



**МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
(МГУ)**

Ленинские горы, Москва,
ГСП-1, 119991
Тел.: 939-10-00
Факс: 939-01-26

18.11.2025 № 557-25/013 03
На № _____

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор — начальник
Управления научной политики
Московского государственного
университета
имени М.В. Ломоносова
профессор, д.ф.-м.н.,
член-корреспондент РАН
А.А. Федянин
22 октября 2025 г.



ОТЗЫВ

ведущей организации
на диссертацию

Иванова Павла Александровича

«Операторы обратного сдвига и произведение Дюамеля
в пространствах голоморфных функций
многих комплексных переменных»,

представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа П.А. Иванова посвящена систематическому исследованию в пространствах голоморфных функций многих переменных и в пространствах аналитических функционалов серии актуальных вопросов алгебраического характера. В центре внимания находится изучение свойств так называемых операторов обратного сдвига (естественная многомерная версия классического оператора Поммье) в пространстве голоморфных в полицилиндрической области функций, а также свойств самого пространства и топологического сопряженного к нему как алгебр с соответствующими операциями умножения, связанными с произведением Дюамеля.

Обозначенное направление современного комплексного анализа имеет очень богатую историю. К настоящему времени наиболее полно изучен одномерный случай. Круг возникающих здесь задач весьма разнообразен и связан, в первую очередь, с описанием для наиболее употребительных в анализе операторов их циклических векторов, замкнутых инвариантных

подпространств, коммутантов, а также с изучением алгебр Дюамеля и других примыкающих сюда топологических и алгебраических вопросов, и восходит к работам таких известных специалистов по теории функций, теории операторов, функциональному анализу и теории дифференциальных уравнений, как Б.М. Левитан, Я. Микусинский, М.Г. Хапланов, Ю.А. Казьмин, В.В. Напалков, Ю.Ф. Коробейник, И.Ф. Красичков-Терновский, В.А.Ткаченко, Н.И. Нагнибида, Н.Е. Линчук, Ю.С. Линчук. В последнее время тематика активно развивается (как в одномерном, так и многомерном случаях) в работах С.Н. Мелихова, М.Т. Караева, Р. Тапдигоглу, О.А. Ивановой и многих других отечественных и зарубежных математиков.

Тем самым тематика диссертационного исследования П.А. Иванова, несомненно, является актуальной, что дополнительно подтверждается её тесной связью со специальными разделами алгебры и приложениями не только к уравнениям в частных производных, что продемонстрировано в заключительной части работы, но и в спектральной теории операторов, теории аппроксимации.

Остановимся несколько подробнее на структуре и содержании работы. Диссертация объёмом в 106 стр. состоит из обстоятельной, развёрнутой и хорошо написанной вводной части; основной части, разбитой на три главы; короткого заключения и списка цитированной литературы, содержащего 81 источник вместе с публикациями автора.

Во Введении подробно изложена история вопроса с качественным обзором работ предшественников и кратким описанием применяемых подходов и методов. Обоснована актуальность выполненного исследования, обрисованы его связи с разными разделами математики. Сформулированы по главам ключевые результаты диссертации, описаны научная новизна и значимость полученных утверждений. Такая общая ориентировка по тексту диссертации оказывается очень полезной при её чтении.

Основным результатом первой главы является, пожалуй, Теорема 1.2.1, в которой для произвольной полицилиндрической области, содержащей точку 0 и являющейся декартовым произведением односвязных областей комплексной плоскости, описан коммутант системы операторов частного обратного сдвига в пространстве всех голоморфных в этой области функций. Доказано важное интегральное представление для операторов из этого коммутанта. Отметим Примеры 1.2.1 и 1.2.2, полезные для понимания сути дела и демонстрирующие связь изучаемых операторов с операторами бесконечного порядка. Отметим также, что все известные ранее результаты подобного рода относились только к одномерному случаю — это теоремы об описании операторов, коммутирующих либо с оператором Поммье (Н.И. Нагнибида, Н.Е. Линчук, И. Димовски и В. Христов), либо с его возмущением (Ю.С. Линчук). Выделим ещё Теорему 1.2.3, показывающую, что для функции f с разделяющимися переменными её цикличность относительно системы операторов частного обратного сдвига равносильна тому, что ни одна из образующих функцию f одномерных компонент не является рациональной функцией. Утверждения этой части диссертации

можно рассматривать как весьма нетривиальное обобщение и развитие результатов М.Г. Хапланова и Ю.А. Казьмина о полноте специальных систем аналитических функций в плоских односвязных областях. Описание соответствующего коммутанта, полученное в § 1.2, позволило диссертанту после определения операции умножения в сопряжённом пространстве, дать реализацию такой алгебры с помощью преобразований Коши и Лапласа, и, наконец, указать её представление в исходном пространстве голоморфных в области функций. Доказательства основных результатов главы 1 (§§ 1.2, 1.3) потребовали от соискателя владения методами теории алгебраических структур и теории двойственности топологических пространств, а также непростой аналитической техники.

Во второй главе (§§ 2.1–2.5) близкие вопросы исследуются в счётном индуктивном пределе весовых банаховых пространств целых функций многих переменных. Кроме того, для изучения произведения Дюамеля определяется класс полизвёздных относительно точки 0 областей, который включает в себя не только произведения звёздных относительно точки 0 плоских областей, но и, например, полные области Рейнхарта с центром в точке 0. Затем, в заключительных параграфах этой главы, указана связь операторов Поммье с многомерной версией интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева, а также выяснено, насколько усложнятся результаты, связанные с произведением Дюамеля, при отказе от выпуклости области голоморфности. Для полизвёздных относительно точки 0 областей Рунге описана соответствующая алгебра, доказано, что она является локальной, найден критерий обратимости элемента в ней.

Заключительная, небольшая по объёму, но интересная по содержанию третья глава (§§ 3.1, 3.2) посвящена задаче деления на многочлен в пространстве аналитических функционалов. Отправной точкой, определившей содержание этой главы, послужила известная формула, которая позволяет записать решение задачи Коши для дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами через подходящее произведение Дюамеля. Основные результаты третьей главы дают решение поставленной задачи о делении на многочлены в терминах обобщённого произведения Дюамеля. Даны интересные приложения полученных соискателем результатов к уравнениям в частных производных и уравнениям с производными Гельфонда–Леонтьева.

Значимость для науки. Итог проведённого диссертационного исследования можно охарактеризовать как существенный вклад в те разделы математического анализа, где изучаются свойства голоморфных функций многих переменных и образуемых ими топологических и алгебраических структур, а также проблемы аппроксимации и полноты функциональных систем. Доказанные соискателем утверждения уже нашли и могут найти в дальнейшем применения в спектральной теории операторов, теории дифференциальных уравнений и задачах математической физики.

Общие замечания. Диссертационная работа П.А. Иванова представляет собой серьёзное научное исследование, содержащее решение нескольких актуальных и трудных задач комплексного анализа и теории операторов. Её автор продемонстрировал хорошее владение как общими методами функционального анализа, в частности, теории двойственности топологических векторных пространств, так и конкретными современными методами многомерного комплексного анализа и высшей алгебры. Результаты, полученные в диссертации, являются новыми, чётко сформулированы и строго доказаны. Они будут интересны специалистам, занимающимся исследованием свойств пространств целых, голоморфных, бесконечно дифференцируемых, ультрадифференцируемых функций, описанием сопряжённых к ним и свойств операторов в таких пространствах. Должное внимание в тексте работы уделено сравнению установленных результатов с достижениями предшественников, разъяснению и иллюстрациям используемых понятий. Работа хорошо структурирована, список цитированных источников достаточно разнообразен и полон.

Существенных замечаний по оформлению работы нет. Перечислим некоторые из найденных недочётов и два пожелания рекомендательного характера.

- Стр. 7. В формулировке Теоремы 1.2.1 (см. условие ii)) фигурирует не определённый выше объект (это же замечание относится к тексту на стр. 9 автореферата).
- В середине стр. 9 повтор слова «оператора».
- Стр. 12. Опечатка в конце предпоследней строки из формулировки Теоремы 2.2.1.
- Стр. 15. Для полноты изложения лучше было привести явно формулу решения задачи Коши для дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами в терминах произведения Дюамеля, а не ограничиваться ссылками на литературные источники.
- Стр. 68. При описании различных применений интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева и её обобщений было бы неплохо добавить ссылку на обзор С.Н. Мелихова «Коэффициенты рядов экспонент для аналитических функций и оператор Поммье» (Итоги науки и техники, 2019), а также, например, работы И.В. Тихонова [56], [57] из списка литературы указанного обзора 2019 года.

Рекомендации по использованию результатов и выводов диссертации.

Полученные в диссертации значимые научные продвижения могут быть востребованы в различных разделах функционального анализа и теории операторов, в теории интегральных преобразований и обобщённых функций, в задачах математической физики, в теории аппроксимации в пространствах голоморфных функций на многомерных областях. Спектр возможных применений позволяет утверждать, что установленные в диссертации факты окажутся полезны в исследованиях специалистов, работающих в таких ведущих научных центрах России, как Математический институт имени

В.А. Стеклова, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургский государственный университет, Южный федеральный университет, Уфимский университет науки и технологий и в других университетах России и зарубежья.

Заключение. Диссертационная работа П.А. Иванова — это завершённое научное исследование, которое содержит новые результаты, представляющие интерес для специалистов по многомерному комплексному анализу и смежным областям математики и математической физики. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Результаты автора прошли хорошую апробацию на 5 научных конференциях и одном научном семинаре; опубликованы в 5 основных статьях в журналах из списка ВАК РФ или приравненных к ним изданиях, индексируемых в Web of Science, Scopus. Имеются 4 дополнительные публикации в сборниках материалов конференций. Представленная диссертация П.А. Иванова полностью соответствует предписаниям Положения о присуждении учёных степеней, утверждённого постановлением № 842 Правительства Российской Федерации от 24.09.2013. На основании сказанного считаем, что диссертационная работа **«Операторы обратного сдвига и произведение Дюамеля в пространствах голоморфных функций многих комплексных переменных»** удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по физико-математическим наукам, а её автор — **Павел Александрович Иванов** — безусловно заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв составлен д.ф.-м.н. профессором В.Б. Шерстюковым, обсуждён и утверждён на заседании кафедры математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (протокол № 4 от «22» октября 2025 г.).

Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова
д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН



А.И. Шафаревич

Заместитель заведующего
кафедрой математического анализа
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова
д.ф.-м.н., профессор



Т.П. Лукашенко

Профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова
д.ф.-м.н.



В.Б. Шерстюков