

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ



ИВАНОВ ПАВЕЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**Операторы обратного сдвига и произведение Дюамеля в
пространствах голоморфных функций многих комплексных
переменных**

1.1.1. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ
АНАЛИЗ

ДИССЕРТАЦИЯ
НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
доктор физ.-мат. наук, доцент
С. Н. МЕЛИХОВ

РОСТОВ-НА-ДОНУ — 2025

Оглавление

Введение	4
1 Система операторов обратного сдвига в пространстве всех функций, голоморфных в полиобласти	20
1.1 Обозначения. Основные операторы	20
1.2 Коммутант системы $\mathcal{D}_0$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$	27
1.2.1 Описание операторов из коммутанта в виде свертки	27
1.2.2 Интегральное представление B_φ в $H(\Omega)$	32
1.2.3 Обратимость оператора B_φ в $H(\Omega)$	36
1.2.4 Циклические векторы оператора B_φ в $H(\Omega)$	37
1.3 Сопряженное пространство $H(\Omega)'$ как алгебра	41
1.3.1 Умножение $\otimes$ в $H(\Omega)'$	41
1.3.2 Реализация алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ посредством преобразований Коши и Лапласа	43
1.3.3 Представление $(H(\Omega)', \otimes)$ в $H(\Omega)$	45
2 Система операторов обратного сдвига в весовых пространствах целых функций	49
2.1 Весовые пространства $E(V)$ и операторы обратного сдвига в них	49

2.2	Описание коммутанта системы операторов частного обратного сдвига в $E(V)$	50
2.3	Умножение в E' и его реализация	54
2.3.1	Умножение в E' в общей ситуации	54
2.3.2	Топологический изоморфизм и плотность многочленов от операторов обратного сдвига в коммутанте	56
2.3.3	Полизвездные множества	57
2.3.4	Произведение Дюамеля и оператор Дюамеля	60
2.4	Связь с интерполирующей функцией А.Ф. Леонтьева	66
2.5	Коммутант системы операторов интегрирования и произведение Дюамеля в $H(\Omega)$	68
2.5.1	Описание операторов, перестановочных с системой операторов интегрирования	68
2.5.2	Изоморфность пространства $H(\Omega)$ и коммутанта	73
2.5.3	Критерий обратимости элемента в алгебре $(H(\Omega), *)$ и оператора Дюамеля	74

3 Деление на многочлен в пространствах аналитических функционалов 78

3.1	Задача деления и обобщенное произведение Дюамеля	78
3.2	Применения к конкретным пространствам	86
3.2.1	Применение к пространству функций, голоморфных в выпуклой полизвездной области.	86
3.2.2	Применение к пространству целых функций посредством обобщенного преобразования Лапласа	89
3.2.3	Применение к пространствам бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций	92

Заключение 95

Литература 97

Введение

Основными объектами изучения в данной диссертации являются операторы обратного сдвига в пространствах голоморфных функций многих комплексных переменных и связанные с ними свертки. В случае одной переменной оператор обратного сдвига $D_0(f)(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t}$ в различных пространствах голоморфных функций исследован достаточно подробно. Он естественно возникает при изучении последовательных остатков ряда Тейлора функции f , голоморфной в окрестности точки 0. Одна из ключевых задач для них — получить условия полноты системы $\{D_0^n(f) \mid n \geq 0\}$, т.е. цикличности вектора f относительно D_0 , в соответствующем пространстве. К ней непосредственное отношение имеют проблемы описания коммутанта D_0 в алгебре всех линейных непрерывных операторов, действующих в этом пространстве, и замкнутых инвариантных подпространств D_0 .

Пусть $H(\Omega)$ — пространство всех функций, голоморфных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $0 \in \Omega$. К настоящему времени получено полное описание циклических векторов оператора D_0 и его одномерного возмущения и их замкнутых инвариантных подпространств в $H(\Omega)$ (М.Г. Хапланов [43], Ю.А. Казьмин [18], Н.Е. Линчук [28], Ю.С. Линчук [71], О.А. Иванова, С.Н. Мелихов [11], [15], в весовых (LF)–пространствах целых в $\mathbb{C}$ функций (О.А. Иванова, С.Н. Мелихов [13], [67], [16]). Циклические векторы и инвариантные подпространства D_0 в банаховых пространствах функций, голоморфных в единичном круге, изучали Р. Дуглас, Г. Шапиро, А. Шилдс [59], Й. Цима, У. Росс [55], А. Алеман, С. Рихтер, К. Сандберг [50], циклические векторы обобщенного сдвига влево в банаховом пространстве исследовали Г. Годфруа и Дж. Шапиро [61]. Значительное

число работ посвящено и проблемам, связанным с описанием коммутанта D_0 и свойствам операторов из него. Соответствующие задачи для оператора D_0 и его одномерного возмущения в $H(\Omega)$ и в счетном индуктивном пределе весовых пространств Фреше целых в $\mathbb{C}$ функций решали Н.И. Нагнибида [31], Н.Е. Линчук [28], И. Димовски и В. Христов [58], Ю.С. Линчук [71], О.А. Иванова, С.Н. Мелихов [12]. Коммутант обобщенного сдвига влево в банаховом пространстве изучался Г. Годфруа и Дж. Шапиро [61]. В монографии Ю.Ф. Коробейника [23, § 9] исследован коммутант оператора обобщенного дифференцирования, в частности, оператора сдвига влево в пространствах числовых семейств; его частным случаем является D_0 .

Существенную стимулирующую роль в изучении оператора D_0 и его одномерного возмущения сыграла статья [10], в которой оператор Помье $D_z(f)(t) = \frac{f(t)-f(z)}{t-z}$ использован для построения абстрактной версии интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева, широко применяющейся в теории рядов экспонент и операторов свертки.

Как показано О.А. Ивановой и С.Н. Мелиховым при $N = 1$ [12], [14], с помощью сдвигов, ассоциированных с D_0 , в сопряженном пространстве задается умножение по правилу свертки; оно естественно связано с представлением линейных непрерывных операторов, перестановочных с D_0 . С ним это сопряженное пространство является ассоциативной и коммутативной алгеброй. Изучение такого умножения актуально. Это подтверждается, например, тем, что во многих ситуациях оно реализуется как произведение Дюамеля, изучаемое в значительном числе работ и имеющее довольно много приложений. Оно применяется в операторном исчислении, восходящем к монографии Я. Микусинского [30], при решении дифференциальных уравнений, в спектральной теории в обобщенном смысле (в смысле А. Бисваса, А. Ламберта и С. Петровича [53]), в задаче о спектральной кратности линейного оператора [19], в проблеме наклонного берега [80], в теории операторов Теплица с вертикальным символом [68]. В последние десятилетия достаточно интенсивно изучают-

ся алгебры Дюамеля (М.Т. Караев [20], Р. Тапдигоглу [76], Х. Садраоуи, М.Т. Караев, Х. Гuedeири, Б. Халоуани [74], З. Занг, Ю. Лиу, С. Поннусами [81]).

Во многих распространенных ситуациях при использовании преобразования Лапласа или Фурье–Лапласа сопряженным к D_0 оператором является оператор интегрирования $J_0(f)(t) = \int_0^t f(t)dt$ или $-iJ_0$. Это позволяет некоторые утверждения для D_0 двойственным образом интерпретировать для J_0 (и наоборот). Такая взаимосвязь использовалась В.А. Ткаченко [38], [39], построившим теорию оператора обобщенного интегрирования в пространстве аналитических функционалов. В.А. Ткаченко определил его как оператор, сопряженный к оператору обобщенного обратного сдвига $f \mapsto \frac{f(t)-e^{P(t)}f(0)}{t}$ (P — многочлен, $P(0) = 1$), действующему в счетном индуктивном пределе весовых банаховых пространств целых в $\mathbb{C}$ функций, задаваемых ρ -тригонометрически выпуклой функцией.

Для голоморфных функций многих комплексных переменных результатов подобного рода получено значительно меньше. Отметим в связи с этим статьи К. Меррифилда, С. Уотсона [73], С. Салтана, Я. Эзела [75], М.Т. Караева [60], Р. Тапдигоглу, Н. Альтвайжри [77], в которых исследовалось и применялось произведение Дюамеля в пространстве функций, голоморфных в полидиске, или в его подпространствах. В этой диссертации предлагается соответствующий многомерный подход. В ней изучается система операторов частного обратного сдвига по переменной при фиксированных остальных и решается ряд связанных с ней задач уже в многомерной ситуации. В частности, разработанные здесь методы позволили получить приложения к решению некоторых типов задач Коши в пространствах голоморфных и бесконечно дифференцируемых функций многих переменных.

Перейдем к краткому изложению основных результатов диссертации, их истории и мотивировке. Для $N \in \mathbb{N}$ полагаем $P_N := \{1, 2, \dots, N\}$.

Для $t, z \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$ определим точку $t_{\sigma, z} \in \mathbb{C}^N$:

$$(t_{\sigma, z})_j := \begin{cases} t_j, & j \in P_N \setminus \sigma, \\ z_j, & j \in \sigma, \end{cases}$$

$t_{j, z} := t_{\{j\}, z}$. Пусть $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Далее Ω_j , $j \in P_N$, — области в $\mathbb{C}$, содержащие 0, $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах Ω . Для $f \in H(\Omega)$, $j \in P_N$, $z, t \in \Omega$ положим

$$D_{j, z}(f)(t) := \frac{f(t) - f(t_{j, z})}{t_j - z_j}, \quad T_{j, z}(f)(t) := \frac{t_j f(t) - z_j f(t_{j, z})}{t_j - z_j},$$

$$D_0^\alpha := D_{1, 0}^{\alpha_1} \cdots D_{N, 0}^{\alpha_N}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \quad T_z := T_{1, z} \cdots T_{N, z}.$$

Основное внимание в первой главе уделено коммутанту $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ системы $\mathcal{D}_0 := \{D_{j, 0} \mid j \in P_N\}$ в алгебре всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов. Он исследован в § 1.2. Главным здесь является представление операторов из этого коммутанта, совпадающего с коммутантом системы $\{T_z \mid z \in \Omega\}$, в виде соответствующей свертки. В дальнейшем в главе 1 предполагается, что Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$. Для локально выпуклого пространства E символ E' обозначает топологическое сопряженное к E пространство.

Теорема 1.2.1. *Следующие условия равносильны:*

- (i) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.
- (ii) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$.
- (iii) Существует функционал $\varphi \in H(\Omega)'$ такой, что

$$B(f)(z) = \varphi(T_z(f)), \quad z \in \Omega, \quad f \in H(\Omega).$$

Для любого оператора $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ функционал $\varphi \in H(\Omega)'$, как в (iii), единственен.

Известные ранее результаты об описании $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ относятся только к случаю $N = 1$. Н.И. Нагнибида [31, следствие 3] показал, что для круга $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ($0 < R \leq +\infty$) множество $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ в точности

состоит из D_0 -операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами (он использовал представления линейных непрерывных операторов с помощью бесконечных матриц). При $N = 1$ для произвольной области Ω в расширенной комплексной плоскости, содержащей точку 0, Н.Е. Линчук [28] доказала равносильность утверждений (i) и (iii) теоремы 1.2.1. В статье [28] использована теория характеристических функций линейных непрерывных операторов Г. Кете [69]. Этот метод тесно связан со спецификой пространства $H(\Omega)$. Равносильность утверждений (i)–(iii) теоремы 1.2.1 для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, по сути, доказана И. Димовским и В. Христовым [58]. В диссертации существенно используется метод доказательства статьи [58], более алгебраический. Ю.С. Линчук [71] описал линейные непрерывные операторы в $H(\Omega)$, которые перестановочны с одномерным возмущением оператора Поммье D_0 , а именно, с оператором $D_0 + h\delta_0$, где h – фиксированная функция, голоморфная в Ω , а $\delta_0(f) := f(0)$.

В главе 1 систематически используется многомерный аналог двойственности Силвы–Кете–Гротендика, доказанный Х.–Г. Тильманом [79]. Основным аналитическим средством этого применения является интегральное представление операторов из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$, полученное в п. 1.2.2.

Положим

$$B_\varphi(f)(z) := \varphi(T_z(f)), \quad z \in \Omega, \quad f \in H(\Omega), \quad \varphi \in H(\Omega)',$$

$$\tilde{\varphi}(t) := \varphi_z \left(\frac{1}{(t_1 - z_1) \cdots (t_N - z_N)} \right),$$

$$C\Omega := (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1) \times \cdots \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_N).$$

В п. 1.2.3 доказан критерий обратимости оператора B_φ .

Теорема 1.2.2. Пусть $\varphi \in H(\Omega)'$. Оператор $B_\varphi : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ обратим тогда и только тогда, когда функция $t_1 \cdots t_N \tilde{\varphi}(t)$ не имеет нулей в $C\Omega$.

Циклические векторы системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$ изучены в п. 1.2.4. При этом $f \in H(\Omega)$ называется циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$, если систе-

ма $\{D_0^\alpha(f) \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $H(\Omega)$. Установлен критерий цикличности функции с разделяющимися переменными, аналогичный одномерному.

Теорема 1.2.3. Пусть $f(z) = f_1(z_1) \cdots f_N(z_N)$, $z \in \Omega$, $f_j \in H(\Omega_j)$, $j \in P_N$. Следующие условия равносильны:

- (i) f является циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$.
- (ii) Каждая функция f_j , $j \in P_N$, не является рациональной функцией переменной z_j .

Ранее циклические векторы оператора обратного сдвига были исследованы для $N = 1$. М.Г. Хапланов [43] получил достаточные условия полноты системы $\{D_0^n(f) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ в $H(\Omega)$ для круга $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ (он пользовался матричным представлением линейных непрерывных операторов в соответствующем пространстве). Ю.А. Казьмин [18] доказал критерий полноты такой системы в $H(\Omega)$ для односвязной области Ω в $\mathbb{C}$. Метод доказательства теоремы 1.2.3, примененный в диссертации, как и в [18], основывается на специальных интегральных представлениях. Н.Е. Линчук [28] доказала упомянутый критерий в общем случае — для произвольной области Ω в расширенной комплексной плоскости. Ю.С. Линчук [71] для односвязной области Ω в $\mathbb{C}$ доказал условия цикличности функций в $H(\Omega)$ относительно оператора оператора $D_0 + h\delta_0$, где h — фиксированная функция, аналитическая в Ω . При этом в [71] предполагалось, что функция $1 - zh(z)$ не обращается в 0 в Ω . От этого предположения удалось избавиться в [11]. Циклические векторы оператора обратного сдвига в пространстве Харди H^2 в единичном круге исследованы в [59]; в [61] получены общие результаты о циклических векторах обобщенного сдвига влево в банаховых пространствах.

В § 1.3 изучено умножение $\otimes$ в топологическом сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$, определяемое по правилу свертки с помощью ассоциированных операторов сдвига: для $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))), \quad f \in H(\Omega).$$

Нижний индекс у функционала показывает, по каким переменным он

действует. Показано, что сильное сопряженное $H(\Omega)'_b$ является унитарной ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй с умножением $\otimes$.

Для реализации алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ привлекаются преобразования Коши и Лапласа. Пусть $H_0(C\Omega)$ — пространство ростков всех голоморфных функций на $C\Omega$, равных 0 в каждой точке, хотя бы одна координата которой равна ∞ .

Установлено, что преобразование Коши является изоморфизмом $(H(\Omega)', \otimes)$ на алгебру $H_0(C\Omega)$ с поточечным умножением $(gh)(t) = t^1 g(t)h(t)$ (если хотя бы одна координата точки t равна ∞ , то $t^1 g(t)h(t) := 0$).

Преобразование Лапласа реализует $\otimes$ уже как произведение Дюамеля. Положим

$$e_\lambda(z) := e^{\langle \lambda, z \rangle}, \quad \langle \lambda, z \rangle = \sum_{j=1}^N \lambda_j z_j, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}^N.$$

Для $\varphi \in H(\Omega)'$

$$\mathcal{F}(\varphi)(\lambda) := \widehat{\varphi}(\lambda) := \varphi(e_\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}^N, \quad \varphi \in H(\Omega)'.$$

Пусть $E_\Omega := \mathcal{F}(H(\Omega)')$. Преобразование Лапласа $\mathcal{F}$ — изоморфизм $H(\Omega)'$ на E_Ω . В E_Ω вводится локально выпуклая топология так, что $\mathcal{F} : H(\Omega)'_b \rightarrow E_\Omega$ является и топологическим изоморфизмом.

Следуя К. Меррифилду и С. Уотсону [73], введем произведение Дюамеля $*$: для $g, h \in H(\mathbb{C}^N)$, $t \in \mathbb{C}^N$

$$(g * h)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_N \dots \partial t_1} \int_0^{t_N} \dots \int_0^{t_1} g(t - \xi) h(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_N.$$

Оно является умножением в E_Ω . Установлено, что преобразование Лапласа $\mathcal{F}$ — изоморфизм алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ на алгебру $(E_\Omega, *)$.

Полученное в § 1.2 описание коммутанта $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ интерпретируется далее в алгебраических терминах; оно позволяет получить представление $(H(\Omega)', \otimes)$ в $H(\Omega)$. Справедлива

Теорема 1.3.3. (i) *Отображение $\rho(\varphi) := B_\varphi$, $\varphi \in H(\Omega)'$, является изоморфизмом алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ на алгебру $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.*

(ii) *ρ — топологический изоморфизм $H(\Omega)'_b$ на $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ с топологией ограниченной сходимости.*

Основные результаты первой главы опубликованы в [63], [5], [6]–[9].

Во второй главе исследуется система $\mathcal{D}_0$ операторов частного обратного сдвига в счетном индуктивном пределе $E(V)$ весовых банаховых пространств целых в $\mathbb{C}^N$ функций и произведение Дюамеля в $H(\Omega)$. Для неубывающей последовательности непрерывных функций $v_n : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, определим весовые банаховы пространства

$$E_n(V) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) \mid \|f\|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(v_n(z))} < +\infty \right\}$$

с нормой $\|\cdot\|_n$. Положим $E(V) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n(V)$. Введем в $E(V)$ топологию индуктивного предела пространств $E_n(V)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $E(V)$: $E(V) := \text{ind}_{n \rightarrow} E_n(V)$. Пусть $|t|_\infty := \max_{1 \leq j \leq N} |t_j|$, $t \in \mathbb{C}^N$. Относительно весов, задающих $E(V)$, делается два общих предположения:

$$\forall n \exists m(n) \geq n \exists C(n) \geq 0 :$$

$$\sup_{|t-z|_\infty \leq 1} v_n(t) + \log(1 + |z|) \leq \inf_{|t-z|_\infty \leq 1} v_{m(n)}(t) + C(n), \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

и

$$\forall n \exists k(n) \geq n \exists D(n) \geq 0 :$$

$$v_n(t_{\sigma,z}) \leq v_{k(n)}(t) + v_{k(n)}(z) + D(n), \quad t, z \in \mathbb{C}^N, \sigma \subset P_N.$$

Второе условие автоматически выполняется при $N = 1$, если функция v_1 ограничена снизу; оно связано со структурой операторов частного обратного сдвига и дает возможность (вместе с первым условием) определить в $E(V)$ операторы частного обратного сдвига. Семейство рассмотренных пространств $E(V)$ достаточно широкое. Оно содержит весовые пространства, реализующие сопряженные к пространствам голоморфных, бесконечно дифференцируемых функций и ультрадифференцируемых функций.

В § 2.2 описан коммутант системы $\mathcal{D}_0 = \{D_{j,0} \mid j \in P_N\}$ в алгебре всех линейных непрерывных в $E(V)$ операторов (он совпадает с коммутантом системы $\mathcal{T} := \{T_z \mid z \in \mathbb{C}^N\}$).

Теорема 2.2.1. *Предположим, что $\mathbb{C}[z]$ плотно в $E(V)$. Следующие утверждения равносильны:*

- (i) $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$.
- (ii) $B \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$.
- (iii) *Существует функционал $\varphi \in E(V)'$ такой, что $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E(V)$.*

Для любого оператора $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0) = \mathcal{K}(\mathcal{T})$ функционал $\varphi \in E(V)'$ такой, как в (iii), единственен.

В § 2.3 изучается умножение $\otimes$ в топологическом сопряженном $E(V)'$ к $E(V)$, связанное со сверточным представлением операторов из $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$. Алгебра $(E(V)', \otimes)$ изоморфна алгебре $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$, умножением в которой является композиция операторов. Основное внимание уделяется реализации $(E(V)', \otimes)$. В п. 2.3.3 вводятся и исследуются полизвездные относительно точки 0 множества. Для $z \in \mathbb{C}^N$ полагаем

$$\Pi(z) := [0, z_1] \times \cdots \times [0, z_N].$$

Множество Q в $\mathbb{C}^N$ назовем полизвездным относительно точки 0, если $\Pi(z) \subset Q$ для любого $z \in Q$. Класс областей с таким свойством содержит все произведения плоских областей, звездных относительно точки 0, полные области Рейнхарта с центром в точке 0. Если область Ω выпуклая, свойство полизвездности равносильно тому, что опорные функции последовательности выпуклых компактов, исчерпывающих Ω изнутри, удовлетворяют второму предположению о весах (это подтверждает его естественность).

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. В п. 2.3.4 в $H(\Omega)$ введено произведение Дюамеля $*$: для $g, h \in H(\Omega)$

$$(g * h)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_1 \cdots \partial t_N} \int_0^{t_N} \cdots \int_0^{t_1} g(t - \xi) h(\xi) d\xi_1 \cdots d\xi_N, \quad t \in \Omega.$$

Пространство $H(\Omega)$ является алгеброй с умножением $*$. Для $N = 1$ в $H(\Omega)$ оно определено и изучено Н. Уигли [80]. Умножения $\otimes$ и $*$ связаны следующим образом. Если область Ω дополнительно выпуклая, то опорные функции последовательности выпуклых компактов, исчерпывающих Ω изнутри, задают пространство $E_\Omega := E(V)$. Преобразование Лапласа $\mathcal{F}$ является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного $H(\Omega)'_b$ на E_Ω . Через $\mathcal{F}'$ обозначим сопряженное к $\mathcal{F}$ отображение относительно дуальных пар $(H(\Omega)', H(\Omega))$ и (E_Ω, E'_Ω) .

Теорема 2.3.2. *Пусть Ω — выпуклая полизвездная относительно точки 0 область в $\mathbb{C}^N$. Тогда $\mathcal{F}'$ — изоморфизм алгебры $(E'_\Omega, \otimes)$ на алгебру $(H(\Omega), *)$.*

В § 2.4 проанализирована связь операторов Поммье

$$D_z := D_{1,z} \cdots D_{N,z}, \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

с многомерным вариантом интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева, использованной В.П. Громовым [3] при разложении в ряды экспонент аналитических функций двух комплексных переменных, В.В. Напалковым [32, гл. IV, § 19] для решения уравнений свертки в полиобластях.

В § 2.5 продолжено изучение произведения Дюамеля в $H(\Omega)$ без дополнительного предположения о выпуклости области Ω , полизвездной относительно точки 0. Для $k \in P_N$ введем операторы частного интегрирования

$$J_k(f)(z) := \int_0^{z_k} f(z_1, \dots, z_{k-1}, \xi, z_{k+1}, \dots, z_N) d\xi, \quad z \in \Omega, \quad f \in H(\Omega)$$

(интеграл берется по отрезку $[0, z_k]$). Все они линейны и непрерывны в $H(\Omega)$ и попарно перестановочны. Для функции $g \in H(\Omega)$ введем оператор Дюамеля

$$S_g(f) := f * g, \quad f \in H(\Omega).$$

Он линеен и непрерывен в $H(\Omega)$.

Символом $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ обозначим коммутант множества $\mathcal{J} = \{J_k \mid k \in P_N\}$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$ с умножением

— композицией операторов; $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ является ее подалгеброй. В п. 2.4.1 описано множество $\mathcal{K}(\mathcal{J})$.

Теорема 2.5.2. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 .

- (i) Если $A \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$, то существует единственная функция $g \in H(\Omega)$, для которой $A = S_g$.
- (ii) $S_g \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$ для любой функции $g \in H(\Omega)$.

В п. 2.5.2 доказана изоморфность пространства $H(\Omega)$ и $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ в следующем смысле.

Теорема 2.5.3. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 . Отображение $\chi(g) := S_g$ является топологическим изоморфизмом пространства $H(\Omega)$ на $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ с топологией ограниченной сходимости и изоморфизмом алгебры $(H(\Omega), *)$ на алгебру $\mathcal{K}(\mathcal{J})$.

В п. 2.5.3 установлен критерий обратимости элемента алгебры $(H(\Omega), *)$.

Теорема 2.5.4. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 , $g \in H(\Omega)$. Следующие утверждения равносильны

- (i) Оператор $S_g : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ обратим.
- (ii) Элемент g обратим в алгебре $(H(\Omega), *)$.
- (iii) $g(0) \neq 0$.

При $N = 1$ теоремы 2.5.2 и 2.5.4 хорошо известны. И. Райчинов [35] описал коммутант оператора интегрирования в пространстве $H(\Omega)$ и установил условие обратимости оператора из коммутанта для области Ω в $\mathbb{C}$, звездной относительно точки 0 . Впоследствии Ю.А. Кирютенко [21] получил подобные результаты для односвязной звездообразной области в $\mathbb{C}$, содержащей 0 . Н. Уигли [80], предполагая звездность $\Omega \subset \mathbb{C}$ относительно точки 0 , установил критерий обратимости элемента в алгебре $(H(\Omega), *)$.

В данной диссертации для доказательства $*$ -обратимости функции из $H(\Omega)$, как и в [80], привлекается ряд Неймана. Его использование оказа-

лось возможным вследствие установленного в лемме 2.5.1 представления произведения $f * g$ в виде суммы, содержащей одно внеинтегральное слагаемое $g(0)f$, и слагаемые с интегралами хотя бы по одной переменной от функции, не зависящей от производных f . Это позволило и в многомерной ситуации получить оценки, обычно применяемые при доказательстве квазинильпотентности оператора Вольтерра в банаховых пространствах. Отметим

Следствие 2.5.3. *Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки θ . Алгебра $(H(\Omega), *)$ локальна. Ее единственным максимальным идеалом является множество всех $*$ -необратимых элементов в ней.*

Подобный результат для пространства Харди в полидиске получен другим методом в статье [73, следствие 3]. В [73] он доказан с помощью рассмотрения соответствующего пространства функций со значениями в таком же банаховом пространстве с числом переменных, меньшем на единицу, и последующего сведения к одномерной ситуации.

Также получены следствия для двойственной ситуации в случае, когда область Ω дополнительно выпуклая ($\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1).

Теорема 2.5.5. *Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки θ , $\varphi \in E'_\Omega$. Оператор B_φ обратим в E_Ω тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbf{1}) \neq 0$.*

Основные результаты второй главы опубликованы в [64], [66].

В третьей главе предыдущие результаты применяются к проблеме, исходным пунктом которой является задача Коши для дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами для функций одной переменной. Как известно, решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям в точке θ , можно представить в виде произведения Дюамеля правой части и такого решения для правой части, тождественно равной 1 (см, напри-

мер, [25, гл. VI, п.п. 81, 84], [22], [51, гл. III, § 13; гл. IV, § 19]). Она обосновывается с помощью операционного [25] или операторного [51] исчисления. В статье И.Л. Когана [22] (в одномерной ситуации) эта формула распространена на более широкие классы правых частей, а доказательство проводится с помощью сверточных алгебр обобщенных функций. В работе [17] данное равенство доказано для классов бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций на отрезке или интервале в $\mathbb{R}$, содержащем точку 0. В [17] использовался другой метод: доказывалась возможность деления на многочлен в пространстве аналитических функционалов так, что частное обращается в нуль на соответствующих мономах и выражается в виде произведения $\circledast$ в соответствующей алгебре аналитических функционалов. Затем полученное равенство посредством сопряженного к преобразованию Лапласа переводилось в нужное пространство. Возникает естественный вопрос о многомерных аналогах описанных результатов. Некоторый многомерный подход предпринят в данной главе. Термин «пространство аналитических функционалов» в контексте данного исследования восходит к работам В.А. Ткаченко, который провел цикл исследований в пространствах аналитических функционалов как линейных непрерывных функционалов на счетном индуктивном пределе весовых банаховых пространств целых функций одной комплексной переменной, задаваемых ρ -тригонометрически выпуклыми функциями (см., например, статьи [38]–[40] и библиографию в них).

Пусть $E(V)$ — счетный индуктивный предел весовых банаховых пространств целых функций в $\mathbb{C}^N$, как в главе 2. Зафиксируем ненулевые многочлены $q_j \in \mathbb{C}[t_j]$ переменной t_j степени $m_j \geq 1$ со старшими коэффициентами, равными 1, и положим

$$Q(t) := q_1(t_1) \cdots q_N(t_N),$$

$$Q_1(t) := 1, Q_j(t) := q_1(t_1) \cdots q_{j-1}(t_{j-1}), 2 \leq j \leq N, t \in \mathbb{C}^N.$$

Введем умножение функционалов из $E(V)'$ на многочлен $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$:

$$(p\varphi)(f) := \varphi(pf), f \in E(V), \varphi \in E(V)'.$$

Так как оператор $f \mapsto pf$ умножения на p линейен и непрерывен в $E(V)$ и $E(V)$ рефлексивно, то сопряженное к нему отображение $\varphi \mapsto p\varphi$ линейно и непрерывно в сильном сопряженном $E(V)'$.

Будем использовать весовые пространства целых в $\mathbb{C}^{N-1}$ функций такого же вида, как и $E(V)$. Они задаются сужениями исходных функций v_n , $n \in \mathbb{N}$, на координатные гиперплоскости. Для $j \in P_N$, $n \in \mathbb{N}$ определим функции $v_{n,j}(z_1, \dots, z_{N-1}) := v_n(z_1, \dots, z_{j-1}, 0, z_j, \dots, z_{N-1})$, $z \in \mathbb{C}^{N-1}$ и посредством последовательности $(v_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ зададим пространство $E(V^{(j)})$:

$$E_n(V^{(j)}) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^{N-1}) \mid \sup_{t \in \mathbb{C}^{N-1}} \frac{|f(t)|}{\exp(v_{n,j}(t))} < +\infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$E(V^{(j)}) := \text{ind}_{n \rightarrow} E_n(V^{(j)})$. Для всех $j \in P_N$ последовательности $(v_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют исходным предположениям о весах в $\mathbb{C}^{N-1}$.

Для $j \in P_N$, $t \in \mathbb{C}^N$ положим $t^{(j)} := (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N)$. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $j \in P_N$, $g \in E(V^{(j)})$, многочлена $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$ функция $p(t_1, \dots, t_N)g(t^{(j)})$ принадлежит $E(V)$. В следующей теореме доказана однозначная разрешимость задачи деления в $E(V)'$ при дополнительных условиях на частное.

Теорема 3.1.1. *Для любых $\psi \in E(V)'$, $\nu_{j,k} \in E(V^{(j)})'$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$, существует единственный функционал $\varphi \in E(V)'$ такой, что $Q\varphi = \psi$ и для любых $g_j \in E(V^{(j)})$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$*

$$\varphi(t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = \nu_{j,k}(g_j).$$

Основным звеном доказательства теоремы 3.1.1 является возможность «деления с остатком» на многочлен Q в пространстве $E(V)$. Ранее такой подход в идейно близкой ситуации использовался В.М. Трутневым [41]. В [41] деление с остатком голоморфных функций на многочлен Вейерштрасса в области Ω в $\mathbb{C}^N$ посредством решения вспомогательной задачи для функционалов применено к решению задачи Коши для оператора свертки в пространстве целых функций экспоненциального типа. Последнее изоморфно сильному сопряженному к пространству всех

функций, голоморфных в Ω . Деление с остатком проводится в [41] с помощью интегрального представления многочлена Эрмита по выделенной переменной. Такое представление многочлена Эрмита используется и в этой работе. Отметим и другие подходы к доказательству подобных результатов о делении с остатком в классах голоморфных функций. Например, лемма о делении с остатком на многочлен Вейерштрасса в пространстве всех ростков функций, голоморфных в точке 0, в монографии Г. Грауэрта, К. Фритцше [62, гл. 3] установлена с помощью теории банаховых алгебр.

Приведем второй основной результат этой главы о представлении решения исходной задачи деления с нулевыми условиями в виде обобщенного произведения Дюамеля $\circledast$ правой части и такого решения для правой части, совпадающей с дельта-функцией.

Определим функционал $\delta_0(f) := f(0)$, линейный и непрерывный на $E(V)$.

Теорема 3.1.2. *Если $\frac{\delta_0}{Q} \in E(V)'$ — решение уравнения $Q\varphi = \delta_0$, для которого*

$$\left(\frac{\delta_0}{Q}\right)_t (t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = 0, \quad 0 \leq k < m_j, g_j \in E(V^{(j)}), j \in P_N,$$

то для любого $\psi \in E(V)'$ произведение $\psi \circledast \frac{\delta_0}{Q}$ является решением уравнения $Q\varphi = \psi$ таким, что

$$\left(\psi \circledast \frac{\delta_0}{Q}\right)_t (t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = 0$$

для любых $0 \leq k < m_j, g_j \in E(V^{(j)}), j \in P_N$.

Теоремы 3.1.1 и 3.1.2 применены к некоторым задачам Коши в реализациях $E(V)'$ в виде конкретных пространств с помощью сопряженного к преобразованию Лапласа или обобщенного преобразования Лапласа. К ним относятся пространство функций, голоморфных в выпуклой поллизвездной относительно точки 0 области, и уравнение в частных производных в нем; пространство всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций и уравнение с

производными Гельфонда–Леонтьева; пространства бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций в выпуклых полицилиндрических областях в $\mathbb{R}^N$ и уравнение в частных производных в этих пространствах.

Основные результаты третьей главы опубликованы в [65].

Настоящее исследование выполнено в Южном федеральном университете при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-21-00062, <https://rscf.ru/project/25-21-00062/>).

Глава 1

Система операторов обратного сдвига в пространстве всех функций, голоморфных в полиобласти

1.1 Обозначения. Основные операторы

Для $N \in \mathbb{N}$ символом P_N обозначим множество $\{1, 2, \dots, N\}$. Определим замену переменных. Для произвольных $t, z \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$ введем точку $t_{\sigma, z} \in \mathbb{C}^N$:

$$(t_{\sigma, z})_j := \begin{cases} t_j, & j \in P_N \setminus \sigma, \\ z_j, & j \in \sigma. \end{cases}$$

Если $\sigma = \{k\}$, то будем писать $t_{k, z}$ вместо $t_{\sigma, z}$; $t_{\emptyset, z} = t$.

Положим $\partial_j := \frac{\partial}{\partial z_j}$, $j \in P_N$. Пусть $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N, \beta = (\beta_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N$ считаем, что $\alpha \leq \beta$, если $\alpha_j \leq \beta_j$, $1 \leq j \leq N$. Как обычно, полагаем $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}$ (считаем, что $c^0 = 1$ для любого $c \in \mathbb{C}$), $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_N!$, $z \in \mathbb{C}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Далее, до конца этого параграфа, Ω — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^N$: $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — области в $\mathbb{C}$.

Определение 1.1.1. Пусть функция f голоморфна в области Ω . Для $j \in P_N$, $z, t \in \Omega$ положим

$$D_{j, z}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(t_{j, z})}{t_j - z_j}, & t_j \neq z_j, \\ \partial_j f(t_{j, z}), & t_j = z_j. \end{cases}$$

Установим некоторые свойства операторов $D_{j, z}$. Для области $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ символ $H(\Omega)$ обозначает пространство всех функций, голоморфных в

Ω , с топологией равномерной сходимости на компактах Ω . Для локально выпуклого пространства E через $\mathcal{L}(E)$ обозначим пространство всех линейных непрерывных операторов в E , символом E' — топологическое сопряженное к E , а через E'_b — сильное сопряженное к E пространство.

Пусть M_j — оператор умножения на j -ую переменную:

$$M_j(f)(t) := t_j f(t), \quad t \in \Omega, \quad f \in H(\Omega);$$

I — тождественный оператор. Ясно, что $M_j \in \mathcal{L}(H(\Omega))$, $j \in P_N$. Определим орты $e^{(j)} \in \mathbb{C}^N$: $(e^{(j)})_k := \delta_{jk}$, $j, k \in P_N$.

Для $z \in \mathbb{C}^N$, $\varepsilon > 0$ введем поликруги

$$U(z, \varepsilon) := \{t \in \mathbb{C}^N \mid |t_j - z_j| < \varepsilon, \quad j \in P_N\},$$

$$\overline{U}(z, \varepsilon) := \{t \in \mathbb{C}^N \mid |t_j - z_j| \leq \varepsilon, \quad j \in P_N\}.$$

Лемма 1.1.1. Пусть Ω — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^N$.

(i) $D_{j,z} \in \mathcal{L}(H(\Omega))$ для любых $z \in \Omega$, $j \in P_N$.

(ii) Для любых $z \in \Omega$, $j, k \in P_N$ в $H(\Omega)$ выполняется равенство

$$D_{j,z} D_{k,z} = D_{k,z} D_{j,z}.$$

(iii) Для всех $j \in P_N$, $\lambda, z \in \Omega$ в $H(\Omega)$ выполняется равенство

$$D_{j,z} - D_{j,\lambda} = (z_j - \lambda_j) D_{j,z} D_{j,\lambda}.$$

(iv) Для любых $j \in P_N$, $z \in \Omega$ оператор $M_j - z_j I$ является линейным непрерывным правым обратным к $D_{j,z} : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ (отсюда, в частности, следует, что $D_{j,z} : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ сюръективен).

(v) Для всех $j \in P_N$, $z \in \Omega$ семейство $D_{j,\lambda} \in \mathcal{L}(H(\Omega))$, $\lambda \in \Omega \setminus \{z\}$, сходится к $D_{j,z}$ при $\lambda \rightarrow z$ равномерно на любом ограниченном множестве в $H(\Omega)$.

(vi) Для любых $j \in P_N$, $z \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$ в $H(\Omega)$ существует $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{j,z+te^{(j)}}(f) - D_{j,z}(f)}{t}$, равный $D_{j,z}^2(f)$.

Доказательство. (i): Функция f голоморфна на множестве $M := \{t \in \Omega \mid t_j \neq z_j\}$. Найдется $\varepsilon > 0$, для которого $\overline{U}(z, \varepsilon) \subset \Omega$. Поскольку для всех $t \in \overline{U}(z, \varepsilon) \setminus M$

$$\frac{f(t) - f(t_{j,z})}{t_j - z_j} = \frac{1}{t_j - z_j} \int_{z_j}^{t_j} \partial_j(f)(t_1, \dots, t_{j-1}, \xi, t_{j+1}, \dots, t_N) d\xi, \quad t \in \Omega \setminus M$$

(интеграл берется по отрезку $[z_j, t_j]$), то $D_{j,z}(f)$ локально ограничена в $\Omega \setminus M$. По теореме о стирании особенностей [47, гл. 3, § 7, теорема 2] функция $D_{j,z}(f)$ голоморфна в Ω . Покажем, что линейный оператор $D_{j,z}$ непрерывен в $H(\Omega)$. Зафиксируем компакт K в Ω . Найдется область $Q \subset \Omega$ такая, что $K \subset Q$, $t_{j,z} \in Q$ для любого $t \in K$, и $\overline{Q}$ — компакт в Ω . Пусть δ — расстояние от K до $\mathbb{C} \setminus Q$; $\delta > 0$. Тогда

$$\sup_{t \in K} |D_{j,z}(f)(t)| \leq \sup_{t \in \partial Q} \frac{|f(t) - f(t_{j,z})|}{|t_j - z_j|} \leq \frac{2}{\delta} \sup_{w \in \overline{Q}} |f(w)|.$$

Значит, $D_{j,z} \in \mathcal{L}(H(\Omega))$.

(ii): Пусть $f \in H(\Omega)$. Равенство $D_{j,z}D_{k,z}(f)(t) = D_{k,z}D_{j,z}(f)(t)$ выполняется для всех $t \in \Omega$, для которых $t_j \neq z_j$ и $t_k \neq z_k$. Вследствие голоморфности функций $D_{j,z}D_{k,z}(f)$ и $D_{k,z}D_{j,z}(f)$ в Ω , оно справедливо во всей области Ω .

Равенство (iii) следует из аналогичного одномерного равенства, установленного в [10, замечание 5]. (Оно является аналогом тождества Гильберта.)

Утверждение (iv) проверяется непосредственно.

(v): Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $\overline{U}(z, \varepsilon) \subset \Omega$. Зафиксируем $f \in H(\Omega)$. Так как функция $(t, z) \mapsto D_{j,z}(f)(t)$ аналитическая по каждой переменной t_k и z_k при фиксированных остальных, то по теореме Гартогса она аналитическая в $\Omega \times \Omega$ (по (t, z)). Отсюда следует, что множество $V := \{D_{j,\lambda}(f) : \lambda \in \overline{U}(z, \varepsilon)\}$ ограничено в $H(\Omega)$. Следовательно, V относительно компактно в $H(\Omega)$. Поскольку $D_{j,\lambda}(f) \rightarrow D_{j,z}(f)$ при $\lambda \rightarrow z$ поточечно в Ω , то $D_{j,\lambda}(f) \rightarrow D_{j,z}(f)$ при $\lambda \rightarrow z$ и в $H(\Omega)$. По теореме Банаха–Штейнгауза $\{D_{j,\lambda} \mid \lambda \in \overline{U}(z, \varepsilon)\}$ при $\lambda \rightarrow z$ сходится к $D_{j,z}$

равномерно на каждом ограниченном множестве в $H(\Omega)$.

Утверждение (vi) вытекает из равенства (iii) и (v). $\triangleright$

Вследствие попарной перестановочности операторов $D_{j,z}$ естественно для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $z \in \Omega$ ввести операторы D_z^α , действующие в $H(\Omega)$:

$$D_z^\alpha := D_{1,z}^{\alpha_1} D_{2,z}^{\alpha_2} \cdots D_{N,z}^{\alpha_N}.$$

Из леммы 1.1.1 (i) следует, что $D_z^\alpha D_z^\beta = D_z^{\alpha+\beta}$ для любых $z \in \Omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$.

Следуя Э. Биндерману [52], с операторами D_0^α , $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, как и в случае $N = 1$, ассоциируем сдвиги T_z , $z \in \Omega$. Они определяются так, чтобы для многочленов f выполнялось равенство

$$T_z(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} z^\alpha D_0^\alpha(f),$$

если Ω содержит 0.

Определение 1.1.2. Для $z \in \Omega$, $j \in P_N$, $f \in H(\Omega)$ положим

$$T_{j,z}(f)(t) := \begin{cases} \frac{t_j f(t) - z_j f(t_{j,z})}{t_j - z_j}, & t_j \neq z_j, \\ z_j \partial_j f(t_{j,z}) + f(t_{j,z}), & t_j = z_j. \end{cases}$$

Поскольку $T_{j,z} = D_{j,z} M_j$, то $T_{j,z} \in \mathcal{L}(H(\Omega))$ для любых $j \in P_N$, $z \in \Omega$.

Лемма 1.1.2. Для любых $j, k \in P_N$, $z, \lambda \in \Omega$

- (i) $T_{j,z} = I + z_j D_{j,z}$.
- (ii) $T_{j,z} T_{k,z} = T_{k,z} T_{j,z}$.
- (iii) $D_{j,z} T_{j,\lambda} = T_{j,\lambda} D_{j,z}$.

Доказательство. (i): Вследствие леммы 1.1.1 (iv)

$$T_{j,z} = D_{j,z} M_j = D_{j,z} (M_j - z_j I + z_j I) = I + z_j D_{j,z}.$$

Утверждения (ii) и (iii) вытекают из равенства (i) этой леммы и леммы 1.1.1 (ii). $\triangleright$

Для $z \in \Omega$ введем оператор $T_z := T_{1,z} \cdots T_{N,z}$. Положим

$$t^1 := t_1 \cdots t_N, \quad f_t(z) := \frac{1}{(t-z)^1}, \quad z, t \in \mathbb{C}^N, \quad z_j \neq t_j, \quad j \in P_N;$$

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_N^{\alpha_N}}, \quad \varphi_\alpha(f) := \partial^\alpha f(0), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Ясно, что $\varphi_\alpha \in H(\Omega)'$.

Пусть $f_\beta(t) := t^\beta$, $t \in \mathbb{C}^N$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Справедливы равенства $D_0^\alpha(f_\beta) = f_{\beta-\alpha}$, если $\alpha \leq \beta$, и $D_0^\alpha(f_\beta) = 0$ в противном случае.

Для множества $\sigma \subset P_N$ через $|\sigma|$ обозначим количество элементов σ ; $|\emptyset| = 0$. Далее $D_z := D_{1,z} \cdots D_{N,z}$.

Лемма 1.1.3. (i) $D_z(f)(t) = \frac{1}{(t-z)^1} \sum_{\sigma \subset P_N} (-1)^{|\sigma|} f(t_{\sigma,z})$, $f \in H(\Omega)$, $t, z \in \Omega$, $t_j \neq z_j$, $j \in P_N$.

(ii) $T_z(f)(t) = \frac{1}{(t-z)^1} \sum_{\sigma \subset P_N} (-1)^{|\sigma|} t_{\sigma,z}^1 f(t_{\sigma,z})$, $f \in H(\Omega)$, $t, z \in \Omega$, $t_j \neq z_j$, $j \in P_N$.

(iii) $D_z(f)(t) = D_t(f)(z)$ и $T_z(f)(t) = T_t(f)(z)$ для любых $t, z \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$.

Доказательство. Равенства (i) и (ii) проверяются индукцией по N . Приведем доказательство соотношения (ii). При $N = 1$ оно верно. Предположим, что это равенство справедливо для $N - 1$ при $N \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} T_z(f)(t) &= T_{N,z}(T_{1,z} \cdots T_{N-1,z}(f))(t) \\ &= \frac{1}{t_N - z_N} \left(\frac{t_N}{(t_1 - z_1) \cdots (t_{N-1} - z_{N-1})} \sum_{\nu \subseteq P_{N-1}} (-1)^{|\nu|} \left(\prod_{j \in P_{N-1} \setminus \nu} t_j \right) \right. \\ &\quad \cdot \left(\prod_{k \in \nu} z_k \right) f(t_{\nu,z}) - \frac{z_N}{(t_1 - z_1) \cdots (t_{N-1} - z_{N-1})} \\ &\quad \cdot \sum_{\nu \subseteq P_{N-1}} (-1)^{|\nu|} \left(\prod_{j \in P_{N-1} \setminus \nu} t_j \right) \left(\prod_{k \in \nu} z_k \right) f(t_{\nu \cup \{N\}, z}) \Big) \\ &= \frac{1}{(t-z)^1} \sum_{\sigma \subseteq P_N} (-1)^{|\sigma|} t_{\sigma,z}^1 f(t_{\sigma,z}). \end{aligned}$$

Равенства в (iii) следуют из (i) и (ii). $\triangleright$

Лемма 1.1.4. (i) Пусть $0 \in \Omega$.

(i1) Для всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $z \in \Omega$

$$T_z(f_\alpha) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} z^\beta f_{\alpha-\beta} = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} z^\beta D_0^\beta(f_\alpha).$$

(i2) Для любых многочлена f , $z \in \Omega$

$$T_z(f) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} z^\beta D_0^\beta(f),$$

где последняя сумма содержит конечное число слагаемых.

В частности, $T_z(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — функция, равная тождественно 1.

(ii) Пусть области Ω_j , $j \in P_N$, односвязны и содержат 0. Тогда для любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $f \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$ справедливо равенство

$$D_0^\alpha(f)(z) = \frac{1}{\alpha!} \varphi_\alpha(T_z(f)).$$

(iii) Если $\Omega_j \neq \mathbb{C}$ для всех $j \in P_N$, $t_j \in \mathbb{C} \setminus \Omega_j$, $j \in P_N$, то

$$T_z(f_t) = \frac{t^1}{(t-z)^1} f_t, \quad z \in \Omega.$$

(iv) Для любых $\varphi \in H(\Omega)'$, $f \in H(\Omega)$ функция $z \mapsto \varphi(T_z(f))$ голоморфна в Ω по z .

Доказательство. Докажем (i1). Для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $z, t \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} T_z(f_\alpha)(t) &= \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} z_1^{\beta_1} t_1^{\alpha_1-\beta_1} \right) \cdots \left(\sum_{\beta_N=0}^{\alpha_N} z_N^{\beta_N} t_N^{\alpha_N-\beta_N} \right) \\ &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} z^\beta t^{\alpha-\beta} = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} z^\beta D_0^{\alpha-\beta}(f_\alpha)(t). \end{aligned}$$

Равенство (i2) следует из (i1).

(ii): Для любых $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$, $z \in \Omega$, учитывая леммы 1.1.3 (iii) и (i1)

$$(\varphi_\alpha)_t(T_z(f_\gamma)(t)) = (\varphi_\alpha)_t(T_t(f_\gamma)(z))$$

$$= (\varphi_\alpha)_t \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} t^\beta D_0^\beta(f_\gamma)(z) \right) = D_0^\alpha(f_\gamma)(z).$$

Поскольку все области Ω_j односвязны, то множество многочленов плотно в $H(\Omega)$. Так как линейные операторы T_z и D_0^α непрерывны в $H(\Omega)$, то равенство в (ii) справедливо для любой функции $f \in H(\Omega)$.

Равенства (iii) проверяются непосредственно.

(iv): Вследствие леммы 1.1.1 (vi), с учетом равенства $T_{j,z} = D_{j,z}M_j$, функция $\Phi(z) := \varphi(T_z(f))$ голоморфна в каждой точке Ω по каждой переменной, причем

$$\partial_j \Phi(z) = \varphi \left((T_{1,z} \cdots T_{j-1,z} D_{j,z}^2 M_j T_{j+1,z} \cdots T_{N,z})(f) \right), \quad z \in \Omega.$$

Следовательно, функция Φ голоморфна в Ω .

▷

Замечание 1.1.1. В приведенных конструкциях важную роль играют операторы сдвига T_z , ассоциированные с $D_{j,0}$. По-видимому, одним из первых операторов сдвига для линейного оператора в локально выпуклом пространстве ввел Ж. Дельсарт [56], [57]. Он, используя обобщение ряда Тейлора, определил и применил их для дифференциальных операторов, в частности, для оператора Бесселя. Варианты операторов сдвига применяются в теории приближений (группы или полугруппы операторов в банаховом пространстве; операторы обобщенного сдвига, теория которых создана и развита Б.М. Левитаном [26] для изучения почти-периодических функций). Операторы обобщенного сдвига используются в теории уравнений типа свертки в пространствах аналитических функционалов, одной из реализаций которых являются пространства функций, аналитических в ρ -выпуклых областях. Они определяются с помощью оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева, заданного функцией Миттаг–Леффлера (см. [37]). В.П. Громов [2] применил обобщенные сдвиги, задаваемые системой операторов частного дифференцирования, для изучения циклических векторов в

пространствах голоморфных векторнозначных функций. З. Биндерман [52] ввел и изучил функциональные R -сдвиги для линейных операторов в комплексном линейном пространстве, обладающих линейным правым обратным. В основе их определения в [52] тоже лежит обобщение ряда Тейлора. Одномерный оператор сдвига T_z при описании линейных непрерывных операторов, перестановочных, соответственно, с оператором обобщенного интегрирования и оператором Поммье (и связанным с ним оператором) использовали В.А. Ткаченко [39], Н.Е. Линчук [28], Ю.С. Линчук [71], И. Димовски, В. Христов [58]. И.Ф. Красичков–Терновский [24, § 10] конструкции подобного рода в пространствах целых функций экспоненциального типа применял для решения задачи распространения спектрального синтеза. А.Б. Шишкин [48] определил операторы A -сдвига для линейного непрерывного оператора A в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$ и ввел и исследовал с их помощью операторы A -свертки.

1.2 Коммутант системы $\mathcal{D}_0$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$

1.2.1 Описание операторов из коммутанта в виде свертки

Пусть Ω — полицилиндрическая область, содержащая 0. Обозначим через $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ множество всех операторов $B \in \mathcal{L}(H(\Omega))$, для которых $BD_{j,0} = D_{j,0}B$ на $H(\Omega)$ для любого $j \in P_N$. Ясно, что $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ совпадает с множеством всех $B \in \mathcal{L}(H(\Omega))$, перестановочных с каждым оператором D_0^α , $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Пусть $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$ — множество всех операторов $B \in \mathcal{L}(H(\Omega))$ таких, что $BT_z = T_zB$ на $H(\Omega)$ для любого $z \in \Omega$.

Далее $\mathbb{C}[z]$ — множество всех многочленов от переменных $z_1, \dots, z_N$ над полем $\mathbb{C}$.

Замечание 1.2.1. Пусть $B : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ — линейный (не обязательно непрерывный) оператор и для всех $f \in \mathbb{C}[z]$, $j \in P_N$ выпол-

няется равенство $BD_{j,0}(f) = D_{j,0}B(f)$. Тогда для любого многочлена $f = \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} a_\beta f_\beta$, $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$, функция $B(f)$ является многочленом такого же вида: $B(f) = \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} c_\beta f_\beta$. Действительно, ведь для каждого $j \in P_N$

$$D_{j,0}^{\gamma_j+1}(B(f)) = \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} a_\beta D_{j,0}^{\gamma_j+1}(f_\beta) = 0.$$

Лемма 1.2.1. Для любого компакта K в Ω семейство $\{T_z \mid z \in K\}$ равностепенно непрерывно в $\mathcal{L}(H(\Omega))$.

Доказательство. Для $f \in H(\Omega)$ функция $(t, z) \mapsto T_z(f)(t) = T_t(f)(z)$ голоморфна в $\Omega \times \Omega$ (по (t, z)). Значит, для любого компакта G в Ω

$$\sup_{z \in K} \sup_{t \in G} |T_z(f)(t)| < +\infty.$$

Поэтому множество $\{T_z \mid z \in K\}$ поточечно ограничено. По принципу равномерной ограниченности [36, гл. IV, теорема 3] оно равностепенно непрерывно в $\mathcal{L}(H(\Omega))$. $\triangleright$

Для $z \in \Omega$ введем дельта-функцию

$$\delta_z(f) := f(z), \quad f \in H(\Omega).$$

Ясно, что $\delta_z \in H(\Omega)'$, $z \in \Omega$.

Теорема 1.2.1. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие θ . Следующие условия равносильны:

- (i) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.
- (ii) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$.
- (iii) Существует функционал $\varphi \in H(\Omega)'$ такой, что

$$B(f)(z) = \varphi(T_z(f)), \quad z \in \Omega, \quad f \in H(\Omega).$$

Для любого оператора $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ функционал $\varphi \in H(\Omega)'$, как в (iii), единственен.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii): Пусть $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$. По лемме 1.1.4 (i) и замечанию 1.2.1 для любого многочлена f (все суммы конечны)

$$T_z B(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} z^\alpha D_0^\alpha(B(f)) = B\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} z^\alpha D_0^\alpha(f)\right) = B T_z(f).$$

Поскольку $\mathbb{C}[z]$ плотно в $H(\Omega)$, то равенство $T_z B = B T_z$ выполняется и на $H(\Omega)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Пусть $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$. Тогда для любых $f \in H(\Omega)$, $z, t \in \Omega$ выполняются равенства

$$B T_z(f)(t) = T_z B(f)(t) = T_t B(f)(z). \quad (1.2.1)$$

Полагая $t := 0$, для $\varphi := \delta_0 B \in H(\Omega)'$ получим:

$$\varphi(T_z(f)) = B(f)(z), \quad f \in H(\Omega), \quad z \in \Omega.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Пусть $\varphi \in H(\Omega)'$ и $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $f \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$. По лемме 1.1.4 (iv) оператор B (линейно) действует в $H(\Omega)$. Найдутся компакт K в Ω , постоянная $C_1 > 0$, для которых

$$|\varphi(h)| \leq C_1 \sup_{t \in K} |h(t)|, \quad h \in H(\Omega).$$

Зафиксируем компакт G в Ω . По лемме 1.2.1 множество операторов $\{T_t \mid t \in K\}$ равномерно непрерывно. Следовательно, существуют компакт Q в Ω и постоянная $C_2 > 0$ такие, что для любого $t \in K$

$$\sup_{z \in G} |T_t(f)(z)| \leq C_2 \sup_{w \in Q} |f(w)|, \quad f \in H(\Omega).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{z \in G} |B(f)(z)| &= \sup_{z \in G} |\varphi(T_z(f))| \leq C_1 \sup_{z \in G} \sup_{t \in K} |T_z(f)(t)| \\ &= C_1 \sup_{t \in K} \sup_{z \in G} |T_t(f)(z)| \leq C_1 C_2 \sup_{w \in Q} |f(w)|, \quad f \in H(\Omega). \end{aligned}$$

Таким образом, B непрерывен в $H(\Omega)$.

Покажем теперь, что оператор B перестановочен с каждым оператором D_0^γ , $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$. Для этого воспользуемся равенствами (i) в лемме 1.1.4 и тем, что для $\gamma, \delta \in \mathbb{N}_0^N$ выполняются соотношения $D_0^\gamma(f_\delta) = f_{\delta-\gamma}$ при $\gamma \leq \delta$ и $D_0^\gamma(f_\delta) = 0$ в остальных случаях. Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Если $\gamma \leq \alpha$, то

$$B(D_0^\gamma(f_\alpha))(z) = \varphi(T_z(D_0^\gamma(f_\alpha)))$$

$$= \varphi(T_z(f_{\alpha-\gamma})) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha-\gamma} \varphi(f_{\alpha-\gamma-\beta}) z^\beta, \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

и

$$\begin{aligned} D_0^\gamma(B(f_\alpha)) &= D_0^\gamma \left(\sum_{0 \leq \delta \leq \alpha} \varphi(f_{\alpha-\delta}) f_\delta \right) \\ &= \sum_{\gamma \leq \delta \leq \alpha} \varphi(f_{\alpha-\delta}) f_{\delta-\gamma} = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha-\gamma} \varphi(f_{\alpha-\beta-\gamma}) f_\beta. \end{aligned}$$

Пусть теперь соотношение $\gamma \leq \alpha$ не выполняется. Тогда $B(D_0^\gamma(f_\alpha)) = 0$. Поскольку для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, для которого $\beta \leq \alpha$, соотношение $\gamma \leq \beta$ также не выполняется, то (оператор D_0^γ действует по z)

$$\begin{aligned} D_0^\gamma(B(f_\alpha)) &= (D_0^\gamma)_z \left(\varphi \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} z^\beta f_{\alpha-\beta} \right) \right) \\ &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} D_0^\gamma(f_\beta) \varphi(f_{\alpha-\beta}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство $BD_0^\gamma = D_0^\gamma B$ выполняется на каждом мономе, а значит, и в $H(\Omega)$.

Наконец, для оператора $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0) = \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$ функционал $\varphi \in E'$, для которого $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$, удовлетворяет равенству $\varphi = \delta_0 B$ и поэтому единственен. Теорема доказана.

▷

Далее будет показано, что каждый оператор из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ имеет интегральное представление, аналогичное одномерному. Приведем примеры некоторых из них. Для $\varphi \in H(\Omega)'$ полагаем $B_\varphi(f)(z) := \varphi(T_z(f))$, $z \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$.

Пример 1.2.1. Если $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $\varphi(f) = \frac{1}{\alpha!} \varphi_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0)$, то $B_\varphi = D_0^\alpha$ в силу леммы 1.1.4.

Если $\varphi = \delta_z$, то $B_\varphi = T_z$. Действительно, для $f \in H(\Omega)$, $t \in \Omega$

$$B_\varphi(f)(t) = (\delta_z)_u(T_t(f)(u)) = T_t(f)(z) = T_z(f)(t)$$

(функционал δ_z действует по u).

Пример 1.2.2. Вследствие предыдущего примера для $\varphi = \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}}{\alpha!} \varphi_{\alpha}$, $c_{\alpha} \in \mathbb{C}$ (сумма конечна) $B_{\varphi} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} D_0^{\alpha}$. Введем операторы такого типа бесконечного порядка.

Пусть $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_j\} \subset \Omega_j$, $R_j \in (0, +\infty]$, $j \in P_N$. Для чисел $b_{n,\alpha} = b_{n,\alpha,1} \cdots b_{n,\alpha,N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, где

$$b_{n,\alpha,j} := \begin{cases} R_j^{-\alpha_j} e^{\alpha_j/n}, & R_j < +\infty, \\ e^{-\alpha_j n}, & R_j = +\infty, \end{cases}$$

определим пространство (мульти)последовательностей

$$\Lambda_R := \left\{ c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_{\alpha}| b_{n,\alpha} < +\infty \right\}.$$

Если R_j конечны для всех $j \in P_N$, то Λ_R совпадает с множеством всех тех последовательностей $(c_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$, для которых

$$\limsup_{|\alpha| \rightarrow \infty} \left(\frac{|c_{\alpha}|}{R_1^{\alpha_1} \cdots R_N^{\alpha_N}} \right)^{1/|\alpha|} < 1.$$

Пусть $c \in \Lambda_R$. Покажем, что ряд $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_{\alpha}}{\alpha!} \varphi_{\alpha}$ абсолютно сходится в $H(\Omega)'_b$ к некоторому $\varphi \in H(\Omega)'$ и

$$B_{\varphi}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_{\alpha} D_0^{\alpha}(f), \quad f \in H(\Omega)$$

(ряд абсолютно сходится в $H(\Omega)$). Выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $A_1 = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_{\alpha}| b_{n,\alpha} < +\infty$. Возьмем ограниченное в $H(\Omega)$ множество Q . В силу неравенств Коши существует $A_2 > 0$, для которого

$$\frac{|f^{(\alpha)}(0)|}{\alpha!} \leq A_2 b_{n+1,\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \quad f \in Q.$$

Поскольку

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{|c_{\alpha}|}{\alpha!} \sup_{f \in Q} |\varphi_{\alpha}(f)| \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} A_1 A_2 \frac{b_{n+1,\alpha}}{b_{n,\alpha}} < +\infty,$$

то ряд $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_{\alpha} \varphi_{\alpha}$ абсолютно сходится в $H(\Omega)'_b$ к некоторому $\varphi \in H(\Omega)'$.

При этом для $f \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$

$$B_{\varphi}(f)(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_{\alpha}}{\alpha!} \varphi_{\alpha}(T_z(f)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_{\alpha} D_0^{\alpha}(f)(z),$$

причем вследствие леммы 1.2.1 ряд $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha(f)$ абсолютно сходится в $H(\Omega)$.

Если $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |c_\alpha|^{\frac{1}{|\alpha|}} = 0$, то ряд $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha(f)$ абсолютно сходится в $H(\Omega)$ для любой области Ω рассматриваемого вида.

Ниже (см. следствие 1.3.5) будет показано, что в случае $\Omega_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_j\}$, $R_j \in (0, +\infty]$, $j \in P_N$, любой оператор из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ является оператором бесконечного порядка, как в этом примере.

1.2.2 Интегральное представление B_φ в $H(\Omega)$

Для кривых L_j , $j \in P_N$, в $\mathbb{C}$ введем их прямое произведение $L := L_1 \times \cdots \times L_N$. Если γ — замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$, то $\text{Int } \gamma$ — внутренность γ , а $\text{Ext } \gamma$ — внешность γ в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Считаем всюду далее замкнутые жордановы кривые ориентированными положительно. Для замкнутых жордановых кривых L_j , $j \in P_N$, в $\mathbb{C}$ полагаем

$$\text{Int } L := \text{Int } L_1 \times \cdots \times \text{Int } L_N, \quad \text{Ext } L := \text{Ext } L_1 \times \cdots \times \text{Ext } L_N.$$

Если L_j — спрямляемые кривые, то для функции f , голоморфной в некоторой окрестности $L = L_1 \times \cdots \times L_N$ в $\mathbb{C}^N$, полагаем

$$\int_L f(t) dt := \int_{L_N} \cdots \int_{L_1} f(t) dt_1 \cdots dt_N$$

(этот интеграл понимается как повторный). Из свойства голоморфной зависимости интеграла от параметра (см., например, [47, часть II, гл. 1, § 3, п. 6, лемма] следует, что он существует. Из теоремы Фубини вытекает, что он не зависит от порядка интегрирования. (Это так для кусочно-гладких кривых, а аппроксимация кусочно-гладкими кривыми позволяет это установить и для произвольных спрямляемых кривых L_j .)

Приведем сведения о реализации сопряженного к $H(\Omega)$ с помощью преобразования Коши. Пусть $C\Omega := (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1) \times \cdots \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_N)$. Символом $H_0(C\Omega)$ обозначим пространство аналитических в $C\Omega$ функций, обращающихся в 0 во всех точках, хотя бы одна координата которых равна

∞ . Естественная индуктивная топология в $H_0(C\Omega)$ вводится следующим образом. Для $j \in P_N$ зафиксируем последовательность замкнутых спрямляемых жордановых кривых $\gamma_{j,n}$, $n \in \mathbb{N}$, обладающих следующими свойствами: 0 содержится во внутренней $\gamma_{j,1}$, $\overline{\text{Int } \gamma_{j,n}} \subset \text{Int } \gamma_{j,n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Int } \gamma_{j,n} = \Omega_j$. Такие кривые существуют. (Если область Ω_j отлична от $\mathbb{C}$, то в качестве этих кривых можно взять образы окружностей $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = e^{-1/n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, при однолистом отображении круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ на Ω_j .) Положим $\gamma_n := \gamma_{1,n} \times \cdots \times \gamma_{N,n}$, $G_{j,n} := \text{Ext } \gamma_{j,n}$, $G_n := G_{1,n} \times \cdots \times G_{N,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $H_0(G_n)$, $n \in \mathbb{N}$, — пространство всех голоморфных в G_n функций, равных 0 в точках, хотя бы одна координата которых равна ∞ . Оно наделяется топологией равномерной сходимости на компактах G_n . Тогда $H_0(C\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_0(G_n)$ и в $H_0(C\Omega)$ вводится топология индуктивного предела последовательности пространств Фреше $H_0(G_n)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно отображений $\rho_n : H_0(G_n) \rightarrow H_0(C\Omega)$, где $\rho_n(f)$ для $f \in H_0(G_n)$ — росток, содержащий f .

По [79] (см. также [32, § 12]) преобразование Коши

$$\mathcal{C}(\varphi)(t) := \tilde{\varphi}(t) := \varphi(f_t), \quad \varphi \in H(\Omega)',$$

является топологическим изоморфизмом $H(\Omega)'_b$ на $H_0(C\Omega)$. При этом точка t принадлежит некоторой области G_n и функция f_t голоморфна в $\text{Int } \gamma_n$ (n зависит от φ). Изоморфизм $\mathcal{C} : H(\Omega)' \rightarrow H_0(C\Omega)$ индуцирует двойственность между $H(\Omega)$ и $H_0(C\Omega)$. Соответствующей билинейной формой, задающей ее, является

$$\langle f, g \rangle_\Omega := \mathcal{C}^{-1}(g)(f), \quad f \in H(\Omega), \quad g \in H_0(C\Omega).$$

Если $g \in H_0(G_n)$, то

$$\langle f, g \rangle_\Omega = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_L f(t)g(t)dt,$$

для любых замкнутых спрямляемых жордановых кривых L_j в Ω_j , $j \in P_N$, таких, что $\overline{\text{Int } \gamma_{j,n}} \subset \text{Int } L_j$.

Для любой функции $v \in H_0(C\Omega)$, голоморфной в области G_n , функция $v_1(t) = t^1 v(t)$ голоморфна в G_n . Если v в некоторой области $\{t \in \overline{\mathbb{C}}^N \mid |t_j| > R\}$, $R > 0$, раскладывается в ряд Лорана $v(t) = \frac{1}{t^1} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{t^\alpha}$, то $v_1(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{t^\alpha}$ в этой области (при естественном доопределении в точках, имеющих хотя бы одну координату, равную ∞). Докажем интегральное представление для операторов B_φ .

Лемма 1.2.2. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0; $\varphi \in H(\Omega)'$, функция $\tilde{\varphi}$ голоморфна в области G_n , $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любых замкнутых спрямляемых жордановых кривых L_j , $j \in P_N$, в $\Omega_j \cap G_{j,n}$, для всех $f \in H(\Omega)$, $z \in \text{Int } L$ выполняется равенство

$$B_\varphi(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_L \frac{t^1 f(t) \tilde{\varphi}(t)}{(t - z)^1} dt.$$

Доказательство. Вследствие представления для оператора T_z в лемме 1.1.3 для $z \in \text{Int } L$

$$\begin{aligned} (2\pi i)^N B_\varphi(f)(z) &= (2\pi i)^N \varphi(T_z(f)) \\ &= \int_L \frac{t^1 f(t) \tilde{\varphi}(t)}{(t - z)^1} dt + \sum_{\sigma \subset P_N, \sigma \neq \emptyset} (-1)^{|\sigma|} \int_L \frac{t_{\sigma,z}^1 f(t_{\sigma,z}) \tilde{\varphi}(t)}{(t - z)^1} dt. \end{aligned}$$

Для $k \in P_N$, $u \in \mathbb{C}^N$ ниже $u^{(k)} := (u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_N)$. Пусть $\sigma \neq \emptyset$ и $k \in \sigma$, $L^{(k)} := L_1 \times \cdots \times L_{k-1} \times L_{k+1} \times \cdots \times L_N$. Тогда для $z \in \text{Int } L$

$$\int_L \frac{t_{\sigma,z}^1 f(t_{\sigma,z}) \tilde{\varphi}(t)}{(t - z)^1} dt = \int_{L^{(k)}} \frac{(t_{\sigma,z}^{(k)})^1}{((t - z)^{(k)})^1} \left(\int_{L_k} \frac{z_k f(t_{\sigma,z}) \tilde{\varphi}(t)}{t_k - z_k} dt_k \right) dt^{(k)} = 0,$$

поскольку $\int_{L_k} \frac{z_k f(t_{\sigma,z}) \tilde{\varphi}(t)}{t_k - z_k} dt_k = 0$ по интегральной формуле Коши для неограниченной области. Следовательно,

$$B_\varphi(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_L \frac{t^1 f(t) \tilde{\varphi}(t)}{(t - z)^1} dt, \quad z \in \text{Int } L.$$

▷

Далее используется терминология теории двойственности для локально выпуклых пространств, как, например, в [36, глава 2].

Лемма 1.2.3. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0. Для $\varphi \in H(\Omega)'$ сопряженным $B'_\varphi : H_0(C\Omega) \rightarrow H_0(C\Omega)$ к оператору $B_\varphi : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ относительно дуальной пары $(H(\Omega), H_0(C\Omega))$ является оператор умножения на функцию $t^1 \tilde{\varphi}(t)$.

Доказательство. Найдется $m \in \mathbb{N}$, для которого функция $g(t) := t^1 \tilde{\varphi}(t)$ голоморфна в G_m . Для любых $n \geq m$, $f \in H(\Omega)$, $h \in H_0(G_n)$, $s > n$

$$\begin{aligned} \langle B_\varphi(f), h \rangle_\Omega &= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\gamma_s} h(z) \frac{1}{(2\pi i)^N} \left(\int_{\gamma_{s+1}} \frac{g(t)f(t)}{(t-z)^1} dt \right) dz \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\gamma_{s+1}} g(t)f(t) \left(\frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\gamma_s} \frac{h(z)}{(t-z)^1} dz \right) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\gamma_{s+1}} g(t)f(t)h(t)dt = \langle f, gh \rangle_\Omega. \end{aligned}$$

Таким образом, $B'_\varphi(h) = gh$. $\triangleright$

Следствие 1.2.1. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0. Для любого ненулевого функционала $\varphi \in H(\Omega)'$ оператор $B_\varphi : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ сюръективен.

Доказательство. Сопряженный к B_φ оператор умножения на $g(t) = t^1 \tilde{\varphi}(t)$ в $H_0(C\Omega)$ инъективен. Покажем, что его образ замкнут в $H_0(C\Omega)$. Для множества $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ положим $A^{-1} := \{\frac{1}{t} \mid t \in A\}$ (считаем, что $\frac{1}{\infty} := 0$). Преобразование $h \mapsto h(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_N})$ является топологическим изоморфизмом $H_0(C\Omega)$ на пространство $H_0((C\Omega)^{-1})$ ростков всех функций, голоморфных на компакте $(C\Omega)^{-1} := (C\Omega_1)^{-1} \times \cdots \times (C\Omega_N)^{-1}$ в $\mathbb{C}^N$, равных нулю в точке, если хотя бы одна ее координата равна 0. При этом $H_0((C\Omega)^{-1})$ наделяется топологией индуктивного предела последовательности пространств Фреше $H_0((G_n)^{-1})$, где $(G_n)^{-1} :=$

$(G_{1,n})^{-1} \times \cdots \times (G_{N,n})^{-1}$. С ней оно является (DFS)–пространством. Пусть $w(u) := g\left(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_N}\right)$, $S(f)(u) := w(u)f(u)$, $f \in H_0((C\Omega)^{-1})$. Найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $w \in H_0((G_m)^{-1})$. Так как топология каждого пространства $H_0((G_n)^{-1})$ мажорирует топологию поточечной сходимости всех производных, то $S(H_0((C\Omega)^{-1})) \cap H_0((G_n)^{-1})$ замкнуто в $H_0((G_n)^{-1})$ для любого $n \geq m$ (см., например, [46, предложение 3, гл. 1, §1]). Отсюда следует [4, §2.9] замкнутость образа оператора S в $H_0((C\Omega)^{-1})$. В силу [49, 8.6.13] и того, что $H(\Omega)$ является монтелевским пространством Фреше, оператор $B_\varphi : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ сюръективен. $\triangleright$

Замечание 1.2.2. При $N = 1$ каждый ненулевой оператор $B_\varphi : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ имеет линейный непрерывный правый обратный, поскольку в этом случае ядро этого оператора конечномерно [28].

1.2.3 Обратимость оператора B_φ в $H(\Omega)$

Теорема 1.2.2. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0. Следующие утверждения равносильны:

- (i) Оператор $B_\varphi : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ обратим.
- (ii) Функция $t^1 \tilde{\varphi}(t)$ не имеет нулей в $C\Omega$.

Доказательство. Пусть $g(t) := t^1 \tilde{\varphi}(t)$, $w(u) := g\left(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_N}\right)$. Оператор $B_\varphi : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $S(f)(u) = w(u)f(u)$ в $H_0((C\Omega)^{-1})$ (см. доказательство следствия 1.2.1). Обратимость S влечет, что w не обращается в 0 в $(C\Omega)^{-1}$. Наоборот, если $w \neq 0$ в $(C\Omega)^{-1}$, то найдется открытая окрестность $(C\Omega)^{-1}$, в которой функция w голоморфна и не равна 0. Отсюда следует обратимость S .

$\triangleright$

1.2.4 Циклические векторы оператора B_φ в $H(\Omega)$

Функция $f \in H(\Omega)$ называется циклическим вектором системы операторов $\mathcal{D}_0$ ($\mathcal{D}_0$ -циклическим), если множество $\{D_0^\alpha(f) \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полно в $H(\Omega)$, то есть линейная оболочка этого множества плотна в $H(\Omega)$.

Лемма 1.2.4. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0. Если сеть $\Phi_\mu \in H(\Omega)'$, $\mu \in \mathcal{M}$, сходится к нулевому функционалу в $H(\Omega)_b'$, то для любой функции $f \in H(\Omega)$ сеть $\{(\Phi_\mu)_t(T_t(f)(z))\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ сходится к 0 в $H(\Omega)$ (по $z \in \Omega$).

Доказательство. Для любого $z \in \Omega$ функция $t \mapsto T_t(f)(z) = T_z(f)(t)$ голоморфна в Ω по t . По лемме 1.1.4 (iv) функции $(\Phi_\mu)_t(T_t(f)(z)) = \Phi_\mu(T_z(f))$, $\mu \in \mathcal{M}$, голоморфны в Ω (по z). Для любого компакта $K \subset \Omega$ вследствие леммы 1.2.1 множество $S(f, K) := \{T_z(f) \mid z \in K\}$ ограничено в $H(\Omega)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \in \mathcal{M}} \sup_{z \in K} |(\Phi_\mu)_t(T_t(f)(z))| &= \lim_{\mu \in \mathcal{M}} \sup_{z \in K} |\Phi_\mu(T_z(f))| \\ &= \lim_{\mu \in \mathcal{M}} \sup_{h \in S(f, K)} |\Phi_\mu(h)| = 0. \end{aligned}$$

▷

Следующая лемма сводит задачу о $\mathcal{D}_0$ -циклическости функции $f \in H(\Omega)$ к проблеме полноты системы связанных с $\mathcal{D}_0$ сдвигов.

Лемма 1.2.5. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$; Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Следующие утверждения равносильны:

- (i) f является циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$.
- (ii) Система $\{T_z(f) \mid z \in \Omega\}$ полна в $H(\Omega)$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii): Пусть f — циклический вектор системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$. Предположим, что система $\{T_z(f) \mid z \in \Omega\}$ не полна в $H(\Omega)$. Тогда существует ненулевой функционал $\varphi \in H(\Omega)'$ такой, что $\varphi(T_z(f)) = 0$ для любого $z \in \Omega$. Положим $B(h)(z) := \varphi(T_z(h))$, $h \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$. По теореме 1.2.1 $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$. При этом $B(h)(0) = \varphi(h)$, $h \in H(\Omega)$.

Значит, B – ненулевой оператор. Поскольку $f \in \text{Ker } B$ и $\text{Ker } B$ – замкнутое подпространство $H(\Omega)$, инвариантное относительно системы $\mathcal{D}_0$, $\text{Ker } B \neq H(\Omega)$, то f не является циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$. Получено противоречие.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Пусть $\chi \in H(\Omega)'$ и $\chi(D_0^\alpha(f)) = 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. По лемме 1.1.4 $D_0^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\alpha!} \varphi_\alpha(T_t(f))$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $t \in \Omega$. Поскольку система $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $H(\Omega)_b'$, то существует сеть (и даже последовательность) $\chi_\mu \in \text{span}\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$, $\mu \in \mathcal{M}$, сходящаяся к χ в $H(\Omega)_b'$. Учитывая равенства

$$(\varphi_\gamma)_z((\varphi_\delta)_t(T_t(f)(z))) = (\varphi_\delta)_t((\varphi_\gamma)_z(T_t(f)(z)))$$

для любых $\gamma, \delta \in \mathbb{N}_0^N$, получим для всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$:

$$\begin{aligned} 0 &= \chi(D_0^\alpha(f)) = \frac{1}{\alpha!} \left(\lim_{\mu \in \mathcal{M}} \chi_\mu \right)_t ((\varphi_\alpha)_z(T_t(f)(z))) \\ &= \frac{1}{\alpha!} \lim_{\mu \in \mathcal{M}} ((\chi_\mu)_t ((\varphi_\alpha)_z(T_t(f)(z)))) \\ &= \frac{1}{\alpha!} \lim_{\mu \in \mathcal{M}} ((\varphi_\alpha)_z ((\chi_\mu)_t (T_t(f)(z)))). \end{aligned}$$

По лемме 1.2.4 в $H(\Omega)$ по z

$$\lim_{\mu \in \mathcal{M}} (\chi_\mu)_t (T_t(f)(z)) = \chi_t(T_t(f)(z)).$$

Значит, для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$

$$0 = \frac{1}{\alpha!} (\varphi_\alpha)_z (\chi_t(T_t(f)(z))) = \frac{1}{\alpha!} (\varphi_\alpha)_z (\chi(T_z(f))).$$

Значит, $\chi(T_z(f)) = 0$ для каждого $z \in \Omega$. Поэтому, в силу (ii), функционал χ нулевой. Следовательно, выполняется утверждение (i). $\triangleright$

Следствие 1.2.2. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, – односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0. Функция $f \in H(\Omega)$ является $\mathcal{D}_0$ -циклическим вектором в $H(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $f \notin \text{Ker } B_\varphi$ для любого ненулевого функционала $\varphi \in H(\Omega)'$.

Следующая лемма содержит, в частности, опосредованный критерий $\mathcal{D}_0$ -нециклическости.

Лемма 1.2.6. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0.

(i) Если $f \in H(\Omega)$, $g \in H_0(C\Omega)$, то для всех $z \in \Omega$

$$\int_L g(t)T_z(f)(t)dt = \int_L \frac{t^1 g(t)f(t)}{(t-z)^1} dt$$

для любых замкнутых спрямляемых жордановых кривых L_j в Ω_j , $j \in P_N$, таких, что g голоморфна на $\overline{\text{Ext } L_1} \times \cdots \times \overline{\text{Ext } L_N}$ и $z \in \text{Int } L$.

(ii) Функция $f \in H(\Omega)$ не является циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$ тогда и только тогда, когда существует ненулевая функция $g \in H_0(C\Omega)$ такая, что для любых замкнутых спрямляемых жордановых кривых L_j в Ω_j , $j \in P_N$, для которых g голоморфна на $\overline{\text{Ext } L_1} \times \cdots \times \overline{\text{Ext } L_N}$, для каждого $z \in \text{Int } L$ выполняется равенство

$$\int_L \frac{t^1 f(t)g(t)}{(t-z)^1} dt = 0.$$

Доказательство. (i): Вследствие леммы 1.1.3

$$\begin{aligned} \int_L g(t)T_z(f)(t)dt &= \sum_{\sigma \subset P_N} (-1)^{|\sigma|} \int_L t_{\sigma,z}^1 g(t) \frac{f(t_{\sigma,z})}{(t-z)^1} dt = \\ &= \sum_{\sigma \subset P_N, \sigma \neq \emptyset} (-1)^{|\sigma|} \int_L t_{\sigma,z}^1 g(t) \frac{f(t_{\sigma,z})}{(t-z)^1} dt + \int_L t^1 g(t) \frac{f(t)}{(t-z)^1} dt. \end{aligned}$$

По (одномерной) интегральной формуле Коши для неограниченной области каждый из интегралов $\int_L t_{\sigma,z}^1 g(t) \frac{f(t_{\sigma,z})}{(t-z)^1} dt$, $\sigma \subset P_N$, $\sigma \neq \emptyset$, равен 0.

Утверждение (ii) следует из (i), леммы 1.2.5 и двойственного критерия полноты.

▷

Теорема 1.2.3. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0; $f(z) = f_1(z_1) \cdots f_N(z_N)$, $z \in \Omega$, $f_j \in H(\Omega_j)$, $j \in P_N$. Следующие условия равносильны:

(i) f является циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$.

(ii) Каждая функция f_j , $j \in P_N$, не является рациональной функцией переменной z_j .

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii): Предположим, что некоторая функция f_j рациональна (без ограничения общности $j = 1$). Пусть $f_1 = \frac{p_1}{q_1}$, где p_1, q_1 — многочлены переменной $t_1 \in \mathbb{C}$, $q_1 \neq 0$; $m_1 \in \mathbb{N}_0$ — (формальная) степень p_1 . Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $\bar{U}(0, \varepsilon) \subset \Omega$. Для функции $g(t) := \frac{q_1(t_1)}{t_1^{m_1+1} t_2 \cdots t_N} \in H_0(C\Omega)$, кривых $L_j := \{t_j \in \mathbb{C} \mid |t_j| = \varepsilon\}$, $j \in P_N$, $z \in U(0, \varepsilon)$

$$\int_L \frac{t^1 g(t) f(t)}{(t - z)^1} dt$$

$$= \int_{L_2 \times \cdots \times L_N} \frac{f_2(t_2) \cdots f_N(t_N)}{(t_2 - z_2) \cdots (t_N - z_N)} \left(\int_{|t_1|=\varepsilon} \frac{p_1(t_1)}{t_1^{m_1} (t_1 - z_1)} dt_1 \right) dt_2 \cdots dt_N = 0,$$

так как интеграл в скобках равен 0. Пусть $\varphi := \mathcal{C}^{-1}(g)$. Тогда $B_\varphi(f)(z) = 0$ для всех $z \in U(0, \varepsilon)$, а значит, $B_\varphi(f) = 0$ в $H(\Omega)$. При этом φ — ненулевой функционал из $H(\Omega)'$. По следствию 1.2.2 функция f не является $\mathcal{D}_0$ -циклическим вектором в $H(\Omega)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Для $N = 1$ эта импликация доказана в [18, теорема 1]. Предположим, что для некоторого $M \geq 2$ она верна для всех $1 \leq N \leq M - 1$. Пусть f не является циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$ при $N = M$. По лемме 1.2.6 (ii) существует ненулевая функция $g \in H_0(C\Omega)$, обладающая свойствами, как в утверждении (ii) этой леммы, принадлежащая $H_0(G_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ (здесь используются построения из § 1.2.2). Введем функцию $h : G_{1,m} \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_M \rightarrow \mathbb{C}$:

$$h(t_1, z_2, \dots, z_M) := \int_{\gamma_{2,n} \times \cdots \times \gamma_{M,n}} \frac{t_2 \cdots t_M f(t_2) \cdots f(t_M) g(t)}{(t_2 - z_2) \cdots (t_M - z_M)} dt_2 \cdots dt_M,$$

где для любых $t_1 \in G_{1,m}$, $(z_2, \dots, z_M) \in \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_M$ число $n \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $(z_2, \dots, z_M) \in \text{Int}(\gamma_{2,n} \times \cdots \times \gamma_{M,n})$ и $n \geq m$. От выбора такого n значение $h(t_1, z_2, \dots, z_M)$ не зависит. Функция $h(t_1, \cdot)$ голоморфна в $\Omega_2 \times \cdots \times \Omega_M$ для любого $t_1 \in G_{1,m}$ и $h(\cdot, z_2, \dots, z_M) \in H_0(G_{1,m})$ для любых $z_j \in \Omega_j$, $2 \leq j \leq M$. Если $z \in \Omega$, $z_1 \in \text{Int } \gamma_{1,k}$ и $k \geq m$, то

$$\int_{\gamma_{1,k}} \frac{t_1 f_1(t_1) h(t_1, z_2, \dots, z_M)}{t_1 - z_1} dt_1 = 0.$$

Предположим, что существуют $z_j^0 \in \Omega_j$, $2 \leq j \leq M$, для которых h не является тождественным нулем по t_1 . Поскольку $h(\cdot, z_2^0, \dots, z_M^0) \in H_0(\Omega_1)$, то по [18, теорема 1] это влечет, что функция f_1 рациональная. Предположим теперь, что $h(\cdot, z_2, \dots, z_M) \equiv 0$ для любых $z_j \in \Omega_j$, $2 \leq j \leq M$. Так как для некоторого $t_1^0 \in G_{1,m}$ функция $g(t_1^0, t_2, \dots, t_M)$ не является тождественным нулем по переменным $t_2, \dots, t_M$, то по индукционному предположению найдется $j \in \{2, \dots, M\}$, для которого функция f_j рациональна. Теорема доказана.

▷

Следствие 1.2.3. Пусть $f(z) = f_1(z_1) \cdots f_N(z_N)$, где $f_j(z_j)$, $j \in P_N$, — целая функция переменной z_j . Функция f является циклическим вектором системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда каждая функция f_j отлична от многочлена.

1.3 Сопряженное пространство $H(\Omega)'$ как алгебра

Далее исследуется умножение $\circledast$ в топологическом сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$, задаваемое по правилу свертки с помощью ассоциированных операторов сдвига. Как и ранее, в этом параграфе $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j , $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0.

1.3.1 Умножение $\circledast$ в $H(\Omega)'$

Введем бинарную операцию $\circledast$: для $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$

$$(\varphi \circledast \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))), \quad f \in H(\Omega). \quad (1.3.1)$$

Нижний индекс у функционала показывает, по каким переменным он действует. Для замкнутых спрямляемых жордановых кривых $\gamma_{j,n}$, $j \in P_N$, $n \in \mathbb{N}$, как в § 1.2.2, полагаем $Q_n := \text{Int } \gamma_n$. Последовательность норм

$$p_n(f) := \max_{z \in \overline{Q_n}} |f(z)|, \quad f \in H(\Omega),$$

задает топологию $H(\Omega)$. По одномерному принципу максимума модуля голоморфной функции выполняется равенство

$$p_n(f) = \max_{z \in \gamma_n} |f(z)|, \quad f \in H(\Omega), \quad n \in \mathbb{N}$$

(см. [47, ч. II, гл. 1, § 3]). Пусть

$$p_n^*(\varphi) := \sup_{p_n(f) \leq 1} |\varphi(f)|, \quad \varphi \in H(\Omega)', \quad n \in \mathbb{N}.$$

(величина $p_n^*(\varphi)$ может равняться и $+\infty$). Определим пространство

$$H_n(\Omega)' := \{\varphi \in H(\Omega)' \mid p_n^*(\varphi) < +\infty\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оно банахово с нормой p_n^* . Выполняется равенство $H(\Omega)' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n(\Omega)'$. Поскольку $H(\Omega)$ рефлексивно, то по [49, предложение 8.4.18] $H(\Omega)'_b$ является индуктивным пределом последовательности банаховых пространств $H_n(\Omega)', n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $H(\Omega)'$. Поэтому топологическое произведение $H(\Omega)'_b \times H(\Omega)'_b$ является индуктивным пределом последовательности топологических произведений $H_n(\Omega)' \times H_n(\Omega)', n \in \mathbb{N}$, относительно отображений вложения.

Предложение 1.3.1. (i) $\circledast$ — бинарная операция в $H(\Omega)'$.

(ii) $(H(\Omega)'_b, \circledast)$ — унитарная топологическая алгебра.

Доказательство. (i): Поскольку $(\varphi \circledast \psi)(f) = \varphi(B_\psi(f))$, $f \in H(\Omega)$, то из теоремы 1.2.1 следует, что $\varphi \circledast \psi \in H(\Omega)'$ для всех $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$.

(ii): Это утверждение может быть доказано и с помощью преобразования Коши (см. теорему 1.3.1). Приведем доказательство без его привлечения. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Так как для любых $z \in \gamma_n$, $t \in \gamma_{n+1}$, $\sigma \subseteq P_N$ точка $t_{\sigma, z}$ принадлежит компакту $\overline{Q}_{n+1}$, то по лемме 1.1.3 (ii) найдется $C_n > 0$ такое, что для каждой функции $f \in H(\Omega)$

$$\sup_{z \in \gamma_n} \sup_{t \in \gamma_{n+1}} |T_z(f)(t)| \leq C_n p_{n+1}(f).$$

Для $\varphi, \psi \in H_n(\Omega)', f \in H(\Omega)$

$$|(\varphi \circledast \psi)(f)| = |\varphi_z(\psi(T_z(f)))| \leq p_n^*(\varphi) \sup_{z \in \gamma_n} |\psi(T_z(f))|$$

$$\begin{aligned}
&\leq p_n^*(\varphi)p_n^*(\psi) \sup_{z \in \gamma_n} \sup_{t \in \gamma_{n+1}} |T_z(f)(t)| \\
&\leq C_n p_n^*(\varphi)p_n^*(\psi)p_{n+1}(f).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$p_{n+1}^*(\varphi \otimes \psi) \leq C_n p_n^*(\varphi)p_n^*(\psi), \quad \varphi, \psi \in H_n(\Omega)'.$$

Вследствие этого неравенства отображение $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ непрерывно из $H_n(\Omega)' \times H_n(\Omega)'$ в $H_{n+1}(\Omega)'$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а значит, из $H(\Omega)'_b \times H(\Omega)'_b$ в $H(\Omega)'_b$. Таким образом, $(H(\Omega)'_b, \otimes)$ – топологическая алгебра. Единицей в ней является дельта-функция $\delta_0(f) := f(0)$. $\triangleright$

1.3.2 Реализация алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ посредством преобразований Коши и Лапласа

Теорема 1.3.1. Для $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$ выполняется равенство

$$\mathcal{C}(\varphi \otimes \psi)(t) = t^1 \mathcal{C}(\varphi)(t) \mathcal{C}(\psi)(t), \quad t \in C\Omega.$$

Доказательство. Для $\psi \in H(\Omega)'$ введем линейный оператор $B_\psi^*(\varphi) := \varphi \otimes \psi$, $\varphi \in H(\Omega)'$. По предложению 1.3.1 он непрерывен в $H(\Omega)'_b$. Поскольку

$$B_\psi^*(\varphi)(f) = \varphi(B_\psi(f)), \quad \varphi \in H(\Omega)', \quad f \in H(\Omega),$$

то B_ψ^* – сопряженный к B_ψ оператор относительно естественной дуальной пары $(H(\Omega), H(\Omega)')$. Поэтому $B_\psi^* = \mathcal{C}^{-1} B'_\psi \mathcal{C}$, а значит,

$$\mathcal{C}(\varphi \otimes \psi) = B'_\psi \mathcal{C}, \quad \varphi, \psi \in H(\Omega)',$$

где $B'_\psi : H_0(C\Omega) \rightarrow H_0(C\Omega)$ – сопряженный к B_ψ оператор относительно дуальной пары $(H(\Omega), H_0(C\Omega))$. Вследствие леммы 1.2.3 последнее соотношение влечет доказываемое равенство. $\triangleright$

Следствие 1.3.1. Алгебра $(H(\Omega)', \otimes)$ ассоциативна и коммутативна.

Исследуем случай преобразования Лапласа. Положим

$$e_\lambda(z) := e^{\langle \lambda, z \rangle}, \quad \langle \lambda, z \rangle = \sum_{j=1}^N \lambda_j z_j, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}^N.$$

Для $\varphi \in H(\Omega)'$

$$\mathcal{F}(\varphi)(\lambda) := \widehat{\varphi}(\lambda) := \varphi(e_\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}^N, \quad \varphi \in H(\Omega)'.$$

Пусть $E_\Omega := \mathcal{F}(H(\Omega)')$. Преобразование Лапласа $\mathcal{F} : H(\Omega)' \rightarrow E_\Omega$ является изоморфизмом «на» [41, § 1]. В E_Ω введем локальную выпуклую топологию так, что $\mathcal{F} : H(\Omega)' \rightarrow E_\Omega$ является и топологическим изоморфизмом.

Для функционалов $\delta_\lambda(f) = f(\lambda)$, $f \in H(\Omega)$, выполняются равенства $\widehat{\delta}_\lambda = e_\lambda$, $\lambda \in \Omega$. Произведение Дюамеля в $H(\mathbb{C}^N)$ определяется следующим образом [80], [73]: для $g, h \in H(\mathbb{C}^N)$, $t \in \mathbb{C}^N$

$$(g * h)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \int_0^{t_N} \dots \int_0^{t_1} g(t - \xi) h(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_N$$

(при этом последний интеграл понимается как повторный, он не зависит от порядка интегрирования). Ясно, что $g * h \in H(\mathbb{C}^N)$ для любых функций $g, h \in H(\mathbb{C}^N)$. Отображение $(g, h) \mapsto g * h$ непрерывно из топологического произведения $H(\mathbb{C}^N) \times H(\mathbb{C}^N)$ в $H(\mathbb{C}^N)$. Ниже мы покажем, что $g * h \in E_\Omega$ для любых $g, h \in E_\Omega$.

Теорема 1.3.2. Для всех $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$ выполняется равенство

$$\widehat{\varphi \otimes \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}.$$

Доказательство. Вычислим $(\widehat{\delta_\lambda \otimes \delta_\mu})(t)$ для $\lambda, \mu \in \Omega$ таких, что $\lambda_j \neq \mu_j$, $j \in P_N$, $t \in \mathbb{C}^N$. Учитывая лемму 1.1.3, получим:

$$\begin{aligned} (\widehat{\delta_\lambda \otimes \delta_\mu})(t) &= (\delta_\lambda \otimes \delta_\mu)(e_t) = (\delta_\lambda)_z(\delta_\mu(T_z(e_t))) \\ &= (\delta_\lambda)_z \left((\delta_\mu)_u \left(\frac{1}{(u - z)^1} \sum_{\sigma \subseteq P_N} (-1)^{|\sigma|} u_{\sigma, z}^1 e^{\langle t, u_{\sigma, z} \rangle} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(\mu - \lambda)^1} \sum_{\sigma \subseteq P_N} (-1)^{|\sigma|} \mu_{\sigma, \lambda}^1 e^{\langle t, \mu_{\sigma, \lambda} \rangle}. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Найдем $(e_\lambda * e_\mu)(t)$, где $\lambda, \mu \in \Omega$, $\lambda_j \neq \mu_j$, $j \in P_N$, $t \in \mathbb{C}^N$:

$$(e_\lambda * e_\mu)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \int_0^{t_N} \dots \int_0^{t_1} e^{\langle \lambda, t - \xi \rangle} e^{\langle \mu, \xi \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_N$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \left(e^{\langle \lambda, t \rangle} \int_0^{t_N} \dots \int_0^{t_1} e^{\langle \mu - \lambda, \xi \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_N \right) \\
&= \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \left(e^{\langle \lambda, t \rangle} \prod_{j=1}^N \frac{e^{(\mu_j - \lambda_j)t_j} - 1}{\mu_j - \lambda_j} \right) \\
&= \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \left(\frac{1}{(\mu - \lambda)^1} \sum_{\sigma \subset P_N} (-1)^{|\sigma|} e^{\langle t, \mu_{\sigma, \lambda} \rangle} \right) \\
&= \frac{1}{(\mu - \lambda)^1} \sum_{\sigma \subset P_N} (-1)^{|\sigma|} \mu_{\sigma, \lambda}^1 e^{\langle \mu_{\sigma, \lambda}, t \rangle}. \tag{1.3.3}
\end{aligned}$$

Из (1.3.2) и (1.3.3) следует, что

$$(\widehat{\delta_\lambda \otimes \delta_\mu}) = e_\lambda * e_\mu, \quad \lambda, \mu \in \Omega, \lambda_j \neq \mu_j, \quad j \in P_N. \tag{1.3.4}$$

Поскольку отображение $\lambda \mapsto \delta_\lambda$ непрерывно из Ω в $H(\Omega)'_b$ и пространство E_Ω непрерывно вложено в $H(\mathbb{C}^N)$, то вследствие теоремы 1.3.1 равенство (1.3.4) выполняется для любых $\lambda, \mu \in \Omega$. Так как множество $\{\delta_\lambda \mid \lambda \in \Omega\}$ полно в $H(\Omega)'_b$, то $\widehat{\varphi \otimes \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$ для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$. Теорема доказана. $\triangleright$

Следствие 1.3.2. $g * h \in E_\Omega$ для любых $g, h \in E_\Omega$.

1.3.3 Представление $(H(\Omega)', \otimes)$ в $H(\Omega)$

По теореме 1.2.1 линейное отображение

$$\rho : H(\Omega)' \rightarrow \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0), \quad \rho(\varphi) = B_\varphi,$$

биективно. Положим

$$S(M, K) := \{T_z(f) \mid f \in M, z \in K\}$$

для $M \subset H(\Omega)$, $K \subset \Omega$.

Далее $\mathcal{B}(H(\Omega))$ обозначает множество всех ограниченных подмножеств $H(\Omega)$. Пусть $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$ — пространство $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ с топологией, индуцированной топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах $H(\Omega)$ в $\mathcal{L}(H(\Omega))$. Она задается семейством преднорм

$$\sup_{f \in M} p_n(B(f)), \quad M \in \mathcal{B}(H(\Omega)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.3.3. (i) Отображение $\rho(\varphi) = B_\varphi$, $\varphi \in H(\Omega)'$, является изоморфизмом алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ на алгебру $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.

(ii) ρ — топологический изоморфизм $H(\Omega)'_b$ на $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$.

Доказательство. (i): Вследствие теоремы 1.2.1 $B_\psi T_z = T_z B_\psi$ для любых $z \in \mathbb{C}^N$, $\psi \in H(\Omega)'$. Поэтому для всех $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$, $z \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$

$$\begin{aligned} \rho(\varphi \otimes \psi)(f)(z) &= B_{\varphi \otimes \psi}(f)(z) = (\varphi \otimes \psi)(T_z(f)) = \\ &= \varphi(B_\psi(T_z(f))) = \varphi(T_z(B_\psi(f))) = \\ &= B_\varphi B_\psi(f)(z). \end{aligned}$$

Значит, $\rho(\varphi \otimes \psi) = \rho(\varphi)\rho(\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$.

(ii): Докажем, что непрерывно отображение $\rho : H(\Omega)'_b \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b$. Для любых $M \in \mathcal{B}(H(\Omega))$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H(\Omega)'$

$$\sup_{f \in M} p_n(B_\varphi(f)) = \sup_{f \in M} \max_{z \in \overline{Q_n}} |\varphi(T_z(f))| \leq \sup_{g \in S(M, \overline{Q_n})} |\varphi(g)|.$$

Так как вследствие леммы 1.2.1 множество $S(M, \overline{Q_n})$ ограничено в $H(\Omega)$, то ρ непрерывно.

Покажем теперь, что отображение $\rho^{-1} : \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b \rightarrow H(\Omega)'_b$ непрерывно. Для ограниченного множества M в $H(\Omega)$, вследствие $0 \in Q_1$ и $\varphi(f) = B_\varphi(f)(0)$, получим:

$$\sup_{f \in M} |\varphi(f)| = \sup_{f \in M} |B_\varphi(f)(0)| \leq \sup_{f \in M} \max_{z \in Q_1} |B_\varphi(f)(z)|, \quad \varphi \in H(\Omega)'.$$

Поэтому ρ^{-1} непрерывно из $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b$ в $H(\Omega)'_b$. Теорема доказана. $\triangleright$

Приведем следствия из доказанного утверждения. Символ 1 обозначает мультииндекс $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, для которого $\alpha_j = 1$, $j \in P_N$.

Замечание 1.3.1. (i) Вследствие примера 1.2.1 $\rho(\varphi_\alpha) = \frac{1}{\alpha!} D_0^\alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

(ii) Для каждого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ выполняется равенство $\tilde{\varphi}_\alpha(t) = \frac{\alpha!}{t^{\alpha+1}}$, $t_j \neq 0$, $j \in P_N$.

Для многочлена $p(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z]$ положим $p(D_0) := \sum_\alpha c_\alpha D_0^\alpha$. Пусть $\mathbb{C}[\mathcal{D}_0] := \{p(D_0) \mid p \in \mathbb{C}[z]\}$. Ясно, что $\mathbb{C}[\mathcal{D}_0] \subset \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.

Следствие 1.3.3. Множество $\mathbb{C}[\mathcal{D}_0]$ плотно в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$.

Доказательство. Система $\Phi := \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $H(\Omega)'_b$. Действительно, если $f \in H(\Omega)$ и $\partial^\alpha f(0) = 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, то $f = 0$. Вследствие теоремы 1.3.3 множество $\text{span}(\rho(\Phi))$ плотно в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$. В силу замечания 1.3.1 $\text{span}(\rho(\Phi)) = \mathbb{C}[\mathcal{D}_0]$. $\triangleright$

Теорема 1.3.3 влечет также результат о факторизации ненулевого оператора B_φ .

Следствие 1.3.4. Пусть $\varphi \in H(\Omega)'$, $\varphi \neq 0$, $\tilde{\varphi}(t) = h_1(t_1) \cdots h_N(t_N)$, где $h_j \in H_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_j)$, $j \in P_N$. Тогда существуют ненулевой многочлен $q \in \mathbb{C}[z]$, $\psi \in H(\Omega)'$ такие, что $B_\varphi = q(D_0)B_\psi$ и B_ψ — изоморфизм $H(\Omega)$.

Доказательство. Для каждого $j \in P_N$ функция h_j ненулевая, а значит, имеет в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_j$ не более конечного числа различных нулей. Поэтому существуют ненулевой многочлен $p_j \in \mathbb{C}[z_j]$, функция $v_j \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_j)$, обладающие следующими свойствами:

$$h_j(t_j) = p_j\left(\frac{1}{t_j}\right) v_j(t_j), \quad v_j \neq 0 \text{ на } \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_j, \quad p_j(0) = 0.$$

Пусть

$$p(z) := p_1(z_1) \cdots p_N(z_N), \quad v(t) := \frac{1}{t^1} v_1(t_1) \cdots v_N(t_N), \\ \nu := \mathcal{C}^{-1}(p), \quad \psi := \mathcal{C}^{-1}(v).$$

Тогда $\tilde{\varphi}(t) = t^1 p\left(\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_N}\right) v(t)$. По теореме 1.3.1 $\tilde{\varphi} = \widetilde{\nu \otimes \psi}$. Следовательно, $\varphi = \nu \otimes \psi$, что по теореме 1.3.3 влечет $B_\varphi = B_\nu B_\psi$. По теореме 1.2.2 B_ψ — изоморфизм $H(\Omega)$, а по замечанию 1.3.1 $B_\nu \in \mathbb{C}[\mathcal{D}_0]$. $\triangleright$

Следствие 1.3.5. Пусть $\Omega_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z_j| < R_j\}$, $R_j \in (0, +\infty]$, $j \in P_N$; Λ_R — (LB) -пространство последовательностей, как в примере 1.2.2. Тогда каждый оператор B_φ , $\varphi \in H(\Omega)'$, представляется в виде $B_\varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha$, где $c \in \Lambda_R$ и ряд абсолютно сходится в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$. При этом $c_\alpha = \varphi(f_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Доказательство. Пусть числа $b_{n,\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, такие, как в примере 1.2.2. Для $\varphi \in H(\Omega)'$ найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, для которых

$$|\varphi(f_\alpha)| \leq \frac{C}{b_{n,\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

По доказательству в примере 1.2.2 для $c_\alpha = \varphi(f_\alpha)$ ряд $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \varphi_\alpha$ абсолютно сходится в $H(\Omega)'_b$ к некоторому функционалу ψ . По теореме 1.3.3

$$B_\psi = \rho(\psi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha$$

и ряд абсолютно сходится в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$. При этом

$$\psi(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \varphi(f_\alpha) \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} = \varphi(f), \quad f \in H(\Omega),$$

а значит, $\psi = \varphi$. $\triangleright$

Глава 2

Система операторов обратного сдвига в весовых пространствах целых функций

2.1 Весовые пространства $E(V)$ и операторы обратного сдвига в них

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. Для неубывающей последовательности непрерывных функций $v_n : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, определим весовые банаховы пространства

$$E_n(V) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) \mid \|f\|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(v_n(z))} < +\infty \right\}$$

с нормой $\|\cdot\|_n$. При этом $H(\mathbb{C}^N)$ — пространство всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций. Отметим, что E_n непрерывно вложено в E_{n+1} для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $E(V) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n(V)$. Введем в $E(V)$ топологию индуктивного предела пространств $E_n(V)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $E(V)$: $E(V) := \text{ind}_{n \rightarrow} E_n(V)$.

Для $z \in \mathbb{C}^N$ положим $|z| := \left(\sum_{j=1}^N |z_j|^2 \right)^{1/2}$ и $|z|_\infty := \max_{1 \leq j \leq N} |z_j|$. Ниже будем предполагать, что последовательность $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\forall n \exists m(n) \geq n \exists C(n) \geq 0 :$$

$$\sup_{|t-z|_\infty \leq 1} v_n(t) + \log(1 + |z|) \leq \inf_{|t-z|_\infty \leq 1} v_{m(n)}(t) + C(n), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad (2.1.1)$$

и

$$\forall n \exists k(n) \geq n \exists D(n) \geq 0 :$$

$$v_n(t_{\sigma,z}) \leq v_{k(n)}(t) + v_{k(n)}(z) + D(n), t, z \in \mathbb{C}^N, \sigma \subset P_N. \quad (2.1.2)$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательности $(m(n))_{n \in \mathbb{N}}$ в (2.1.1) и $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ в (2.1.2) не убывают.

Из условия (2.1.1) следует, что $\lim_{|z| \rightarrow \infty} (v_n(z) - v_{m(n)}(z)) = -\infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит, для каждого $n \in \mathbb{N}$ пространство $E_n(V)$ компактно вложено в $E_{m(n)}(V)$. Поэтому $E(V)$ является монтелевским пространством (см. [4, § 2.9, свойство (е)]) и, следовательно, рефлексивно. Условие (2.1.1) обеспечивает также инвариантность пространства $E(V)$ относительно каждого дифференцирования $\partial_j := \frac{\partial}{\partial z_j}$, $j \in P_N$, обычных сдвигов, операторов умножения M_j на независимую переменную z_j , $j \in P_N$. Из условия (2.1.2) вытекает, что для любых $f \in E(V)$, $z \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$ функция $f(t_{\sigma,z})$ принадлежит (по t) пространству $E(V)$. Из (2.1.2) следует также, что $\inf_{z \in \mathbb{C}^N} v_{k(1)}(z) > -\infty$, а значит, $\mathbf{1} \in E(V)$, где $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1. Кроме того, условия (2.1.1) и (2.1.2) влекут, что $E(V)$ содержит $\mathbb{C}[z]$.

Ниже будут приведены примеры функций v_n , $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям (2.1.1) и (2.1.2) (см. предложение 2.3.2, § 3.2).

Далее в этой главе вместо $E(V)$ будем писать E . Операторы $D_{j,z}$, $T_{j,z}$, D_z , T_z , $j \in P_N$, $z \in \mathbb{C}^N$, вводятся, как и ранее. Вследствие условий (2.1.1) и (2.1.2) все они линейны и непрерывны в E .

2.2 Описание коммутанта системы операторов частного обратного сдвига в $E(V)$

Пусть $\mathcal{L}(E)$ — алгебра всех линейных непрерывных операторов в E ;

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}_0) := \{B \in \mathcal{L}(E) \mid BD_{j,0} = D_{j,0}B \text{ в } E \text{ для любого } j \in P_N\},$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{T}) := \{B \in \mathcal{L}(E) \mid BT_z = T_z B \text{ в } E \text{ для любого } z \in \mathbb{C}^N\}.$$

Определим функционалы $\delta_\lambda(f) := f(\lambda)$. Ясно, что $\delta_\lambda \in E'$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}^N$. Для $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in E'$ введем нормы

$$\|\varphi\|_n^* := \sup_{\|f\|_n \leq 1} |\varphi(f)|.$$

Отметим, что счетный индуктивный предел E регулярный, т.е. всякое ограниченное в E множество содержится и ограничено в некотором пространстве E_s (см. [4, § 2.9, свойство (в)]). Поэтому сильное сопряженное к E пространство E'_b является пространством Фреше с фундаментальной последовательностью непрерывных преднорм $\|\cdot\|_n^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.2.1. *Предположим, что выполняются условия (2.1.1), (2.1.2) и $\mathbb{C}[z]$ плотно в E . Следующие утверждения равносильны:*

- (i) $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$.
- (ii) $B \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$.
- (iii) *Существует функционал $\varphi \in E'$ такой, что $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$.*

Для любого оператора $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0) = \mathcal{K}(\mathcal{T})$ функционал $\varphi \in E'$ такой, как в (iii), единственен.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii): Зафиксируем $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$. По лемме 1.1.4 (i) и замечанию 1.2.1 для любого $z \in \mathbb{C}^N$ и всякого многочлена f выполняется равенство $BT_z(f) = T_z B(f)$. Вследствие плотности $\mathbb{C}[z]$ в E равенство $BT_z = T_z B$, $z \in \mathbb{C}^N$, справедливо на всем пространстве E .

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Пусть $B \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$. Для любых $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$, учитывая лемму 1.1.3 (iii), получим:

$$BT_z(f)(0) = T_z B(f)(0) = T_0 B(f)(z) = B(f)(z).$$

Значит, для функционала $\varphi := \delta_0 B \in E'$ для любых $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$ выполняется равенство $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): По лемме 1.1.4 (iv) для $f \in E$ функция $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$ является целой в $\mathbb{C}^N$. Ясно, что оператор B линеен из E в $H(\mathbb{C}^N)$. Покажем, что он непрерывно действует в E . Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$. Из условия

(2.1.1) следует, что существуют $A_0 \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, для которых

$$\|(M_1 \cdots M_N)(f)\|_n \leq A_0 \|f\|_s, \quad f \in E_s. \quad (2.2.1)$$

Определим $m(n) \in \mathbb{N}$, $C(n)$ по условию (2.1.1) и $k(n)$, $k(m(n)) \in \mathbb{N}$, $D(n)$, $D(m(n))$ по условию (2.1.2). Возьмем $g \in E_n$. Пусть для точек $t, z \in \mathbb{C}^N$ для любого $j \in P_N$ выполняется неравенство $|t_j - z_j| \geq 1/2$. Тогда по лемме 1.1.3 (i)

$$\begin{aligned} |D_z(g)(t)| &\leq 2^N \sum_{\sigma \subset P_N} |g(t_{\sigma,z})| \leq 2^N \|g\|_n \sum_{\sigma \subset P_N} e^{v_n(t_{\sigma,z})} \\ &\leq 4^N \|g\|_n e^{D(n)} e^{v_{k(n)}(t)} e^{v_{k(n)}(z)} \leq 4^N \|g\|_n e^{D(n)} e^{v_{k(m(n))}(t)} e^{v_{k(m(n))}(z)}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Пусть теперь множество Δ всех $j \in P_N$ таких, что $|t_j - z_j| < 1/2$, непусто. Найдутся $u_j \in \mathbb{C}$, $j \in \Delta$, такие, что $|u_j - z_j| = 1/2$ и для точки $u \in \mathbb{C}^N$, для которой $u_j = t_j$, если $j \in P_N \setminus \Delta$, выполняется неравенство $|D_z(g)(t)| \leq |D_z(g)(u)|$. Поэтому

$$\begin{aligned} |D_z(g)(t)| &\leq \left| \frac{1}{(u-z)^1} \sum_{\sigma \subset P_N} (-1)^{|\sigma|} g(u_{\sigma,z}) \right| \\ &\leq 2^N \sum_{\sigma \subset P_N} |g(u_{\sigma,z})| \leq 2^N \|g\|_n \sum_{\sigma \subset P_N} e^{v_n(u_{\sigma,z})} \\ &\leq 2^N \|g\|_n e^{C(n)} \sum_{\sigma \subset P_N} e^{v_{m(n)}(t_{\sigma,z})} \\ &\leq 4^N \|g\|_n e^{C(n)+D(m(n))} e^{v_{k(m(n))}(t)} e^{v_{k(m(n))}(z)}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Соотношения (2.2.1)–(2.2.3) и равенства $T_z = D_z M_1 \cdots M_N$, $z \in \mathbb{C}^N$, влекут, что существует постоянная L , для которой

$$\|T_z(f)\|_{k(m(n))} \leq L e^{v_{k(m(n))}(z)} \|f\|_s, \quad f \in E_s, \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Поэтому

$$\|B(f)\|_{k(m(n))} \leq \|\varphi\|_{k(m(n))}^* L \|f\|_s, \quad f \in E_s. \quad (2.2.4)$$

Значит, оператор B непрерывен из E_s в $E_{k(m(n))}$. Следовательно, он непрерывен в E .

То, что оператор B перестановочен с каждым оператором D_0^γ , $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$, показывается так, как и при доказательстве импликации (iii) $\Rightarrow$ (i) в теореме 1.2.1.

Так как для оператора $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0) = \mathcal{K}(\mathcal{T})$, функционала $\varphi \in E'$, для которого $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$, выполняется равенство $\varphi = \delta_0 B$, то такой функционал φ единственен. Теорема доказана.

▷

Из неравенства (2.2.4) и регулярности E вытекает

Следствие 2.2.1. *Для любого ограниченного в E множества M , любого ограниченного в E'_b множества Λ множество $\{B_\psi(f) \mid f \in M, \psi \in \Lambda\}$ ограничено в E .*

Отметим еще некоторые факты, связанные с теоремой 2.2.1.

Замечание 2.2.1. (i) Множество $\mathbb{C}[z]$ плотно в E , например, если выполнены условия (2.1.1), (2.1.2) и все функции v_n выпуклы в $\mathbb{C}^N$ [78, теорема 2].

(ii) При доказательстве теоремы 2.2.1 утверждение о том, что для любого функционала $\varphi \in E'$ линейный оператор $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$ непрерывен в E , установлено без предположения о плотности $\mathbb{C}[z]$ в E .

(iii) Выделим утверждение, установленное при доказательстве теоремы 2.2.1 (оно следует из неравенств (2.2), (2.2.3)):

Для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $p(n) \geq n$ и постоянная $K(n) \geq 0$ такие, что для любых $g \in E_n$, $t, z \in \mathbb{C}^N$ выполняется неравенство

$$|D_z(g)(t)| \leq K(n) \|g\|_n e^{v_{p(n)}(t) + v_{p(n)}(z)}, \quad t, z \in \mathbb{C}^N.$$

(iv) Схема доказательства предыдущей теоремы близка к схеме доказательства аналогичного результата о представлении линейных непрерывных операторов, перестановочных с оператором обратного сдвига (оператором Поммье) в пространстве функций, голоморфных в односвязной области в $\mathbb{C}$, в статье И. Димовского и В. Христова [58, теорема 1.8].

2.3 Умножение в E' и его реализация

2.3.1 Умножение в E' в общей ситуации

Для $\psi \in E'$ оператор B_ψ определим равенством $B_\psi(f)(z) := \psi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$. По теореме 2.2.1 $B_\psi \in \mathcal{L}(E)$. Для $\varphi, \psi \in E'$, $f \in E$ полагаем

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f)))$$

(нижний индекс у функционала показывает, по каким переменным он действует). Поскольку $\varphi \otimes \psi = \varphi B_\psi$, то $\varphi \otimes \psi \in E'$ для любых $\varphi, \psi \in E'$. При этом отображение $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ из $E' \times E'$ в E' билинейно. Значит, E' — алгебра с умножением $\otimes$. Операцию $\otimes$, с учетом ее реализаций, естественно называть обобщенным произведением Дюамеля.

Покажем, что произведение $\varphi \otimes \psi$ на мономах является обычной сверткой мультипоследовательностей моментов функционалов φ и ψ .

Лемма 2.3.1. *Для любых $\varphi, \psi \in E'$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ выполняется равенство*

$$(\varphi \otimes \psi)(f_\alpha) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \varphi(f_\beta) \psi(f_{\alpha-\beta}).$$

Доказательство. Вследствие леммы 1.1.4 (i)

$$\begin{aligned} (\varphi \otimes \psi)(f_\alpha) &= \varphi_z(\psi(T_z(f_\alpha))) = \varphi_z \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \psi(f_{\alpha-\beta}) z^\beta \right) \\ &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \varphi(f_\beta) \psi(f_{\alpha-\beta}). \end{aligned}$$

▷

Теорема 2.3.1. *Предположим, что выполняются условия (2.1.1), (2.1.2) и множество $\mathbb{C}[z]$ плотно в E .*

(i) *Алгебра $(E', \otimes)$ ассоциативна и коммутативна, и функционал δ_0 является в ней единицей.*

(ii) *Алгебра $(E', \otimes)$ не имеет делителей нуля.*

(iii) *Отображение $\kappa(\varphi) = B_\varphi$ является изоморфизмом алгебры $(E', \otimes)$ на алгебру $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$.*

Доказательство. (i) Ассоциативность и коммутативность операции $\otimes$ следует из леммы 2.3.1 и плотности $\mathbb{C}[z]$ в E . Поскольку T_0 — тождественный оператор, то для любых $\varphi \in E'$, $f \in E$

$$(\delta_0 \otimes \varphi)(f) = (\delta_0)_z(\varphi(T_z(f))) = \varphi(T_0(f)) = \varphi(f).$$

Значит, δ_0 — единица алгебры $(E', \otimes)$.

(ii): Равенство $\varphi \otimes \psi = 0$ для функционалов $\varphi, \psi \in E'$ влечет, в силу леммы 2.3.1, что одна из мультипоследовательностей $(\varphi(f_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ и $(\psi(f_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ нулевая. Вследствие плотности $\mathbb{C}[z]$ в E соответствующий функционал тоже нулевой.

(iii): По теореме 2.2.1 линейное отображение $\kappa : E' \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$ биективно. Зафиксируем функционалы $\varphi, \psi \in E'$. Равенство $B_{\varphi \otimes \psi} = B_\varphi B_\psi$ достаточно показать на мономах. Для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, пользуясь леммой 1.1.4 (i) и леммой 2.3.1, получим:

$$\begin{aligned} B_{\varphi \otimes \psi}(f_\alpha) &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} (\varphi \otimes \psi)(f_{\alpha-\beta}) f_\beta = \\ &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \left(\sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha-\beta} \varphi(f_\gamma) \psi(f_{\alpha-\beta-\gamma}) \right) f_\beta \\ &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \left(\sum_{\beta \leq \mu \leq \alpha} \varphi(f_{\mu-\beta}) \psi(f_{\alpha-\mu}) \right) f_\beta \\ &= \sum_{0 \leq \mu \leq \alpha} \psi(f_{\alpha-\mu}) \sum_{0 \leq \beta \leq \mu} \varphi(f_{\mu-\beta}) f_\beta \end{aligned}$$

и

$$(B_\varphi B_\psi)(f_\alpha) = B_\varphi \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \psi(f_{\alpha-\beta}) f_\beta \right) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \psi(f_{\alpha-\beta}) \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} \varphi(f_{\beta-\gamma}) f_\gamma.$$

Таким образом, $B_{\varphi \otimes \psi}(f_\alpha) = (B_\varphi B_\psi)(f_\alpha)$. Утверждение доказано.

▷

2.3.2 Топологический изоморфизм и плотность многочленов от операторов обратного сдвига в коммутанте

В этом пункте предполагается, что выполняются условия (2.1.1), (2.1.2) и множество $\mathbb{C}[z]$ плотно в E . Пусть $\mathcal{B}(E)$ и $\mathcal{B}(E'_b)$ — семейства всех ограниченных подмножеств пространств E и E'_b соответственно. Через $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b$ обозначим пространство $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$ с топологией, индуцированной топологией ограниченной сходимости в $\mathcal{L}(E)$. Фундаментальной системой непрерывных преднорм в $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b$ является множество преднорм

$$p_{M,\Lambda}(B) = \sup_{f \in M, \psi \in \Lambda} |\psi(B(f))|, \quad B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0), \quad M \in \mathcal{B}(E), \quad \Lambda \in \mathcal{B}(E'_b).$$

Преднормы

$$q_M(\varphi) = \sup_{f \in M} |\varphi(f)|, \quad \varphi \in E', \quad M \in \mathcal{B}(E),$$

образуют фундаментальную систему непрерывных преднорм в E'_b .

Предложение 2.3.1. *Отображение $\kappa(\varphi) = B_\varphi$ является топологическим изоморфизмом E'_b на $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b$.*

Доказательство. Отображение $\kappa : E'_b \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b$ непрерывно, так как для любых $M \in \mathcal{B}(E)$, $\Lambda \in \mathcal{B}(E'_b)$, $\varphi \in E'$ вследствие коммутативности умножения $\circledast$ выполняются равенства

$$p_{M,\Lambda}(B_\varphi) = \sup_{f \in M, \psi \in \Lambda} |\psi(B_\varphi(f))| = \sup_{f \in M, \psi \in \Lambda} |\varphi(B_\psi(f))| = q_R(\varphi),$$

где $R := \{B_\psi(f) \mid f \in \tau, \psi \in \Lambda\}$ — ограниченное подмножество E по следствию 2.2.1.

Отображение $\kappa^{-1} : \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b \rightarrow E'_b$ также непрерывно, поскольку для любых $M \in \mathcal{B}(E)$, $\varphi \in E'$ в силу равенства $\varphi = \delta_0 B_\varphi$ справедливы соотношения

$$q_M(\varphi) = \sup_{f \in M} |\varphi(f)| = \sup_{f \in M} |\delta_0(B_\varphi(f))| = p_{M, \{\delta_0\}}(B_\varphi).$$

Утверждение доказано.

▷

Введем функционалы $\varphi_\alpha(f) := \partial^\alpha f(0)$, $f \in E$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, линейные и непрерывные на E . Пусть $\mathbb{C}[\mathcal{D}_0]$ — множество всех многочленов от операторов $D_{j,0}$, $j \in P_N$, т.е. операторов $\sum_{|\alpha| \leq n} b_\alpha D_0^\alpha$, $n \in \mathbb{N}_0$, $b_\alpha \in \mathbb{C}$.

Следствие 2.3.1. *Для любого оператора $B \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$ существует последовательность операторов из $\mathbb{C}[\mathcal{D}_0]$, сходящаяся к B равномерно на каждом ограниченном подмножестве E .*

Доказательство. Прежде всего, $\kappa(\varphi_\alpha) = \alpha! D_0^\alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ (это показывается так же, как и при доказательстве леммы 1.1.4 (ii)). Поскольку равенства $\varphi_\alpha(f) = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, для $f \in E$ влекут, что $f = 0$, и E рефлексивно, то множество $\Phi = \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полно в E'_b . Зафиксируем оператор $B = B_\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$, где $\psi \in E'$. Так как E'_b является пространством Фреше, то существует последовательность $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ линейных комбинаций элементов Φ , сходящаяся к ψ в E'_b . В силу предложения 2.3.1 $\kappa(\psi_n) \rightarrow B_\psi$ в $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b$.

▷

2.3.3 Полизвездные множества

Введем и исследуем множества, естественно возникающие при определении многомерного произведения Дюамеля. Выпуклая область из этого класса множеств характеризуется тем, что последовательность опорных функций выпуклых компактов, исчерпывающая ее изнутри, обладает свойством (2.1.2) (см. далее предложение 2.3.2). Для $z \in \mathbb{C}^N$ полагаем

$$\Pi(z) := [0, z_1] \times \cdots \times [0, z_N].$$

Определение 2.3.1. *Множество Q в $\mathbb{C}^N$ назовем полизвездным относительно точки 0, если $\Pi(z) \subset Q$ для любого $z \in Q$.*

Ясно, что всякое множество Q в $\mathbb{C}^N$, полизвездное относительно точки 0, является звездным относительно точки 0, т.е. для любого $z \in Q$ множество Q содержит отрезок $[0, z]$. Множество $Q \subset \mathbb{C}^N$ полизвездно

относительно точки 0 тогда и только тогда, когда для любых $z \in Q$, $k \in P_N$, $\xi \in [0, z_k]$ точка $(z_1, \dots, z_{k-1}, \xi, z_{k+1}, \dots, z_N)$ принадлежит Q .

Пример 2.3.1. (i) Если $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$, где Ω_k , $1 \leq k \leq N$, — области в $\mathbb{C}$, то Ω полизвездная относительно точки 0 в том и только в том случае, когда каждая область Ω_k звездная относительно нуля.

(ii) Всякая полная область Рейнхарта с центром в точке 0 в $\mathbb{C}^N$ (см. [47, часть 2, гл. 1, § 1]) является полизвездной относительно точки 0.

(iii) При $N \geq 2$ существуют выпуклые области в $\mathbb{C}^N$, содержащие точку 0, не являющиеся полизвездными относительно точки 0. Такой областью является, например, любое вещественное полупространство $\{z \in \mathbb{C}^N \mid \operatorname{Re}\langle z, a \rangle < \gamma\}$, $a \in \mathbb{C}^N$, $a \neq 0$, $\gamma > 0$, если не менее двух координат вектора a отличны от нуля.

Для множества $Q \subset \mathbb{C}^N$ через $\operatorname{int} Q$ обозначим внутренность Q в $\mathbb{C}^N$.

Лемма 2.3.2. Для любой полизвездной относительно точки 0 области Ω в $\mathbb{C}^N$ существует последовательность полизвездных относительно точки 0 компактов $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ таких, что $Q_n \subset \operatorname{int} Q_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$.

Если область Ω выпуклая, то Q_n , $n \in \mathbb{N}$, тоже можно выбрать выпуклыми.

Доказательство. Зафиксируем последовательность компактов U_k , $k \in \mathbb{N}$, в Ω таких, что $U_k \subset \operatorname{int} U_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$. Положим $Q_1 := \bigcup_{a \in Q_1} \Pi(a)$. Тогда $Q_1 \subset \Omega$. Поскольку $\Pi(t) \subset \Pi(a)$ для любых $a \in \mathbb{C}^N$, $t \in \Pi(a)$, то множество Q_1 полизвездно относительно точки 0. Компактность U_1 влечет компактность Q_1 . Выберем далее $k_2 > 1$ такое, что $Q_1 \subset \operatorname{int} U_{k_2}$, и положим $Q_2 := \bigcup_{a \in U_{k_2}} \Pi(a)$. Множество Q_2 полизвездно относительно точки 0 и компактно, причем $Q_1 \subset \operatorname{int} Q_2$. Затем выберем $k_3 > k_2$, для которого $Q_2 \subset \operatorname{int} U_{k_3}$, и определим $Q_3 := \bigcup_{a \in U_{k_3}} \Pi(a)$. По-

ступая так и далее, построим последовательность полизвездных относительно точки 0 компактов Q_n , $n \in \mathbb{N}$, с нужными свойствами.

Пусть область Ω выпуклая. Тогда компакты U_k , как выше, тоже можно выбрать выпуклыми. Из равенств

$$\Pi((1 - \gamma)a + \gamma b) = (1 - \gamma)\Pi(a) + \gamma\Pi(b), \quad a, b \in \mathbb{C}^N, \gamma \in [0, 1],$$

следует, что все компакты Q_n , $n \in \mathbb{N}$, построенные выше, тоже выпуклые. Лемма доказана. $\triangleright$

Далее для множества $Q \subset \mathbb{C}^N$ символом $\text{conv } Q$ обозначим выпуклую оболочку Q в $\mathbb{C}^N$. Если Q ограничено, то H_Q — опорная функция Q : $H_Q(z) := \sup_{t \in Q} \text{Re}\langle t, z \rangle$, $z \in \mathbb{C}^N$. Охарактеризуем выпуклые области в $\mathbb{C}^N$, полизвездные относительно точки 0, посредством условия (2.1.2) для опорных функций их компактных подмножеств.

Предложение 2.3.2. (I) Пусть Q — выпуклый компакт в $\mathbb{C}^N$, полизвездный относительно точки 0. Тогда для любых $a, b \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$ выполняется неравенство

$$H_Q(a_{\sigma,b}) \leq H_Q(a) + H_Q(b).$$

(II) Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, содержащая точку 0; $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность выпуклых компактов в Ω таких, что $Q_n \subset \text{int } Q_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$. Следующие утверждения равносильны:

(i) Последовательность $v_n := H_{Q_n}$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию (2.1.2).

(ii) Область Ω полизвездна относительно точки 0.

Доказательство. (I): Возьмем $a, b \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$. Найдется $t \in Q$, для которого $H_Q(a_{\sigma,b}) = \text{Re}\langle t, a_{\sigma,b} \rangle$. Тогда

$$\begin{aligned} H_Q(a_{\sigma,b}) &= \text{Re}\langle t_{\sigma,0} + t_{P_N \setminus \sigma,0}, a_{\sigma,b} \rangle \\ &= \text{Re}\langle t_{\sigma,0}, a_{\sigma,b} \rangle + \text{Re}\langle t_{P_N \setminus \sigma,0}, a_{\sigma,b} \rangle = \text{Re}\langle t_{\sigma,0}, a \rangle + \text{Re}\langle t_{P_N \setminus \sigma,0}, b \rangle \end{aligned}$$

$$\leq H_Q(a) + H_Q(b).$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Зафиксируем $z \in \Omega$ и n , для которого $z \in Q_n$. Отметим, что

$$\Pi(z) = \text{conv}\{z_{\sigma,0} \mid \sigma \subset P_N\}.$$

Возьмем точку $u \in \Pi(z)$. Найдутся $\beta_\sigma \geq 0$, $\sigma \subset P_N$, для которых $\sum_{\sigma \subset P_N} \beta_\sigma = 1$ и $u = \sum_{\sigma \subset P_N} \beta_\sigma z_{\sigma,0}$. Для любого $a \in \mathbb{C}^N$, для $k := k(n)$, $D := D(n)$, где $k(n)$ и $D(n)$ выбраны по условию (2.1.2),

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle u, a \rangle &= \sum_{\sigma \subset P_N} \beta_\sigma \text{Re}\langle z_{\sigma,0}, a \rangle = \sum_{\sigma \subset P_N} \beta_\sigma \text{Re}\langle z, a_{\sigma,0} \rangle \leq \sum_{\sigma \subset P_N} \beta_\sigma v_n(a_{\sigma,0}) \\ &\leq \sum_{\sigma \subset P_N} \beta_\sigma (v_k(a) + D) = v_k(a) + D. \end{aligned}$$

Значит, для любых $a \in \mathbb{C}^N$, $r > 0$

$$\text{Re}\langle u, ra \rangle \leq v_k(ra) + D = rv_k(a) + D.$$

Поделив последнее неравенство на r и перейдя к пределу при $r \rightarrow +\infty$, получим, что $\text{Re}\langle u, a \rangle \leq v_k(a)$ для любого $a \in \mathbb{C}^N$. Поэтому $u \in Q_k \subset \Omega$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Пусть область Ω полизвездна относительно точки 0. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Найдется полизвездный относительно точки 0 выпуклый компакт Q в Ω , содержащий Q_n . Выберем $k \geq n$ такое, что $Q \subset Q_k$. Зафиксируем $a, b \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$. Учитывая утверждение (I), получим:

$$H_{Q_n}(a_{\sigma,b}) \leq H_Q(a_{\sigma,b}) \leq H_Q(a) + H_Q(b) \leq H_{Q_k}(a) + H_{Q_k}(b).$$

Предложение доказано. $\triangleright$

2.3.4 Произведение Дюамеля и оператор Дюамеля

В этом пункте пойдет речь о произведении Дюамеля в $H(\Omega)$. Н. Уигли [80] определил и исследовал произведение Дюамеля в пространстве всех функций, голоморфных в области в $\mathbb{C}$, звездной относительно точки 0. К. Меррифилдом и С. Уотсоном [73] оно было введено в пространстве Харди в открытом единичном полидиске в $\mathbb{C}^N$ при $N \geq 1$.

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Как и в $H(\mathbb{C}^N)$, определим произведение Дюамеля в $H(\Omega)$: для $g, h \in H(\Omega)$

$$(g * h)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_1 \cdots \partial t_N} \int_{\Pi(t)} g(t - \xi) h(\xi) d\xi, \quad t \in \Omega.$$

При этом интеграл справа определяется как повторный:

$$\int_{\Pi(t)} f(\xi) d\xi := \int_0^{t_N} \cdots \int_0^{t_1} f(\xi) d\xi_1 \cdots d\xi_N, \quad f \in H(\Omega).$$

Ясно, что $g * h \in H(\Omega)$ для любых $g, h \in H(\Omega)$ и $H(\Omega)$ является алгеброй с умножением $*$.

Далее покажем, что, если область Ω дополнительно выпуклая, произведение Дюамеля в $H(\Omega)$ реализует умножение $\otimes$ в соответствующем пространстве. Выберем последовательность выпуклых полизвездных относительно точки 0 компактов Q_n , $n \in \mathbb{N}$, таких, что $Q_n \subset \text{int } Q_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in \text{int } Q_1$. Пространство E зададим весовыми функциями $v_n = H_{Q_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (2.1.1) и (по предложению 2.3.2) условию (2.1.2); все функции v_n , $n \in \mathbb{N}$, выпуклые и положительно однородные степени 1. Обозначим пространство E символом E_Ω . Оно содержит все многочлены, и $\mathbb{C}[z]$ плотно в E_Ω . Последнее следует, например, из общего результата Б.А. Тейлора [78], упомянутого в замечании 2.2.1, или из реализации H'_Ω в виде $H(\Omega)$, как ниже.

Замечание 2.3.1. (i) Будем использовать следующее свойство раздельности последовательности $(H_{Q_n})_{n \in \mathbb{N}}$: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\delta_n > 0$, для которого

$$H_{Q_n}(t) + \delta_n |t| \leq H_{Q_{n+1}}(t), \quad t \in \mathbb{C}^N.$$

(ii) В данном случае для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{|t-z|_\infty \leq 1} H_{Q_n}(t) \leq \inf_{|t-z|_\infty \leq 1} H_{Q_n}(t) + S(n), \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

где $S(n) := \sup_{|t|_\infty \leq 2} H_{Q_n}(t) < +\infty$. Это позволяет в этом конкретном случае уточнить некоторые оценки, установленные выше. Например, неравенству в замечании 2.2.1 (iii) удовлетворяет $p(n) = n$. Ниже нам достаточно использовать оценки, полученные для общего случая.

Согласно [44, теорема 4.5.3] преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z), \quad \varphi \in H(\Omega)', \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к $H(\Omega)$ на E_Ω . Билинейная форма

$$\langle f, h \rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(h), \quad f \in E_\Omega, \quad h \in H(\Omega),$$

устанавливает двойственность между пространствами E_Ω и $H(\Omega)$. При этом для любых $f \in E_\Omega$, $h \in H(\Omega)$, $\lambda \in \Omega$, $\mu \in \mathbb{C}^N$ выполняются равенства

$$f(\mu) = \langle f, e_\mu \rangle, \quad h(\lambda) = \langle e_\lambda, h \rangle.$$

Через $\mathcal{F}'$ обозначим отображение из E'_Ω в $H(\Omega)$, сопряженное к преобразованию Лапласа $\mathcal{F} : H(\Omega)' \rightarrow E_\Omega$ относительно дуальных пар $(H(\Omega)', H(\Omega))$ и (E_Ω, E'_Ω) . Поскольку пространства $H(\Omega)$ и E_Ω рефлексивны, то $\mathcal{F}'$ — топологический изоморфизм сильного сопряженного к E_Ω на $H(\Omega)$.

Лемма 2.3.3. *Для любого $z \in \mathbb{C}^N$ сопряженным к оператору $D_z : E_\Omega \rightarrow E_\Omega$ относительно дуальной пары $(E_\Omega, H(\Omega))$ является оператор*

$$D'_z(g)(t) = \int_{\Pi(t)} e^{\langle t-\xi, z \rangle} g(\xi) d\xi, \quad t \in \Omega, \quad g \in H(\Omega).$$

Доказательство. Зафиксируем $z \in \mathbb{C}^N$. Для $\lambda \in \Omega$, $g \in H(\Omega)$

$$D'_z(g)(\lambda) = \langle e_\lambda, D'_z(g) \rangle = \langle D_z(e_\lambda), g \rangle.$$

Если $\lambda \in \Omega$, $\mu \in \mathbb{C}^N$, $\mu_j \neq z_j$, $j \in P_N$, то

$$\langle D_z(e_\lambda), e_\mu \rangle = D_z(e_\lambda)(\mu) = \prod_{j=1}^N \frac{e^{\lambda_j \mu_j} - e^{\lambda_j z_j}}{\mu_j - z_j}.$$

Для линейного непрерывного в $H(\Omega)$ оператора $L(g)(t) := \int_{\Pi(t)} e^{\langle t-\xi, z \rangle} g(\xi) d\xi$ вычислим значения $L(e_\mu)(\lambda)$ для $\lambda \in \Omega$, $\mu \in \mathbb{C}^N$, $\mu_j \neq z_j$, $j \in P_N$:

$$\begin{aligned} L(e_\mu)(\lambda) &= \int_{\Pi(\lambda)} e^{\langle \lambda-\xi, z \rangle} e^{\langle \mu, \xi \rangle} d\xi = e^{\langle \lambda, z \rangle} \prod_{j=1}^N \frac{e^{(\mu_j - z_j)\lambda_j} - 1}{\mu_j - z_j} \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{e^{\lambda_j \mu_j} - e^{\lambda_j z_j}}{\mu_j - z_j} = D'_z(e_\mu)(\lambda). \end{aligned}$$

Поскольку множество $\{e_\mu \mid \mu \in \mathbb{C}^N, \mu_j \neq z_j, j \in P_N\}$ полно в $H(\Omega)$, то $D'_z = L$. Лемма доказана. $\triangleright$

Для $\varphi \in E'_\Omega$ полагаем $\widehat{\varphi}(\lambda) := \mathcal{F}'(\varphi)(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$. Отметим, что для любых $\psi \in E'_\Omega$, $f \in E_\Omega$ выполняется равенство

$$\langle f, \widehat{\psi} \rangle = \psi(f). \quad (2.3.1)$$

Действительно,

$$\langle f, \widehat{\psi} \rangle = \mathcal{F}^{-1}(f)(\mathcal{F}'(\psi)) = \psi(\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))) = \psi(f).$$

В частности, $\widehat{\psi}(\lambda) = \langle e_\lambda, \widehat{\psi} \rangle = \psi(e_\lambda)$, $\psi \in E'_\Omega$, $\lambda \in \Omega$.

Лемма 2.3.4. (i) Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in Q_n$, $k \in P_N$ в E_{n+1} существует предел $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{e_{\lambda+\xi u^{(k)}} - e_\lambda}{\xi}$, равный $M_k(e_\lambda)$.

(ii) Для любого функционала $\varphi \in E'_\Omega$, любых $h \in H(\Omega)$, $\lambda \in \Omega$ функция $\int_{\Pi(\lambda)} e^{\langle \xi, z \rangle} h(\xi) d\xi$ (по z) принадлежит E_Ω и

$$\varphi_z \left(\int_{\Pi(\lambda)} e^{\langle \xi, z \rangle} h(\xi) d\xi \right) = \int_{\Pi(\lambda)} \widehat{\varphi}(\xi) h(\xi) d\xi.$$

Доказательство. (i): Для любого $\xi \in \mathbb{C}$, для которого $|\xi| \in (0, \delta_n)$, точка $\lambda + \xi u^{(k)}$ принадлежит Q_{n+1} (см. замечание 2.3.1). Для таких ξ получим:

$$\left\| \frac{1}{\xi} (e_{\lambda+\xi u^{(k)}} - e_\lambda) - M_k(e_\lambda) \right\|_{n+1} = \sup_{t \in \mathbb{C}^N} \frac{\left| \frac{1}{\xi} \left(e^{\langle \lambda+\xi u^{(k)}, t \rangle} - e^{\langle \lambda, t \rangle} \right) - t_k e^{\langle \lambda, t \rangle} \right|}{\exp(H_{Q_{n+1}}(t))}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{t \in \mathbb{C}^N} \frac{|e^{\langle \lambda, t \rangle}|}{\exp(H_{Q_n}(t))} \sup_{t \in \mathbb{C}^N} \frac{\left| \frac{1}{\xi} (e^{\xi t_k} - 1) - t_k \right|}{\exp(\delta_n |t|)} \\ &\leq |\xi| \sup_{x \geq 0} \frac{\sum_{s=2}^{\infty} \frac{\delta_n^{s-2} x^s}{s!}}{\exp(\delta_n x)} \leq \frac{|\xi|}{\delta_n^2}. \end{aligned}$$

Это доказывает утверждение (i).

(ii): Принадлежность функции $z \mapsto \int_{\Pi(\lambda)} e^{\langle \xi, z \rangle} h(\xi) d\xi$ пространству E_Ω очевидна. Справедливость перемены порядка действия функционала φ и интегрирования устанавливается стандартным образом, например, с помощью последовательности интегральных сумм, сходящейся в E_Ω по z к $\int_{\Pi(\lambda)} e^{\langle \xi, z \rangle} h(\xi) d\xi$.

▷

Для удобства (чтобы явно следить за переменными) будем использовать обозначение $w(\lambda, z, t) := D_z(e_\lambda)(t)$, $\lambda \in \Omega$, $z, t \in \mathbb{C}^N$. Отметим, что функция w голоморфна в $\Omega \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$.

Лемма 2.3.5. *Для любых функционалов $\varphi, \psi \in E'_\Omega$, $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ в Ω существует производная $\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \lambda_1^{\gamma_1} \dots \partial \lambda_N^{\gamma_N}} (\varphi_z(\psi(D_z(e_\lambda))))$, равная $\varphi_z \left(\psi_t \left(\frac{\partial^{|\gamma|} w}{\partial \lambda_1^{\gamma_1} \dots \partial \lambda_N^{\gamma_N}}(\lambda, z, t) \right) \right)$ в точке $\lambda \in \Omega$.*

Доказательство. Это утверждение достаточно доказать для производных $\frac{\partial}{\partial \lambda_k}$, $k \in P_N$. Зафиксируем $k \in P_N$, $\lambda \in \Omega$ и возьмем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\lambda \in \Omega_n$. Для $\xi \in \mathbb{C}$, для которого $|\xi| \in (0, \delta_n)$ (см. замечание 2.3.1), получим:

$$\begin{aligned} \Delta(\xi) &:= \frac{1}{\xi} (\varphi_z(\psi(D_z(e_{\lambda+\xi u^{(k)}}))) - \varphi_z(\psi(D_z(e_\lambda)))) - \varphi_z \left(\psi_t \left(\frac{\partial w}{\partial \lambda_k}(\lambda, z, t) \right) \right) \\ &= \varphi_z \left(\psi_t \left(D_z \left(\frac{1}{\xi} (e_{\lambda+\xi u^{(k)}} - e_\lambda) \right) (t) - \frac{\partial w}{\partial \lambda_k}(\lambda, z, t) \right) \right). \end{aligned}$$

Отметим, что $\frac{\partial w}{\partial \lambda_k}(\lambda, z, t) = D_z(M_k(e_\lambda))(t)$, $\lambda \in \Omega$, $z, t \in \mathbb{C}^N$. В силу неравенства в замечании 2.2.1 (iii), в котором можно брать $p(n) = n + 1$, для любого $\xi \in \mathbb{C}$, для которого $|\xi| \in (0, \delta_n)$, выполняются соотношения

$$|\Delta(\xi)| \leq \|\varphi\|_{n+1}^* \|\psi\|_{n+1}^* \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \sup_{t \in \mathbb{C}^N} \frac{\left| D_z \left(\frac{1}{\xi} (e_{\lambda+\xi u^{(k)}} - e_\lambda) - M_k(e_\lambda) \right) (t) \right|}{\exp(H_Q(z) + H_{Q_{n+1}}(t))}$$

$$\leq K(n+1)\|\varphi\|_{n+1}^*\|\psi\|_{n+1}^*\left\|\frac{1}{\xi}(e_{\lambda+\xi u^{(k)}}-e_\lambda)-M_k(e_\lambda)\right\|_{n+1}.$$

Из леммы 2.3.4 следует, что $\Delta(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$. Лемма доказана.

▷

Теорема 2.3.2. Пусть Ω — выпуклая полизвездная относительно точки 0 область в $\mathbb{C}^N$. Тогда $\mathcal{F}'$ — изоморфизм алгебры $(E'_\Omega, \otimes)$ на алгебру $(H(\Omega), *)$.

Доказательство. Возьмем $\varphi, \psi \in E'_\Omega$. Покажем, что $\widehat{\varphi \otimes \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$.

Поскольку для $\lambda \in \Omega$, $z, t \in \mathbb{C}^N$, $z_j \neq t_j$, $j \in P_N$,

$$T_z(e_\lambda)(t) = \prod_{j \in P_N} \frac{t_j e^{\lambda_j t_j} - z_j e^{\lambda_j z_j}}{t_j - z_j}, \quad D_z(e_\lambda)(t) = \prod_{j \in P_N} \frac{e^{\lambda_j t_j} - e^{\lambda_j z_j}}{t_j - z_j},$$

то

$$T_z(e_\lambda)(t) = \frac{\partial^N w}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_N}(\lambda, z, t), \quad \lambda \in \Omega, \quad z, t \in \mathbb{C}^N.$$

Вследствие леммы 2.3.5 и (2.3.1) для $\lambda \in \Omega$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi \otimes \psi}(\lambda) &= (\varphi \otimes \psi)(e_\lambda) = \varphi_z \left(\psi_t \left(\frac{\partial^N w}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_N}(\lambda, z, t) \right) \right) \\ &= \frac{\partial^N}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_N} (\varphi_z (\psi (D_z(e_\lambda))))). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Учитывая (2.3.1), получим, что

$$\psi(D_z(e_\lambda)) = \langle D_z(e_\lambda), \widehat{\psi} \rangle = \langle e_\lambda, D'_z(\widehat{\psi}) \rangle = D'_z(\widehat{\psi})(\lambda).$$

Поэтому в силу равенства (2.3.2) и лемм 2.3.3, 2.3.4

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi \otimes \psi}(\lambda) &= \frac{\partial^N}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_N} \left(\varphi_z \left(D'_z(\widehat{\psi})(\lambda) \right) \right) \\ &= \frac{\partial^N}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_N} \left(\varphi_z \left(\int_{\Pi(\lambda)} e^{\langle \xi, z \rangle} \widehat{\psi}(\lambda - \xi) d\xi \right) \right) \\ &= \frac{\partial^N}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_N} \left(\int_{\Pi(\lambda)} \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(\lambda - \xi) d\xi \right) = (\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})(\lambda). \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\triangleright$

Для $g \in H(\Omega)$ определим оператор Дюамеля $S_g(h) := g * h$, $h \in H(\Omega)$. Ясно, что он линеен и непрерывен в $H(\Omega)$. Покажем, что оператор B'_φ , сопряженный к B_φ относительно дуальной пары $(E_\Omega, H(\Omega))$, совпадает с $S_{\widehat{\varphi}}$.

Следствие 2.3.2. Для любого $\varphi \in E'_\Omega$ выполняется равенство $B'_\varphi = S_{\widehat{\varphi}}$.

Доказательство. Для любых $\psi \in E'_\Omega$, $\lambda \in \Omega$, учитывая теорему 2.3.2 и равенство (2.3.1), получим:

$$\begin{aligned} B'_\varphi(\widehat{\psi})(\lambda) &= \langle e_\lambda, B'_\varphi(\widehat{\psi}) \rangle = \langle B_\varphi(e_\lambda), \widehat{\psi} \rangle = \psi(B_\varphi(e_\lambda)) \\ &= (\psi \otimes \varphi)(e_\lambda) = (\varphi \otimes \psi)(e_\lambda) = \widehat{\varphi \otimes \psi}(\lambda) = (\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})(\lambda) = S_{\widehat{\varphi}}(\widehat{\psi})(\lambda). \end{aligned}$$

Утверждение доказано. $\triangleright$

2.4 Связь с интерполирующей функцией А.Ф. Леонтьева

Отметим связь операторов D_z с многомерным аналогом интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева. Пусть K_j , $j \in P_N$, — выпуклые компакты в $\mathbb{C}$, содержащие 0; $K := K_1 \times \cdots \times K_N$; $H(K)$ — пространство ростков всех аналитических на K функций с его естественной топологией счетного индуктивного предела банаховых пространств. Положим $K(1/n) := K + \overline{U}(0, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Каждый выпуклый компакт $K(1/n)$ является полизвездным относительно точки 0. Пусть $u_n = H_{K(1/n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^N (H_{K_j}(t_j) + |t_j|/n), \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Введем пространство

$$E_K := \left\{ f \in \mathbb{C}^N \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad r_n(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(t)|}{\exp(u_n(t))} < +\infty \right\}.$$

С топологией, задаваемой последовательностью норм r_n , $n \in \mathbb{N}$, оно является пространством Фреше. Поскольку (см. замечания 2.2.1 (iii) и 2.3.1) для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдется постоянная $C > 0$, для которой для всех $f \in E_K$, $z \in \mathbb{C}^N$

$$r_n(D_z(f)) \leq C e^{u_n(z)} r_n(f),$$

то все (линейные) операторы D_z непрерывны в E_K .

Согласно [44, теорема 4.5.3] преобразование Лапласа $\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z)$, $z \in \mathbb{C}^N$, $\varphi \in H(K)'$, является топологическим изоморфизмом $H(K)'_b$ на $E_K := E$. Естественная двойственность между $H(K)'$ и $H(K)$ индуцирует двойственность между E_K и $H(K)$, задаваемую билинейной формой $\langle f, h \rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(h)$, $f \in E_K$, $h \in H(K)$. Для $f \in E_K$, $h \in H(K)$, $z \in \mathbb{C}^N$ положим

$$\omega_f(z, h) := \langle D_z(f), h \rangle. \quad (2.4.1)$$

Отображение $\omega_f : \mathbb{C}^N \times H(K) \rightarrow \mathbb{C}$ является многомерным вариантом интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева [27], определяемой f . В [10] исследован ее абстрактный аналог при $N = 1$ и показано, что равенство (2.4.1) действительно задает интерполирующую функцию А.Ф. Леонтьева. Обоснованием этого при $N > 1$ является следующее.

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}^N$. Как и при доказательстве леммы 2.3.3, показывается, что сопряженным оператором $D'_z : H(K) \rightarrow H(K)$ к $D_z : E_K \rightarrow E_K$ относительно дуальной пары $(E_K, H(K))$ является оператор

$$J_z(h)(t) = \int_{\Pi(t)} e^{\langle t-\xi, z \rangle} h(\xi) d\xi, \quad h \in H(K).$$

Таким образом,

$$\omega_f(z, h) = \mathcal{F}^{-1}(f)(J_z(h)), \quad f \in E_K, \quad h \in H(K), \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Это равенство совпадает с соответствующим равенством при $N = 1$ (см. [27, гл. IV, § 2, (2.7)]). Оно обосновывает правомерность определения ω_f посредством (2.4.1).

Отметим, что ω_f в ситуации, когда f является функцией с разделяющимися переменными, т. е. $f(z) = \prod_{j=1}^N f_j(z_j)$, применялась В.П. Громовым [3] при разложении в ряды экспонент аналитических функций двух комплексных переменных, В.В. Напалковым [32, гл. IV, § 19] при разложении в ряды экспонент функций, аналитических в полиобластях в $\mathbb{C}^N$, для решения уравнений свертки в полиобластях.

2.5 Коммутант системы операторов интегрирования и произведение Дюамеля в $H(\Omega)$

В этой части для полизвездной относительно точки 0 области Ω в $\mathbb{C}^N$ исследуются линейные непрерывные операторы в $H(\Omega)$, перестановочные с каждым оператором частного интегрирования, и продолжается изучение задающего их произведения Дюамеля $*$.

2.5.1 Описание операторов, перестановочных с системой операторов интегрирования

Далее рассматривается область Ω в $\mathbb{C}^N$, $N \in \mathbb{N}$, являющаяся полизвездной относительно точки 0. Для $k \in P_N$ введем операторы частного интегрирования

$$J_k(f)(z) := \int_0^{z_k} f(z_1, \dots, z_{k-1}, \xi, z_{k+1}, \dots, z_N) d\xi, \quad z \in \Omega, \quad f \in H(\Omega)$$

(интеграл берется по отрезку $[0, z_k]$). Все они линейны и непрерывны в $H(\Omega)$ и попарно перестановочны.

Пусть, как и раньше, $f * g$ — произведение Дюамеля функций $f, g \in H(\Omega)$. При $N = 1$ выполняется равенство

$$(f * g)(z) = g(0)f(z) + \int_0^z g'(z-t)f(t)dt, \quad z \in \Omega. \quad (2.5.1)$$

Докажем его аналог для $N \geq 1$. Для непустого множества $\tau \subset P_N$ и $z \in \mathbb{C}^N$ символ $z(\tau)$ обозначает точку в $\mathbb{C}^{\text{card } \tau}$, полученную из z отбрасыванием координат z_j , $j \in P_N \setminus \tau$, с сохранением порядка остальных. Если $\tau = P_N$, то $z(\tau) = z$. Для мультииндекса $1 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}_0^N$, $\tau \subset P_N$, $\tau \neq \emptyset$, через $1[\tau]$ обозначаем мультииндекс из $\mathbb{N}_0^N$ такой, что $1[\tau]_k = 1$ при $k \in \tau$, и $1[\tau]_k = 0$ при $k \in P_N \setminus \tau$; $z' := (z_1, \dots, z_{N-1})$; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Введем обозначения для полидисков с центром в точке 0:

$$U_N(\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z_k| < \varepsilon, k \in P_N\}, \quad \varepsilon > 0.$$

$$\overline{U}_N(\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z_k| \leq \varepsilon, k \in P_N\}.$$

Лемма 2.5.1. *Для любой области Ω в $\mathbb{C}^N$, полизвездной относительно точки 0, всех $f, g \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$ выполняется равенство*

$$(f * g)(z) = g(0)f(z) + \sum_{\substack{\sigma \subsetneq P_N \\ \Pi(z(P_N \setminus \sigma))}} \int \partial^{1[P_N \setminus \sigma]} g(z - t_{\sigma, z}) f(t_{\sigma, z}) dt(P_N \setminus \sigma). \quad (2.5.2)$$

Доказательство. Предположим вначале, что Ω является полидиском $U_N(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Докажем равенство (2.5.2) для этого случая индукцией по N . При $N = 1$ оно выполняется (см. (2.5.1)). Пусть оно верно для $N - 1$ при $N \geq 2$. Дифференцируя под знаком интеграла (это возможно, например, по [29, гл. 4, § 1, 1.2]), получим для $z \in U_N(\varepsilon)$:

$$(f * g)(z) = \frac{\partial}{\partial z_N} \int_0^{z_N} \left(\frac{\partial^{N-1}}{\partial z_1 \cdots \partial z_{N-1}} \int_{\Pi(z')} g(z' - t', z_N - t_N) f(t', t_N) dt' \right) dt_N.$$

Зафиксируем $z_N \in \mathbb{C}$, для которого $|z_N| < \varepsilon$, и $t_N \in [0, z_N]$. По индукционному предположению, примененному к функциям $f(\cdot, t_N)$ и $g(\cdot, z_N - t_N)$, для $z' \in U_{N-1}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{N-1}}{\partial z_1 \cdots \partial z_{N-1}} \int_{\Pi(z')} g(z' - t', z_N - t_N) f(t', t_N) dt' \\ &= g(0', z_N - t_N) f(z', t_N) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{\nu \subsetneq P_{N-1} \\ \Pi(z'(P_{N-1} \setminus \nu))}} \int \partial^{1'[P_{N-1} \setminus \nu]} g(z' - t'_{\nu, z'}, z_N - t_N) f(t'_{\nu, z'}, t_N) dt' (P_{N-1} \setminus \nu).$$

Учитывая одномерное равенство (2.5.1), получим для $z \in U_N(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} (f * g)(z) &= g(0)f(z) + \int_0^{z_N} \partial_N g(0', z_N - t_N) f(z', t_N) dt_N \\ &+ \sum_{\substack{\nu \subsetneq P_{N-1} \\ \Pi(z'(P_{N-1} \setminus \nu))}} \int \left(\frac{\partial}{\partial z_N} \int_0^{z_N} \partial^{1'[P_{N-1} \setminus \nu]} g(z' - t'_{\nu, z'}, z_N - t_N) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot f(t'_{\nu, z'}, t_N) dt_N \right) dt' (P_{N-1} \setminus \nu) \\ &= g(0)f(z) + \int_0^{z_N} \partial_N g(0', z_N - t_N) f(z', t_N) dt_N \\ &+ \sum_{\substack{\nu \subsetneq P_{N-1} \\ \Pi(z'(P_{N-1} \setminus \nu))}} \int \left(\partial^{1'[P_{N-1} \setminus \nu]} g(z' - t'_{\nu, z'}, 0) f(t'_{\nu, z'}, z_N) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{z_N} \partial_N (\partial^{1'[P_{N-1} \setminus \nu]} g)(z' - t'_{\nu, z'}, z_N - t_N) f(t'_{\nu, z'}, t_N) dt_N \right) dt' (P_{N-1} \setminus \nu) \\ &= g(0)f(z) + \sum_{\substack{\sigma \subsetneq P_N \\ \Pi(z(P_N \setminus \sigma))}} \int \partial^{1[P_N \setminus \sigma]} g(z - t_{\sigma, z}) f(t_{\sigma, z}) dt (P_N \setminus \sigma). \end{aligned}$$

Пусть теперь Ω — произвольная область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_N(\varepsilon) \subset \Omega$. По доказанному выше равенство (2.5.2) выполняется для любого $z \in U_N(\varepsilon)$. Поскольку функция $f * g$ и каждое слагаемое в правой части (2.5.2) голоморфны в Ω , то по теореме единственности оно справедливо для всех $z \in \Omega$. $\triangleright$

Для компакта $Q \subset \Omega$ полагаем

$$p_Q(f) := \sup_{z \in Q} |f(z)|, \quad f \in H(\Omega).$$

Из леммы 2.5.1 вытекает результат о характере непрерывности произведения $*$.

Лемма 2.5.2. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 . Для любого полизвездного относительно точки 0 компакта Q в Ω , любого $\varepsilon > 0$, для которого $Q(\varepsilon) := Q + \overline{U}_N(\varepsilon) \subset \Omega$, существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых функций $f, g \in H(\Omega)$

$$p_Q(f * g) \leq C p_Q(f) p_{Q(\varepsilon)}(g).$$

Для функций с разделяющимися переменными их произведение Дюамеля сводится к одномерным в следующем смысле. Определим для функций u и v переменной z_k , $k \in P_N$, одномерные произведения по z_k :

$$(u *_k v)(z_k) := \frac{\partial}{\partial z_k} \int_0^{z_k} u(z_k - t_k) v(t_k) dt_k.$$

Очевидно, что справедлива

Лемма 2.5.3. Пусть $f(z) = f_1(z_1) \cdots f_N(z_N)$, $g(z) = g_1(z_1) \cdots g_N(z_N)$, где функции f_k и g_k голоморфны в звездной относительно точки 0 области $G_k \subset \mathbb{C}$, $k \in P_N$. Тогда для любого $z \in G_1 \times \cdots \times G_N$

$$(f * g)(z) = (f_1 *_1 g_1)(z_1) \cdots (f_N *_N g_N)(z_N).$$

Положим

$$g_\alpha(z) := \frac{1}{\alpha!} z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}, \quad J^\alpha := J_1^{\alpha_1} \cdots J_N^{\alpha_N}, \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Ниже $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1, $\mathbb{C}[z]$ — множество всех многочленов от переменных $z_1, \dots, z_N$ над $\mathbb{C}$.

При $N = 1$ равенства в следующем утверждении известны (см., например, [80], [20]).

Лемма 2.5.4. (i) Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ выполняется равенство $g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}$.

(ii) Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 . Для любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $f, g \in H(\Omega)$ в Ω выполняются равенства

$$J^\alpha(f * g) = J^\alpha(f) * g = f * J^\alpha(g), \quad J^\alpha(f) = f * g_\alpha.$$

Доказательство. Справедливость (i) влекут такие равенства для $N = 1$ и лемма 2.5.3.

В силу (i) первые соотношения в (ii) справедливы, если функции f и g являются мономами, а значит, в силу леммы 2.5.2 и плотности $\mathbb{C}[z]$ в $H(\Omega)$ и для произвольных функций $f, g \in H(\Omega)$. Второе равенство в (ii) — частный случай первого для $g = 1$.

▷

Теорема 2.5.1. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 .

(i) С умножением $*$ пространство $H(\Omega)$ является ассоциативной и коммутативной топологической алгеброй.

(ii) Алгебра $(H(\Omega), *)$ не имеет делителей нуля.

Доказательство. (i): Отображение $(f, g) \mapsto f * g$ из $H(\Omega) \times H(\Omega)$ в $H(\Omega)$ билинейно. Лемма 2.5.2 влечет его непрерывность. Ясно, что умножение $*$ коммутативно. Ассоциативность умножения $*$ следует из леммы 2.5.4, его непрерывности и плотности $\mathbb{C}[z]$ в $H(\Omega)$.

(ii): Выберем $r > 0$, для которого $U_N(r) \subset \Omega$. Пусть $f, g \in H(\Omega)$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} b_\alpha g_\alpha$, $g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha g_\alpha$ в $D_N(r)$. По лемме 2.5.4 $f * g = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} a_\gamma g_\gamma$, где $a_\gamma = \sum_{0 \leq \alpha \leq \gamma} b_\alpha c_{\gamma-\alpha}$, $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$, причем ряд для $f * g$ сходится в $H(U_N(r))$. Если $f * g = 0$ в $H(\Omega)$, то все коэффициенты a_γ равны 0. Это влечет, что одна из мультипоследовательностей b и c нулевая.

▷

Для функции $g \in H(\Omega)$ введем оператор $S_g(f) := f * g$, $f \in H(\Omega)$. Он линеен и, вследствие леммы 2.5.2, непрерывен в $H(\Omega)$.

Следствие 2.5.1. Для любой ненулевой функции $g \in H(\Omega)$ оператор $S_g : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ инъективен.

Символом $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ обозначим коммутант множества $\mathcal{J} = \{J_k \mid k \in P_N\}$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$ с умножением — композицией операторов; $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ является ее подалгеброй.

Теорема 2.5.2. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки θ .

(i) Если $A \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$, то существует единственная функция $g \in H(\Omega)$, для которой $A = S_g$.

(ii) $S_g \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$ для любой функции $g \in H(\Omega)$.

Доказательство. Вторая часть теоремы следует из лемм 2.5.2 и 2.5.4.

(i): Пусть $A \in \mathcal{K}(\mathcal{J})$. Положим $g := A(\mathbf{1})$. Достаточно показать, что $A(g_\alpha) = g_\alpha * g$ для каждого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Так как $g_\alpha = J^\alpha(\mathbf{1})$, то

$$A(g_\alpha) = A(J^\alpha(\mathbf{1})) = J^\alpha(A(\mathbf{1})) = J^\alpha(\mathbf{1} * g) = g_\alpha * g.$$

Единственность функции g вытекает из того, что $\mathbf{1} * h = h$ для всех $h \in H(\Omega)$. $\triangleright$

Замечание 2.5.1. Всякая область $G = G_1 \times \cdots \times G_N$, где G_k , $1 \leq k \leq N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, является областью Рунге [42, гл. 1, § 3]. Областями Рунге являются любая полная область Рейнхарта и всякая выпуклая область в $\mathbb{C}^N$ [1, гл. IV, § 24, п.п. 8, 9].

2.5.2 Изоморфность пространства $H(\Omega)$ и коммутанта

Пусть $Co(\Omega)$ — множество всех компактных подмножеств Ω , $\mathcal{B}(H(\Omega))$ — множество всех ограниченных подмножеств $H(\Omega)$. Через $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$ обозначим пространство $\mathcal{K}(\mathcal{J})$, наделенное топологией ограниченной сходимости. Она задается семейством преднорм

$$p_{Q,B}(A) := \sup_{f \in B} \sup_{z \in Q} |A(f)(z)|, \quad A \in \mathcal{K}(\mathcal{J}), \quad Q \in Co(\Omega), \quad B \in \mathcal{B}(H(\Omega)).$$

Теорема 2.5.3. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки θ . Отображение $\chi(g) := S_g$ является топологическим изоморфизмом пространства $H(\Omega)$ на $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$ и изоморфизмом алгебры $(H(\Omega), *)$ на алгебру $\mathcal{K}(\mathcal{J})$.

Доказательство. По теореме 2.5.2 $\chi : H(\Omega) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{J})$ биективно. Ясно, что χ линейно. Для $Q \in Co(\Omega)$ выберем $\varepsilon > 0$, для которого $Q(\varepsilon) =$

$Q + \overline{U}_N(\varepsilon) \subset \Omega$, и $C > 0$ по лемме 2.5.2. Для $B \in \mathcal{B}(H(\Omega))$, $g \in H(\Omega)$

$$p_{Q,B}(S_g) = \sup_{f \in B} \sup_{z \in Q} |(f * g)(z)| \leq C \sup_{f \in B} (p_Q(f) p_{Q(\varepsilon)}(g)) = C_1 p_{Q(\varepsilon)}(g),$$

где $C_1 := C \sup_{f \in B} p_Q(f) < +\infty$. Значит, (линейное) отображение χ непрерывно из $H(\Omega)$ в $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$.

Поскольку для любого компакта Q в Ω , для всех $g \in H(\Omega)$

$$p_Q(g) = \sup_{z \in Q} |g(z)| = \sup_{z \in Q} |(\mathbf{1} * g)(z)| = p_{Q,B}(S_g),$$

где $B = \{\mathbf{1}\} \in \mathcal{B}(H(\Omega))$, то отображение χ^{-1} непрерывно из $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$ в $H(\Omega)$.

Так как $\chi(g_\alpha) = J^\alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, то для всех многочленов g, h выполняется равенство $\chi(g * h) = S_g S_h$. Вследствие непрерывности умножения $*$ из $H(\Omega) \times H(\Omega)$ в $H(\Omega)$, непрерывности χ и χ^{-1} и плотности $\mathbb{C}[z]$ в $H(\Omega)$ равенство $\chi(g * h) = S_g S_h$ справедливо и для любых функций $g, h \in H(\Omega)$.

▷

Пусть $\mathbb{C}[\mathcal{J}]$ — множество всех многочленов от операторов J_k , $k \in P_N$, т.е. операторов вида $\sum_{|\alpha| \leq n} b_\alpha J^\alpha$, $b_\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Следствие 2.5.2. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки θ . Множество $\mathbb{C}[\mathcal{J}]$ плотно в $\mathcal{K}(\mathcal{J})_b$.

В терминологии статьи [70] следствие 2.5.2 означает, что коммутант $\mathcal{K}(\mathcal{J})$ является минимальным.

2.5.3 Критерий обратимости элемента в алгебре $(H(\Omega), *)$ и оператора Дюамеля

Для $z \in \mathbb{C}^N$, $\tau \subset P_N$, $\tau \neq \emptyset$, и $z \in \mathbb{C}^N$ через $|z|(\tau)$ обозначим точку в $[0, +\infty)^{\text{card } \tau}$, полученную из $(|z_1|, \dots, |z_N|)$ отбрасыванием координат $|z_j|$, $j \in P_N \setminus \tau$, с сохранением порядка остальных.

Следующий результат является многомерным аналогом [80, теорема].

Лемма 2.5.5. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 . Если $h \in H(\Omega)$, $h(0) = 0$, то функция $\mathbf{1} - h$ обратима в алгебре $(H(\Omega), *)$.

Доказательство. Положим

$$h^{[0]} := \mathbf{1}. \quad h^{[n]} := h^{[n-1]} * h, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем полизвездный относительно точки 0 компакт $Q \subset \Omega$. Пусть

$$M := \max \left\{ \sup_{z \in Q} |\partial^\alpha h(z)| \mid 0 \leq \alpha_k \leq 1, k \in P_N, \alpha \in \mathbb{N}_0^N \right\}.$$

По лемме 2.5.1 для $z \in Q$

$$|h^{[2]}(z)| \leq M^2 \sum_{\sigma \subsetneq P_N} \prod_{k \in P_N \setminus \sigma} |z_k| \leq M^2 (2^N - 1) \prod_{k \in P_N} (1 + |z_k|).$$

Покажем, что для всех $n \geq 2$, $z \in Q$ выполняется неравенство

$$|h^{[n]}(z)| \leq \frac{M^n (2^N - 1)^{n-1}}{(n-1)!} \prod_{k \in P_N} (1 + |z_k|)^{n-1}. \quad (2.5.3)$$

Для $n = 2$ эта оценка выполняется. Пусть она имеет место для некоторого $n \geq 2$. Тогда вследствие леммы 2.5.1

$$\begin{aligned} |h^{[n+1]}(z)| &\leq \sum_{\sigma \subsetneq P_N} \left| \int_{\Pi(z|(P_N \setminus \sigma))} \partial^{1(P_N \setminus \sigma)} h(z - t_{\sigma,z}) h^{[n]}(t_{\sigma,z}) dt(P_N \setminus \sigma) \right| \\ &\leq \frac{M^{n+1} (2^N - 1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\sigma \subsetneq P_N} \int_{\Pi(|z|(P_N \setminus \sigma))} \prod_{k \in P_N} (1 + r_k)^{n-1} dr(P_N \setminus \sigma) \\ &\leq \frac{M^{n+1} (2^N - 1)^n}{n!} \prod_{k \in P_N} (1 + |z_k|)^n. \end{aligned}$$

Положим $d := \sup \left\{ |z_k| \mid z \in Q, k \in P_N \right\}$. Из оценок (2.5.3) следует, что для любого $n \geq 2$

$$\sup_{z \in Q} |h^{[n]}(z)| \leq \frac{M^n (2^N - 1)^{n-1} (1 + d)^{Nn}}{(n-1)!}.$$

По [64, лемма 3] семейство всех полизвездных относительно точки 0 компактов в Ω образует фундаментальное семейство компактных подмножеств Ω . Значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} h^{[n]}$ (абсолютно) сходится в $H(\Omega)$ к некоторой функции $v \in H(\Omega)$. При этом $(\mathbf{1} - h) * v = \mathbf{1}$.

▷

Теорема 2.5.4. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0, $g \in H(\Omega)$. Следующие утверждения равносильны

- (i) Оператор $S_g : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ обратим.
- (ii) Элемент g обратим в алгебре $(H(\Omega), *)$.
- (iii) $g(0) \neq 0$.

Доказательство. Импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii) верна по лемме 2.5.5.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Пусть $g * h = h * g = \mathbf{1}$, $h \in H(\Omega)$. По теореме 2.5.3 $S_{\mathbf{1}} = S_g S_h = S_h S_g$. Поскольку $S_{\mathbf{1}}$ — тождественный оператор, то S_h — оператор, обратный к S_g .

(i) $\Rightarrow$ (iii): Предположим, что $g(0) = 0$. Вследствие леммы 2.5.1 $S_g(f)(0) = 0$ для любой функции $f \in H(\Omega)$. Значит, $S_g : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ не является сюръективным, а тем более обратимым.

▷

Следствие 2.5.3. Пусть Ω — область Рунге в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0. Алгебра $(H(\Omega), *)$ локальна. Ее единственным максимальным идеалом является множество всех $*$ -необратимых элементов в ней.

Подобный результат для пространства Харди в полидиске получен другим методом в статье [73, следствие 3]. В [73] он доказан с помощью рассмотрения соответствующего пространства функций со значениями в таком же банаховом пространстве с числом переменных, меньшем на единицу, и последующего сведения к одномерной ситуации.

Возвратимся к двойственной ситуации, рассмотренной ранее, когда Ω дополнительно выпуклая. Двойственность дуальной пары $(H(\Omega), E_{\Omega})$ за-

дается билинейной формой

$$\langle h, f \rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(h), \quad h \in H(\Omega), f \in E_\Omega$$

Лемма 2.5.6. Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 .

(i) Для $g \in H(\Omega)$ сопряженным к оператору S_g относительно дуальной пары $(H(\Omega), E_\Omega)$ является оператор B_φ для $\varphi = (\mathcal{F}')^{-1}(g)$.

(ii) Для $k \in P_N$ сопряженным к оператору $J_k : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ относительно дуальной пары $(H(\Omega), E_\Omega)$ является оператор $D_{k,0} : E_\Omega \rightarrow E_\Omega$.

Доказательство. Утверждение (i) справедливо по следствию 2.3.2, а (ii) — частный случай (i) для $g(t) = t_k$ (тогда $(\mathcal{F}')^{-1}(g)(f) = \frac{\partial f}{\partial z_k}(0)$). $\triangleright$

Теорема 2.5.5. Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, полизвездная относительно точки 0 , $\varphi \in E'_\Omega$. Оператор B_φ обратим в E_Ω тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbf{1}) \neq 0$.

Глава 3

Деление на многочлен в пространствах аналитических функционалов

Основная цель в этой главе — доказательство однозначной разрешимости задачи деления на многочлен с разделяющимися переменными и представление ее решения, удовлетворяющего нулевым условиям, в виде обобщенного произведения Дюамеля в пространстве аналитических функционалов, являющемся топологическим сопряженным к весовому пространству целых функций в $\mathbb{C}^N$, как в главе 2.

3.1 Задача деления и обобщенное произведение Дюамеля

Далее $E(V)$ — счетный индуктивный предел весовых банаховых пространств целых в $\mathbb{C}^N$ функций, введенный в главе 2.

Замечание 3.1.1. Пусть $j \in P_N$, $p \in \mathbb{C}[t_j]$ — многочлен переменной t_j степени не меньше 1. Если $f \in E(V)$ и для любых фиксированных $t_k \in \mathbb{C}$, $k \in P_N$, $k \neq j$, функция $f(t)/p(t_j)$ является целой по t_j , то $f/p \in E(V)$. Множество $pE(V) := \{pg \mid g \in E(V)\}$ — замкнутое подпространство $E(V)$. Наделим $pE(V)$ индуцированной из $E(V)$ топологией. Отображение деления $f \mapsto \frac{f}{p}$ линейно и непрерывно из $pE(V)$ в $E(V)$.

Отметим одно равенство, полезное при исследовании действия $T_{j,z}$ на произведение функций.

Замечание 3.1.2. Для любых функций $g, h \in E(V)$, $j \in P_N$, $t, z \in \mathbb{C}^N$ выполняется равенство

$$T_{j,z}(gh)(t) = h(t_{j,z})T_{j,z}(g)(t) + t_j g(t)D_{j,z}(h)(t).$$

В частности, если функция h не зависит от переменной t_j , то $T_{j,z}(gh)(t) = h(t)T_{j,z}(g)(t)$, $t \in \mathbb{C}^N$.

Ниже будем использовать весовые пространства целых в $\mathbb{C}^{N-1}$ функций такого же вида, как и $E(V)$. Они задаются сужениями исходных функций v_n , $n \in \mathbb{N}$, на координатные гиперплоскости. Для $j \in P_N$, $n \in \mathbb{N}$ определим функции

$$v_{n,j}(z_1, \dots, z_{N-1}) := v_n(z_1, \dots, z_{j-1}, 0, z_j, \dots, z_{N-1}), \quad z \in \mathbb{C}^{N-1},$$

и посредством последовательности $(v_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ зададим банахово пространство

$$E_n(V^{(j)}) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^{N-1}) \mid \sup_{t \in \mathbb{C}^{N-1}} \frac{|f(t)|}{\exp(v_{n,j}(t))} < +\infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

с соответствующей весовой $\sup$ -нормой; $E(V^{(j)}) := \varinjlim_{n \rightarrow} E_n(V^{(j)})$. Для всех $j \in P_N$ последовательности $(v_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют условиям (2.1.1) и (2.1.2) в $\mathbb{C}^{N-1}$.

Для $j \in P_N$, $t \in \mathbb{C}^N$ положим $t^{(j)} := (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N)$. Вследствие условия (2.1.2) для любых $n \in \mathbb{N}$, $j \in P_N$, $t \in \mathbb{C}^N$ справедливо неравенство

$$v_{n,j}(t^{(j)}) \leq v_{k(n)}(t) + v_{k(n)}(0) + D(n).$$

Это и предположение (2.1.1) влекут, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $j \in P_N$, $g \in E(V^{(j)})$, многочлена $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$ функция $p(t_1, \dots, t_N)g(t^{(j)})$ принадлежит $E(V)$. Все линейные отображения $f \rightarrow f_j$, $j \in P_N$, где $f_j(z_1, \dots, z_{N-1}) := f(z_1, \dots, z_{j-1}, 0, z_j, \dots, z_{N-1})$, $z \in \mathbb{C}^{N-1}$, непрерывны из $E(V)$ в $E(V^{(j)})$.

Зафиксируем ненулевые многочлены $q_j \in \mathbb{C}[t_j]$ переменной t_j степени $m_j \geq 1$ со старшими коэффициентами, равными 1, и положим

$$Q(t) := q_1(t_1) \cdots q_N(t_N),$$

$$Q_1(t) := 1, Q_j(t) := q_1(t_1) \cdots q_{j-1}(t_{j-1}), 2 \leq j \leq N, t \in \mathbb{C}^N.$$

Специальный вид рассматриваемого многочлена Q позволяет доказать следующий вариант леммы о делении с остатком. Ее доказательство сводится к N последовательным делениям на многочлены q_j с использованием интерполяционных многочленов Эрмита по переменной t_j . Такие многочлены для функций многих переменных при делении с остатком применялись В.М. Трутневым [41, доказательство теоремы 9].

Лемма 3.1.1. *Для любой функции $f \in E(V)$ существуют единственные функции $h \in E(V)$ и $g_{j,k} \in E(V^{(j)})$, $j \in P_N$, $0 \leq k < m_j$, для которых выполняется равенство*

$$f(t) = Q(t)h(t) + \sum_{j=1}^N Q_j(t) \sum_{k=0}^{m_j-1} t_j^k g_{j,k}(t^{(j)}), t \in \mathbb{C}^N. \quad (3.1.1)$$

Доказательство. Выберем число $\rho_1 > 0$, для которого $|\lambda| < \rho_1$ для любого корня $\lambda \in \mathbb{C}$ многочлена q_1 . Рассмотрим интерполяционный многочлен Эрмита по переменной t_1

$$r_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho_1} \frac{q_1(\xi) - q_1(t_1)}{q_1(\xi)(\xi - t_1)} f(\xi, t_2, \dots, t_N) d\xi, t \in \mathbb{C}^N.$$

Функция $\frac{q_1(\xi) - q_1(t_1)}{\xi - t_1}$ — многочлен степени $m_1 - 1$ переменной t_1 , коэффициентами которого являются многочлены переменной $\xi \in \mathbb{C}$. Стандартная оценка интеграла показывает, что $r_1 \in E(V)$. Существует целая функция h_1 в $\mathbb{C}^N$, для которой $f(t) - r_1(t) = q_1(t_1)h_1(t)$ для любого $t \in \mathbb{C}^N$, причем $h_1 \in E(V)$ (см. замечание 3.1.1). Функция r_1 имеет следующий вид: $r_1(t) = \sum_{k=0}^{m_1-1} t_1^k g_{1,k}(t^{(1)})$, где все функции $g_{1,k}$ принадлежат пространству $E(V^{(1)})$.

Возьмем число $\rho_2 > 0$ такое, что $|\lambda| < \rho_2$ для любого корня $\lambda \in \mathbb{C}$ многочлена q_2 . Поделим теперь $h_1(t)$ на $q_2(t_2)$:

$$f(t) = q_1(t_1)(q_2(t_2)h_2(t) + r_2(t)) + r_1(t) = q_1(t)q_2(t_2)h_2(t) + q_1(t_1)r_2(t) + r_1(t).$$

Здесь

$$r_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho_2} \frac{q_2(\xi) - q_2(t_2)}{q_2(\xi)(\xi - t_2)} h_1(t_1, \xi, t_2, \dots, t_N) d\xi, \quad t \in \mathbb{C}^N.$$

Поступая так и далее, получим:

$$f(t) = Q(t)h_N(t) + q_1(t_1)q_2(t_2) \cdots q_{N-1}(t_{N-1})r_N(t)$$

$$+ q_1(t_1)q_2(t_2) \cdots q_{N-2}(t_{N-2})r_{N-1}(t) + \cdots + q_1(t_1)q_2(t_2)r_3(t) + q_1(t_1)r_2(t) + r_1(t),$$

где функции $r_j \in E(V)$ имеют такой вид: $r_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j-1} t_j^k g_{j,k}(t^{(j)})$, $g_{j,k} \in E(V^{(j)})$ (функции $g_{j,k}$ определяются по r_j однозначно). Отметим, что все отображения $f \mapsto r_j$, $j \in P_N$, линейны и непрерывны в $E(V)$.

Докажем единственность представления (3.1.1). Пусть

$$0 = Q(t)h(t) + \sum_{j=1}^N Q_j(t)r_j(t), \quad t \in \mathbb{C}^N, \quad (3.1.2)$$

где $h \in E(V)$, r_j — многочлены степени не выше $m_j - 1$ переменной t_j с коэффициентами из $E(V^{(j)})$, зависящими от переменных $t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N$. Если h — ненулевая функция, то тейлоровское разложение $Q(t)h(t)$ содержит с ненулевым коэффициентом степень t^α с $\alpha_j \geq m_j$ для всех $j \in P_N$. Поскольку тейлоровское разложение второго слагаемого в (3.1.2) таких мономов не содержит, то $h \equiv 0$. Следовательно,

$$r_1(t) = -q_1(t)(r_2(t) + q_2(t)r_3(t) + \cdots + q_2(t) \cdots q_{N-1}(t)r_N(t)), \quad t \in \mathbb{C}^N.$$

Так как степень $r_1(t)$ по t_1 не выше $m_1 - 1$, а степень q_1 по t_1 равна m_1 , то выражение в скобках, а значит, и r_1 — нулевые функции. Аналогично убедимся в том, что все остальные функции r_j тоже нулевые. $\triangleright$

Введем умножение функционалов из $E(V)'$ на многочлен $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$:

$$(p\varphi)(f) := \varphi(pf), \quad f \in E(V), \quad \varphi \in E(V)'.$$

Так как оператор $f \mapsto pf$ умножения на p линеен и непрерывен в $E(V)$ и $E(V)$ рефлексивно, то сопряженное к нему отображение $\varphi \mapsto p\varphi$ линейно и непрерывно в сильном сопряженном $E(V)'$.

Далее пойдет речь о разрешимости задачи деления в $E(V)'$ при дополнительных условиях на частное.

Теорема 3.1.1. *Для любых $\psi \in E(V)'$, $\nu_{j,k} \in E(V^{(j)})'$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$, существует единственный функционал $\varphi \in E(V)'$ такой, что $Q\varphi = \psi$ и для любых $g_j \in E(V^{(j)})$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$*

$$\varphi_t(t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = \nu_{j,k}(g_j). \quad (3.1.3)$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, предложенной В.М. Трутневым [41, § 7] при решении задачи Коши для уравнения свертки в пространствах целых функций в $\mathbb{C}^N$ экспоненциального типа и существенно использующей деление с остатком в пространстве функций, голоморфных в области Рунге в $\mathbb{C}^N$. Определим (линейные) операторы

$$A(f) := h, \quad A_{j,k}(f) := g_{j,k}, \quad f \in E(V), \quad j \in P_N, \quad 0 \leq k < m_j.$$

где функции $h, g_{j,k}$ удовлетворяют равенству (3.1.1). По доказательству леммы 3.1.1 и замечанию 3.1.1 оператор A линеен и непрерывен в $E(V)$. Поскольку линейные операторы $f \mapsto r_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j-1} t_j^k g_{j,k}(t^{(j)})$ непрерывны в $E(V)$ и

$$g_{j,k}(t^{(j)}) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k r_j}{\partial t_j^k}(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_N),$$

$$t \in \mathbb{C}^N, \quad j \in P_N, \quad 0 \leq k < m_j - 1,$$

то все линейные операторы $A_{j,k}$ из $E(V)$ в $E(V^{(j)})$ непрерывны.

Положим

$$\varphi := \psi A + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{m_j-1} \nu_{j,k} A_{j,k}.$$

Тогда $\varphi \in E(V)'$. Для любой функции $f \in E(V)$ выполняется равенство $\varphi(Qf) = \psi$, так как $A(Qf) = f$ и $A_{j,k}(Qf) = 0$ для всех $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$. Поэтому $Q\varphi = \psi$. Кроме того, $\varphi_t(t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = \nu_{j,k}(g_j)$ для

любых $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$, $g_j \in E(V^{(j)})$, поскольку $A_t(t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = 0$, $(A_{j,k})_t(t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = g_j$ и $(A_{s,m})_t(t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = 0$, если $s \neq j$ или $m \neq k$. Значит, φ удовлетворяет условиям (3.1.3).

Вследствие леммы 3.1.1 такое решение $\varphi \in E(V)$ единственно. $\triangleright$

Ниже покажем, что решение задачи в теореме 3.1.1, удовлетворяющее нулевым условиям, можно представить в виде, аналогичном одномерному. Предварительно докажем вспомогательное утверждение. Пусть H_j , $j \in P_N$, — множество всех функций $f \in E(V)$, имеющих представление $f(t) = Q_j(t) g_j(t^{(j)})$, где $g_j \in E(V^{(j)})$. Ясно, что H_j — подпространство $E(V)$. Для множеств $R, S \subset E(V)$ положим

$$R + S := \{g + h \mid g \in R, h \in S\}, \quad RS := \{gh \mid g \in R, h \in S\}.$$

Отметим, что для любых $j, s \in P_N$, $j \neq s$, справедливо вложение $\mathbb{C}[t_s]H_j \subset H_j$. Символ $C[t_s]_n$, $s \in P_N$, $n \in \mathbb{N}_0$, обозначает множество многочленов переменной t_s степени не больше n .

Лемма 3.1.2. Пусть $j, s \in P_N$.

- (i) Если $s \geq j$, то для любого $z \in \mathbb{C}^N$, любой функции $h \in E(V^{(j)})$ функция $(T_{s,z})_t(Q_j(t)h(t^{(j)}))$ принадлежит H_j .
- (ii) Если $s < j$, то для любого $z \in \mathbb{C}^N$, любой функции $h \in E(V^{(j)})$ функция $(T_{s,z})_t(Q_j(t)h(t^{(j)}))$ принадлежит $H_j + \mathbb{C}[t_s]_{m_s-1}H_s$.

Доказательство. Утверждение (i) имеет место, поскольку

$$\begin{aligned} & (T_{s,z})_t(Q_j(t)h(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N))(t) \\ &= Q_j(t)(T_{s,z})_t(h(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N))(t^{(j)}) \end{aligned}$$

и функция $(T_{s,z})_t(h(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N))(t^{(j)})$ (по переменным $t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N$) принадлежит $E(V^{(j)})$.

(ii): По замечанию 3.1.2 для некоторого многочлена $r \in C[t_s]_{m_s-1}$

$$\begin{aligned} & (T_{s,z})_t(Q_j(t)h(t^{(j)}))(t) \\ &= h(t_1, \dots, t_{s-1}, z_s, t_{s+1}, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N)T_{s,z}(Q_j)(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +t_s Q_j(t)(D_{s,z})_t(h(t^{(j)}))(t) = h(t_1, \dots, t_{s-1}, z_s, t_{s+1}, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N) Q_j(t) \\
& +t_s Q_j(t)(D_{s,z})_t(h(t^{(j)}))(t) \\
& +h(t_1, \dots, t_{s-1}, z_s, t_{s+1}, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N) r(t) \cdot \\
& \cdot q_1(t_1) \cdots q_{s-1}(t_{s-1}) q_{s+1}(t_{s+1}) \cdots q_j(t_j).
\end{aligned}$$

Каждое из первых двух слагаемых (после последнего знака равенства) принадлежит H_j , а третье слагаемое содержится в $\mathbb{C}[t_s]_{m_s-1} H_s$. $\triangleright$

Используем обобщенное произведение Дюамеля $\circledast$ в $E(V)'$, введенное и изученное в главе 2, § 2.3.1. Как и ранее, $\delta_0(f) := f(0)$, $f \in E(V)$.

Теорема 3.1.2. *Если $\frac{\delta_0}{Q} \in E(V)'$ — решение уравнения $Q\varphi = \delta_0$, для которого*

$$\left(\frac{\delta_0}{Q}\right)_t (t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = 0, \quad 0 \leq k < m_j, g_j \in E(V^{(j)}), j \in P_N, \quad (3.1.4)$$

то для любого $\psi \in E(V)'$ произведение $\psi \circledast \frac{\delta_0}{Q}$ является решением уравнения $Q\varphi = \psi$ таким, что $\left(\psi \circledast \frac{\delta_0}{Q}\right)_t (t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = 0$ для любых $0 \leq k < m_j$, $g_j \in E(V^{(j)})$, $j \in P_N$.

Доказательство. Покажем по индукции, что для всех $j \in P_N$, $z \in \mathbb{C}^N$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
& T_{j,z} \cdots T_{1,z}(Qf)(t) \\
& = f(z_1, \dots, z_j, t_{j+1}, \dots, t_N) Q(t) + Q(t) \sum_{s=1}^j t_s a_{j,s}(t) + b_j(t), \quad t \in \mathbb{C}^N, \quad (3.1.5)
\end{aligned}$$

где $a_{j,s}, b_j \in E(V)$, причем $\frac{\delta_0}{Q}(T_{N,z} \cdots T_{j+1,z}(b_j)) = 0$.

Зафиксируем $f \in E(V)$, $z \in \mathbb{C}^N$. Вследствие замечания 3.1.2

$$T_{1,z}(Qf)(t) = f(z_1, t_2, \dots, t_N) T_{1,z}(Q)(t) + t_1 Q(t) D_{1,z}(f)(t), \quad t \in \mathbb{C}^N.$$

Отметим, что $T_{1,z}(Q)(t) = (q_1(t_1) + u_1(t_1)) q_2(t_2) \cdots q_N(t_N)$, где u_1 — многочлен переменной t_1 степени не выше $m_1 - 1$, коэффициентами которого являются многочлены, зависящие от z_1 (и не зависящие от $t_2, \dots, t_N$). Поэтому

$$T_{1,z}(Qf)(t) = f(z_1, t_2, \dots, t_N) Q(t) + t_1 Q(t) D_{1,z}(f)(t) + b_1(t),$$

где $b_1(t) = f(z_1, t_2, \dots, t_N)u_1(t_1)q_2(t_2) \cdots q_N(t_N)$. В силу условий (3.1.4) функция $T_{N,z} \cdots T_{2,z}(b_1)$ принадлежит ядру функционала $\frac{\delta_0}{Q}$. Таким образом, при $j = 1$ равенство (3.1.5) выполняется. Предположим, что оно справедливо для $j \in P_N$, $j < N$. Тогда, учитывая замечание 3.1.2, получим:

$$\begin{aligned} & T_{j+1,z}T_{j,z} \cdots T_{1,z}(Qf)(t) \\ &= f(z_1, \dots, z_j, z_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_N)T_{j+1,z}(Q)(t) \\ &+ t_{j+1}Q(t)(D_{j+1,z})_t(f(z_1, \dots, z_j, t_{j+1}, \dots, t_N))(t) \\ &+ \sum_{s=1}^j t_s \left(a_{j,s}(t_1, \dots, t_j, z_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_N)T_{j+1,z}(Q)(t) \right. \\ &\quad \left. + t_{j+1}Q(t)D_{j+1,z}(a_{j,s})(t) \right) + T_{j+1,z}(b_j)(t). \end{aligned}$$

Справедливо равенство

$$T_{j+1,z}(Q)(t) = Q(t) + Q_{j+1}(t)w_{j+1}(t_{j+1})q_{j+2}(t_{j+2}) \cdots q_N(t_N),$$

где $w_{j+1}(t_{j+1})$ — многочлен переменной t_{j+1} степени не выше $m_{j+1} - 1$, коэффициентами которого являются многочлены, коэффициенты которых зависят от z_{j+1} . Таким образом,

$$\begin{aligned} & T_{j+1,z}T_{j,z} \cdots T_{1,z}(Qf)(t) \\ &= f(z_1, \dots, z_j, z_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_N)Q(t) + Q(t) \sum_{s=1}^{j+1} t_s a_{j+1,s}(t) + b_{j+1}(t), \quad t \in \mathbb{C}^N, \end{aligned}$$

где для $t \in \mathbb{C}^N$

$$a_{j+1,s}(t) = a_{j,s}(t_1, \dots, t_j, z_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_N) + t_{j+1}D_{j+1,z}(a_{j,s})(t), \quad 1 \leq s \leq j,$$

$$a_{j+1,j+1}(t) = (D_{j+1,z})_t(f(z_1, \dots, z_j, t_{j+1}, \dots, t_N))(t),$$

$$\begin{aligned} b_{j+1}(t) &= f(z_1, \dots, z_j, z_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_N)Q_{j+1}(t)w_{j+1}(t_{j+1})q_{j+2}(t_{j+2}) \cdots q_N(t_N) \\ &+ \sum_{s=1}^j t_s a_{j,s}(t_1, \dots, t_j, z_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_N)Q_{j+1}(t)w_{j+1}(t_{j+1})q_{j+2}(t_{j+2}) \cdots q_N(t_N) \\ &+ T_{j+1,z}(b_j)(t). \end{aligned}$$

Все функции $a_{j+1,s}$ принадлежат $E(V)$ и $\frac{\delta_0}{Q}(T_{N,z} \cdots T_{j+2,z}(b_{j+1})) = 0$. Значит, (3.1.5) выполняется и для $j+1$. На N -ом шаге получим, что

$$\begin{aligned} T_z(Qf) &= T_{N,z} \cdots T_{1,z}(Qf)(t) \\ &= f(z)Q(t) + Q(t) \sum_{s=1}^N t_s a_{N,s}(t) + b_N(t), \quad t \in \mathbb{C}^N, \end{aligned}$$

с функцией $b_N \in E(V)$, для которой $\frac{\delta_0}{Q}(b_N) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\psi \circledast \frac{\delta_0}{Q} \right) (Qf) &= \psi_z \left(\left(\frac{\delta_0}{Q} \right)_t \left(f(z)Q(t) + Q(t) \sum_{s=1}^N t_s a_{N,s}(t) + b_N(t) \right) \right) \\ &= \psi(f), \quad f \in E(V), \end{aligned}$$

и $Q \left(\psi \circledast \frac{\delta_0}{Q} \right) = \psi$.

Проверим теперь выполнимость условий (3.1.4) для $\psi \circledast \frac{\delta_0}{Q}$. Зафиксируем $j \in P_N$, $g_j \in E(V^{(j)})$ и k такое, что $0 \leq k \leq m_j - 1$. Для $z \in \mathbb{C}^N$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\frac{\delta_0}{Q}((T_z)_t(t_j^k Q_j(t) g_j(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N))) \\ &= \frac{\delta_0}{Q}((T_{j,z})_t(t_j^k) (T_{N,z} \cdots T_{j+1,z} T_{j-1,z} \cdots T_{1,z})_t(Q_j(t) g_j(t^{(j)}))). \end{aligned}$$

Функция $(T_{j,z})_t(t_j^k)$ является многочленом j -ой переменной степени k , коэффициентами которого являются многочлены, зависящие от z_j . Лемма 3.1.2, в силу (3.1.4), влечет, что в последнем равенстве правое выражение равно 0. Значит, $\left(\psi \circledast \frac{\delta_0}{Q} \right)_t(t_j^k Q_j(t) g_j(t^{(j)})) = 0$ для любых $0 \leq k < m_j$, $g_j \in E(V^{(j)})$, $j \in P_N$. $\triangleright$

3.2 Применения к конкретным пространствам

3.2.1 Применение к пространству функций, голоморфных в выпуклой полизвездной области.

Далее Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, содержащая точку 0. Предполагается, что Ω является полизвездной относительно точки 0.

Для $j \in P_N$ определим множество

$$\Omega^{(j)} := \{(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N) \in \mathbb{C}^{N-1} \mid (t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_N) \in \Omega\}.$$

Его можно отождествить с пересечением Ω и гиперплоскости $\{t \in \mathbb{C}^N \mid t_j = 0\}$. Множество $\Omega^{(j)}$ является областью в $\mathbb{C}^{N-1}$, полизвездной относительно точки 0. Зафиксируем последовательность выпуклых компактов Ω_n , $n \in \mathbb{N}$, полизвездных относительно точки 0, для которых $\Omega_n \subset \text{int } \Omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$. В данной ситуации полагаем $v_n := H_{\Omega_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (2.1.1) и (2.1.2). В этом случае $v_{n,j} = H_{\Omega_n^{(j)}}$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in P_N$, где

$$\Omega_n^{(j)} := \{(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N) \in \mathbb{C}^{N-1} \mid (t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_N) \in \Omega_n\}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$Q(\partial)(u) = v,$$

$$\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} (Q_j(\partial)(u)) (z_1, \dots, z_{j-1}, 0, z_{j+1}, \dots, z_N)$$

$$= u_{j,k}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_N), \quad z \in \Omega, \quad 0 \leq k < m_j, \quad j \in P_N. \quad (3.2.1)$$

где $u, v \in H(\Omega)$, $u_{j,k} \in H(\Omega^{(j)})$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$. Поскольку множество $\{e_z \mid z \in \mathbb{C}^{N-1}\}$ полно в $H(\Omega^{(j)})$ и для любых $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$, $\varphi \in E(V)'$ выполняется равенство

$$\mathcal{F}'(p\varphi) = p(\partial)(\mathcal{F}'(\varphi)),$$

то условия (3.1.3) в теореме 3.1.1 равносильны тому, что

$$\varphi_t(t_j^k Q_j(t) e_{(z_1, \dots, z_{j-1}, 0, z_j, \dots, z_{N-1})}(t)) = v_{j,k}(e_z)$$

для любых $z \in \Omega^{(j)}$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$.

Теорема 2.3.2 влечет

Следствие 3.2.1. (i) Для любых функций $v \in H(\Omega)$, $u_{j,k} \in H(\Omega^{(j)})$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$, существует единственное решение $u \in H(\Omega)$ задачи (3.2.1).

(ii) Пусть u_1 — решение задачи (3.2.1) для правой части $v \equiv 1$ с нулевыми условиями. Тогда для любой функции $v \in H(\Omega)$ произведение $v * u_1$ является решением задачи (3.2.1) с нулевыми условиями.

Замечание 3.2.1. При $N = 1$

$$(g * h)(z) = g(0)h(z) + \int_0^z g'(\xi)h(z - \xi)d\xi. \quad (3.2.2)$$

Из этого равенства следует, что, если $g^{(k)}(0) = 0$, $0 \leq k \leq n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, то в $H(\Omega)$

$$(g * h)^{(k)} = g^{(k)} * h, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (3.2.3)$$

Поэтому для любого многочлена p одной переменной степени не выше n выполняется равенство

$$p(\partial)(g * h) = p(\partial)(g) * h. \quad (3.2.4)$$

Это дает возможность часть (ii) следствия 3.2.1 доказать непосредственно.

Вследствие (3.2.4)

$$\begin{aligned} & q_1(\partial)(v * u_1) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_N} \left(\int_0^{z_N} \frac{\partial}{\partial z_{N-1}} \left(\cdots \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\int_0^{z_1} v(z - \xi) q_1(\partial)(u_1)(\xi) d\xi_1 \right) \cdots \right) d\xi_N \right). \end{aligned}$$

Далее, действуя на это равенство последовательно операторами $q_2(\partial), \dots, q_N(\partial)$, получим:

$$\begin{aligned} Q(\partial)(v * u_1)(z) &= \frac{\partial^N}{\partial z_1 \cdots \partial z_N} \int_{\Pi(z)} v(z - \xi) Q(\partial)(u_1)(\xi) d\xi \\ &= \frac{\partial^N}{\partial z_1 \cdots \partial z_N} \int_{\Pi(z)} v(\xi) d\xi = v(z), \quad z \in \Omega. \end{aligned}$$

Соотношение (3.2.2) влечет выполнимость нулевых условий для $v * u_1$.

3.2.2 Применение к пространству целых функций посредством обобщенного преобразования Лапласа

Зафиксируем $\rho \in (1, +\infty)$. Рассмотрим случай, когда

$$v_n(z) := n|z|^\rho, \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (2.1.1). Условие (2.1.2) для нее также выполняется, поскольку для любых $t, z \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$

$$|t_{\sigma, z}|^\rho \leq (|t| + |z|)^\rho \leq 2^{\rho-1}(|t|^\rho + |z|^\rho).$$

В данном случае $E(V)$ является пространством целых функций в $\mathbb{C}^N$ не выше порядка ρ и конечного типа. Согласно [33, теорема 1] обобщенное преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\nu)(\lambda) := \nu_z(E_\rho(\langle \lambda, z \rangle)), \quad \lambda \in \mathbb{C}^N, \quad \nu \in H(\mathbb{C}^N)',$$

является топологическим изоморфизмом $H(\mathbb{C}^N)'$ на $E(V)$. Сопряженное к $\mathcal{F}$ (относительно дуальных пар $(H(\mathbb{C}^N)', H(\mathbb{C}^N))$ и $(E(V), E(V)')$) отображение $\mathcal{F}' : E(V)' \rightarrow H(\mathbb{C}^N)$ осуществляет топологический изоморфизм $E(V)'$ на $H(\mathbb{C}^N)$.

Пусть $\mathcal{M}_\nu$ — заданный функционалом $\nu \in H(\mathbb{C}^N)'$ оператор ρ -свертки в $H(\mathbb{C}^N)$, изученный В.В. Напалковым и И.Х. Мусиным [34]. Положим $e_\lambda(t) := E_\rho(\langle \lambda, t \rangle)$, $\lambda, t \in \mathbb{C}^N$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}^N$ выполняется равенство $\mathcal{M}_\nu(e_\lambda) = \nu(e_\lambda)e_\lambda$.

Для $f_\alpha(t) := t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, реализацией оператора S_{f_α} умножения на f_α в $E(V)'$ является оператор $\partial_\rho^\alpha := \mathcal{F}' S_{f_\alpha} \mathcal{F}'^{-1}$. Отметим, что он является оператором ρ -свертки, заданным функционалом $\delta_{0, \alpha}(f) := \frac{\Gamma(\frac{|\alpha|}{\rho} + 1)}{(|\alpha|)!} \partial^\alpha f(0)$, $f \in H(\mathbb{C}^N)$. Действительно, поскольку

$$E_\rho(\langle \lambda, z \rangle) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + 1\right)} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\lambda^\alpha z^\alpha}{\alpha!}, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}^N,$$

то

$$(\delta_{0, \alpha})_z(E_\rho(\langle \lambda, z \rangle)) = \lambda^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Кроме того, для любого $\mu \in H(\mathbb{C}^N)'$

$$\mu(\mathcal{F}'(f_\alpha \delta_\lambda)) = (f_\alpha \delta_\lambda)(\mathcal{F}(\mu)) = \delta_\lambda(f_\alpha \mathcal{F}(\mu)) = \lambda^\alpha \mu(e_\lambda) = \mu(\lambda^\alpha e_\lambda),$$

а значит, $\mathcal{F}'(f_\alpha \delta_\lambda) = \lambda^\alpha e_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}^N$. Учитывая, что $\mathcal{F}'(\delta_\lambda) = e_\lambda$, получим:

$$\partial_\rho^\alpha(e_\lambda) = \mathcal{F}'(f_\alpha \delta_\lambda) = \lambda^\alpha e_\lambda = \delta_{0,\alpha}(e_\lambda) e_\lambda.$$

Отметим представление ∂_ρ^α на мономах. Ниже используем обозначение из [34]: для функции $h \in H(\mathbb{C}^N)$ ее ρ -сдвиг задается равенством $\tilde{h}(z, u) := (\mathcal{F}')^{-1}(h)_t(e_z(t)e_u(t))$, $z, u \in \mathbb{C}^N$.

Поскольку $\mathcal{F}'(\delta_{0,\beta})(z) = z^\beta$, то

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\beta(z, u) &= (\delta_{0,\beta})_t(e_z(t)e_u(t)) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{|\beta|}{\rho} + 1\right)}{(|\beta|)!} \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} C_\alpha^\gamma \partial^\gamma(e_z)(0) \partial^{\beta-\gamma}(e_u)(0) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{|\beta|}{\rho} + 1\right)}{(|\beta|)!} \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} C_\beta^\gamma \frac{(|\gamma|)!}{\Gamma\left(\frac{|\gamma|}{\rho} + 1\right)} z^\gamma \frac{(|\beta| - |\gamma|)!}{\Gamma\left(\frac{|\beta| - |\gamma|}{\rho} + 1\right)} u^{\beta-\gamma}. \end{aligned}$$

Если $\beta \geq \alpha$, то

$$\begin{aligned} \partial_\rho^\alpha(f_\beta)(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{|\alpha|}{\rho} + 1\right)}{(|\alpha|)!} (\delta_{0,\alpha})_u(\tilde{f}_\beta(z, u)) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{|\alpha|}{\rho} + 1\right)}{(|\alpha|)!} \frac{\Gamma\left(\frac{|\beta|}{\rho} + 1\right)}{(|\beta|)!} C_\beta^{\beta-\alpha} \frac{(|\beta| - |\alpha|)!}{\Gamma\left(\frac{|\beta| - |\alpha|}{\rho} + 1\right)} \frac{(|\alpha|)!}{\Gamma\left(\frac{|\alpha|}{\rho} + 1\right)} \alpha! z^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{|\beta|}{\rho} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{|\beta| - |\alpha|}{\rho} + 1\right)} \frac{\beta!}{(|\beta|)!} \frac{(|\beta| - |\alpha|)!}{(\beta - \alpha)!} z^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

В случае $\beta \not\geq \alpha$ выполняется равенство $\partial_\rho^\alpha(f_\beta) = 0$.

Если $N = 1$, то ∂_ρ^α — оператор дифференцирования Гельфонда–Леонтьева. Отображение $S_Q(\varphi) = Q\varphi$, действующее в $E(V)'$, реализуется как многочлен Q от операторов Гельфонда–Леонтьева в $H(\mathbb{C}^N)$.

Для функции $f(z) = \sum_{\beta \geq 0} a_\beta z^\beta \in H(\mathbb{C}^N)$

$$\partial_\rho^\alpha(f)(z) = \sum_{\beta \geq \alpha} a_\beta \frac{\beta!(|\beta| - |\alpha|)!}{(|\beta|)!(\beta - \alpha)!} \frac{\Gamma_\rho\left(\frac{|\beta|}{\rho} + 1\right)}{\Gamma_\rho\left(\frac{|\beta| - |\alpha|}{\rho} + 1\right)} z^{\beta - \alpha}, \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Если $\rho = 1$, то ∂_ρ^α — обычный оператор частного дифференцирования ∂^α .

Индукцируем посредством $\mathcal{F}'$ умножение $*$ в $H(\mathbb{C}^N)$:

$$g * h := (\mathcal{F}')^{-1}(g) \otimes (\mathcal{F}')^{-1}(h), \quad g, h \in H(\mathbb{C}^N).$$

Согласно лемме 2.3.1 для любых $\varphi, \psi \in E(V)'$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ выполняется равенство

$$(\varphi \otimes \psi)(f_\beta) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} \varphi(f_\gamma) \psi(f_{\beta - \gamma}).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}'(\delta_{0,\alpha} \otimes \delta_{0,\beta})(z) \\ &= \frac{(|\alpha| + |\beta|)!}{\Gamma\left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{\rho} + 1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{|\alpha|}{\rho} + 1\right)}{(|\alpha|)!} \frac{\Gamma\left(\frac{|\beta|}{\rho} + 1\right)}{|\beta|!} \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta)!} z^{\alpha + \beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N, z \in \mathbb{C}^N. \end{aligned}$$

Для целых функций $g(z) = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha z^\alpha$ и $h(z) = \sum_{\beta \geq 0} b_\beta z^\beta$

$$\begin{aligned} & (g * h)(z) \\ &= \sum_{\alpha, \beta \geq 0} a_\alpha b_\beta \frac{(|\alpha| + |\beta|)!}{\Gamma\left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{\rho} + 1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{|\alpha|}{\rho} + 1\right)}{(|\alpha|)!} \frac{\Gamma\left(\frac{|\beta|}{\rho} + 1\right)}{|\beta|!} \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta)!} z^{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

Рассматриваемая в этом пункте задача Коши имеет следующий вид:

$$Q(\partial_\rho)(u) = v,$$

$$\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} (Q_j(\partial_\rho)(u)) (z_1, \dots, z_{j-1}, 0, z_{j+1}, \dots, z_N)$$

$$= u_{j,k}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_N), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad 0 \leq k < m_j, \quad j \in P_N. \quad (3.2.5)$$

где $u, v \in H(\mathbb{C}^N)$, $u_{j,k} \in H(\mathbb{C}^{N-1})$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$.

Следствие 3.2.2. (i) Для любых функций $v \in H(\mathbb{C}^N)$, $u_{j,k} \in H(\mathbb{C}^{N-1})$, $1 \leq k < m_j$, $j \in P_N$, существует единственное решение $u \in H(\mathbb{C}^N)$ задачи (3.2.5).

(ii) Пусть u_1 — решение задачи (3.2.5) для правой части $v \equiv 1$ с нулевыми условиями. Тогда для любой функции $v \in H(\mathbb{C}^N)$ произведение $v * u_1$ является решением задачи (3.2.5) с нулевыми условиями.

3.2.3 Применение к пространствам бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций

При определении пространств ультрадифференцируемых функций мы придерживаемся подхода в статье Р. Брауна, Р. Майзе и Б.А. Тейлора [54]. Непрерывная неубывающая функция $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ называется весовой функцией, если она удовлетворяет следующим условиям:

- (a) $\omega(2t) = O(\omega(t))$, $t \rightarrow +\infty$.
- (b) $\log t = o(\omega(t))$, $t \rightarrow +\infty$.
- (c) Функция $\varphi = \omega \circ \exp$ выпукла на $\mathbb{R}$.

Символом φ^* обозначим сопряженную по Юнгу к φ функцию, т.е. $\varphi^*(x) := \sup_{y \geq 0} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$.

Далее в этом пункте Ω_j , $j \in P_N$, — выпуклые открытые подмножества $\mathbb{R}$, содержащие точку 0; $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$. Для каждого $j \in P_N$ зафиксируем последовательность отрезков $(K_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$, для которых $K_{j,n} \subset \text{int } K_{j,n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\Omega_j = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{j,n}$ ($\text{int } Q$ — внутренность множества $Q \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$); $\text{int } K_{j,1} \neq \emptyset$; $K_n := K_{1,n} \times \cdots \times K_{N,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть ω — весовая функция. Пространство ультрадифференцируемых функций на Ω типа Берлинга определяется следующим образом:

$$\mathcal{E}_\omega(\Omega) := \left\{ f \in C^\infty(\Omega) \mid \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \sup_{x \in K_n} \frac{|\partial^\alpha f(x)|}{\exp(m\varphi^*(|\alpha|/m))} < +\infty, \forall m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Оно снабжается естественной топологией пространства Фреше. Для функции $\omega(t) = \log(1+t)$ считаем, что $\mathcal{E}_\omega(\Omega) := C^\infty(\Omega)$.

Для ограниченного выпуклого множества $M \subset \mathbb{R}^N$ символ H_M обозначает его (вещественную) опорную функцию, т. е. $H_M(y) := \sup_{x \in M} \langle x, y \rangle$, $y \in \mathbb{R}^N$. Пусть $e_\lambda(x) := \exp(-i\langle \lambda, x \rangle)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{C}^N$. Преобразование Фурье–Лапласа функционала μ из $\mathcal{E}_\omega(\Omega)'$ определяется равенством

$$\mathcal{F}(\mu)(\lambda) := \widehat{\mu}(\lambda) := \mu(e_\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}^N.$$

Продолжим функцию ω на $\mathbb{C}^N$, полагая $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}^N$. В данном случае $v_n(z) := H_{K_n}(\operatorname{Im} z) + n\omega(z)$, $z \in \mathbb{C}^N$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (2.1.1) и (2.1.2).

Приведем теорему Пэли–Винера–Шварца для ультрараспределений [54, предложение 3.5, теорема 7.4], [72, предложение 3.6] и обычных распределений [45, теорема 7.3.1].

Лемма 3.2.1. *Пусть ω — весовая функция или $\omega(t) := \log(1+t)$. Преобразование Фурье–Лапласа $\mathcal{F}$ является топологическим изоморфизмом $\mathcal{E}_\omega(\Omega)'$ на $E(V)$.*

Как и в голоморфном случае, сопряженное отображение $\mathcal{F}' : E(V)' \rightarrow \mathcal{E}_\omega(\Omega)$ к преобразованию Фурье–Лапласа переводит умножение $\otimes$ в произведение Дюамеля $*$ в $\mathcal{E}_\omega(\Omega)$:

$$(g * h)(x) := \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} \int_{\Pi(x)} g(x - \xi) h(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega.$$

При этом $\Pi(x)$ — вещественный параллелепипед:

$$\Pi(x) := [0, x_1] \times \cdots \times [0, x_N], \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

(При $N = 1$ это показано в [16, § 4], [17, п. 4.3]; для $N \geq 2$ доказательство аналогично). Для $j \in P_N$ введем множества $\Omega^{(j)} := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_N \subset \mathbb{C}^{N-1}$.

Рассмотрим задачу Коши следующего вида:

$$Q(\partial)(u) = v,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} (Q_j(\partial)(u)) (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_N) \\ &= u_{j,k}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N), \quad x \in \Omega, \quad j \in P_N, \quad 0 \leq k < m_j, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

где $u, v \in \mathcal{E}_\omega(\Omega)$, $u_{j,k} \in \mathcal{E}_\omega(\Omega^{(j)})$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$. Для многочлена $p(t) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha t^\alpha$ оператор $p(\partial)$ задается равенством $p(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha i^{|\alpha|} \partial^\alpha$.

Отметим равенство

$$\mathcal{F}'(Q\varphi) = Q(\partial)(\mathcal{F}'(\varphi)), \quad \varphi \in E(V)'.$$

Используя это равенство, лемму 3.2.1 для последовательностей $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(v_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$, $j \in P_N$, получим такое утверждение.

Следствие 3.2.3. Пусть ω — весовая функция или $\omega(t) := \log(1+t)$.

(i) Для любых функций $v \in \mathcal{E}_\omega(\Omega)$, $u_{j,k} \in \mathcal{E}_\omega(\Omega^{(j)})$, $0 \leq k < m_j$, $j \in P_N$, существует единственное решение $u \in \mathcal{E}_\omega(\Omega)$ задачи (3.2.6).

(ii) Пусть u_1 — решение задачи (3.2.6) для правой части $v \equiv 1$ с нулевыми условиями. Тогда для любой функции $v \in \mathcal{E}_\omega(\Omega)$ произведение $v * u_1$ является решением задачи (3.2.6) с нулевыми условиями.

Заключение

Основными результатами настоящей диссертации являются следующие:

- 1) Определены операторы частного обратного сдвига, действующие в пространстве $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных в полицилиндрической области Ω в $\mathbb{C}^N$, содержащей точку 0, и в счетных индуктивных пределах весовых пространств Фреше целых в $\mathbb{C}^N$ функций; изучены их свойства.
- 2) Описан коммутант $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ системы $\mathcal{D}_0$ этих операторов в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$, получено интегральное представление операторов из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.
- 3) Доказан критерий обратимости оператора из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.
- 4) Установлен критерий цикличности относительно системы $\mathcal{D}_0$ в $H(\Omega)$ функции с разделяющимися переменными, голоморфной в Ω .
- 5) Исследовано умножение $\otimes$ в топологическом сопряженном $H(\Omega)'$, задаваемое по правилу свертки с помощью сдвигов, ассоциированных с системой $\mathcal{D}_0$. Получены реализации алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ в виде пространства ростков голоморфных функций с операцией поточечного умножения и пространства целых функций экспоненциального типа с многомерным произведением Дюамеля.
- 6) Описан коммутант системы $\mathcal{D}_0$ в весовом (LF)–пространстве $E(V)$ целых в $\mathbb{C}^N$ функций и изучено умножение $\otimes$ в топологическом сопряженном $E(V)'$ к $E(V)$.
- 7) Введен и изучен класс областей в $\mathbb{C}^N$, полизвездных относительно точки 0. Для выпуклой полизвездной относительно точки 0 области получены реализация $\otimes$ в $H(\Omega)$ в виде многомерного произведения Дюамеля.

- 8) Для полизвездной относительно точки 0 области Ω описан коммутант системы операторов частного интегрирования в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$. Все они (и только они) являются операторами Дюамеля.
- 9) Доказаны критерии обратимости элемента в алгебре $H(\Omega)$ с произведением Дюамеля и оператора Дюамеля в $H(\Omega)$. Показано, что алгебра $(H(\Omega), *)$ локальна.
- 10) Решена проблема деления на многочлен с разделяющимися переменными в сопряженном $E(V)'$. Доказаны ее однозначная разрешимость и представление решения этой задачи, удовлетворяющего нулевым условиям, в виде обобщенного произведения Дюамеля в $E(V)'$.
- 11) Получены применения к задаче Коши для уравнения в частных производных конечного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве $H(\Omega)$ для выпуклой полизвездной относительно точки 0 области Ω и в пространствах бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций в выпуклой полицилиндрической относительно точки 0 области в $\mathbb{R}^N$, а также к задаче Коши для уравнения с производными Гельфонда–Леонтьева в $H(\mathbb{C}^N)$.

Исследования, результаты которых приведены в диссертации, могут быть использованы при решении и других уравнений в частных производных, в спектральной теории в расширенном смысле, в аппроксимационных задачах. Представляет интерес решение проблемы синтеза в ядре оператора из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ в $H(\Omega)$ и в произвольном собственном замкнутом подпространстве $H(\Omega)$, инвариантном относительно системы $\mathcal{D}_0$, получение условий $\mathcal{D}_0$ -цикличности функций из $H(\Omega)$, не являющихся функциями с разделяющимися переменными, решение подобных проблем для пространств функций из $H(\Omega)$ с дополнительными ограничениями (например, заданного граничного роста или с определенной граничной гладкостью).

Литература

- [1] Владимиров, В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1964. — 300 с.
- [2] Громов, В. П. О представлении функций двойными последовательностями Дирихле / В. П. Громов // Матем. заметки. — 1970. — Т. 7, № 1. С. 53–61.
- [3] Громов, В. П. Операторы конечного порядка и дифференциально-разностные уравнения / В. П. Громов, С. Н. Мишин, С. В. Панюшкин. — Орел: ГОУВПО «ОГУ», 2009. — 428 с.
- [4] Жаринов, В. В. Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS / В. В. Жаринов // Успехи математических наук. — 1979. — Т. 34, №4 (208). С. 97–131.
- [5] Иванов, П. А. Произведение Дюамеля в пространствах целых функций экспоненциального типа / П. А. Иванов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2022. — № 4-1. С. 95–100.
- [6] Иванов, П. А. О динамике многомерного оператора Поммье / П. А. Иванов // В книге: Математический анализ и математическое моделирование. Тезисы докладов XIV Владикавказской молодежной математической школы. Владикавказ. — 2018. С. 25–26.
- [7] Иванов, П. А. О многомерном операторе обратного сдвига в пространствах голоморфных функций / П. А. Иванов // В книге: Сбор-

- ник трудов. Тезисы докладов Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань, КФУ. — 2021. С. 216—218.
- [8] Иванов, П. А. Операторы обратного сдвига в полицилиндрических областях / П. А. Иванов // В книге: Тезисы докладов XVI международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения». Владикавказ. — 2021. С. 33—34.
- [9] Иванов, П. А. Произведение Дюамеля в пространствах целых функций экспоненциального типа / П. А. Иванов // В книге: Материалы международной научной конференции. Том 1. Тезисы докладов Уфимской осенней математической школы 2022. Уфа, БашГУ — 2022. С. 103—105.
- [10] Иванова, О. А., Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 6, № 3. С. 17—27.
- [11] Иванова, О. А. Об орбитах аналитических функций относительно оператора типа Поммье / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Уфимский математический журнал. — 2015. — Т. 7, № 4. С. 75—79.
- [12] Иванова, О. А. Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Алгебра и анализ. — 2016. — Т. 28, № 2. С. 114—137.
- [13] Иванова, О. А. Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Комплексный анализ, Итоги науки и техники. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2017. — Т. 142. С. 111—120.

- [14] Иванова, О. А. Алгебры аналитических функционалов и обобщенное произведение Дюамеля / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Владикавказский математический журнал. — 2020. — Т. 22, № 3. С. 72—84.
- [15] Иванова, О. А. Инвариантные подпространства оператора обобщенного обратного сдвига и рациональные функции / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов, Ю. Н. Мелихов // Алгебра и анализ. — 2021. — Т. 33, № 6. С. 49—70.
- [16] Иванова, О. А. Циклические векторы и инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в модулях Шварца / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Функциональный анализ и его приложения. — 2022. — №3, С. 39—51.
- [17] Иванова, О. А. Об обратимости оператора Дюамеля в пространствах ультрадифференцируемых функций / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Уфимский математический журнал. — 2023. — Т. 15, № 4. С. 61—74.
- [18] Казьмин, Ю. А. О последовательных остатках ряда Тейлора / Ю. А. Казьмин // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, Механика. — 1963. — № 5. С. 35—46.
- [19] Караев, М. Т. О некоторых применениях обыкновенного и обобщенного произведений Дюамеля / М. Т. Караев // Сибирский математический журнал. — 2005. — Т. 46. С. 553—566.
- [20] Караев, М. Т. Алгебры Дюамеля и их приложения / М. Т. Караев // Функциональный анализ и его приложения. — 2018. — Т. 52, №1. С. 3—12.
- [21] Кирютенко, Ю. А. Обратимость оператора Вольтерра в пространстве аналитических функций / Ю. А. Кирютенко // Математические заметки. — 1984. — Т. 35, №6. С. 795—802.

- [22] Коган, И. Л. Метод интеграла Дюамеля для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с точки зрения теории обобщенных функций / И. Л. Коган // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — Т. 20, № 1. С. 37—45.
- [23] Коробейник, Ю. Ф. Операторы сдвига на числовых семействах / Ю. Ф. Коробейник. — Ростов-на-Дону: изд-во РГУ. — 1983. — 155 с.
- [24] Красичков-Терновский, И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза / И. Ф. Красичков-Терновский // Матем. сб. — 1972. — Т. 88(130), № 3(7). С. 331—352.
- [25] Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
- [26] Левитан, Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. / Б. М. Левитан. — М.: Наука, 1973. — 312 с.
- [27] Леонтьев, А. Ф. Ряды экспонент. / А. Ф. Леонтьев. — М.: Наука, 1976. — 636 с.
- [28] Линчук, Н. Е. Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения / Н. Е. Линчук // Математические заметки. — 1988. — Т. 44, № 6. С. 794—802.
- [29] Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций. Т. 1 / А. И. Маркушевич. — М.: Наука, — 1967. — 491 с.
- [30] Микусинский, Я. Операторное исчисление / Я. Микусинский. М.: ИИЛ. — 1956. — 365 с.
- [31] Нагнибида, Н. И. О линейных непрерывных операторах в аналитическом пространстве, перестановочных с оператором дифференцирования / Н. И. Нагнибида // Теория функций, функциональный

- анализ и их приложения: Респ. межвед. науч. сб. — Харьков. — 1966. — №2. С. 160—164.
- [32] Напалков, В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах / В. В. Напалков. — М.: Наука, 1982. — 240 с.
- [33] Напалков, В. В. Описание аналитических функционалов в некоторых классах областей / В. В. Напалков, И. Х. Мусин // Докл. РАН — 1992. — Т. 323, №3. С. 423—426.
- [34] Напалков, В. В. Об одном функциональном уравнении в ρ -выпуклых областях / В. В. Напалков, И. Х. Мусин // Труды МИАН. — 1994. — Т. 203. С. 150—158.
- [35] Райчинов, И. О линейных операторах, перестановочных с операцией интегрирования / И. Райчинов // Математический анализ и его приложения. — 1970. — Т. 2. Ростов-на-Дону: изд-во РГУ, С. 63—72.
- [36] Робертсон, А. П., Топологические векторные пространства / А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон. — М.: Мир, 1967. — 261 с.
- [37] Ткаченко, В. А. Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов / В. А. Ткаченко // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1977. — Т. 41, № 2. С. 378—392.
- [38] Ткаченко, В. А. Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщенного интегрирования в пространствах аналитических функционалов / В. А. Ткаченко // Математические заметки — 1977. — Т. 22, № 2. С. 221—230.
- [39] Ткаченко, В. А. Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов / В. А. Ткаченко // Матем. заметки. — 1979. — Т. 2, № 2. С. 271—282.
- [40] Ткаченко, В. А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на

- независимую переменную / В. А. Ткаченко // Матем. сб. — 1980. — Т. 154, № 3. С. 421—466.
- [41] Трутнев, В. М. Уравнения свертки в пространствах целых функций экспоненциального типа / В. М. Трутнев // Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. — 2006. — Т. 108. С. 158–180.
- [42] Фукс, Б. А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных / Б. А. Фукс. — М.: Физматгиз, 1963. — 428 с.
- [43] Хапланов, М. Г. О полноте некоторых систем аналитических функций / М. Г. Хапланов // Уч. зап. Ростовск. гос. пед. ин-та: Сб статей. Ростов-на-Дону. — 1955. — Т. 3. С. 53—58.
- [44] Хермандер, Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. / Л. Хермандер. — М.: Мир, 1968. — 280 с.
- [45] Хермандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1 / Л. Хермандер. — М.: Мир, 1986. — 406 с.
- [46] Чирка, Е. М. Комплексные аналитические множества / Е. М. Чирка. — М.: Наука, 1985. — 272 с.
- [47] Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ. / Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1969. — 576 с.
- [48] Шишкин, А. Б. О непрерывных эндоморфизмах целых функций / А. Б. Шишкин // Матем. сборник. — 2021. — Т. 212, № 4. С. 131–158.
- [49] Эдвардс, Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1969. — 1072 с.
- [50] Aleman, A. Invariant subspaces for the backward shift on Hilbert space of analytic functions with regular norm / A. Aleman, S. Richter, C. Sundberg // Bergman Spaces and Related Topics in Complex

- Analysis: Proceedings of a Conference in Honor of Boris Korenblum's 80th Birthday November 20–22, 2003, Barcelona, Spain. Borichev A., Hedenmalm H., Zhu K. Editors. AMS, Contemporary Mathematics.— 2006.— Vol. 404. P. 1–26.
- [51] Berg, L. Einführung in die Operatorenrechnung / L. Berg. — VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965. — 274 p.
- [52] Binderman, Z. Functional shifts induced by right invertible operators / Z. Binderman // Math. Nachr. — 1992. — Vol. 157. P. 211–224.
- [53] Biswas, A. Extended eigenvalues and the Volterra operator / A. Biswas, A. Lambert, S. Petrovic // Glasgow Math. J. — 2002. — Vol. 44. P. 521–534.
- [54] Braun, R. W. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis / R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor // Results in Mathematics. — 1990. — Vol. 17. P. 206–237.
- [55] Cima, J.A., Ross W.T. The Backward Shift on the Hardy Space / J.A. Cima, W.T. Ross. — AMS, 2000.
- [56] Delsartes, J. Sur une extensions de la formule de Taylor / J. Delsartes // J. de Math. Pures et Appl. — 1938. — Vol. 17, № 9. P. 213–231.
- [57] Delsartes, J. Une extension nouvelle de la théorie de fonctions presque-periodiques de Bohr / J. Delsartes // Acta Math. — 1939. — Vol. 69. — P.257–317.
- [58] Dimovski, I. N. Commutants of the Pommiez operator / I. N. Dimovski, V. Z. Hristov // Int. J. Math. and Math. Science. — 2005. — Vol. 8. P. 1239–1251.
- [59] Douglas, R. G. Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator / R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. I. Shields // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1970. — Vol. 20, № 1. P. 37–76.

- [60] Garaev, M. T. Some properties and applications of convolution algebras / M. T. Garaev // Advanced Mathematical Models and Applications. — 2019. — Vol. 4, № 3. — P. 188—197.
- [61] Godefroy, G. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds / G. Godefroy, J. H. Shapiro // J. of Funct. Anal. — 1991. — Vol. 98. P. 229—269.
- [62] Grauert, H. Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher / H. Grauert, K. Fritzsche. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1974).
- [63] Ivanov, P. A. Pommiez Operator in Spaces of Analytic Functions of Several Complex Variables / P. A. Ivanov, S. N. Melikhov // J. of Math. Sciences. — 2021. — Vol. 252, № 3. P. 345—359.
- [64] Ivanov, P. A. Many-Dimensional Duhamel Product in the Space of Holomorphic Functions and Backward Shift Operators / P. A. Ivanov, S. N. Melikhov // Math. Notes. — 2023. — Vol. 113, № 5. P. 650—662.
- [65] Ivanov, P. A. Division by a polynomial in spaces of analytic functionals / P. A. Ivanov, S. N. Melikhov // J. of Math. Sciences. — 2024. — Vol. 286. Issue 2. P. 222—237.
- [66] Ivanov, P. A. On commutant of system of integration operators in multidimensional domains / P. A. Ivanov, S. N. Melikhov // Ufa Mathematical Journal. — 2025. — Vol. 17. Issue 2. P. 27—36.
- [67] Ivanova, O. A. On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions / O. A. Ivanova, S. N. Melikhov // Complex Anal. Oper. Theory. — 2017. — Vol. 11, № 6. P. 1407—1424.
- [68] Karapetyants, A. Fractional Integrodifferentiation and Toeplitz Operators with Vertical Symbols / A. Karapetyants, I. Louhichi // Operator Algebras, Toeplitz Operators and Related Topics. Operator

- Theory: Advances and Applications, 279, W. Bauer et al. (eds.). — 2020. — P. 175–187.
- [69] Köthe, G. Dualität in der Funktionentheorie / G. Köthe // J. Reine Angew. Math. — 1953. — Vol. 191. P. 30–49.
- [70] Lacruz, M. Composition operators with a minimal commutant / M. Lacruz, F. León-Saavedra, S. Petrovic. // Advances in Math. — 2018. — Vol. 328. P. 890–927.
- [71] Linchuk, Yu. S. Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable / Yu. S. Linchuk // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2006. — Vol. 12, № 4. P. 384–388.
- [72] Meise, R. Whitney’s extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type / R. Meise, B.A. Taylor // Ark. Mat. — 1988. — Vol. 2. P. 265–287.
- [73] Merryfield, K. A local algebra structure for H of the polydisc / K. Merryfield, S. Watson // Colloquium Mathematicum. — 1991. — Vol. 61. P. 73–79.
- [74] Sadraoui, H. A Banach algebra structure of the q -Bergman space and related topics / H. Sadraoui, M. Garaev, H. Guediri, B. Halouani // Colloquium Math. — 2023. — Vol. 174, № 2. — P. 285–300.
- [75] Saltan, S. On some applications of a special integrodifferential operators / S. Saltan, Y. Özel // J. of Function Spaces and Appl. — Vol. 2012, Article ID 894527, 11p.
- [76] Tapdigoglu, R. Commutand and Uniqueness of Solution of Duhamel Equations / R. Tapdigoglu, B. Torebek // Bull. Malays. Math. Soc. — 2021. — Vol. 44. P. 705–710.

- [77] Tapdigoglu, R. On some applications of Duhamel operators. / R. Tapdigoglu, N. Altwaijry // Math. Slovaca. — 2022. — Vol. 72, №5. P. 1375—1381.
- [78] Taylor, B. A. On weighted polynomial approximation of entire functions. / B. A. Taylor // Pacific J. of Math. — 1971. — Vol. 35, № 2. P. 523—539
- [79] Tillmann, H.-G. Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen / H.-G. Tillmann // Math. Zeitschr. — 1953. — Vol. 59. P. 61—83.
- [80] Wigley, N. The Duhamel product of analytic functions / N. Wigley // Duke Math. J. — 1974. — Vol. 41. P. 211—217.
- [81] Zhang, Zh. Banach algebra structure in Besov spaces / Zh. Zhang, Ju. Liu, S. Ponnusamy // Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A—Mat. — 2025. — Vol. 119 (21).