

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Яндыбаевой Ирины Гамировны «Формула следа для ограниченного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа И.Г. Яндыбаевой посвящена исследованию различных спектральных свойств двумерного гармонического осциллятора L , задаваемого дифференциальным выражением

$$lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_1^2 u + V(x_1, x_2)u, \quad (1)$$

действующего в пространстве $L_2(\Pi)$, где V — ограниченная измеримая финитная вещественнозначная функция. При этом полоса Π имеет вид

$$\Pi := \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, \pi]\} \quad (2)$$

и на границе полосы задаются граничные условия Дирихле

$$u(x_1, 0) = u(x_1, \pi) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Основное внимание уделяется локализации собственных значений и формуле следа рассматриваемого оператора. Изучение формулы следа для обыкновенных дифференциальных операторов имеет давнюю историю и ведет свое начало от работ И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, Л.А. Дикого, К. Хальберга, А.Г. Костюченко, М. Гасимова, В.Б. Лидского, В.А. Садовниченко, А.А. Шкаликова и др. Для исследования соответствующих формул следов разрабатывалось большое количество разнообразных подходов, большая часть из которых изложена в известном обзоре В.А. Садовниченко и В.Е. Подольского. При этом практически все они не применимы для изучения регуляризованных следов операторов в частных производных. В первую очередь это связано с тем, что такие операторы имеют достаточно сложную структуру спектра. В частности, неизвестно как локализуются собственные значения возмущенного оператора относительно собственных значений невозмущенного оператора. В связи с этим до настоящего времени исследуются только конкретные виды операторов в частных производных: оператор Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере с различными возмущениями, двумерный гармонический осциллятор и двумерный оператор Шрёдингера в однородном магнитном поле, имеющий чисто точечный спектр. Выделим здесь работы В.А. Садовниченко, В.В. Дубровского, В.Е. Подольского, З.Ю. Фазуллина, Х.Х. Муртазина, Е.Л. Коротяева, А.Б. Пушкицкого и др. В рассматриваемой диссертации исследуется случай двумерного гармонического осциллятора в полосе, который возмущается оператором умножения на ограниченную, измеримую, финитную функцию. Его принципиальной особенностью также является сложная структура спектра. А именно, даже для невозмущенного оператора не была выписана формула для собственных значений и их кратностей через один индекс. Таким образом, тематика является несомненно актуальной.

Для изучения данного объекта автор использует и модифицирует методику, развитую в работах научного руководителя З.Ю. Фазуллина, а также классические методы функционального анализа и спектральной теории операторов. Указанная адаптация позволяет получить новые оригинальные результаты о локализации собственных значений и формуле регуляризованного следа для двумерного гармонического осциллятора, возмущенного финитной ограниченной функцией.

Остановимся кратко на содержании представленной диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 97 страниц.

Во введении автор дает обзор литературы, определяет цели исследования, описывает основные результаты, вынесенные на защиту.

В первой главе диссертации изучается спектр двумерного гармонического осциллятора в полосе вида (2). Автор подробно изучает ранее не рассматривавшийся невозмущенный случай. Точнее она получает точные формулы для собственных значений, а также теорему 1, касающуюся их кратности через один индекс. Кроме того, приводится результат (теорема 2), посвященный локализации собственных значений возмущенного оператора L относительно собственных значений невозмущенного оператора. Теоремы 1 и 2 являются базой для дальнейшего исследования формулы следа, которую автор доказывает в третьей главе.

Во второй главе диссертации устанавливается суммируемость второй поправки теории возмущений, а именно сходимость вида

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k \neq 3}}^{\infty} \alpha_k = \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq 3}}^{\infty} \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq \{k,3\}}}^{\infty} \frac{\text{Sp } P_k V P_m V}{\lambda_m - \lambda_k},$$

где Sp — след ядерного оператора и P_k — проектор на собственное подпространство, который соответствует собственному значению λ_k невозмущенного гармонического осциллятора. Основной результат содержится в теореме 5. Доказательство теоремы 5 существенно опирается на теоремы 3 и 4, в которых получена равномерная асимптотика в полосе Π ядра проектора P_k , в случаях отсутствия (теорема 3) и существования (теорема 4) стационарной точки фазовой функции. Это вызвано тем, что ядро проектора не выражается с помощью одной определенной специальной функции, как в случае, например, двумерного гармонического осциллятора на всей плоскости.

Третья глава посвящена непосредственному выводу формулы регуляризованного следа для двумерного гармонического осциллятора в полосе. Она составляет содержание теоремы 12. Для ее доказательства автор опирается на несколько утверждений из работы научного руководителя З.Ю. Фазуллина, а также на результаты, полученные в предыдущих главах.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Доказанные в диссертации теоремы демонстрируют возможности используемых методов исследований. И.Г. Яндыбаева овладела указанными методиками, внесла определенный вклад в их развитие и установила на их основе ряд новых и интересных результатов. В частности, в диссертации получена формула следа для двумерного гармонического осциллятора в полосе, возмущенного финитной ограниченной функцией.

По диссертации имеется несколько замечаний.

1. Теоремы 7, 11 и 12 сформулированы в предположении $V \in C_0^2(\Pi)$. При этом теоремы 8, 9 и 10 требуют менее обременительных ограничений. Было бы верным сразу ввести необходимые ограничения на функцию V при постановке задачи и формулировать все теоремы в единых терминах.

2. Глава 2 носит в большей степени технический характер и содержит большое количество вычислений и формул. Их необходимо было снабжать большим количеством комментариев и чаще объяснять как общую идею, так и то, что делается в дальнейших утверждениях (леммах и теоремах). Это замечание частично может относиться и к остальным главам диссертации.

3. Список литературы расположен не по алфавиту.

4. Диссертация содержит достаточное количество опечаток. В частности,

- стр. 10, 12 строка сверху. Вместо "Науная новизна" должно быть "Научная новизна";
- стр. 12, предложение перед леммой 2. Должно быть "возмущенного оператора L ";
- стр. 17, 11 строка сверху. Вместо "теори" должно быть "теории";
- стр. 17, 3 строка сверху. Предложение не должно начинаться с номера параграфа;
- стр. 18. Не хватает точки перед формулировкой теоремы 11;
- стр. 23, 2 строчка сверху. Нет запятой перед "где", а также здесь же лишняя точка;
- стр. 32, 2 строка снизу. Вместо "Пскольку" должно быть "Поскольку".

Указанные замечания не влияют на положительную оценку диссертации. Характеризуя работу в целом стоит отметить, что результаты, приведенные в диссертации, изложены ясно и подробно, обоснованы полными доказательствами, являются новыми и представляют несомненный интерес. При получении результатов и написании диссертации автор проделала очень большую техническую и аналитическую работу. Основные результаты диссертации получены самостоятельно, прошли серьезную апробацию и своевременно опубликованы в 7 работах, из которых 4 опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК и международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus. Сама диссертация является законченной научно-исследовательской работой. Содержание автореферата полно и правильно отражает основные положения диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа «Формула следа для ограниченного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе» удовлетворяет п. 9 – 11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор Яндыбаева Ирина Гамировна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,

старший научный сотрудник отдела математического анализа,

Южный математический институт — филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской академии наук»

Поляков Дмитрий Михайлович
20.08.2025.



Дано согласие на обработку персональных данных.

Кандидатская диссертация защищена по специальности

01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ,

Адрес основного места работы:

362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина 53,

ЮМИ ВНЦ РАН

Рабочий тел.: +7(8672)23-00-51

E-mail: DmitryPolyakov@mail.ru

Подпись Д.М. Полякова заверяю
Бриг директор ЮМИ ВНЦ РАН
Казбек Михайлович Уртаев

