ОТЗЫВ
научного руководителя на диссертацию Иванова Павла Александровича «Операторы обратного сдвига и произведение Дюамеля в пространствах голоморфных функций многих комплексных переменных», представленную на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации П.А. Иванова изучается система операторов частного обратного сдвига в пространствах голоморфных функций многих комплексных переменных и связанные с ними свертки в пространствах аналитических функционалов, в частности, произведение Дюамеля. Эти объекты подробно исследованы в одномерном случае. Полностью описаны циклические векторы оператора D_0 обратного сдвига в пространстве Фреше $H(\Omega)$ всех голоморфных функций в области Ω в $\mathbb{C}$ и в пространствах целых в $\mathbb{C}$ функций экспоненциального типа, реализующих сопряженные к пространствам ростков голоморфных функций на выпуклых множествах, коммутант D_0 в алгебре всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ или в некотором весовом (LF)–пространстве целых функций. Изучена свертка $\circledast$ в сопряженных к таким пространствам (М.Г. Хапланов, Ю.А. Казьмин, Ю.Ф. Коробейник, Н.Е. Линчук, И. Димовски, В. Христов, Ю.С. Линчук, О.А. Иванова, С.Н. Мелихов и др.). В значительном числе работ подобные исследования проведены для оператора D_0 в банаховых пространствах голоморфных функций в открытом единичном круге (Р. Дуглас, Г. Шапиро, А. Шилдс, Й. Цима, У. Росс, А. Алеман, С. Рихтер, К. Сандберг и др.). Ранее для одномерного случая было установлено, что с помощью сдвигов, ассоциированных с D_0, в сопряженном к пространству, в котором действует D_0, можно задать умножение по правилу свертки; оно естественно связано с представлением линейных непрерывных операторов, перестановочных с D_0. С ним это сопряженное пространство является ассоциативной и коммутативной алгеброй. Во многих ситуациях такое умножение реализуется как произведение Дюамеля, используемое в операционном и операторном исчислениях, при решении дифференциальных уравнений, в спектральной теории в обобщенном смысле, в задаче о спектральной кратности линейного непрерывного оператора, в проблеме наклонного берега, в теории операторов Теплица с вертикальным символом. Изучение произведения Дюамеля в пространствах голоморфных функций начато Н. Уигли, его исследования послужили побудительным мотивом для исследования алгебр Дюамеля. Теория алгебр Дюамеля достаточно интенсивно развивается в последние десятилетия (М.Т. Караев, Р. Тапдигоглу, Х. Садраоуи, Х. Гуедири, Б. Халоуани и др.). Сказанное выше подтверждает актуальность темы диссертации.

Аналогичных результатов для голоморфных функций многих переменных было получено значительно меньше. Потребность решения соответствующих задач возникла не только в связи с логикой развития данной теории, но и в связи, в частности, с приложениями к задачам Коши для уравнений в частных производных или обобщенных производных для голоморфных, бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций. Соответствующие многомерные задачи решены в диссертации П.А. Иванова.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. В первой главе исследуется система $\mathcal{D}_0$ операторов обратного сдвига по каждой переменной при фиксированных остальных в пространстве Фреше $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных в области Ω в $\mathbb{C}^N$. При этом предполагается, что Ω — произведение плоских односвязных областей, содержащих 0. Основное внимание в первой главе уделено коммутанту системы $\mathcal{D}_0$ в алгебре всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов. Получено представление операторов из коммутанта в функциональной и интегральной формах, доказаны критерии их обратимости. Здесь установлен критерий $\mathcal{D}_0$–цикличности в $H(\Omega)$ функции из $H(\Omega)$ с разделяющимися переменными. В первой главе изучено умножение $\circledast$ в топологическом сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$, определяемое по правилу свертки с помощью ассоциированных с $\mathcal{D}_0$ операторов сдвига. Для реализации алгебры $(H(\Omega)', \circledast)$ используются преобразования Коши и Лапласа. Установлено, в частности, что преобразование Лапласа переводит $\circledast$ в произведение Дюамеля

$$(g * h)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_N \dots \partial t_1} \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_N} g(t-\xi)h(\xi)d\xi_1 \dots d\xi_N,$$

являющееся умножением в пространстве целых функций экспоненциального типа, изоморфном $H(\Omega)'$.

Во второй главе изучена система $\mathcal{D}_0$ операторов частного обратного сдвига в счетном индуктивном пределе $E(V)$ весовых банаховых пространств целых в $\mathbb{C}^N$ функций и произведение Дюамеля в $H(\Omega)$. Веса, задающие $E(V)$, удовлетворяют двум общим предположениям. Одно из них стандартное, другое автоматически выполняется при $N = 1$. Описан коммутант системы $\mathcal{D}_0$ в алгебре всех линейных непрерывных в $E(V)$ операторов, изучается умножение $\circledast$ в топологическом сопряженном $E(V)'$ к $E(V)$, связанное, как и в первой главе, со сверточным представлением операторов из коммутанта. Существенное внимание уделяется реализации $(E(V)', \circledast)$. Вводятся и изучаются полизвездные относительно точки 0 множества. Семейство областей с таким свойством содержит все произведения плоских областей, звездных относительно точки 0, полные области Рейнхарта с центром в точке 0, широкий класс выпуклых областей. Если область $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ полизвездна относительно точки 0, то в $H(\Omega)$ можно корректно определить произведение Дюамеля $g * h$. Как показано в диссертации, в случае, когда $E(V)$ реализует $H(\Omega)'$ посредством преобразования Лапласа $\mathcal{F}$ для выпуклой области Ω, сопряженное к $\mathcal{F}$ отображение является изоморфизмом алгебры $(E'_\Omega, \circledast)$ на алгебру $(H(\Omega), *)$. Во второй главе изучено произведение Дюамеля $*$ в $H(\Omega)$ и без дополнительного предположения о выпуклости области Ω. Пусть $\mathcal{J}$ — система операторов частного интегрирования в $H(\Omega)$. Описан коммутант $\mathcal{J}$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$. Как и в одномерной ситуации, операторами из коммутанта являются операторы Дюамеля $S_g(f) = f * g$, и только они. Установлен критерий обратимости элемента алгебры $(H(\Omega), *)$ и оператора S_g в $H(\Omega)$ и, как следствие для двойственной ситуации в случае, когда область Ω дополнительно выпуклая, критерий обратимости оператора из коммутанта $\mathcal{D}_0$.

В третьей главе предыдущие результаты применяются к проблеме, восходящей к задаче Коши для дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами для функций одной переменной. Как известно, решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям в точке 0, можно представить в виде произведения Дюамеля правой части и такого решения для правой части, тождественно равной 1. В третьей главе получены многомерные аналоги этого результата. Пусть $E(V)$ — счетный индуктивный предел весовых банаховых пространств целых функций в $\mathbb{C}^N$, как в главе 2. Для многочленов $q_j \in \mathbb{C}[t_j]$ переменной t_j степени не меньше 1 рассмотрим $Q(t) := q_1(t_1) \cdots q_N(t_N)$. В $E(V)'$ можно ввести умножение на многочлен Q. Доказана однозначная разрешимость задачи деления в $E(V)'$ на Q при дополнительных условиях на частное. Получено представление решения исходной задачи деления с нулевыми условиями в виде обобщенного произведения Дюамеля $\circledast$ правой части и такого решения для правой части, совпадающей с дельта–функцией $f \mapsto f(0)$. Отмеченные результаты применены к решению задач Коши в конкретных пространствах, реализующих $E(V)'$ с помощью сопряженного к преобразованию Лапласа, Фурье–Лапласа или обобщенного преобразования Лапласа. Это пространство функций, голоморфных в выпуклой полизвездной относительно точки 0 области, и уравнение в частных производных в нем; пространство всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций и уравнение с производными Гельфонда–Леонтьева; пространства бесконечно дифференцируемых и ультрадифференцируемых функций в выпуклых полицилиндрических областях в $\mathbb{R}^N$, и уравнение в частных производных в этих пространствах.

Все основные результаты в диссертации П.А. Иванова новые, они представляют несомненный научный интерес. При переходе к многомерной ситуации возникли трудности, потребовавшие от автора значительных усилий и изобретательности для их преодоления. Приведенные результаты содержатся в 5 статьях автора, опубликованных в изданиях, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Sciences и Scopus. Они докладывались автором на научных конференциях и семинарах. Диссертация полностью соответствует паспорту специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. В статьях, написанных в соавторстве со мной, мне принадлежит постановка задач, выбор методов доказательств, окончательная редакция текста. Сами результаты, их доказательства принадлежат П.А. Иванову.

Считаю, что диссертационная работа П.А. Иванова «Операторы обратного сдвига и произведение Дюамеля в пространствах голоморфных функций многих комплексных переменных» удовлетворяет требованиям пп. 9 —11, 13, 14 постановления Правительства Российской федерации «О порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842 (в действующей редакции), а ее автор, Иванов Павел Александрович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико–математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры
алгебры и дискретной математики,
Институт математики, механики
и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«Южный федеральный университет»,
344090, г. Ростов–на–Дону,
ул. Мильчакова, 8-а

______________ (Мелихов Сергей Николаевич)

«22» 08 2025 г.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Личную подпись Мелихова С.Н.
ЗАВЕРЯЮ:
Специалист по управлению персоналом 1 категории
«22» августа 2025 г.

УПРАВЛЕНИЕ ДЕЛАМИ И КАДРОВОЙ РАБОТЫ