

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Яндыбаевой Ирины Гамировны «Формула следа для ограниченного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации И.Г. Яндыбаевой рассматривается оператор L двумерного гармонического осциллятора в полосе

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, \pi]\},$$

возмущенный оператором умножения на функцию и порожденный краевой задачей

$$\begin{cases} lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_1^2 u + V(x)u, & x \in \Pi, \\ u(x_1, 0) = u(x_1, \pi) = 0, & x_1 \in \mathbb{R}, \quad u(x) \in L_2(\Pi), \end{cases}$$

где $V(x)$ – ограниченная, измеримая, финитная, вещественнозначная функция.

Цель работы. Работа посвящена исследованию спектральных характеристик невозмущенного оператора ($V(x) = 0$, $x \in \Pi$), изучению свойств спектра оператора L и вычисление формулы регуляризованного следа оператора L .

Начало теории регуляризованных следов было положено в 1953 г. И.М. Гельфандом и Б. М. Левитаном. Они для задачи Дирихле оператора Штурма-Лиувилля вычислили регуляризованную сумму, которая впоследствии получила название – формула следа Гельфанда-Левитана. Несомненный вклад в развитие теории регуляризованных следов внесли следующие ученые: И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Л. А. Дикий, К. Хальберг, В. Крамер, Р. Гильберт, В. Б. Лидский, В. А. Садовничий (для регулярных дифференциальных операторов); А. Г. Костюченко, М. Гасымов, В. А. Любишкин, Х. Х. Муртазин и Т. Г. Амангильдин, Б. Саймон, А. Б. Пушницкий (для сингулярных дифференциальных операторов). В последние годы (2000–2025 гг.) получили развитие формулы следов для обыкновенных дифференциальных операторов при возмущении конечным зарядом в работах А. А. Шкаликова, А. М. Савчука, К. А. Мирзоева, А. И. Назарова, Е. Д. Гальковского.

Остановимся на оценке **актуальности** работы. С конца 1970-х годов все большее внимание уделяется изучению формул следов дифференциальных операторов в частных производных, однако, даже первую поправку теории возмущений (Vf_k, f_k) , из-за сложной структуры спектра таких операторов (операторов в частных производных), не всегда удается эффективно исследовать, не говоря о последующих поправках теории возмущений. Кроме того, на спектральные свойства дифференциальных операторов в частных производных, большое влияние оказывает геометрия области. В связи с этим начались активные исследования равенства нулю формул

следов с вычетом нескольких поправок теории возмущений. Работы В. А. Садовниченко, В. Е. Дубровского и В. В. Подольского, Х. Х. Муртазина и З. Ю. Фазуллина в этом направлении способствовали получить формулу следа Гельфанда–Левитана для возмущений оператором умножения на функцию оператора Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере (В. А. Садовнический, В. Е. Дубровский, В. В. Подольский, З. Ю. Фазуллин); для финитных возмущений двумерного гармонического осциллятора на плоскости (З. Ю. Фазуллин и Х. Х. Муртазин); двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле (Х. Х. Муртазин и З. Ю. Фазуллин, Е. Л. Коротяев и А. Б. Пушницкий). В известной обзорной статье «Следы операторов» В. А. Садовнический и В. Е. Подольский выделяют некоторые нерешенные задачи и среди них указывают на «интересную задачу для оператора в многомерной неограниченной области, задаваемого дифференциальным выражением гармонического осциллятора и возмущенного хотя бы финитным потенциалом». В представленной работе рассматривается именно эта задача в случае полосы на плоскости. Все вышесказанное позволяет заключить, что тематика диссертационной работы является **актуальной**.

Опишем более детально содержание представленной работы и основные результаты. Диссертационная работа носит теоретический характер, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 97 страниц.

Во введении проведен исторический обзор исследуемой области, на основании этого обоснована актуальность диссертационного исследования, поставлены цели и задачи, а также указаны методы исследования, обоснована научная новизна и приведено краткое содержание работы.

В главе 1 изучается как спектр невозмущенного двумерного гармонического осциллятора в полосе, так и локализация собственных чисел его возмущений ограниченным финитным потенциалом. А именно, автору удалось представить множество

$$\{m^2 + 2l + 1 = \lambda_{ml}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

в виде неубывающей последовательности через один индекс λ_n и найти явную формулу (Теорема 1) для количества таких представлений через n . Также в этой главе получена локализация собственных значений оператора L около собственных значений невозмущенного оператора (Теорема 2).

Глава 2 диссертации посвящена исследованию второй поправки теории возмущений. Для этого автор исследует асимптотическое поведение ядра оператора проектирования в двух случаях, что отражают Теорема 3 (при отсутствии стационарной точки) и Теорема 4 (в случае наличия стационарной точки). Опираясь на эти теоремы, автор получает основной результат второй главы – Теорема 5 об абсолютной суммируемости второй поправки теории возмущений.

Глава 3 посвящена выводу формулы регуляризованного следа с вычетом первой поправки теории возмущений двумерного гармонического осциллятора в полосе возмущенного оператором умножения на ограниченную, измеримую, финитную вещественнозначную функцию. Для этого автор использует методику научного руководителя З. Ю. Фазуллина для суммирования второй поправки теории возмущений

и вывода формулы следа. Основным результатом заключительной главы является Теорема 12.

В заключении автор формулирует основные результаты диссертации.

Укажем **новизну** основных полученных результатов.

1) Для невозмущенного оператора L_0 предложена параметризация собственных значений через один параметр λ_n и указано количество таких представлений.

2) Изучен «усеченный» двумерный гармонический осциллятор в полосе и доказан результат о локализации собственных значений в некоторой окрестности собственных значений невозмущенного оператора L_0 .

3) Получены формулы регуляризованного следа с вычетом первой поправки теории возмущений рассматриваемой задачи.

4) Для возмущенного оператора рассмотрен произвольный ограниченный финитный измеримый потенциал, нет требований на его гладкость.

В списке литературы указано 62 наименования.

Отметим некоторые замеченные нами недостатки в работе:

1) В самом начале, при постановке задачи, автору следовало бы пояснить почему рассматриваемый оператор назван оператором двумерного гармонического осциллятора.

2) В работе я не нашел определений понятий «первой» и «второй поправки» теории возмущений. Смысл этих понятий становится понятным только после прочтения всей работы. Это не очень удобно для читателя.

3) Стоило бы подчеркнуть, что рассматривается в некотором смысле «усеченный» двумерный гармонический осциллятор (вместо основного потенциала $x_1^2 + x_2^2$ рассматривается только потенциал x_1^2), что диктуется геометрией рассматриваемой области — это полоса и по x_1 она неограничена, а $x_2 \in [0; \pi]$.

4) В диссертации имеется некоторое количество опечаток:

а) стр. 7, «пинципиальный» вместо «принципиальный»;

б) стр. 12, второе предложение после Теоремы 1 : должно быть «возмущенного оператора L » вместо «возмущенного оператора L_0 »;

в) стр. 32, строка 2 опечатка в слове «Поскольку»;

Указанные замечания не влияют на положительное впечатление от проведенного исследования и значимость полученных результатов.

При получении своих результатов автор показывает уверенное владение классическими методами комплексного и функционального анализа, спектральной теории операторов, а также асимптотическими методами в теории ортогональных многочленов и методами асимптотических оценок интегралов.

Все представленные в диссертации результаты являются новыми и получены автором самостоятельно, они обоснованы строгими доказательствами и опубликованы в 7 работах, из них 4 статьи опубликованы в научных журналах, входящих в цитатно-аналитические базы данных Web of Science и/или Scopus. Основные результаты работы прошли апробацию и докладывались на различных международных и

российских научных конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа «Формула следа для ограниченного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полоре» удовлетворяет п. 9 – 11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор Яндыбаева Ирина Гамировна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории функций и функционального анализа,
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Московский государственный университет им. М.В.
Ломоносова».



Шейпак Игорь Анатольевич

20.08.2025.

Даю согласие на обработку персональных данных.

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Адрес основного места работы:

119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Рабочий тел.: +7(495)939-55-40
E-mail: iasheip@yandex.ru

Подпись И.А. Шейпака заверяю

Вер. спец. 5 чл. Шейпак И.А.
Декан механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
член-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор



Шафаревич Андрей Игоревич