрирования

$$J_k(f)(z) := \int_0^{z_k} f(z_1, \dots, z_{k-1}, \xi, z_{k+1}, \dots, z_N) d\xi, \quad z \in \Omega, \quad f \in H(\Omega)$$

(интеграл берется по отрезку $[0, z_k]$). Все они линейны и непрерывны в $H(\Omega)$ и попарно перестановочны. Для функции $g \in H(\Omega)$ введем оператор $S_g(f) := f * g$, $f \in H(\Omega)$. Он линеен и непрерывен в $H(\Omega)$.

¹⁶Райчинов, И. О линейных операторах, перестановочных с операцией интегрирования / И. Райчинов // Математический анализ и его приложения. — 1970. — Т. 2. Ростов-на-Дону: изд-во РГУ, С. 63—72.

¹⁷Wigley, N. The Duhamel product of analytic functions / N. Wigley // Duke Math. J. — 1974. — Vol. 41. P. 211—217.

¹⁸В. П. Громов, С. Н. Мишин, С. В. Панюшкин. Операторы конечного порядка и дифференциально-разностные уравнения // Орел: ГОУВПО «ОГУ», 2009. — 428 с.

¹⁹Напалков, В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах // М.: Наука, — 1982. — 240 с.

Символом $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ обозначим коммутант множества $\mathcal{J} = \{J_k \mid k \in P_N\}$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$ с умножением — композицией операторов; $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ является ее подалгеброй. В п. 2.5.1 описано множество $\mathcal{K}(\mathcal{J})$.

Теорема 2.5.2. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 .

(i) Если $A \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$, то существует единственная функция $g \in H(\Omega)$, для которой $A = S_g$.

(ii) $S_g \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$ для любой функции $g \in H(\Omega)$.

В п. 2.5.2 доказана изоморфность пространства $H(\Omega)$ и $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ в следующем смысле.

Теорема 2.5.3. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 . Отображение $\chi(g) := S_g$ является топологическим изоморфизмом пространства $H(\Omega)$ на $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ с топологией ограниченной сходимости и изоморфизмом алгебры $(H(\Omega), *)$ на алгебру $\mathcal{K}(\mathcal{J})$.

В п. 2.5.3 установлен критерий обратимости элемента алгебры $(H(\Omega), *)$.

Теорема 2.5.4. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 , $g \in H(\Omega)$. Следующие утверждения равносильны

(i) Оператор $S_g : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ обратим.

(ii) Элемент g обратим в алгебре $(H(\Omega), *)$.

(iii) $g(0) \neq 0$.

При $N = 1$ теоремы 2.5.2 и 2.5.4 хорошо известны. И. Райчинов¹⁶ описал коммутант оператора интегрирования в пространстве $H(\Omega)$ и установил условие обратимости оператора из коммутанта для области Ω в $\mathbb{C}$, звездной относительно точки 0 . Впоследствии Ю.А. Кирютенко²⁰ получил подобные результаты для односвязной звездообразной области в $\mathbb{C}$, содержащей 0 . Н. Уигли¹⁷, предполагая звездность $\Omega \subset \mathbb{C}$ относительно точки 0 , установил критерий обратимости элемента в алгебре $(H(\Omega), *)$.

В данной диссертации для доказательства $*$ -обратимости функции из $H(\Omega)$, как и в¹⁷, привлекается ряд Неймана. Его использование оказалось возможным вследствие установленного в лемме 2.5.1 представления произведения $f * g$ в виде суммы, содержащей одно внеинтегральное слагаемое $g(0)f$ и слагаемые с интегралами хотя бы по одной переменной от функции, не зависящей от производных f . Это позволило и в многомерной ситуации

²⁰Кирютенко, Ю. А. Обратимость оператора Вольтерра в пространстве аналитических функций / Ю. А. Кирютенко // Математические заметки. — 1984. — Т. 35, №6. С. 795—802.

получить оценки, обычно применяемые при доказательстве квазинильпотентности оператора Вольтерра в банаховых пространствах. Отметим

Следствие 2.5.3. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 . Алгебра $(H(\Omega), *)$ локальна. Ее единственным максимальным идеалом является множество всех $*$ -необратимых элементов в ней.

Подобный результат для пространства Харди в полидиске получен другим методом в статье²¹ — с помощью рассмотрения соответствующего пространства функций со значениями в таком же банаховом пространстве с числом переменных, меньшем на единицу, и последующего сведения к одномерной ситуации.

Также получены следствия для двойственной ситуации в случае, когда область Ω дополнительно выпуклая ($\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1).

Теорема 2.5.5. Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 , $\varphi \in E'_\Omega$. Оператор B_φ обратим в E_Ω тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbf{1}) \neq 0$.

В третьей главе предыдущие результаты применяются к проблеме, исходным пунктом которой является задача Коши для дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами для функций одной переменной. Как известно, решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям в точке 0 , можно представить в виде произведения Дюамеля правой части и такого решения для правой части, тождественно равной 1. Она обосновывается с помощью операционного или операторного исчисления. В статье И.Л. Когана²² (в одномерной ситуации) эта формула распространена на более широкие классы правых частей, а доказательство проводится с помощью сверточных алгебр обобщенных функций. В работе²³ данное равенство доказано для классов бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций на отрезке или интервале в $\mathbb{R}$, содержащем точку 0 . Там использовался другой метод: доказывалась возможность деления на многочлен в

²¹Merryfield, K. A local algebra structure for H of the polydisc / K. Merryfield, S. Watson // Colloquium Mathematicum. — 1991. — Vol. 61. P. 73—79.

²²Коган, И. Л. Метод интеграла Дюамеля для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с точки зрения теории обобщенных функций / И. Л. Коган // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — Т.20, №1. С. 37—45.

²³Иванова, О. А. Об обратимости оператора Дюамеля в пространствах ультрадифференцируемых функций / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Уфимский математический журнал. — 2023. — Т. 15, № 4. С. 61—74.

пространстве аналитических функционалов так, что частное обращается в нуль на соответствующих мономах и выражается в виде произведения $\otimes$ в соответствующей алгебре аналитических функционалов. Затем полученное равенство посредством сопряженного к преобразованию Лапласа переводилось в нужное пространство. Возникает естественный вопрос о многомерных аналогах описанных результатов. Некоторый многомерный подход предпринят в данной главе. Термин «пространство аналитических функционалов» в контексте данной диссертации восходит к работам В.А. Ткаченко, который провел цикл исследований в пространствах аналитических функционалов как линейных непрерывных функционалов на счетном индуктивном пределе весовых банаховых пространств целых функций одной комплексной переменной, задаваемых ρ -тригонометрически выпуклыми функциями (см., например, статьи^{24,25,26}).

Пусть $E(V)$ — счетный индуктивный предел весовых банаховых пространств целых функций в $\mathbb{C}^N$, как в главе 2. Зафиксируем ненулевые многочлены $q_j \in \mathbb{C}[t_j]$ переменной t_j степени $m_j \geq 1$ со старшими коэффициентами, равными 1, и положим $Q(t) := q_1(t_1) \cdots q_N(t_N)$, $Q_1(t) := 1$, $Q_j(t) := q_1(t_1) \cdots q_{j-1}(t_{j-1})$, $2 \leq j \leq N$, $t \in \mathbb{C}^N$. Введем умножение функционалов из $E(V)'$ на многочлен $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$:

$$(p\varphi)(f) := \varphi(pf), \quad f \in E(V), \quad \varphi \in E(V)'.$$

Так как оператор $f \mapsto pf$ умножения на p линеен и непрерывен в $E(V)$ и $E(V)$ рефлексивно, то сопряженное к нему отображение $\varphi \mapsto p\varphi$ линейно и непрерывно в сильном сопряженном $E(V)'$.

Будем использовать весовые пространства целых в $\mathbb{C}^{N-1}$ функций такого же вида, как и $E(V)$. Они задаются сужениями исходных функций v_n , $n \in \mathbb{N}$, на координатные гиперплоскости. Для $j \in P_N$, $n \in \mathbb{N}$ определим функции $v_{n,j}(z_1, \dots, z_{N-1}) := v_n(z_1, \dots, z_{j-1}, 0, z_j, \dots, z_{N-1})$, $z \in \mathbb{C}^{N-1}$ и посредством последовательности $(v_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ зададим пространство $E(V^{(j)})$:

$$E_n(V^{(j)}) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^{N-1}) \mid \sup_{t \in \mathbb{C}^{N-1}} \frac{|f(t)|}{\exp(v_{n,j}(t))} < +\infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N};$$

²⁴Ткаченко, В.А. Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщенного интегрирования в пространствах аналитических функционалов / В.А. Ткаченко // Матем. заметки — 1977. — Т. 22, № 2. С. 221—230.

²⁵Ткаченко, В.А. Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов / В.А. Ткаченко // Матем. заметки. — 1979. — Т. 2, № 2. С. 271—282.

²⁶Ткаченко, В.А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную / В.А. Ткаченко // Матем. сб. — 1980. — Т. 154, № 3. С. 421—466.

$E(V^{(j)}) := \text{ind}_{n \rightarrow} E_n(V^{(j)})$. Для всех $j \in P_N$ последовательности $(v_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют условиям (1) и (2) в $\mathbb{C}^{N-1}$.

Для $j \in P_N$, $t \in \mathbb{C}^N$ положим $t^{(j)} := (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N)$. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $j \in P_N$, $g \in E(V^{(j)})$, многочлена $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$ функция $p(t_1, \dots, t_N)g(t^{(j)})$ принадлежит $E(V)$. В следующей теореме доказана однозначная разрешимость задачи деления в $E(V)'$ при дополнительных условиях на частное.

Теорема 3.1.1. *Для любых $\psi \in E(V)'$, $\nu_{j,k} \in E(V^{(j)})'$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$, существует единственный функционал $\varphi \in E(V)'$ такой, что $Q\varphi = \psi$ и для любых $g_j \in E(V^{(j)})$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$*

$$\varphi_t(t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = \nu_{j,k}(g_j).$$

Основным звеном доказательства теоремы 3.1.1 является возможность «деления с остатком» на многочлен Q в пространстве $E(V)$. Ранее такой подход в идейно близкой ситуации использовался В.М. Трутневым. Деление с остатком голоморфных функций на многочлен Вейерштрасса в области Ω в $\mathbb{C}^N$ посредством решения вспомогательной задачи для функционалов было им применено к решению задачи Коши для оператора свертки в пространстве целых функций экспоненциального типа. Последнее изоморфно сильному сопряженному к пространству всех функций, голоморфных в Ω . Деление с остатком проводится в²⁷ с помощью интегрального представления многочлена Эрмита по выделенной переменной. Такое представление многочлена Эрмита используется и в этой работе. Отметим и другие подходы к доказательству подобных результатов о делении с остатком в классах голоморфных функций. Например, лемма о делении с остатком на многочлен Вейерштрасса в пространстве всех ростков функций, голоморфных в точке 0, в монографии Г. Грауэрта, К. Фритцше²⁸ установлена с помощью теории банаховых алгебр.

Приведем второй основной результат этой главы о представлении решения исходной задачи деления с нулевыми условиями в виде обобщенного произведения Дюамеля $\otimes$ правой части и такого решения для правой части, совпадающей с функционалом $\delta_0(f) := f(0)$, линейным и непрерывным на $E(V)$.

²⁷Трутнев, В.М. Уравнения свертки в пространствах целых функций экспоненциального типа / В.М. Трутнев // Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. — 2006. — Т. 108. С. 158–180.

²⁸Grauert, H. Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher / H. Grauert, K. Fritzsche. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1974).

Теорема 3.1.2. Если $\frac{\delta_0}{Q} \in E(V)'$ — решение уравнения $Q\varphi = \delta_0$, для которого

$$\left(\frac{\delta_0}{Q}\right)_t (t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = 0, \quad 0 \leq k < m_j, g_j \in E(V^{(j)}), j \in P_N,$$

то для любого $\psi \in E(V)'$ произведение $\psi \otimes \frac{\delta_0}{Q}$ является решением уравнения $Q\varphi = \psi$ таким, что $\left(\psi \otimes \frac{\delta_0}{Q}\right)_t (t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = 0$ для любых $0 \leq k < m_j, g_j \in E(V^{(j)}), j \in P_N$.

Теоремы 3.1.1 и 3.1.2 применены к некоторым задачам Коши в реализациях $E(V)'$ в виде конкретных пространств с помощью сопряженного к преобразованию Лапласа, Фурье–Лапласа или обобщенного преобразования Лапласа. К ним относятся пространство функций, голоморфных в выпуклой полизвездной относительно точки 0 области, и уравнение в частных производных в нем; пространство всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций и уравнение с производными Гельфонда–Леонтьева; пространства бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций в выпуклых полицилиндрических областях в $\mathbb{R}^N$ и уравнение в частных производных в этих пространствах.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных изданиях, входящих в Перечень ВАК, Scopus, Web of Science, RSCI

1. Ivanov, P. A. Pommiez Operator in Spaces of Analytic Functions of Several Complex Variables / P. A. Ivanov, S. N. Melikhov // J. of Math. Sciences. — 2021. — Vol.252, № 3. P. 345—359.
2. Иванов, П. А. Произведение Дюамеля в пространствах целых функций экспоненциального типа / П. А. Иванов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2022. — № 4–1. С. 95—100.
3. Ivanov, P. A. Many-Dimensional Duhamel Product in the Space of Holomorphic Functions and Backward Shift Operators / P. A. Ivanov, S. N. Melikhov // Math. Notes. — 2023. — Vol. 113, №5. P. 650—662.
4. Ivanov, P. A. Division by a polynomial in spaces of analytic functionals / P. A. Ivanov, S. N. Melikhov // J. of Math. Sciences. — 2024. — Vol. 286. Issue 2. P. 222-237.

5. Ivanov, P. A. On commutant of system of integration operators in multidimensional domains / P. A. Ivanov, S. N. Melikhov // Ufa Mathematical Journal. — 2025. — Vol. 17. Issue 2. P. 27-36.

Публикации в сборниках трудов конференций

6. Иванов, П. А. О динамике многомерного оператора Поммье / П. А. Иванов // В книге: Математический анализ и математическое моделирование. Тезисы докладов XIV Владикавказской молодежной математической школы. Владикавказ. — 2018. С. 25—26.
7. Иванов, П. А. О многомерном операторе обратного сдвига в пространствах голоморфных функций / П. А. Иванов // В книге: Сборник трудов. Тезисы докладов Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань, КФУ. — 2021. С. 216—218.
8. Иванов, П. А. Операторы обратного сдвига в полицилиндрических областях / П. А. Иванов // В книге: Тезисы докладов XVI международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения». Владикавказ. — 2021. С. 33–34.
9. Иванов, П. А. Произведение Дюамеля в пространствах целых функций экспоненциального типа / П. А. Иванов // В книге: Материалы международной научной конференции. Том 1. Тезисы докладов Уфимской осенней математической школы 2022. Уфа, БашГУ. — 2022. С. 103—105.