ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

На правах рукописи

КУЖАЕВ АРСЕН ФАНИЛЕВИЧ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент
Кривошеева Олеся Александровна

Уфа – 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$ и $\lambda_k \to \infty, \quad k \to \infty$. По данной последовательности строится система функций

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left\{t^n e^{\lambda_k t}\right\}_{k=1,\, n=0}^{\infty,\, n_k-1}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{0.1}$$

Рядом экспоненциальных мономов называется ряд следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{0.2}$$

В работе рассматриваются весовые пространства интегрируемых L_p^{ω} $(p \geqslant 1)$ и непрерывных C^{ω} функций на вещественной прямой:

$$L_p^{\omega} = \left\{ f:\ ||f||_{p,\mathbb{R}}^{\omega} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t)\, e^{-\omega(t)} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

$$C^{\omega} = \left\{ f:\ ||f||_{C}^{\omega} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| f(t)\, e^{-\omega(t)} \right| < +\infty \right\}.$$

При этом вес $\omega(t)$ — выпуклая функция, условия на которую будут приведены в §1.3 главы 1.

Символами $W^p(\Lambda, \omega)$ и $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим подпространства, которые являются замыканиями системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^{ω} и C^{ω} соответственно.

В настоящей диссертационной работе исследуются функции из весовых пространств L_p^{ω} и C^{ω} на вещественной прямой, полнота (неполнота) системы экспоненциальных мономов в соответствующих функциональных пространствах.

Предметом исследования является представление рядами экспоненциальных мономов аналитических продолжений (до целых) функций из весовых пространств L_p^{ω} и C^{ω} на вещественной прямой и условия полноты (неполноты) системы экспоненциальных мономов в соответствующих функциональных пространствах.

Задача о представлении функций рядами (0.2) по системе экспоненциальных мономов (0.1), где переменная t может быть и комплексной, — это один из классических вопросов теории функций и комплексного анализа. Основными составляющими исследования в этой области являются выяснение условий, накладываемых на семейство функций, допускающих подобное представление рядом, и определение множества сходимости указанного ряда. Кроме того, вопросы представления рядами аналитических продолжений функций из указанных выше пространств L_p^ω и C^ω, обнаруживают тесную связь с вопросами полноты (неполноты) системы экспоненциальных мономов в этих пространствах.

Тематика, связанная с рядами экспоненциальных мономов и их частными случаями – рядами экспонент (т. е. рядами вида (0.2), где $n_k = 1,\ k \in \mathbb{N}$), рядами Дирихле (т. е. рядами вида (0.2), где $n_k = 1,\quad k \in \mathbb{N}$, и λ_k — положительные числа) и рядами Тейлора (система степенных функций $\{w^n\}$ после замены $w = e^z$ переходит в систему экспоненциальных мономов вида (0.1)), имеет богатую историю. Их исследование берёт своё начало в трудах Б. Тейлора (B. Taylor), О. Л. Коши (A. L. Cauchy), Ж. С. Адамара (J. S. Hadamard), Н. Х. Абеля (N. H. Abel), П. Г. Л. Дирихле (J. P. G. L. Dirichlet). Указанные выше задачи для таких рядов рассматривались в работах В. Фукса (W. H. J. Fuchs), П. Мальявена (P. Malliavin), Д. М. Андерсона (J. M. Anderson), К. Г. Бинмора (K. G. Binmore), Б. В. Винницкого, А. В. Шаповаловского, Г. Т. Денга (G. T. Deng), А. Ф. Леонтьева, А. С. Кривошеева, О. А. Кривошеевой, Р. С. Юлмухаметова, Э. Зиккоса (E. Zikkos) и многих других математиков.

Одним из первых результатов по указанной тематике можно считать результат В. Фукса [41], который представляет собой необходимое и достаточное условие полноты системы $\left\{e^{-t}t^{\lambda_k}\right\}$ в гильбертовом пространстве $L^2(0;+\infty)$. А именно, требуется расходимость интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(r)}{r^2}\,dr, \qquad \psi(r) = \begin{cases} \exp\left(2\lambda_1^{-1}\right), & r \leqslant \lambda_1, \\ \exp\left(2\sum\limits_{\lambda_k<r} \lambda_k^{-1}\right), & r > \lambda_1. \end{cases}$$

Особенностью данного результаты является условие, накладываемое на последовательность Λ: все числа λ_k являются положительными, кратности всех чисел λ_k равны единице, и для некоторого числа h выполнено условие:

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h > 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{0.3}$$

Особый интерес представляет собой совместный результат Андерсона и

Бинмора о возможности представления лакунарными рядами [36]. В их исследовании $H(r)$ — положительная возрастающая функция, определённая для $r \in [0; +\infty)$ такая, что построенная по ней функция $h(s) = \ln H(e^s)$ является выпуклой. Кроме того, будет требоваться выполнение условия $r^{-n} H(r) \to \infty$ для любого целого n. Последовательность Λ представляет собой некоторую возрастающую последовательность натуральных чисел. Рассматривается также банахово пространство S_H всех непрерывных функций f на положительной полуоси, для которых $f(0) = 0$, и выполнено условие

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)/H(x)| = 0.$$

В качестве нормы в рассматриваемом пространстве принимается

$$\|f\|_H = \max_{x \geqslant 0} |f(x)/H(x)|.$$

Через V в их работе обозначено линейное многообразие, состоящее из всех конечных линейных комбинаций мономов $\left\{x^{\lambda_k}\right\}$. Тогда, если

$$\sum_{k \geqslant 1} \lambda_k^{-1} = +\infty,$$

и V не является всюду плотным в S_H, то любая функция $f \in V$ допускает аналитическое продолжение до целой функции F, представимой в виде лакунарного ряда

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^{\lambda_k}.$$

При этом существует константа a, зависящая только от Λ и $H(s)$, такая, что для всех достаточно больших значений s выполнено неравенство

$$\ln |m(s, f)| \leqslant \psi(s + a),$$

где

$$\psi(s) = \max_{n \geqslant 0} \{ns - n\lambda(n)\}, \qquad \lambda(r) = 2 \sum_{\lambda_k \leqslant r} \lambda_k^{-1},$$

$$m(s, f) = \ln \max_{|z| = e^s} |f(z)|.$$

Следует также отметить очень существенный результат Денга [40] о связи между неполнотой системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в весовом пространстве непрерывных функций и представлением функций из подпространств рядом по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Пусть $\alpha(t)$ — неотрицательная выпуклая функция на вещественной прямой $\mathbb{R}$, для которой выполнено

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\alpha(t)}{|t|}=+\infty.$$

Последовательность Λ простая (все $n_k=1$) и состоит из комплексных чисел в правой полуплоскости, для которых выполнено условие

$$|\lambda_{k+1}|-|\lambda_k|\geqslant h>0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Рассматривается весовое банахово пространство непрерывных на вещественной прямой функций:

$$C_\alpha=\left\{f:\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f\left(t\right)e^{-\alpha(t)}\right|<+\infty\right\}.$$

Обозначим

$$\lambda\left(r\right)=\left\{\begin{array}{cc} 2\sum\limits_{|\lambda_k|\leqslant r}\mathrm{Re}\,\frac{1}{\lambda_k}, & r\geqslant\left|\lambda_1\right|, \\ 0, & r<\left|\lambda_1\right|. \end{array}\right.$$

При перечисленных выше условиях и при том, что функция $\lambda\left(r\right)$ не является ограниченной при $r>0$, если система $\mathcal{E}(\Lambda)$ неполна в пространстве C_α, то любая функция f из замыкания системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве C_α продолжается до целой и допускает представления в виде ряда Дирихле

$$F\left(z\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{\lambda_k z}.$$

Отметим, что при перечисленных выше условиях система $\mathcal{E}(\Lambda)$ неполна в пространстве C_α, если и только если существует число $a\in\mathbb{R}$ такое, что

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\alpha\left(\lambda\left(t\right)-a\right)}{1+t^2}\,dt<+\infty,$$

что можно сравнить с приведённым выше результатом В. Фукса. Аналогичный результат о неполноте, но для случая весового гильбертова пространства L_2 и при условии, что последовательность показателей расположена в правой полуплоскости, можно найти в совместной работе Б. В. Винницкого и А. В. Шаповаловского [50] (см. там лемму 7).

Особо отметим здесь результат Э. Зиккоса [53]. Он доказывал, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda,\omega)\left(W^0(\Lambda,\omega)\right)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (0.2), если выполнены следующие условия на Λ: последовательность Λ должна принадлежать классу $U(d,0)$, который строится при помощи простой $(n_k = 1)$ последовательности, удовлетворяющей условию (0.3). В частности, принадлежность Λ классу $U(d,0)$ означает, что Λ имеет плотность $n(\Lambda) = d > 0$, верно (0.3) и $n_k \leqslant c(\lambda_k)^{\alpha}$, $\quad k \geqslant 1$, где $c > 0$ и $\alpha \in (0,1)$. При этом функция $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$ $(\rho > 0)$ и выполнены еще два условия:

$$\omega(t) \geqslant t^2, \qquad t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

для каждого $A > 0$ существует $t(A) > 0$ такое, что

$$\omega(t+A) \geqslant \omega(t) + t, \qquad t \geqslant t(A).$$

Для удобства изложения точным образом данный результат с использованием наших обозначений сформулирован в виде теоремы в главе 3 настоящей диссертации. Данный результат послужил своего рода отправной точкой нашего исследования. Так, показывается, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda,\omega)\left(W^0(\Lambda,\omega)\right)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (0.2). При этом условия, которые накладываются на последовательность Λ и функцию ω, существенно слабее, чем условия, накладываемые Э. Зиккосом.

В настоящем диссертационном исследовании показывается, что задача о представлении рядами в указанных выше весовых пространствах тесно связана с вопросом о полноте (неполноте) в этих пространствах системы экспоненциальных мономов.

По данному аспекту исследования среди известных результатов имеется, например, совместный результат В.В. Напалкова, Р.С. Юлмухаметова и А.А. Махоты (Румянцевой) [28]. В их работе рассматриваются гильбертовы пространства $L_2(\mathbb{R}, a|t|^\alpha)$ локально интегрируемых функций на вещественной оси со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t)\, e^{-h(t)}\, dt,$$

где $h(t) = a|t|^\alpha$ — весовая функция. При этом $a > 0$, $\alpha \in (1;2]$. В работе приведены необходимое и достаточно (отдельно) условия на неполноту системы экспонент (то есть системы экспоненциальных мономов, если кратности всех λ_k равны единице). В частности, показано, что, если существует ненулевая целая функция $F(z)$, которая обращается в нуль во всех точках λ_k, и ещё в $n = [\beta]$ точках $z_1, z_2, ..., z_n$, и удовлетворяет оценке

$$|F(x+iy)| \leqslant C_F\, e^{b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad x+iy \in \mathbb{C},$$

то система $\{e^{\lambda_k z}\}$ не полна в $L_2(\mathbb{R}, a|t|^\alpha)$.

Связь между вопросом о представлении рядами и неполнотой системы экспоненциальных мономов, которая более близка к проведённым в диссертации исследованиям, обнаруживается в работе Э. Зиккоса [52] (Theorem 1.3). В свою очередь, он исходил из результатов В.Бернштейна о полиномиальной аппроксимации функций из весовых пространств (см. по этому поводу, например, [39]). Э. Зиккос предполагал выполнение следующих условий:

(i) система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве L^ω_p или C^ω;

(ii) $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — кратная последовательность положительных чисел, принадлежащая классу $U(d, 0)$;

(iii) весовая функция ω при достаточно больших положительных значениях аргумента растёт не быстрее композиции некоторого числа экспонент.

Тогда при выполнении этих условий любая функция из замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в указанных пространствах продолжается до целой и допускает представление рядом вида (0.2), сходящимся абсолютно и равномерно на компактах плоскости.

Цели и задачи темы исследования

Целью диссертационного исследования является решение следующих задач:

- получить достаточные условия, при которых функции из весовых пространств L^ω_p и C^ω на вещественной прямой допускают продолжение до целых функций, представимых рядом экспоненциальных мономов с положительными показателями; при этом данные условия формулируются в терминах характеристик последовательности экспоненциальных мономов;

- исследовать характер сходимости данных рядов;

- получить формулы для коэффициентов указанных разложений в ряд экспоненциальных мономов;

- сформулировать условия на весовую функцию, при которых в указанных пространствах справедливо утверждение о возможности аналитического продолжения каждой функции до целой функции, которую можно разложить в ряд экспоненциальных мономов;

- получить достаточные условия полноты (неполноты) системы экспоненциальных мономов в указанных функциональных пространствах.

Научная новизна

Основные научные результаты, вошедшие в диссертацию, включая и те, которые опубликованы в соавторстве, получены автором лично. Все они являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены достаточные условия на показатели системы экспоненциальных мономов и весовую функцию, при которых функции из весовых пространств L_p^ω и C^ω на вещественной прямой допускают продолжение до целых функций, представимых рядом экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями.

2. Построена система биортогональных функционалов к системе экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями, с помощью которой получены формулы для коэффициентов ряда экспоненциальных мономов.

3. Найдены достаточные условия неполноты системы экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями в рассматриваемых функциональных пространствах L_p^ω и C^ω.

Теоретическая и практическая значимость исследования

Работа носит теоретический характер, а результаты работы могут быть использованы в теории целых функций, при решении проблем спектрального анализа-синтеза в пространствах аналитических функций, а также при исследовании интерполяционных задач.

Методология и методы исследования

Для решения поставленной задачи о представлении рядами строится система функционалов, биортогональная к системе экспоненциальных мономов в пространстве L_p^ω, что позволяет получить формулы для коэффициентов ряда. При этом случай пространства C^ω сводится к случаю пространства L_p^ω. При построении системы биортогональных функционалов привлекаются двусторонние оценки на модуль некоторой мероморфной функции специального вида (она использовалась также в работах В. Фукса, Р. Боаса (R. Boas), Э. Зиккоса и др.).

Особенностью проведённого исследования является существенное ослабление условиий на показатели системы экспоненциальных мономов, по сравнению с условиями из работ Э. Зиккоса. Условия на показатели формулируются в терминах геометрических характеристик последовательности Λ: всевозможных плотностей и индекса конденсации S_Λ, введённого А. С. Кривошеевым [4].

Величина S_Λ оказалась очень удобной характеристикой последовательности в контексте большого класса задач теории функций и комплексного анализа. Одной из причин этому послужил тот факт, что данная характеристика является локальной и подходит для любых последовательностей комплексных чисел, не требуя при этом выполнения каких-либо условий на их кратность.

Положения, выносимые на защиту:

- получены достаточные условия, при которых функции из весовых пространств L_p^ω и C^ω на вещественной прямой допускают аналитическое продолжение до целых функций, представимых во всей комплексной плоскости рядом экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями;

- получены условия существования биортогональной системы функционалов к системе экспоненциальных мономов для весового пространства L_p^ω;

- получены формулы для коэффициентов указанных разложений в ряд экспоненциальных мономов;

- доказано, что сходимость указанного ряда экспоненциальных мономов является абсолютной и равномерной на компактах плоскости;
- сформулированы условия на весовую функцию;
- получены достаточные условия неполноты системы экспоненциальных мономов в указанных функциональных пространствах.

Степень достоверности и апробация результатов

Исходные версии основных результатов работы докладывались автором и обсуждались на заседаниях научных семинаров, перечисленных ниже.

1. Постоянно действующий семинар кафедры «Информационные технологии и прикладная математика» Высшей школы информационных и социальных технологий Уфимского государственного нефтяного технического университета (рук.: С. Г. Глебов).
2. Межвузовский научный семинар «Анализ и его приложения» (рук.: Г. Г. Брайчев, И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков), расширенное заседание, приуроченное к 75-летию профессора кафедры математического анализа Г. Г. Брайчева (21-28 марта 2023 года).

Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях.

1. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (г. Казань, август 2021 г.).
2. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 6-9 октября 2021 г.).
3. Двадцатая молодёжная научная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2021» (г. Казань, ноябрь-декабрь 2021 г.).
4. Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (оз. Банное, 14-18 марта 2022 г.).

5. I Всероссийская молодежная школа-конференция «Современные физика, математика, цифровые и нанотехнологии в науке и образовании (ФМЦН-22)», посвященная 100-летию со дня рождения А.Д. Сахарова (г. Уфа, 25-27 апреля 2022 г.).

6. «Понтрягинские чтения – XXXIII» в рамках XXXV Международной Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (г. Воронеж, 3-9 мая 2022 г.).

7. XIII Международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященная 50-летию образования математического и физического факультетов БашГУ «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании» (г. Уфа, 19-22 октября 2022 г.).

8. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022 г.).

9. Двадцать первая молодёжная научная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2022» (г. Казань, 28 ноября – 1 декабря 2022 г.).

10. Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (оз. Банное, 13-17 марта 2023 г.).

Публикации

Содержание диссертации опубликовано в 3 печатных работах [42]-[44] в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК РФ, или приравненных к ним, а также в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus. Кроме того, в работах [12]-[22] опубликованы в сборниках трудов конференций как тезисы докладов основные идеи и результаты исследований, проведённых в диссертации.

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в опубликованные работы. В совместных публикациях О. А. Кривошеевой и А. С. Кривошееву принадлежат постановки задач и методы исследований.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 92 страницы. Библиография включает 53 наименования.

Содержание работы

Во введении приведена краткая история развития вопроса о представлении функций из весовых подпространств рядами экспоненциальных мономов, вопроса полноты (неполноты) системы экспоненциальных мономов в указанных пространствах, обоснована актуальность диссертационной темы, поставлены основные цели и задачи диссертации, обоснованы научная новизна и практическая значимость работы, описана методология и сформулированы выносимые на защиту положения, описана структура диссертации.

Первая глава диссертации посвящена характеристикам последовательности комплексных чисел (какой является последовательность показателей системы экспоненциальных мономов), их взаимосвязям, кроме того, даётся определение почти вещественной последовательности; оценкам модуля специальной мероморфной функции, а также модуля функций, аналитических в полуплоскости, с помощью которых будет строится система биортогональных функционалов к системе экспоненциальных мономов в пространстве L_p^ω.

В первом параграфе первой главы даются определения основных характеристик последовательности показателей системы экспоненциальных мономов.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$– последовательность различных комплексных чисел $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\theta_k}$ и их кратностей n_k. Предполагается, что $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$ и $\lambda_k \to \infty,\ k \to \infty$.

Через $B(a,t)$ и $S(a,t)$ будем обозначить соответственно открытый круг и окружность с центром в точке a радиуса t:

$$B(a,t) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < t\},$$

$$S(a,t) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = t\}, \quad S(a,t) = \partial B(a,t).$$

Символом $n(r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в замкнутый круг $\overline{B(0,r)}$, и пусть

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}$$

— верхняя плотность последовательности Λ. Обозначим через $n_\Lambda(z,\delta)$ число точек λ_k с учётом кратностей, попавших в круг $B(z,\delta|z|)$.

Положим еще

$$m\,(\Lambda) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_k|}.$$

Данная величина называется относительной кратностью последовательности Λ.

Обозначим

$$\sigma_\Lambda(r) = \max\left\{ \sum_{\substack{|\lambda_k|<r,\\ \operatorname{Re}\lambda_k>0}} \operatorname{Re}\frac{n_k}{\lambda_k}, \sum_{\substack{|\lambda_k|<r\\ \operatorname{Re}\lambda_k<0}} -\operatorname{Re}\frac{n_k}{\lambda_k} \right\}. \tag{0.4}$$

Данная величина характеризует степень разброса чисел λ_k в левой и правой полуплоскостях комплексной плоскости (с учётом кратностей) в круге $B(0,r)$. Заметим, что в случае, когда последовательность Λ состоит из положительных чисел (такие последовательности рассматривались, например, в работах [41], [52], [53]), то величину $\sigma_\Lambda(r)$ достаточно определить так:

$$\sigma_\Lambda(r) = \sum_{\lambda_k<r} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Идея определения величины $\sigma_\Lambda(r)$ в случае комплексных λ_k с помощью соотношения (0.4) принадлежит Б. Н. Хабибуллину в работах [32]-[35].

Следуя работе [9], будем говорить, что последовательность Λ является *почти вещественной*, если

$$\operatorname{Re}\lambda_k > 0 \ (k \geqslant 1), \quad \frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{\operatorname{Re}\lambda_k} \to 0, \ k\to\infty.$$

Если, как и выше, θ_k — главные значения аргументов чисел λ_k, то из почти вещественности следует, что

$$\frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{\operatorname{Re}\lambda_k} = \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k} = \operatorname{tg}\theta_k \to 0, \ k\to\infty,$$

откуда получаем, что $\theta_k \to 0$, а значит, $\cos\theta_k \to 1$, $\quad k\to\infty$. Так же из почти вещественности следуют следующие предельные соотношения:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{\lambda_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|} = 1. \tag{0.5}$$

Одной из главных характеристик последовательности комплексных чисел, с помощью которой были получены все основные результаты настоящего диссертационного исследования, является так называемый индекс конденсации. Для определения этой величины рассмотрим функцию

$$q_\Lambda^m(z,\delta) = \prod_{\substack{\lambda_k \in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),\\ k\neq m}} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}, \quad m \geqslant 1.$$

В случае, когда круг $B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|)$ не содержит точек λ_k, $k \neq m$, полагаем $q_\Lambda^m(z,\delta) \equiv 1$. Модуль функции $q_\Lambda^m(z,\delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|)\,, k \neq m$, относительно точки z.

Если $\delta \in (0,1)$, то модуль каждого сомножителя в определении функции $q_\Lambda^m(z,\delta)$ в круге $B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|)$ допускает оценку сверху числом $2(3(1-\delta))^{-1}$. Поэтому

$$\frac{|z-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \leqslant 1, \quad z,\lambda_k \in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),\ k\neq m,\ \delta \in (0,1/3).$$

С другой стороны выполнено неравенство

$$\frac{|z-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \geqslant 1, \quad z \notin B(\lambda_m,5\delta|\lambda_m|),\ \lambda_k \in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),\ k\neq m,\ \delta \in (0,1/3).$$

Кроме того, имеем

$$|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)| = \sum_{\substack{\lambda_k \in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),\\ k\neq m}} n_k \ln\frac{|\lambda_m-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\lambda_k \in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),\\ k\neq m}} n_k \ln\frac{\delta|\lambda_m|}{3\delta(1-\delta)|\lambda_m|} = \ln\frac{1}{3(1-\delta)} \sum_{\substack{\lambda_k \in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),\\ k\neq m}} n_k =$$

$$= -\ln(3(1-\delta))\,(n_\Lambda(\lambda_m,\delta)-n_m). \tag{0.6}$$

Откуда следует, что

$$|q_\Lambda^m(z,\delta_1)| \geqslant |q_\Lambda^m(z,\delta_2)|, \quad z \in B(\lambda_m,\delta_2|\lambda_m|)\,,\ 0<\delta_1\leqslant\delta_2<1/3.$$

Индексом конденсации (А. С. Кривошеева) называется величина

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{m\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Данное определение является корректным, поскольку, согласно (0.6), модуль функции $q_\Lambda^m(z,\delta)$ — это невозрастающая функция по $\delta \in (0, 1/3)$, поэтому внешний предел в определении величины S_Λ существует. Кроме того, из (0.6) следует, что $S_\Lambda \leqslant 0$. Величина $\ln |q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)| / |\lambda_m|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического нормированных расстояний от точек λ_k из круга $B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|), k \neq m$ до точки λ_m.

Величина S_Λ схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна-Леонтьева (см., например, [38], [25]-[27]), однако индекс конденсации А.С. Кривошеева нашёл своё применение при решении большого числа задач ([4]-[9]), поскольку определяется для любой последовательности Λ и является более универсальной локальной характеристикой последовательности, чем индекс конденсации Бернштейна-Леонтьева.

Ряд примеров на вычисление индекса S_Λ имеется в работах [8] и [5]. Рассматриваются некоторые из них.

Равенство $S_\Lambda = 0$ означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Более точно этот факт описан, например, в работах [4], [10].

Следующая лемма устанавливает необходимые взаимосвязи между введёнными характеристиками последовательности Λ.

Лемма 1.1.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность комплексных чисел. Тогда, если $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, то $m(\Lambda) < +\infty$. При условии $S_\Lambda > -\infty$ верно и обратное утверждение.*

Во втором параграфе первой главы рассматривается специальная мероморфная функция и получены оценки сверху и снизу её модуля.

Пусть $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Рассматривается функция из книги [37], формула (9.5.10)

$$g_\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k} \right)^{n_k} \exp\left(\frac{2zn_k}{\lambda_k} \right).$$

Следующая лемма устанавливает условия на последовательность Λ, при которых справедливы соответствующие оценки сверху.

Лемма 1.2.1 *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда существуют положительные* *константы A, B, M_1, b такие, что для функции*

$$g_\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k} \right)^{n_k} \exp\left(\frac{2zn_k}{\lambda_k} \right)$$

справедлива оценка сверху

$$\ln |g_\Lambda(z)| \leqslant 2B\, x\sigma_\Lambda\left(|z|\right) + 2M_1 b\, |z| + ABb\, x,$$

$$\mathrm{z} \in \mathbb{C}_+ = \left\{ z : \operatorname{Re} z > 0 \right\}, \quad z = x + iy.$$

Для получения необходимых оценок снизу на модуль функции g_Λ на окружностях вида $S\left(\lambda_k, \gamma_k\right)$ необходимо потребовать отделимость точек λ_k друг от друга. Условие отделимости точек λ_k обеспечивает индекс конденсации S_Λ последовательности Λ.

Поскольку индекс конденсации S_Λ является частным случаем группового индекса конденсации, который введен в работе [6], нам понадобится лемма, которая выведена из теоремы 5.1 работы [5]. Это результат, который формулируется в частном случае, когда каждая группа состоит из одной точки.

Лемма A. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — её кратное нулевое множество, $S_\Lambda > -\infty$. Тогда существуют числа $\gamma_k > 0, \ k \geqslant 1$, такие, что*

1) $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{\gamma_k}{|\lambda_k|} \leqslant \overline{n}(\Lambda)$;

2) *круги $B\left(\lambda_k, \gamma_k\right), \ k \geqslant 1$, попарно не пересекаются;*

3) *для каждого $\theta \in (0,1)$ существуют числа $\beta, \beta_1 > 0$ такие, что*

$$\ln |f(z)| \geqslant -\beta_1 - \beta |z|, \quad z \in S\left(\lambda_k, \theta\gamma_k\right), \quad k \geqslant 1.$$

Следующая лемма устанавливает подходящие оценки снизу на модуль функции g_Λ (ср. с леммой 4 работы [42]).

Лемма 1.2.2. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$ и $m(\Lambda) < +\infty$. Тогда существуют числа $\gamma_k > 0, \ k \geqslant 1$, такие, что*

1) $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{\gamma_k}{|\lambda_k|} \leqslant \overline{n}(\Lambda)$;

2) *круги* $B(\lambda_k, \gamma_k)$, $k \geqslant 1$, *попарно не пересекаются;*

3) *для каждого достаточно малого* $\theta > 0$ *существуют числа* $B_1, B_2 > 0$ *такие, что*

$$\ln|g_\Lambda(z)| \geqslant 2B\, x\sigma_\Lambda(|z|) - B_2 - B_1 x, \qquad z \in S(\lambda_k, \theta\gamma_k), \quad k \geqslant 1.$$

Третий параграф первой главы посвящен построению специальной функции, аналитической в полуплоскости $C_{3\rho} = \{z : x = \mathrm{Re} z > -3\rho\}$. Кроме того, даются необходимые оценки сверху и снизу на модуль этой функции. Данный вопрос решается в следующей лемме.

Прежде чем сформулировать лемму, введём в рассмотрение некоторые классы выпуклых функций. Функции из этих классов будут в дальнейшем играть роль весовых функций в рассматриваемых функциональных пространствах L_p^ω и C^ω (см. гл. 2).

Пусть $\rho > 0$. Символом Ω_ρ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant \rho|t|$ при $t \leqslant 0$, и

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\omega(t)}{t} = +\infty. \tag{0.7}$$

При этих условиях $\omega(t)$ — неубывающая функция на луче $t > 0$. Подмножество $\Omega_{\Lambda,\rho}$, для которого выполнено неравенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t))}{t^2}\, dt < \infty, \tag{0.8}$$

обозначим через $\Omega_{\Lambda,\rho}$.

Лемма 1.3.1. *Пусть* $\rho > 0$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *и* $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. *Тогда существует аналитическая в полуплоскости* $C_{3\rho} = \{z : x = \mathrm{Re} z > -3\rho\}$ *функция* $h_{\omega,\rho}$, *не обращающаяся в нуль в* $\mathbb{C}$, *и число* $A_0 > 0$ *такие, что*

$$\ln|h_{\omega,\rho}(z)| \leqslant -\omega(2B\sigma_\Lambda(|z|)), \quad z \in C_{3\rho}, \tag{0.9}$$

$$\ln|h_{\omega,\rho}(z)| \geqslant -A_0(x + 3\rho), \qquad z \in C_{2\rho}. \tag{0.10}$$

Вторая глава диссертации посвящена построению специальных функций с подходящими оценками на рост. Данные функции используются для построения биортогональной системы функционалов к системе экспоненциальных мономов в пространстве L_p^ω.

Пусть X — линейное топологическое пространство, X^* — пространство линейных непрерывных функционалов на нём. Тогда, если система $\{\varphi_k\} \subset X$, то соответствующая ей система $\{f_k\} \subset X^*$ называется биортогональной к системе $\{\varphi_k\}$, если

$$f_j(\varphi_k) = \delta_{k,j},$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера.

Цель данной главы заключается фактически в построении системы биортогональных функционалов к системе экспоненциальных мономов (даже более того — системы, удовлетворяющей дополнительным условиям на рост) в соответствующих весовых пространствах. Результаты этой главы будут использованы в главе 3 при получении формул для коэффициентов ряда по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Первый параграф второй главы будет посвящён основным свойствам весовых пространств L_p^ω, C^ω.

В параграфе §1.3 главы 1 были введены классы выпуклых функций Ω_ρ и $\Omega_{\Lambda,\rho}$. Рассмотрим весовые пространства комплекснозначных интегрируемых функций на вещественной прямой ($p \geqslant 1$)

$$L_p^\omega = \left\{ f: \ ||f||_{p,\mathbb{R}}^\omega := \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f\,(t)\, e^{-\omega(t)} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

и непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^\omega = \left\{ f: \ ||f||_C^\omega := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| f\,(t)\, e^{-\omega(t)} \right| < +\infty \right\}.$$

Возникает естественный вопрос о полноте введённых пространств. Ответ даётся следующей леммой.

Лемма 2.1.1. *Пусть $\omega(t) \in \Omega_\rho$ — неотрицательная выпуклая функция. Тогда L_p^ω и C^ω являются полными нормированными пространствами, т.е. банаховыми.*

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left\{ t^n e^{\lambda_k t} \right\}_{k=1,\, n=0}^{\infty,\, n_k-1}.$$

В контексте рассматриваемой задачи возникает естественный вопрос: при каких условиях система $\mathcal{E}(\Lambda)$ принадлежит введённым выше функциональным пространствам? Ответ на этот вопрос даётся следующей леммой.

Лемма 2.1.2. *Пусть $\omega(t)$ — неотрицательная выпуклая функция, при этом $\omega(0) = 0$, последовательность Λ является почти вещественной. Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ принадлежит пространству L_p^ω (C^ω) тогда и только тогда, когда выполнено соотношение* (0.7).

Во втором параграфе второй главы будет построена биортогональная система функционалов к системе экспоненциальных мономов в пространствах L_p^ω.

Следуя работе [52], рассмотрим весовое пространство L_q^ω интегрируемых на вещественной прямой, определяемое как

$$L_q^\omega = \left\{ f: \ ||f||_{q,\mathbb{R}}^\omega := \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t)\, e^{\omega(t)} \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \right\}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Согласно [52], функционал вида

$$T(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t) f(t)\, dt, \tag{0.11}$$

является линейным и непрерывным на пространстве L_p^ω, где $h \in L_q^\omega$. Действительно, так как

$$|T(f)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(t)||f(t)|\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(t) e^{\omega(t)}||f(t)\, e^{-\omega(t)}|\, dt,$$

то применяя неравенство Гёльдера, получим, что $|T(f)| \leqslant K||f||_{L_p^\omega}, \ K > 0$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — кратная последовательность комплексных чисел и $\rho > 0$. Положим

$$\sigma_{\Lambda,\rho}(r) = \max \left\{ \sum_{\substack{|\lambda_k|<r, \\ \operatorname{Re}\lambda_k>0}} \operatorname{Re} \frac{n_k}{\lambda_k + \rho}, \sum_{\substack{|\lambda_k|<r, \\ \operatorname{Re}\lambda_k<0}} -\operatorname{Re} \frac{n_k}{\lambda_k + \rho} \right\}.$$

Пусть $\omega \in \Omega_\rho$. Символом ω^* обозначим выпуклую функцию, сопряженную по Юнгу к функции ω ([29], гл. III), т.е.

$$\omega^*(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} (xt - \omega(t)).$$

Так как $\omega(t) \geqslant 0$ и $\omega(0) = 0$, то $\omega^*(x) \geqslant 0$ и $\omega^*(0) = 0$.

Следующая лемма устанавливает существование системы функций, с помощью которой строится биортогональная система функционалов к системе экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями. Кроме того, лемма даёт необходимые оценки на данную систему функций.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, и $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда существуют аналитические в полуплоскости $C_{3\rho}$ функции $G_{\omega,k,j}$ и числа $C_2,\ C_1, C > 0,\ \gamma_k > 0,\ k \geqslant 1$, такие, что $\gamma_k / |\lambda_k| \leqslant 1/4$,*

$$|G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant C_2 \beta_k \frac{e^{\omega^*(x)}}{1+y^2}, \quad z \in C_{3\rho}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1, \tag{0.12}$$

где $\ln \beta_k = (1 - C)\, B\, |\lambda_k|\, \sigma_\Lambda(|\lambda_k|) + C_1 |\lambda_k|$, и имеют место равенства

$$G^{(j-1)}_{\omega,k,j}(\lambda_k) = 1, \qquad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1,$$

$$G^{(l)}_{\omega,k,j}(\lambda_k) = 0, \qquad l = \overline{0, n_k - 1}, \quad l \neq j - 1, \quad k \geqslant 1,$$
$$G^{(l)}_{\omega,k,j}(\lambda_p) = 0, \qquad l = \overline{0, n_p - 1}, \quad p \geqslant 1, \quad p \neq k.$$

Положим

$$H_{\omega,k,j}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{\omega,k,j}(x+iy)\, e^{-(x+iy)t}\, dy, \qquad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1. \tag{0.13}$$

Следующая лемма устанавливает необходимые свойства функций $H_{\omega,k,j}$ и даёт необходимые оценки на них.

Лемма 2.2.2. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, кроме того, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$, $\omega(t) \geqslant t^2$ при $t > 0$, и $G_{\omega,k,j}$ — функции и β_k — числа из леммы 2.2.1, $j = \overline{1, n_k}$, $k \geqslant 1$. Тогда определённые по формуле (0.13) функции* *являются непрерывными на* $\mathbb{R}$, *и существуют положительные константы* $D_1,\ D_2$ *такие, что справедливы оценки*

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant D_1\beta_k\, e^{-\omega(t)}, \quad t \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n_k},\ k \geqslant 1. \tag{0.14}$$

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant D_2\beta_k\, e^{-2\rho|t|}, \quad t < 0, \quad j = \overline{1, n_k},\ k \geqslant 1. \tag{0.15}$$

Кроме того, верны равенства

$$G_{\omega,k,j}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,j}(t)\, e^{zt}\, dt, \quad x = \operatorname{Re} z > 0, \quad j = \overline{1, n_k},\ k \geqslant 1. \tag{0.16}$$

Используя полученные сведения о функциях $H_{\omega,k,j}$, доказывается основной результат данной главы.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $\rho > 0$, *последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *почти вещественная,* $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$, $\omega(t) \geqslant t^2$ *при* $t > 0$. *Тогда система функционалов* $T_{\omega,k,j}$ *вида*

$$T_{\omega,k,j}(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,j}(t) f(t)\, dt, \tag{0.17}$$

$$f \in L_p^\omega, \quad x = \operatorname{Re} z > 0, \quad j = \overline{1, n_k},\ k \geqslant 1,$$

где функции $H_{\omega,k,j}(t)$ *определены равенством* (0.13), *является биортогональной системой функционалов к системе* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *в пространстве* L_p^ω.

В третьей заключительной главе диссертации рассматриваются вопросы о возможности представления рядами экспоненциальных мономов функций из весовых подпространств. Формулируются и доказываются соответствующие утверждения.

В главе 2 были введены пространства L_p^ω и C^ω. Символами $W^p(\Lambda, \omega)$ $(p \geqslant 1)$ и $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^ω и C^ω соответственно.

В главе 3 диссертации изучаются условия, при которых каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)$ $\big(W^0(\Lambda, \omega)\big)$ продолжается до целой функции F, представимой во всей плоскости рядом

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{0.18}$$

Подобные задачи рассматривались в работах [52] и [53] при условии, что $n_k = 1$ при любом $k \in \mathbb{N}$, условии (0.3) и принадлежности последовательности Λ к классу $U(d, 0)$. В частности, это означает, что последовательность Λ имеет плотность

$$n(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{n(r,\Lambda)}{r} \leqslant \frac{1}{h}.$$

Отметим здесь результат из работы [53] (Theorem 2.1). Для этого необходимо ввести понятие класса $U(d, 0)$. Пусть $L(c,d)$ — класс строго возрастающих последовательностей $A = \{a_n\}$ положительных чисел, стремящихся к бесконечности. При этом для некоторого c для всех $n \geqslant 1$ выполнено неравенство $a_{n+1} - a_n \geqslant c$. Кроме того, последовательность A должна быть измеримой, и её плотность должна равняться d, то есть существует следующий предел и выполнено равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = d \geqslant 0.$$

Зафиксируем некоторую последовательность $A \in L(c,d)$ и два положительных числа α, δ таких, что $\alpha < 1$ и $\delta \leqslant \min\{4, c\}$. Теперь для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим замкнутый сегмент вещественной оси $T_n := \{x : |x - a_n| \leqslant a_n^{\alpha}\}$ и выберем в нём точку b_n, чтобы для любого $n \neq m$ выполнялось хотя бы одно из двух условий: (I) $b_n = b_m$ или (II) $|b_n - b_m| \geqslant \delta$. Таким образом будет построена последовательность $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Из условия (I) следует, что некоторые члены последовательности могут повторяться, но она необязательно неубывающая. Однако, перенумеровав члены последовательности по возрастанию модулей, мы можем записать её в виде $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Про построенную таким образом последовательность Λ будем говорить, что она принадлежит классу $U(d,0)$. Из условия (II) следует, что $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant \delta,\ k \geqslant 1$.

Если $\Lambda \in U(d,0)$ то из этого следует, что, во-первых, последовательность Λ измерима и её плотность равна d, то есть

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t} = d < \infty,$$

а во-вторых, выполнено условие на кратность: $n_k \leqslant \gamma\lambda_k^{\alpha},\ \gamma > 0,\ k \in \mathbb{N}$. При этом γ не зависит от k.

Точная формулировка теоремы с использованием наших обозначений имеет следующий вид.

Теорема A (E. Zikkos, Theorem 2.1, [53]). *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *— последовательность, принадлежащая классу* $U(d, 0)$ *для некоторого* d*. Пусть функция* $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$ $(\rho > 0)$ *и выполнены два условия:*

$$\omega\left(t\right) \geqslant t^2, \qquad t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

и для каждого $A > 0$ *существует* $t\left(A\right) > 0$ *такое, что*

$$\omega\left(t + A\right) \geqslant \omega\left(t\right) + t, \qquad t \geqslant t\left(A\right).$$

Тогда каждая функция $f \in W^p\left(\Lambda, \omega\right) \left(W^0\left(\Lambda, \omega\right)\right)$ *продолжается до целой функции* F*, для которой имеет место представление* (0.18).

В настоящей главе диссертации даётся формулировка и доказательство обобщения данного результата. А именно, утверждается, что каждая функция $f \in W^p\left(\Lambda, \omega\right) \left(W^0\left(\Lambda, \omega\right)\right)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (0.18). При этом условия, которые накладываются на последовательность Λ и функцию ω существенно слабее, чем условия из теоремы 2.1 в работе [53]. Кроме того, будут установлены формулы для коэффициентов ряда.

В следующем утверждении **первого параграфа третьей главы** доказывается некоторый аналог теоремы Коши-Адамара для рядов вида (0.2) (ср. [7], теорема 4.1)

Лемма 3.1.1. *Пусть кратная последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *такая, что* $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$*, и* $\{a_{k,n}\}_{k=1,\, n=0}^{\infty,\, n_k-1}$ *— последовательность комплексных чисел. Предположим, что*

$$\varliminf_{k\to\infty} \min_{0\leqslant n\leqslant n_k-1} \frac{-\ln|a_{k,n}|}{|\lambda_k|} = +\infty.$$

Тогда ряд вида (0.2) *сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.*

Во втором параграфе третьей главы рассматривается ситуация, при которой $\sigma_\Lambda\left(r\right) \to +\infty,\ r \to +\infty$. Заметим, что данная ситуация рассматривалась Э. Зиккосом в работе [53].

Формулируется и доказывается один из основных результатов настоящего диссертационного исследования.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\rho > 0$*, последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *почти вещественная,* $S_\Lambda > -\infty$*,* $m\left(\Lambda\right) < +\infty$*,* $\sigma_\Lambda\left(r\right) \to +\infty$*,* $r \to +\infty$*,* $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$*.*

Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (0.2), *где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t)\, f(t)\, dt, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1, \tag{0.19}$$

$\omega(t) = \omega_0(t)$ при $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_0(t) + t^2$ при $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ определены в лемме 2.2.2. При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Теорема 3.2.2. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ почти вещественная, $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\sigma_\Lambda(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$, $\omega_1 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление* (0.2), *где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t)\, f(t)\, dt, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1,$$

$\omega(t) = \omega_1(t) - t$ при $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_1(t) + t + t^2$ при $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ определены в лемме 2.2.2. При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Заметим, что, поскольку вопрос о представлении рядами по системе экспоненциальных мономов в пространстве C^ω свёлся к случаю пространства L_p^ω, то построения биортогональной системы функционалов для пространства C^ω в главе 2 не потребовалось.

Далее показывается, что теорема 2.1 из работы [53] является частным случаем теорем 3.2.1 и 3.2.2.

Теорема 3.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы А. Тогда утверждение теорем 3.2.1 и 3.2.2 остаётся справедливым.*

После доказательства данной теоремы приводятся некоторые примеры случаев, когда теорема А не может быть применена, в то время как применимы теоремы 3.2.1 и 3.2.2.

В третьем параграфе третьей главы рассматривается ситуация, когда

$$\sigma_\Lambda(r) \leqslant b, \qquad r > 0. \tag{0.20}$$

Показывается, что теоремы 3.2.1 и 3.2.2 остаются верными и без условия неограниченности функции $\sigma_\Lambda(r)$. Для этого формулируется и доказывается одно вспомогательное утверждение.

Последовательность $\Lambda_0 = \{\zeta_m, p_m\}$ будем называть пополнением последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, если существует подпоследовательность натуральных чисел m_k такая, что $\lambda_k = \zeta_{m_k}$ и $n_k \leqslant p_{m_k}$, $k \geqslant 1$.

Лемма 3.3.1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной, $S_\Lambda > -\infty$, для некоторого $b > 0$ верно (0.20) и $\omega \in \Omega_\rho$. Тогда существует пополнение $\Lambda_0 = \{\zeta_m, p_m\}$ последовательности Λ такое, что $m(\Lambda_0) = 0$, $S_{\Lambda_0} > -\infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda_0,\rho}$ и $\sigma_{\Lambda_0}(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$.*

Пусть $\rho > 0$, $\omega \in \Omega_\rho$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Если Λ_0 является пополнением Λ, то верны вложения

$$W^p(\Lambda, \omega) \subseteq W^p(\Lambda_0, \omega), \qquad W^0(\Lambda, \omega) \subseteq W^0(\Lambda_0, \omega).$$

Таким образом, из теорем 3.2.1, 3.2.2 и леммы 3.3.1 получаем следующие утверждения.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\rho > 0$, $\omega_0 \in \Omega_\rho$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной, $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$ и верно (0.20). Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (0.2), где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t)\, dt, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1, \tag{0.21}$$

$\omega(t) = \omega_0(t)$ при $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_0(t) + t^2$ при $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ определены в лемме 2.2.2. При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Теорема 3.3.2. *Пусть $\rho > 0$, $\omega_1 \in \Omega_\rho$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной, $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$ и верно (0.20). Тогда каждая функция $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (0.2), где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t)\, dt, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1,$$

$\omega(t) = \omega_1(t) - t$ при $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_1(t) + t + t^2$ при $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ определены в лемме 2.2.2. При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Замечание. Пусть $\rho > 0$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Если верно (0.20), то классы выпуклых функций Ω_ρ и $\Omega_{\Lambda,\rho}$ совпадают. Таким образом, в силу теорем 3.3.1 и 3.3.2 теоремы 3.2.1 и 3.2.2 останутся верными, если из их формулировок изъять условие $\sigma_\Lambda(r) \to +\infty, \quad r \to +\infty$.

В заключительном параграфе диссертации показывается, что в условиях теорем 3.3.1 и 3.3.2, 3.2.1 и 3.2.2 система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространствах L_p^ω и C^ω.

Основной результат данного параграфа — получить достаточное условие для неполноты системы экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями.

Доказывается вспомогательное утверждение о росте коэффициентов рядов экспоненциальных мономов.

Лемма 3.4.1 *Пусть $\rho > 0$, $\omega \in \Omega_\rho$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной. Предположим, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ $\left(W^0(\Lambda, \omega_1)\right)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (0.2), где ряд сходится равномерно на компактах в плоскости. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве L_p^ω (C^ω).*

Из леммы 3.4.1 и теорем 3.3.1, 3.3.2, 3.2.1, 3.2.2 получаем следующий результат.

Теорема 3.4.1 *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\omega \in \Omega_\rho$. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве L_p^ω (C^ω).*

Возникает естественный вопрос: справедливо ли обратное утверждение, то есть являются ли приведённые условия для неполноты системы экспоненциальных мономов также необходимыми? Это утверждение будет справедливым, если удастся показать, что из нарушения хотя бы одного из условий: $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$ — будет следовать полнота системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Оказывается, что это не так, что демонстрируется примером. Опишем вкратце, на чём он основан.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что

$$\lambda_{2n} = n, \quad \lambda_{2n-1} = n - \frac{1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{0.22}$$

Для этой последовательности относительная кратность $m(\Lambda)$ равна, очевидно, нулю, так как кратности всех точек равны единице. Далее доказывается равенство $S_\Lambda = -\infty$.

Показывается, что в этом случае система $\mathcal{E}(\Lambda)$ всё равно неполна, например, в пространстве L_p^ω.

Для доказательства неполноты системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ строится ненулевой линейный непрерывный функционал вида (0.11) на пространстве L_p^ω, который обращается в нуль на элементах системы $\mathcal{E}\,(\Lambda)$. Данный функционал строится, на основе идей из доказательства теоремы 1.1 работы [52] (Theorem 1.1).

Предположим, что, кроме условия $\omega \in \Omega_\rho$, весовая функция ω удовлетворяет следующим дополнительным условиям: для каждого $A > 0$ существует $t\,(A) > 0$ такое, что

$$\omega\,(t + A) \geqslant \omega\,(t) + t, \qquad t \geqslant t\,(A)\,,$$

и, помимо этого,

$$\omega(t) > \sqrt{|t|}, \quad t < 0.$$

Рассматривается функция

$$G_0(z) = \frac{g(z) h_{\omega,\rho}(z)\, e^{-2M_1 b\,|z| - 2C_2 z}}{(1 + z + 3\rho)^{[6B\rho b]+2}}, \quad \mathrm{Re}\, z > -3\rho,$$

где функция $g(z)$ определена в доказательстве леммы 2.2.1, а функция $h_{\omega,\rho}$ — это функция, существование которой гарантируется леммой 1.3.1.

Вводится функция

$$h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x + iy)\, e^{-(x+iy)t}\, dy,$$

откуда получаем, что функция $h_0(t)e^{xt}$ — это преобразование Фурье функции $G_0(x + iy)$ при всех $x > -3\rho$.

Показывается, что функция $G_0(x+iy)$ является обратным преобразованием Фурье для функции $h_0(t)e^{xt}$ при $x>0$. Следовательно, справедливо равенство

$$G_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h_0(t)\,e^{zt}\,dt,\quad x>0. \tag{0.23}$$

Далее показывается, что $h_0\in L_q^\omega$.

Определяется линейный непрерывный функционал T_0 на пространстве L_p^ω следующим образом:

$$T_0(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h_0(t)f(t)\,dt,\quad f\in L_\omega^p.$$

Из определения функции $G_0(z)$ следует, что она обращается в нуль во всех точках $\lambda_k,\ k\geqslant 1$. Тогда, учитывая (0.23), получаем, что

$$T_0(e^{\lambda_k t})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h_0(t)\,e^{\lambda_k t}\,dt=G_0(\lambda_k)=0.$$

Поскольку функционал T_0 нетривиален, то отсюда следует неполнота системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве L_p^ω.

В заключении приведены следующие основные результаты работы:

- получены достаточные условия, при которых каждая функция из весовых пространств L_p^ω и C^ω на вещественной прямой допускают аналитическое продолжение до целых функций, представимых во всей комплексной плоскости рядом экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями;

- получены условия существования биортогональной системы функционалов к системе экспоненциальных мономов для весового пространства L_p^ω; при этом случай пространства C^ω сводится к случаю пространства L_p^ω;

- получены формулы для коэффициентов указанных разложений в ряд экспоненциальных мономов; данные формулы получены с помощью построенной биортогональной системы функционалов;

- доказано, что сходимость указанного ряда экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями является абсолютной и равномерной на компактах плоскости;

- сформулированы условия на весовую функцию в пространствах L_p^ω и C^ω, при которых справедливы соответствующие утверждения о представлении рядами экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями;

- получены достаточные условия неполноты системы экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями в указанных функциональных пространствах.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, доценту Кривошеевой Олесе Александровне за постановку проблемы, постоянную поддержку, за внимание к работе, за участие в обсуждении полученных результатов и помощь при оформлении диссертации.

Автор выражает огромную благодарность преподавательскому коллективу факультета математики и информационных технологий Уфимского университета науки и технологий за грамотный и отлаженный образовательный процесс, очень познавательные лекции, которые помогли автору в его исследованиях.

Автор также выражает глубокую благодарность главному научному сотруднику, заведующему Отделом комплексного анализа Института математики с вычислительным центром — обособленным структурным подразделением Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, д.ф.-м.н. Кривошееву Александру Сергеевичу за большую наставническую и научную работу, проведённую в отношении автора, за плодотворное обсуждение этапов научной работы, проводимой автором и за оказанное им влияние на формирование математической культуры автора.

Глава 1

Оценки аналитических функций

1.1. Характеристики последовательности комплексных чисел

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел $\lambda_k = |\lambda_k|\, e^{i\theta_k}$ и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$ и $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Через $B(a,t)$ и $S(a,t)$ будем обозначить соответственно открытый круг и окружность с центром в точке a радиуса t:

$$B(a,t) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < t\}\,,$$

$$S(a,t) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = t\}\,, \quad S(a,t) = \partial B(a,t).$$

Символом $n(r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в замкнутый круг $\overline{B(0,r)}$, и пусть

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}$$

— верхняя плотность последовательности Λ. Отметим, что, помимо данной характеристики, при решении целого ряда задач, связанных с полнотой системы экспоненциальных мономов в пространстве функций, аналитических в некоторой выпуклой области, широкое применение нашли такие характеристики последовательности, как максимальная плотность, логарифмическая блок-плотность и т.д. Подробнее о взаимосвязях между ними можно узнать, например, из работ [43], [45], [11].

Обозначим через $n_\Lambda(z,\delta)$ число точек λ_k с учётом кратностей, попавших в круг $B(z,\delta|z|)$.

Положим еще

$$m\,(\Lambda) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Данную величину назовём относительной кратностью последовательности Λ.

Обозначим

$$\sigma_\Lambda(r) = \max\left\{ \sum_{\substack{|\lambda_k|<r,\\ \operatorname{Re}\lambda_k>0}} \operatorname{Re}\frac{n_k}{\lambda_k}, \sum_{\substack{|\lambda_k|<r,\\ \operatorname{Re}\lambda_k<0}} -\operatorname{Re}\frac{n_k}{\lambda_k} \right\}. \tag{1.1.1}$$

Данная величина характеризует степень разброса чисел λ_k по комплексной плоскости (с учётом кратностей) в круге $B(0,r)$. Заметим, что в случае, когда последовательность Λ состоит из положительных чисел (такие последовательности рассматривались, например, в работах [41], [52], [53]), то величину $\sigma_\Lambda(r)$ достаточно определить так:

$$\sigma_\Lambda(r) = \sum_{\lambda_k<r} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Идея определения величины $\sigma_\Lambda(r)$ в случае комплексных λ_k с помощью соотношения (1.1.1) принадлежит Б.Н. Хабибуллину в работах [32]-[35]

Следуя работе [9], будем говорить, что последовательность Λ является *почти вещественной*, если

$$\operatorname{Re}\lambda_k > 0 \ (k \geqslant 1), \quad \frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{\operatorname{Re}\lambda_k} \to 0, \ k \to \infty.$$

Если, как и выше, θ_k — главные значения аргументов чисел λ_k, то из почти вещественности следует, что

$$\frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{\operatorname{Re}\lambda_k} = \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k} = \operatorname{tg}\theta_k \to 0, \ k \to \infty,$$

откуда получаем, что $\theta_k \to 0$, а значит, $\cos\theta_k \to 1, \quad k \to \infty$. Так же из почти вещественности следуют следующие предельные соотношения:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{\lambda_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|} = 1. \tag{1.1.2}$$

Одной из главных характеристик последовательности комплексных чисел, с помощью которой были получены все основные результаты настоящего диссертационного исследования, является так называемый индекс конденсации. Для определения этой величины рассмотрим функцию

$$q_\Lambda^m(z,\delta) = \prod_{\substack{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|),\\ k\neq m}} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}, \quad m \geqslant 1.$$

Модуль функции $q_\Lambda^m(z,\delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|), k \neq m$, относительно точки z. В том случае, когда круг $B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|)$ не содержит точек λ_k, $k \neq m$, полагаем $q_\Lambda^m(z,\delta) \equiv 1$.

Если $\delta \in (0,1)$, то модуль каждого сомножителя в определении функции $q_\Lambda^m(z,\delta)$ в круге $B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|)$ допускает оценку сверху числом $2(3(1-\delta))^{-1}$. Поэтому

$$\frac{|z-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \leqslant 1, \quad z, \lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|),\ k \neq m,\ \delta \in (0, 1/3).$$

С другой стороны выполнено неравенство

$$\frac{|z-\lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \geqslant 1, \quad z \notin B(\lambda_m, 5\delta|\lambda_m|),\ \lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|),\ k \neq m,\ \delta \in (0, 1/3).$$

Кроме того, имеем:

$$|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)| = \sum_{\substack{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|),\\ k \neq m}} n_k \ln \frac{|\lambda_m - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|),\\ k \neq m}} n_k \ln \frac{\delta|\lambda_m|}{3\delta(1-\delta)|\lambda_m|} = \ln\frac{1}{3(1-\delta)} \sum_{\substack{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|),\\ k \neq m}} n_k =$$

$$= -\ln(3(1-\delta))\,(n_\Lambda(\lambda_m,\delta) - n_m). \tag{1.1.3}$$

Откуда следует, что

$$|q_\Lambda^m(z,\delta_1)| \geqslant |q_\Lambda^m(z,\delta_2)|, \quad z \in B(\lambda_m, \delta_2|\lambda_m|),\ 0 < \delta_1 \leqslant \delta_2 < 1/3.$$

Индексом конденсации (А. С. Кривошеева) называется величина

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Данное определение является корректным, поскольку, согласно (1.1.3), модуль функции $q_\Lambda^m(z,\delta)$ — это невозрастающая функция по $\delta \in (0,1/3)$, поэтому внешний предел в определении величины S_Λ существует. Кроме того, из (1.1.3) следует, что $S_\Lambda \leqslant 0$. Величина $\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|/|\lambda_m|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического нормированных расстояний от точек λ_k, попавших в круг $B(\lambda_m, \delta|\lambda_m|), k \neq m$, до точки λ_m.

Величина S_Λ схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна-Леонтьева (см., например, [38], [25]-[27]), однако индекс конденсации А.С. Кривошеева нашёл своё применение при решении большого числа задач ([4]-[9]), поскольку определяется для любой последовательности Λ и является более универсальной локальной характеристикой последовательности, чем индекс конденсации Бернштейна-Леонтьева.

Ряд примеров на вычисление индекса S_Λ имеется в работах [8] и [5]. Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k,\ 1\}_{k\geqslant 1}$. Предположим, что для некоторого $h>0$ верны неравенства $|\lambda_{k+1}|-|\lambda_k|\geqslant h,\ k\geqslant 1$. Подсчитаем число S_Λ. Имеем:

$$\ln\left|q_\Lambda^k\left(\lambda_k,\delta\right)\right| = \sum_{1\leqslant l\leqslant s(k)} n_k \ln\frac{|\lambda_k-\lambda_{k-l}|}{3\delta\left|\lambda_{k-l}\right|} + \sum_{1\leqslant l\leqslant p(k)} n_k \ln\frac{|\lambda_{k+l}-\lambda_k|}{3\delta\left|\lambda_{k+l}\right|},\qquad k\geqslant 1,$$

где $s(k)=s$ — число точек λ_k из пересечения $B\left(0,\ |\lambda_k|\right)\cap B\left(\lambda_k,\ \delta\left|\lambda_k\right|\right)$ и $p(k)=p$ — число точек λ_k из множества $B\left(\lambda_k,\ \delta\left|\lambda_k\right|\right)\setminus\overline{B\left(0,\ |\lambda_k|\right)}$. По условию $|\lambda_k|-|\lambda_{k-l}|\geqslant lh$ и $|\lambda_{k+l}|-|\lambda_k|\geqslant lh$. Следовательно, для всех $\delta\in(0,1)$ имеем:

$$\ln\left|q_\Lambda^k\left(\lambda_k,\delta\right)\right| \geqslant \sum_{1\leqslant l\leqslant s}\ln\frac{lh}{3\delta\left|\lambda_{k-l}\right|} + \sum_{1\leqslant l\leqslant p}\ln\frac{lh}{3\delta\left|\lambda_{k+l}\right|} \geqslant \sum_{1\leqslant l\leqslant s}\ln\frac{lh}{3\delta\left|\lambda_k\right|}+$$

$$+\sum_{1\leqslant l\leqslant p}\ln\frac{lh}{3\delta(1+\delta)\left|\lambda_k\right|} \geqslant \ln\frac{h^s s!}{\left(3\delta\left|\lambda_k\right|\right)^s} + \ln\frac{h^p p!}{\left(6\delta\left|\lambda_k\right|\right)^p} \geqslant$$

$$\geqslant \ln\frac{(hs)^s}{\left(9\delta\left|\lambda_k\right|\right)^s} + \ln\frac{(hp)^p}{\left(18\delta\left|\lambda_k\right|\right)^p} \geqslant s\ln\frac{hs}{18\delta\left|\lambda_k\right|} + p\ln\frac{hp}{18\delta\left|\lambda_k\right|}.$$

(мы учли неравенство $n!\geqslant 3^{-n}n^n, n\geqslant 1$ — следствие из формулы Стирлинга). Таким образом,

$$\frac{\ln\left|q_\Lambda^k\left(\lambda_k,\delta\right)\right|}{|\lambda_k|} \geqslant \frac{s}{|\lambda_k|}\ln\frac{hs}{18\delta\left|\lambda_k\right|} + \frac{p}{|\lambda_k|}\ln\frac{hp}{18\delta\left|\lambda_k\right|}.$$

Поскольку $|\lambda_{k+1}|-|\lambda_k|\geqslant h,\quad k\geqslant 1$, то верны оценки

$$s\leqslant\frac{\delta\left|\lambda_k\right|}{h},\qquad\qquad p\leqslant\frac{\delta\left|\lambda_k\right|}{h}.$$

Следовательно, так как функция $x\ln\left(hx/18\delta\right)$ убывает, при $hx/18\delta<e^{-1}$, из предыдущего получаем:

$$\frac{\ln\left|q_\Lambda^k\left(\lambda_k,\delta\right)\right|}{|\lambda_k|} \geqslant \frac{\delta}{h}\ln\frac{h\delta}{18\delta h} + \frac{\delta}{h}\ln\frac{h\delta}{18\delta h} = \frac{2\delta}{h}\ln\frac{1}{18},\quad n\geqslant 1. \tag{1.1.4}$$

Окончательно имеем:

$$S_\Lambda \geqslant \lim_{\delta\to 0}\frac{2\delta}{h}\ln\frac{1}{18} = 0. \tag{1.1.5}$$

Таким образом, $S_\Lambda = 0$.

2. Пусть

$$\lambda_{2n} = n, \quad \lambda_{2n-1} = n - e^{-\varepsilon n}, \qquad n \geqslant 1, \qquad \varepsilon > 0.$$

Подсчитаем S_Λ. Пусть $\delta \in (0, 1/3)$. Имеем:

$$\left|q_\Lambda^{2n}(\lambda_{2n},\delta)\right| \leqslant \frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}} = \frac{e^{-\varepsilon n}}{3\delta(n-e^{-\varepsilon n})}.$$

Следовательно,

$$S_\Lambda(\delta) = \varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^n(\lambda_n,\delta)|}{\lambda_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} n^{-1}\ln\frac{e^{-\varepsilon n}}{3\delta(n-e^{-\varepsilon n})} = -\varepsilon. \tag{1.1.6}$$

Таким образом, величина $S_\Lambda \leqslant -\varepsilon$. Она отрицательна и характеризует расстояние между соседними точками λ_{2n} и λ_{2n-1}, которое стремится к нулю со скоростью $e^{-\varepsilon n}$. Отметим, что стремления к нулю расстояния между соседними точками недостаточно для отрицательности числа S_Λ, что и показывает следующий пример.

3. Пусть

$$\lambda_{2n} = n, \qquad \lambda_{2n-1} = n - e^{-\varepsilon(n)n}, \qquad n \geqslant 1,$$

где $\varepsilon(n) \to 0, \quad e^{-\varepsilon(n)n} \to 0, \quad n \to \infty$ (например, $\varepsilon(n) = 1/\sqrt{n}$). Имеем:

$$\ln\left|q_\Lambda^{2n}(\lambda_{2n},\delta)\right| = \ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}} + \sum_{\lambda_{2k}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})}\ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2k}}{3\delta\lambda_{2k}} +$$

$$+ \sum_{\lambda_{2k-1}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n}),k\neq n}\ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2k-1}}{3\delta\lambda_{2k-1}} + \sum_{\lambda_{2k}\in(\lambda_{2n},\lambda_{2n}+\delta\lambda_{2n})}\ln\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2k}} +$$

$$\sum_{\lambda_{2k-1}\in(\lambda_{2n},\lambda_{2n}+\delta\lambda_{2n})}\ln\frac{\lambda_{2k-1}-\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2k-1}}.$$

Все слагаемые справа в этом равенстве кроме первого после деления их на λ_{2n} имеют оценку снизу, аналогичную (1.1.4) (где $h \geqslant 1/2$ для достаточно больших n). Поэтому

$$\frac{\ln\left|q_\Lambda^{2n}(\lambda_{2n},\delta)\right|}{\lambda_{2n}} \geqslant \frac{1}{\lambda_{2n}}\ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}} + a\delta\ln b, \quad a, b > 0.$$

Точно также верно неравенство

$$\frac{\ln\left|q_\Lambda^{2n-1}\left(\lambda_{2n-1},\delta\right)\right|}{\lambda_{2n-1}} \geqslant \frac{1}{\lambda_{2n-1}}\ln\frac{\lambda_{2n-1}-\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2n}} + a\delta\ln\mathrm{b}.$$

Таким образом, как в (1.1.5) и (1.1.6) получаем:

$$S_\Lambda \geqslant \varliminf_{n\to\infty} -\varepsilon(n) = 0,$$

то есть $S_\Lambda = 0$.

Равенство $S_\Lambda = 0$ означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Более точно с характером данной отделимости можно ознакомиться, например, в работах [4] (лемма 3.1) и [10] (гл. II, лемма 4.2).

Прежде всего, установим необходимые взаимосвязи между введёнными характеристиками последовательности Λ.

Лемма 1.1.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность комплексных чисел. Тогда, если $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, то $m(\Lambda) < +\infty$. При условии $S_\Lambda > -\infty$ верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Пусть $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда найдётся число b такое, что для всех $r > 0$ будет выполнено $n(r,\Lambda) \leqslant br$. В частности,

$$n_k \leqslant \sum_{|\lambda_l|\leqslant|\lambda_k|} n_l = n\left(\lambda_k,\Lambda\right) \leqslant b|\lambda_k|.$$

Отсюда следует требуемое. Теперь предположим, что $S_\Lambda > -\infty$ и $m(\Lambda) < +\infty$. Покажем, что $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Пусть $\delta \in (0,1/3)$ и $\lambda_k \in B\left(z,\delta|z|\right)$. Тогда

$$|z| < \frac{|\lambda_k|}{1-\delta} < \frac{3\left|\lambda_k\right|}{2}, \qquad |z| > \frac{|\lambda_k|}{1+\delta} > \frac{3\left|\lambda_k\right|}{4}.$$

Тогда $B\left(z,\delta|z|\right) \subset B\left(\lambda_k, 3\delta\left|\lambda_k\right|\right)$, откуда

$$M_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{|z|\to\infty}\frac{n_\Lambda(z,\delta)}{|z|} \leqslant \frac{4}{3}\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{|z|\to\infty}\frac{n_\Lambda\left(\lambda_k,3\delta\right)}{|\lambda_k|}. \tag{1.1.7}$$

Так как $S_\Lambda > -\infty$, то найдутся $c > 0$ и $\delta_0 \in (0,1/3)$ такие, что

$$\ln\left|q_\Lambda^k\left(\lambda_k,\delta\right)\right| \geqslant -c\left|\lambda_k\right|, \qquad k \geqslant k(\delta), \quad \delta \in \left(0,\delta_0\right).$$

По определению величины $q_\Lambda^k\left(\lambda_k,\delta\right)$ имеем:

$$-c\left|\lambda_k\right| \leqslant \ln\left|q_\Lambda^k\left(\lambda_k,\delta\right)\right| \leqslant -\left(n_\Lambda\left(\lambda_k,\delta\right) - n_k\right)\ln 3, \qquad k \geqslant k(\delta), \quad \delta \in \left(0,\delta_0\right).$$

Отсюда получаем: $M_\Lambda < +\infty$. Тогда по лемме 2.1 из работы [5] верно неравенство $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Лемма доказана.

1.2. Оценки на мероморфную функцию

Для того, чтобы построить систему функционалов, биортогональную к системе экспоненциальных мономов в соответствующих пространствах (см. гл. 2), необходимо сперва получить оценки сверху и снизу на модули некоторых функций специального вида. Для начала получим оценки на специальную мероморфную функцию.

Пусть $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Рассмотрим функцию из книги [37], формула (9.5.10)

$$g_\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right)^{n_k} \exp\left(\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right).$$

Лемма 1.2.1. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда существуют положительные константы A, B, M_1, b такие, что для функции*

$$g_\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right)^{n_k} \exp\left(\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right)$$

справедлива оценка сверху

$$\ln|g_\Lambda(z)| \leqslant 2B\,x\sigma_\Lambda(|z|) + 2M_1 b\,|z| + ABb\,x,$$

$$\mathrm{z} \in \mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}, \quad z = x + iy.$$

Доказательство. Поскольку последовательность Λ конечной верхней плотности и почти вещественная, то функция $g_\Lambda(z)$ является аналитической в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, имеет нуль в каждой точке λ_k кратности n_k и не имеет других нулей.

Доказательство основано на лемме 9.5.9 в книге [37]. Представим g_Λ в виде $g_\Lambda(z) = g_1(z)g_2(z)$, где

$$g_1(z) = \prod_{|\lambda_k|<2|z|} \left(\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right)^{n_k} \exp\left(\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right),$$

$$g_2(z) = \prod_{|\lambda_k|\geqslant 2|z|} \left(\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right)^{n_k} \exp\left(\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right).$$

Если $z \in \mathbb{C}_+$, то, поскольку $|z+\lambda_k| \geqslant \operatorname{Re}\lambda_k$, имеем:

$$1 \leqslant \left|\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right| \leqslant 1 + \frac{2\,|\lambda_k|}{|z+\lambda_k|} \leqslant 1 + \frac{2\,|\lambda_k|}{|\lambda_k|\cos\theta_k} = 1 + \frac{2}{\cos\theta_k}.$$

Так как $\theta_k \to 0,\ k \to \infty$, то найдётся $M > 0$, так что для любого $k \geqslant 1$ будет верно неравенство $\cos\theta_k \geqslant M$. Тогда существует некоторое число $M_1 > 1$ такое что при всех $z \in \mathbb{C}_+$

$$\left|\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right| \leqslant M_1.$$

Имеем

$$\ln|g_1(z)| = \sum_{|\lambda_k|<2|z|} n_k \ln\left|\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right| + 2\sum_{|\lambda_k|<2|z|} n_k \mathrm{Re}\frac{z}{\lambda_k} \leqslant$$

$$\leqslant M_1 n\left(2|z|,\ \Lambda\right) + 2\sum_{|\lambda_k|<2|z|} \frac{n_k}{|\lambda_k|}\mathrm{Re}\,\left(ze^{-i\theta_k}\right).$$

Так как последовательность Λ почти вещественная, то, если $z \in \mathbb{C}_+$, то найдется константа $B > 0$, что

$$\mathrm{Re}\left(ze^{-i\theta_k}\right) \leqslant B\mathrm{Re}\,z. \tag{1.2.1}$$

Поскольку $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, то, следовательно, $n(r,\Lambda) \leqslant br,\ r > 0$, для некоторого числа $b > 0$. Таким образом,

$$\ln|g_1(z)| \leqslant 2bM_1|z| + 2B\,x\sigma\left(2|z|,\Lambda\right), \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad z = x+iy.$$

Имеем:

$$\sigma_\Lambda(2r) \leqslant \sigma_\Lambda(r) + \sum_{r\leqslant|\lambda_k|<2r} \frac{n_k\,|\cos\theta_k|}{|\lambda_k|} \leqslant \sigma_\Lambda(r) + \frac{n(2r,\Lambda)}{r}, \quad r > 0,$$

$$\sigma_\Lambda(2r) \leqslant \sigma_\Lambda(r) + 2b, \qquad r > 0. \tag{1.2.2}$$

Тогда

$$\ln|g_1(z)| \leqslant 2B\,x\left(\sigma_\Lambda\left(|z|\right) + 2b\right) + 2M_1 b\,|z|, \qquad z \in \mathbb{C}_+. \tag{1.2.3}$$

По лемме 9.5.6 в книге [37] существует $c > 0$ такое, что

$$\ln\left|\frac{1-w}{1+w}e^{2w}\right| \leqslant c|w|^2\mathrm{Re}\,w, \qquad |w| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно, полагая $w = z/\lambda_k$, учитывая, что $n(t,\Lambda) \leqslant bt,\ \ t > 0$, и соотношение (1.2.1), получаем:

$$\ln|g_2(z)| \leqslant c\sum_{|\lambda_k|\geqslant 2|z|} \left|\frac{z}{\lambda_k}\right|^2 \mathrm{Re}\,\frac{z}{\lambda_k} \leqslant Bc\,x\sum_{|\lambda_k|\geqslant 2|z|} \frac{|z|^2}{|\lambda_k|^3} = Bcx\int\limits_{2|z|}^{+\infty} \frac{|z|^2}{t^3}\,dn(t,\Lambda) \leqslant$$

$$\leqslant Bc\,x \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{|z|^2}{t^3}n(t,\Lambda)\right) + 3Bc\,x\int\limits_{2|z|}^{+\infty}\frac{|z|^2}{t^4}n(t,\Lambda)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 3Bcb\,x\int\limits_{2|z|}^{+\infty}\frac{|z|^2}{t^3}\,dt = \frac{3}{2}Bcb\,x\frac{|z|^2}{(2|z|)^2} = \frac{3}{8}Bcb\,x, \qquad z\in\mathbb{C}_+.$$

Отсюда и из (1.2.3) получаем требуемое неравенство

$$\ln|g_\Lambda(z)| \leqslant 2B\,x\sigma_\Lambda(|z|) + 2M_1b\,|z| + ABb\,x, \qquad z\in\mathbb{C}_+, \quad z = x+iy.$$

Лемма доказана.

Для получения необходимых оценок снизу на функцию g_Λ на окружностях вида $S(\lambda_k,\gamma_k)$ необходимо потребовать отделимость точек λ_k друг от друга. Условии отделимости точек λ_k обеспечивает индекс конденсации S_Λ последовательности Λ.

Поскольку индекс конденсации S_Λ является частным случаем группового индекса конденсации, который введен в работе [6], нам понадобится результат из теоремы 5.1 работы [5], который мы сформулируем в частном случае, когда каждая группа состоит из одной точки.

Напомним, что целая функция f называется целой функцией экспоненциального типа, если существуют числа $A, B > 0$ такие, что выполнено неравенство

$$\ln|f(z)| \leqslant A|z| + B, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Лемма А. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — её кратное нулевое множество, $S_\Lambda > -\infty$. Тогда существуют положительные числа γ_k, $k\geqslant 1$, такие, что*

1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\gamma_k/|\lambda_k| \leqslant \overline{n}(\Lambda)$;

2) *круги $B(\lambda_k,\gamma_k)$, $k\geqslant 1$, попарно не пересекаются;*

3) *для каждого $\theta\in(0,1)$ существуют числа $\beta,\beta_1 > 0$ такие, что*

$$\ln|f(z)| \geqslant -\beta_1 - \beta|z|, \quad z\in S(\lambda_k,\theta\gamma_k), \quad k\geqslant 1.$$

Следующая лемма устанавливает подходящие оценки снизу на функцию g_Λ (ср. с леммой 4 работы [42]).

Лемма 1.2.2. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *является почти вещественной и такой, что* $S_\Lambda > -\infty$ *и* $m(\Lambda) < +\infty$. *Тогда существуют числа* $\gamma_k > 0,\ k \geqslant 1$, *такие, что*

1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \gamma_k / |\lambda_k| \leqslant \overline{n}(\Lambda)$;

2) *круги* $B(\lambda_k, \gamma_k)\,,\ k \geqslant 1$, *попарно не пересекаются;*

3) *для каждого достаточно малого* $\theta > 0$ *существуют числа* $B_1, B_2 > 0$ *такие, что*

$$\ln|g_\Lambda(z)| \geqslant 2B\, x\sigma_\Lambda(|z|) - B_2 - B_1 x, \qquad z \in S(\lambda_k, \theta\gamma_k)\,,\quad k \geqslant 1$$

Доказательство. Следуем схеме доказательства леммы 4 работы [42]. Имеем $|g_\Lambda| = |f/h|$, где

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{{\lambda_k}^2}\right)^{n_k},$$

$$h(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right)^{2n_k} \exp\left(-\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right).$$

Так как по лемме 1.1.1 верно неравенство $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, то согласно теореме Линделёфа ([23], гл. I, §11, теорема 15), f — целая функция экспоненциального типа. Ее нулевое множество Λ_0 является объединением множеств $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $-\Lambda = \{-\lambda_k, n_k\}$. Точки λ_k (соотв. $-\lambda_k$) не попадают в круги $B(-\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ (соотв. $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$), $\delta \in (0,1)$. Тогда из определения индекса конденсации и условий леммы следует, что $S_{\Lambda_0} = S_\Lambda > -\infty$. Таким образом, f удовлетворяет условиям леммы A.

Учитывая, что $\lambda_k \neq 0$ и $n(r,\Lambda) \leqslant br,\ r > 0$, имеем:

$$\ln\left|\prod_{|\lambda_k|<2|z|} \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right)^{2n_k}\right| \leqslant \sum_{|\lambda_k|<2|z|} 2n_k \ln\left(1 + \frac{|z|}{|\lambda_k|}\right) =$$

$$= \int\limits_0^{2|z|} \ln\left(1 + \frac{|z|}{r}\right) dn(r,\Lambda) =$$

$$= n\,(2|z|,\Lambda)\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+|z|\int\limits_0^{2|z|}\frac{n(r,\Lambda)}{r\,(r+|z|)}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant 2b|z| + \int\limits_0^{2|z|} b\,dr \leqslant 4b|z|. \tag{1.2.4}$$

По лемме 3.1 из книги [27], гл. I,

$$\ln\left|(1+w)e^{-w}\right| \leqslant 2|w|^2, \qquad |w| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\ln\left|\prod_{|\lambda_k|\geqslant 2|z|}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right)^{2n_k}\exp\left(-\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right)\right| \leqslant \sum_{|\lambda_k|\geqslant 2|z|} 2n_k\left(\frac{|z|}{|\lambda_k|}\right)^2 =$$

$$= 2\int\limits_{2|z|}^{+\infty}\left(\frac{|z|}{r}\right)^2 dn(r,\Lambda) \leqslant 4|z|^2\int\limits_{2|z|}^{+\infty}\frac{n(r,\Lambda)}{r^3}\,dr \leqslant 4b|z|^2\int\limits_{2|z|}^{+\infty}\frac{dr}{r^2} \leqslant 2b|z|.$$

Отсюда с учетом (1.2.4) и леммы A для всех $k \geqslant 1$ получаем:

$$\ln|g_\Lambda(z)| \geqslant 2\sum_{|\lambda_k|<2|z|} -n_k\mathrm{Re}\,\frac{z}{\lambda_k} - B_1 - B_0|z| \geqslant$$

$$\geqslant 2Bx\sigma_\Lambda\,(2|z|) - B_2 - B_1|z| \geqslant 2Bx\sigma_\Lambda\,(|z|) - B_2 - B_1|z|,\ \ z \in S\,(\lambda_k, \theta\gamma_k)\,.$$

В силу пункта 1) леммы A, а также в силу почти вещественности последовательности Λ, для любого достаточно малого $\theta > 0$ найдется $c > 0$ такое, что

$$-|z| \geqslant -c\,x, \qquad z \in S\,(\lambda_k, \theta\gamma_k)\,, \quad k \geqslant 1.$$

Лемма доказана.

1.3. Функции, аналитические в полуплоскости

Пусть $\xi > 0$. Обозначим

$$C_\xi = \{z : x = \mathrm{Re} z > -\xi\}$$

Следующая лемма гарантирует существование аналитической функции, которая не обращается в нуль ни в одной точке полуплоскости вида C_ξ. Данная функция будет использована в главе 2 для построения системы функций с подходящими оценками на рост. Эта система функций, в свою очередь, найдёт своё применение для построения системы биортогональных функционалов к системе экспоненциальных мономов в необходимых пространствах.

Прежде чем сформулировать лемму, необходимо будет ввести в рассмотрение некоторые классы выпуклых функций.

Пусть $\rho > 0$. Символом Ω_ρ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant \rho|t|$ при $t \leqslant 0$, и

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\omega(t)}{t} = +\infty. \tag{1.3.1}$$

При этих условиях $\omega(t)$ — это неубывающая функция на луче $t > 0$. Подмножество $\Omega_{\Lambda,\rho}$, для которого выполнено неравенство

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t))}{t^2}\, dt < +\infty, \tag{1.3.2}$$

обозначим через $\Omega_{\Lambda,\rho}$.

Более подробно об этих классах функций будет сказано в главе 2, в которой данные семейства выпуклых функций будут использованы при рассмотрении весовых функциональных пространств.

Лемма 1.3.1. *Пусть $\rho > 0$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда существует аналитическая в полуплоскости $C_{3\rho} = \{z : x = \mathrm{Re}\, z > -3\rho\}$ функция $h_{\omega,\rho}$, не обращающаяся в нуль в $\mathbb{C}$, и число $A_0 > 0$ такие, что*

$$\ln|h_{\omega,\rho}(z)| \leqslant -\omega(2B\sigma_\Lambda(|z|)), \quad z \in C_{3\rho}, \tag{1.3.3}$$

$$\ln|h_{\omega,\rho}(z)| \geqslant -A_0(x + 3\rho), \qquad z \in C_{2\rho}. \tag{1.3.4}$$

Доказательство. Следуя [53] (Lemma 4.2) положим

$$u(z) = \frac{x+3\rho}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(2B\sigma_\Lambda(|t|))}{(x+3\rho)^2 + (y-t)^2}\, dt.$$

В силу (1.3.2) функция $u(z)$ определена в полуплоскости $C_{3\rho}$. Она является положительной и гармонической в этой полуплоскости. Пусть $v(z)$ — гармоническая функция, сопряженная к $u(z)$. Тогда функция

$$h_{\omega,\rho}(z) = \exp(-2u(z) - 2iv(z))$$

является аналитической в полуплоскости $C_{3\rho}$ и не имеет там нулей.

Найдем оценку сверху на функцию $|h(z)|$. Как и в [53] имеем:

$$\ln|h_{\omega,\rho}(z)| = -2u(z) \leqslant -\frac{x+3\rho}{\pi} \int\limits_{|t|\geqslant|z+3\rho|} \frac{\omega(2B\sigma_\Lambda(|t|))}{(x+3\rho)^2 + (y-t)^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant -\omega(2B\sigma_\Lambda(|z+3\rho|)) \leqslant -\omega(2B\sigma_\Lambda(|z|)), \quad z \in C_{3\rho}.$$

Найдем теперь оценку снизу. С учетом (1.3.2) имеем:

$$-\ln|h_{\omega,\rho}(z)| = 2u(z) = 2\frac{x+3\rho}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(2B\sigma_\Lambda(|t|))}{(x+3\rho)^2 + (y-t)^2}\,dt =$$

$$= 2\frac{x+3\rho}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{(x+3\rho)^2 + (y-t)^2} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(|t|))}{1+t^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant A_1(x+3\rho) \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1+t^2}{(x+3\rho)^2 + (y-t)^2}.$$

Пусть $z \in C_{2\rho}$. Тогда, если $x+3\rho \leqslant 1$, мы получаем

$$(x+3\rho) \sup_{|t|\leqslant 1} \frac{1+t^2}{(x+3\rho)^2 + (y-t)^2} \leqslant \frac{2}{x+3\rho} \leqslant \frac{2}{\rho}.$$

Если же $x+3\rho > 1$, то имеем следующую оценку

$$\sup_{1\leqslant|t|\leqslant x+3\rho} \frac{1+t^2}{(x+3\rho)^2 + (y-t)^2} \leqslant \frac{2t^2}{(x+3\rho)^2} \leqslant 2.$$

Наконец,

$$\sup_{|t|\geqslant x+3\rho} \frac{1+t^2}{(x+3\rho)^2 + (y-t)^2} \leqslant \frac{2}{(yt^{-1}-1)^2} = 0.$$

Таким образом,

$$\ln|h_{\omega,\rho}(z)| \geqslant -A_0(x+3\rho), \qquad z \in C_{2\rho}.$$

Лемма доказана.

Глава 2

Биортогональная система функционалов

Пусть X — линейное топологическое пространство, X^* — пространство линейных непрерывных функционалов на нём. Тогда, если система $\{\varphi_k\} \subset X$, то соответствующая ей система $\{f_k\} \subset X^*$ называется биортогональной к системе $\{\varphi_k\}$, если

$$f_j(\varphi_k) = \delta_{k,j},$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера.

Исторически первым было понятие биортогональной системы функций, что можно обнаружить в работах А. Пэля [49], С. С. Левина [46], Н. К. Бари [1], А. М. Седлецкого [30] и др. В этих работах можно встретить понятие биортогональной системы функций на отрезке: система функций $\{f_k(x)\}$ называется биортогональной к системе функций $\{g_k(x)\}$ на отрезке $[a;b]$, если

$$\int\limits_a^b f_k(x)g_k(x)dx = \delta_{k,j}.$$

Позднее в работах А. Ф. Леонтьева [25]-[27] было дано определение биортогональной системы функций к системе экспоненциальных мономов в выпуклой области комплексной плоскости для случая простых и кратных показателей. Система функций $\{\varphi_k(z)\}, \varphi_k(\infty) = 0$, аналитических во внешности некоторой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ называется биортогональной к системе $\{e^{\lambda_k z}\}$ в области D, если

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \varphi_k(z)e^{\lambda_j z}dz = \delta_{k,j},$$

где C — произвольный контур, охватывающий область D. В работе [25] устанавливается необходимое и достаточное условие для существования такой биортогональной системы, а так же приводятся явные формулы для функций $\{\varphi_k(z)\}$. Для случая кратной системы экспонент (то есть системы экспоненциальных мономов) в той же работе также приводятся явные формулы. В случае кратной последовательности показателей система $\varphi_{k,s}(z)$ биортогональна к системе

$\mathcal{E}(\Lambda)$, если

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\varphi_{k,s}(z)z^{p}e^{\lambda_{j}z}dz=\begin{cases}1, & k=j, s=p;\\ 0, & k=j, s\neq p;\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Развитие функционального анализа в 20-м веке привело к получению большого количества теорем типа Рисса-Фишера, идея которых заключалась в том, что для многих часто встречающихся в анализе функциональных пространств линейные непрерывные функционалы на них допускают интегральное представление. Данная точка зрения с учётом следствий из теоремы Хана-Банаха привела к понятию биортогональной системы функционалов, как к обобщению приведённых выше формулировок определений биортогональности.

Цель данной главы заключается фактически в построении системы биортогональных функционалов к системе экспоненциальных мономов (даже более того — системы, удовлетворяющей дополнительным условиям на рост) в соответствующих весовых пространствах. Результаты этой главы будут использованы в главе 3 для получения формул для коэффициентов ряда по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$.

2.1. Весовые пространства L_p^ω, C^ω

Данный параграф будет посвящён основным свойствам весовых пространств L_p^ω, C^ω.

В предыдущей главе (§1.3) было дано определение семейств выпуклых функций Ω_ρ и $\Omega_{\Lambda,\rho}$.

Пусть $\omega\in\Omega_\rho$. Рассмотрим весовые пространства комплекснозначных интегрируемых функций на вещественной прямой ($p\geqslant 1$)

$$L_p^\omega=\left\{f:\ ||f||_{p,\mathbb{R}}^{\omega}:=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(t\right)e^{-\omega(t)}\right|^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}$$

и непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^\omega=\left\{f:\ ||f||_{C}^{\omega}:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f\left(t\right)e^{-\omega(t)}\right|<+\infty\right\}.$$

Возникает естественный вопрос о полноте введённых пространств. Ответ даётся следующей леммой.

Лемма 2.1.1. *Пусть $\omega(t) \in \Omega_\rho$ — неотрицательная выпуклая функция. Тогда L_p^ω и C^ω являются полными нормированными пространствами, т.е. банаховыми.*

Доказательство. Сперва проведём доказательство для пространства L_p^ω. Рассмотрим ограниченный промежуток вида $(a;b]$ и пространство

$$L_p^\omega(a;b) = \left\{ f: \ \left(\int\limits_a^b \left| f\left(t\right) e^{-\omega(t)} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Норму в пространстве L_p^ω будет обозначать как $||\cdot||_{p,\mathbb{R}}^\omega$, а в пространстве $L_p^\omega(a;b)$ как $||\cdot||_{p,a,b}^\omega$.

Пусть $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная в L_p^ω последовательность. Разобьём доказательство на несколько пунктов.

1. Докажем, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \leqslant b)$ из этой последовательности можно выделить сходящуюся почти всюду на множестве $(a;b]$ подпоследовательность.

В силу фундаментальности существует подпоследовательность натуральных чисел n_k такая, что будет справедливо неравенство

$$||f_n(t) - f_{n_k}(t)||_{p,a,b}^\omega < \frac{1}{2^k}, \quad n \geqslant n_k.$$

Тогда, как следует из неравенства Гёльдера,

$$||f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)||_{1,a,b}^\omega \leqslant C||f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)||_{p,a,b}^\omega < \frac{C}{2^k}, \quad n \geqslant n_k,$$

где постоянная C зависит только от p, ω и a, b. Рассмотрим ряд

$$F(x) = |f_{n_1}(t)| + \sum_{k=1}^\infty |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|.$$

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F\left(t\right) e^{-\omega(t)} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f_{n_1}(t)\right| e^{-\omega(t)} dt + \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) \right| e^{-\omega(t)} dt =$$

$$= ||f_{n_1}(t)||^{\omega}_{1,a,b} + \sum_{k=1}^{\infty} ||f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)||^{\omega}_{1,a,b} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 ||f_{n_1}(t)||^{\omega}_{p,a,b} + C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty,$$

где число C_1 зависит только от p и ω. Тогда, поскольку вес ω является неотрицательной функцией, то функция $F(t)$ является конечной почти всюду на $(a;b]$ (теорема 15.2 (3), [2]). Это означает, что ряд

$$f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t))$$

абсолютно сходится, а следовательно, сходится почти всюду на $(a;b]$ к некоторой конечной функции $f_{a,b}(t)$.

2. Поскольку лебегова мера на $\mathbb{R}$ является сигма-конечной, то $\mathbb{R}$ представляется в виде счётного дизъюнктного объединения множеств вида $(a;b]$:

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} (a_m; b_m].$$

Так как для любой функции $g(t) \in L^{\omega}_p$ и любого натурального m справедливо неравенство

$$||g(t)||^{\omega}_{p,a_m,b_m} \leqslant ||g(t)||^{\omega}_{p,\mathbb{R}},$$

то, как следует из пункта 1, существует подпоследовательность $f_{n_k}(t)$, сходящая почти всюду на $(a_m; b_m]$ к конечной функции $f_{a_m,b_m}(t)$. Тогда, полагая $f(t) = f_{a_m,b_m}(t)$, $t \in (a_m; b_m]$, $m = 1, 2, ...$, получим, что доказано следующее: из любой фундаментальной в L^{ω}_p последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на множестве $\mathbb{R}$ к некоторой конечной функции $f(t)$.

3. Теперь докажем полноту пространства L^{ω}_p. Согласно пунктам 1-2, из всякой фундаментальной в L^{ω}_p последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся почти всюду на $\mathbb{R}$ к некоторой конечной функции $f(t)$. Доопределим данную функцию нулём в тех точках прямой, где сходимости нет (тогда она будет измерима на $\mathbb{R}$). Покажем, что в этом случае последовательность $\{f_n(t)\}$ сходится к функции $f(t)$ и $f(t) \in L^{\omega}_p$.

Поскольку почти всюду на $\mathbb{R}$

$$\left(|f_{n_k}(t)|\,e^{-\omega(t)}\right)^p \to \left(|f(t)|\,e^{-\omega(t)}\right)^p, \quad k\to\infty,$$

то теореме 16.2 из [2] имеем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)e^{-\omega(t)}\right|^p dt \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f_{n_k}(t)e^{-\omega(t)}\right|^p dt.$$

Тогда по теореме Фату (см., например, [3], гл. V, п.5, теорема 8), получаем, что $f(t)\in L_p^\omega$.

В силу фундаментальности последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$, имеем, что

$$||f_s(t)-f_q(t)||_{p,\mathbb{R}}^\omega < \varepsilon, \quad s,q\geqslant K_0\in\mathbb{N}, \ \varepsilon>0.$$

При этом почти всюду на $\mathbb{R}$

$$\left(|f_{n_k}(t)-f_{n_l}(t)|\,e^{-\omega(t)}\right)^p \to \left(|f_{n_k}(t)-f(t)|\,e^{-\omega(t)}\right)^p, \quad l\to\infty.$$

Тогда, снова применяя теорему 16.2 из [2], получим, что

$$\left(||f_{n_k}(t)-f(t)||_{p,\mathbb{R}}^\omega\right)^p \leqslant \varliminf_{l\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|(f_{n_k}(t)-f_{n_l}(t))e^{-\omega(t)}\right|^p dt =$$

$$= \varliminf_{l\to\infty} \left(||f_{n_k}(t)-f_{n_l}(t)||_{p,\mathbb{R}}^\omega\right)^p < \varepsilon, \quad n_k>K_0.$$

Тогда при всех $n>K_0$ имеем:

$$||f_n(t)-f(t)||_{p,\mathbb{R}}^\omega \leqslant ||f_n(t)-f_{n_k}(t)||_{p,\mathbb{R}}^\omega + ||f_{n_k}(t)-f(t)||_{p,\mathbb{R}}^\omega < 2\varepsilon,$$

что означает сходимость последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ в пространстве L_p^ω к функции $f(t)$.

Покажем, что пространство C^ω также является полным. Пусть $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная в C^ω последовательность. Поскольку функция ω является выпуклой на выпуклом множестве $\mathbb{R}$, то она непрерывна на $\mathbb{R}$ (см., например, [24], гл. II, §10, теорема 10.2). Кроме того, функция $e^{-\omega(t)}$ будет также непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ (так как $|e^{-\omega(t)}|<1,\ t\in\mathbb{R}$). Тогда последовательность $\{f_n(t)e^{-\omega(t)}\}_{n=1}^\infty$ является фундаментальной и в пространстве $C(\mathbb{R})$ (непрерывных функций на всей вещественной прямой с обычной супремальной нормой).

Так как последнее пространство является полным, то существует непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $g(t)$ такая, что

$$||f_n(t)e^{-\omega(t)} - g(t)||_C := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)e^{-\omega(t)} - g(t)| \to 0,\ n\to\infty.$$

Здесь символом $||\cdot||_C$ обозначена норма в пространстве $C(\mathbb{R})$.

Положим $f(t) = g(t)\,e^{\omega(t)}$. Тогда

$$||f_n(t) - f(t)||_C^\omega = \sup_{t\in\mathbb{R}} |(f_n(t) - f(t))e^{-\omega(t)}| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)e^{-\omega(t)} - g(t)| \to 0,\ n\to\infty,$$

то есть последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ сходится в пространстве C^ω к функции $f(t)$. Кроме того, поскольку функция $g(t)$ принадлежит $C(\mathbb{R})$, то

$$||f(t)||_C^\omega = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)e^{-\omega(t)}| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| < +\infty.$$

Это означает, что $f\in C^\omega$. Таким образом, пространство C^ω является полным. Лемма полностью доказана.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left\{t^n e^{\lambda_k t}\right\}_{k=1,\,n=0}^{\infty,\,n_k-1}.$$

В контексте рассматриваемой задачи возникает естественный вопрос: при каких условиях система $\mathcal{E}(\Lambda)$ принадлежит введённым выше функциональным пространствам? Ответ на этот вопрос даётся следующей леммой.

Лемма 2.1.2. *Пусть $\omega(t)$ — неотрицательная выпуклая функция, при этом $\omega(0) = 0$, последовательность Λ является почти вещественной. Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ принадлежит пространству L_p^ω (C^ω) тогда и только тогда, когда выполнено соотношение* (1.3.1).

Доказательство. Покажем достаточность. Предположим, что для $\omega(t)$ выполнено соотношение (1.3.1). Это означает, что для любого $M > 0$ существует $t(M) > 0$ такое, что функция $\omega(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(t) > Mt,\quad t\geqslant t(M).$$

Рассмотрим функцию $\varphi_{k,n}(t) = t^n e^{\lambda_k t}$, $n = \overline{0, n_k - 1}, k\geqslant 1$. Покажем, что любая такая функция принадлежит пространству L_p^ω. Без ограничения общности можно считать, что $M > \operatorname{Re}\lambda_k$. Тогда имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(|t|^n |e^{\lambda_k t}| e^{-\omega(t)}\right)^p dt = \left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{t(M)} + \int\limits_{t(M)}^{+\infty}\right) \left(|t|^n |e^{\lambda_k t}| e^{-\omega(t)}\right)^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} |t|^{np} e^{-p|t|\operatorname{Re}\lambda_k} dt + A(k,n,p,M) + \int\limits_{t(M)}^{+\infty} |t|^{np} e^{(\operatorname{Re}\lambda_k - M)pt} dt.$$

Поскольку n, k, p и функция ω предполагаются фиксированными, $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_k - M < 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(|t|^n |e^{\lambda_k t}| e^{-\omega(t)}\right)^p dt < +\infty.$$

Это означает, что $\varphi_{k,n}(t) \in L_p^\omega$. Аналогичная оценка верна и для пространства C^ω:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\varphi_{k,n}(t) e^{-\omega(t)}\right| \leqslant \max\{S_1, S_2, S_3\} < +\infty,$$

где

$$S_1 = \sup_{t\leqslant 0} \left(|t|^n e^{-|t|\operatorname{Re}\lambda_k}\right),$$

$$S_2 = \sup_{0<t<t(M)} \left(|t|^n |e^{t\operatorname{Re}\lambda_k} e^{-\omega(t)}\right),$$

$$S_3 = \sup_{t\geqslant t(M)} \left(|t|^n e^{(\operatorname{Re}\lambda_k - M)t}\right).$$

Достаточность доказана. Необходимость докажем от противного. Предположим, что любая функция $\varphi_{k,n}(t) = t^n e^{\lambda_k t},\ n = \overline{0, n_k - 1}, k \geqslant 1$ принадлежит L_p^ω (или C^ω), но не выполнено соотношение (1.3.1). Тогда существует $M > 0$ такое, что $\omega(t) \leqslant Mt$ при $t > 0$. Кроме того, в силу неограниченности и почти вещественности последовательности Λ, найдётся $k_0 \geqslant 1$ такое, что $\operatorname{Re}\lambda_{k_0} > M$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left(|t|^n |e^{\lambda_{k_0} t}| e^{-\omega(t)}\right)^p dt \geqslant \int\limits_{0}^{+\infty} |t|^{np} e^{(\operatorname{Re}\lambda_{k_0} - M)pt} dt = +\infty,$$

$$\sup_{t\geqslant t(M)} \left(|t|^n |e^{\lambda_{k_0} t}| e^{-\omega(t)}\right) \geqslant \sup_{t\geqslant t(M)} \left(|t|^n e^{(\operatorname{Re}\lambda_{k_0} - M)t}\right) = +\infty,$$

что противоречит сделанному предположению. Лемма доказана.

2.2. Построение биортогональной системы функционалов

В данном параграфе будет построена биортогональная система функционалов к системе экспоненциальных мономов в пространствах L_p^ω.

Следуя работе [52], рассмотрим весовое пространство L_q^ω интегрируемых на вещественной прямой, определяемое как

$$L_q^\omega = \left\{ f:\ \|f\|_{q,\mathbb{R}}^\omega := \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t)\, e^{\omega(t)} \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \right\}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Согласно [52], функционал вида

$$T(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t) f(t)\, dt, \tag{2.2.1}$$

является линейным и непрерывным на пространстве L_p^ω, где $h \in L_q^\omega$. Действительно, так как

$$|T(f)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(t)||f(t)|\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(t) e^{\omega(t)}||f(t) e^{-\omega(t)}| dt,$$

то применяя неравенство Гёльдера, получим, что $|T(f)| \leqslant K \|f\|_{p,\mathbb{R}}^\omega,\ K > 0$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — кратная последовательность комплексных чисел и $\rho > 0$. Положим

$$\sigma_{\Lambda,\rho}(r) = \max \left\{ \sum_{\substack{|\lambda_k|<r,\\ \operatorname{Re}\lambda_k>0}} \operatorname{Re} \frac{n_k}{\lambda_k + \rho},\ \sum_{\substack{|\lambda_k|<r,\\ \operatorname{Re}\lambda_k<0}} -\operatorname{Re} \frac{n_k}{\lambda_k + \rho} \right\}.$$

Пусть $\omega \in \Omega_\rho$. Символом ω^* обозначим выпуклую функцию, сопряженную по Юнгу к функции ω [29], гл. III), т.е.

$$\omega^*(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (xt - \omega(t)).$$

Так как $\omega(t) \geqslant 0$ и $\omega(0) = 0$, то $\omega^*(x) \geqslant 0$ и $\omega^*(0) = 0$.

Следующая лемма устанавливает существование системы функций, с помощью которой строится биортогональная система функционалов к системе экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями. Кроме того, лемма даёт необходимые оценки на данную систему функций.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, и $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда существуют аналитические в полуплоскости $C_{3\rho}$ функции $G_{\omega,k,j}$ и положительные числа C_2, C_1, $\gamma_k > 0 (k \geqslant 1)$,, такие, что $\gamma_k / |\lambda_k| \leqslant 1/4$,*

$$|G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant C_2 \beta_k \frac{e^{\omega^*(x)}}{1+y^2}, \quad z \in C_{3\rho}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1, \tag{2.2.2}$$

где $\ln \beta_k = (1-C)\, B\, |\lambda_k|\, \sigma_\Lambda\left(|\lambda_k|\right) + C_1 |\lambda_k|$, и имеют место равенства

$$G^{(j-1)}_{\omega,k,j}\left(\lambda_k\right) = 1, \qquad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1,$$

$$G^{(l)}_{\omega,k,j}\left(\lambda_k\right) = 0, \qquad l = \overline{0, n_k - 1}, \quad l \neq j-1, \quad k \geqslant 1,$$
$$G^{(l)}_{\omega,k,j}\left(\lambda_p\right) = 0, \qquad l = \overline{0, n_p - 1}, \quad p \geqslant 1, \quad p \neq k.$$

Доказательство. Следуем схеме доказательства леммы 3.2 работы [42]. Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_k + 3\rho, n_k\}$. Положим

$$g(z) = g_{\Lambda_1}(z + 3\rho).$$

В силу определения величины $\sigma_{\Lambda,\rho}$ имеют место оценки

$$\sigma_{\Lambda_1}\left(|z+3\rho|\right) \leqslant \sigma_{\Lambda,3\rho}\left(|z|\right) + \sum_{\substack{|\lambda_k+3\rho|<|z+3\rho| \\ |\lambda_k| \geqslant |z|}} \frac{n_k}{|\lambda_k + 3\rho|},$$

$$\sigma_{\Lambda_1}\left(|z+3\rho|\right) \geqslant \sigma_{\Lambda,3\rho}\left(|z|\right), \qquad z \in C_{3\rho}$$

Из выполнения условий $|\lambda_k + 3\rho| < |z + 3\rho|$ и $|\lambda_k| \geqslant |z|$ следует, что

$$|z + 3\rho| \geqslant |\lambda_k| \geqslant |z|.$$

Тогда существует некоторая константа $C > 0$, что

$$\sigma_{\Lambda_1}\left(|z+3\rho|\right) \leqslant \sigma_{\Lambda,3\rho}\left(|z|\right) + \sum_{|z+3\rho| \geqslant |\lambda_k| \geqslant |z|} \frac{n_k}{|\lambda_k + 3\rho|} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_{\Lambda,3\rho}(|z|) + \frac{1}{|z|}\left(n(|z+3\rho|,\Lambda) - n(|z|,\Lambda)\right) \leqslant \sigma_{\Lambda,3\rho}(|z|) + C.$$

По лемме 1.2.1

$$\ln|g(z)| \leqslant 2B(x+3\rho)\sigma_{\Lambda_1}(|z+3\rho|) + 2M_1 b|z+3\rho| + ABb(x+3\rho) \leqslant$$

$$\leqslant 2B(x+3\rho)\sigma_{\Lambda,3\rho}(|z|) + 2M_1 b|z+3\rho| + C_2(x+3\rho) \leqslant$$

$$\leqslant 2B(x+3\rho)\sigma_{\Lambda}(|z|) + 2M_1 b|z+3\rho| + C_2(x+3\rho), \qquad z \in C_{3\rho}. \qquad (2.2.3)$$

По условию $S_\Lambda > -\infty$ и $m(\Lambda) < +\infty$. Тогда по лемме 1.1.1 имеем: $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Поэтому для некоторого числа $b > 0$ верны неравенства

$$n \leqslant b\,|\mu_n|\,, \qquad n \geqslant 1,$$

Следовательно, для некоторого числа $a > 0$ имеет место неравенство

$$\sigma_\Lambda(t) \leqslant a + b\ln t, \quad t \geqslant 1. \qquad (2.2.4)$$

Отсюда с учетом (2.2.3) для некоторого числа $A_1 > 0$ получаем:

$$\ln|g(z)| \leqslant 2B\,x\sigma_\Lambda(|z|) + 6Bb\rho\ln|z| + 2M_1 b\,|z| + C_2 x + A_1, \qquad z \in C_{3\rho}. \quad (2.2.5)$$

По условию $S_\Lambda > -\infty$. Тогда, как нетрудно заметить, имеет место неравенство $S_{\Lambda_1} > -\infty$. В силу леммы 1.3.2 найдутся числа $B_1, B_2 > 0$ и γ_k, $k \geqslant 1$, такие, что $\gamma_k/\,|\lambda_k| \leqslant \frac{1}{4}$, круги $B(\lambda_k, \gamma_k)$ попарно не пересекаются, и верно неравенство

$$\ln|g_{\Lambda_1}(z)| \geqslant 2Bx\sigma_{\Lambda_1}(|z|) - B_2 - B_1 x, \qquad z \in S(\lambda_k + 3\rho, \gamma_k)\,, \quad k \geqslant 1$$

. Следовательно,

$$\ln|g(z)| \geqslant 2B(x+3\rho)\sigma_{\Lambda_1}(|z+3\rho|) - B_2 - B_1(x+3\rho) \geqslant$$

$$\geqslant 2Bx\sigma_{\Lambda,3\rho}(|z|) - B_2 - B_1(x+3\rho), \qquad z \in S(\lambda_k, \gamma_k)\,, \quad k \geqslant 1. \qquad (2.2.6)$$

Пусть $h_{\omega,\rho}$ — функция, существование которой гарантируется леммой 1.3.1. В силу (1.3.3) и (2.2.4) имеем:

$$\ln|g(z)| + \ln|h_{\omega,\rho}(z)| \leqslant 2B\,x\sigma_\Lambda(|z|) - \omega\left(2B\sigma_\Lambda(|z|)\right) +$$

$$+6Bb\rho\ln|z| + 2M_1 b\,|z| + C_2 x + A_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} (xt - \omega(t)) + 6Bb\rho \ln|z| + 2M_1 b\,|z| + C_2 x + A_1 =$$

$$= \omega^*(x) + 6Bb\rho \ln|z| + 2M_1 b|z| + C_2 x + A_1. \qquad (2.2.7)$$

Положим

$$G(z) = \frac{g(z) h_{\omega,\rho}(z) e^{-C_2 z}}{(1 + z + 3\rho)^{[6B\rho b]+3}},$$

где $[6B\rho b]$ — целая часть числа $6B\rho b$. Функция G обращается в нуль в точках λ_k с кратностью n_k. Поскольку круги $B\,(\lambda_k, \gamma_k)$ попарно не пересекаются, то для каждого $k \geqslant 1$ в окрестности замкнутого круга $\overline{B\,(\lambda_k, \gamma_k)}$ верно представление

$$\frac{1}{G(z)} = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{d_{k,j}}{(z - \lambda_k)^j} + g_k(z),$$

где g_k — аналитические функции и

$$d_{k,j} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_k, \gamma_k)} \frac{(z - \lambda_k)^{j-1}}{G(z)}\, dz.$$

Положим

$$G_{\omega,k,j}(z) = \frac{G(z)}{(j-1)!} \sum_{l=1}^{n_k+1-j} \frac{d_{k,j-1+l}}{(z - \lambda_k)^l}, \qquad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Покажем, что для функций $G_{\omega,k,j}$ выполнены равенства из утверждения данной леммы. Доказательство проведём по индукции. Предположим сперва, что $j = 1$, тогда

$$G_{\omega,k,1}(z) = G(z) \sum_{l=1}^{n_k} \frac{d_{k,l}}{(z - \lambda_k)^l}$$

В этом случае получаем, что $G^{(l)}_{\omega,k,1}(\lambda_m) = 0, m \neq k, l = 0, 1, ..., n_p - 1$. Следовательно $G_{\omega,k,1}(z)$ непрерывна в точке $z = \lambda_k$. Тогда

$$G_{\omega,k,1}(z) = G(z) \left[\frac{1}{G(z)} - g_k(z)\right] = 1 - G(z) g_k(z),\ z \in B\,(\lambda_k, \gamma_k)\,.$$

Тогда выполнены равенства $G_{\omega,k,1}(\lambda_k) = 1, G^{(l)}_{\omega,k,1}(\lambda_k) = 0$ при $l = 1, ..., n_k - 1$ и $G^{(l)}_{\omega,k,1}(\lambda_m) = 0$ для всех $m \neq k$ и $l = 0, 1, ..., n_m - 1$. Таким образом, $G_{\omega,k,1}(z)$ удовлетворяет условиям леммы.

Теперь предположим, что $j = 2, 3, ..., n_k$. Тогда $G_{\omega,k,j}(z)$ непрерывна в точке $z = \lambda_k$ и для любого $z \in B(\lambda_k, \gamma_k)$ мы можем переписать $G_{\omega,k,j}(z)$ следующим образом:

$$G_{\omega,k,j}(z) = \frac{G(z)(z-\lambda_k)^{j-1}}{(j-1)!} \sum_{l=j}^{n_k} \frac{d_{k,l}}{(z-\lambda_k)^l} =$$

$$= \frac{G(z)(z-\lambda_k)^{j-1}}{(j-1)!} \left[\frac{1}{G(z)} - g_k(z) - \sum_{m=1}^{j-1} \frac{d_{k,m}}{(z-\lambda_k)^m} \right] =$$

$$= \frac{(z-\lambda_k)^{j-1}}{(j-1)!} - \frac{G(z)(z-\lambda_k)^{j-1} g_k(z)}{(j-1)!} - \frac{G(z)}{(j-1)!} \sum_{m=1}^{j-1} d_{k,m} (z-\lambda_k)^{j-1-m}.$$

Из определения функций $G_{\omega,k,j}(z)$ следует, что $G^{(l)}_{\omega,k,j-1}(\lambda_m) = 0$ при $m \neq k$, $l = 0, 1, ..., n_p - 1$. Тогда получаем, что $G^{(j-1)}_{\omega,k,j}(\lambda_k) = 1$ и $G^{(l)}_{\omega,k,j}(\lambda_k) = 0$ для $l = 0, 1, ..., n_k - 1$, $l \neq j-1$. Таким образом, функции $G_{\omega,k,j}(z)$ при всех $j \geqslant 1$ удовлетворяют равенствам, указанным в утверждении леммы.

Теперь докажем (2.2.2). Имеем:

$$|d_{k,j}| \leqslant (\gamma_k)^j d_k, \qquad \frac{1}{d_k} = \min_{z \in S(\lambda_k, \gamma_k)} |G(z)|, \qquad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

$$|G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant d_k \frac{(\gamma_k)^{j-1}}{(j-1)!} \left| \frac{h_{\omega,\rho}(z) e^{-C_2 z}}{(1+z+3\rho)^{[6B\rho b]+3}} \right| \sum_{l=1}^{n_k+1-j} \frac{(\gamma_k)^l |g(z)|}{|z-\lambda_k|^l}. \tag{2.2.8}$$

Функции $g(z)/(z-\lambda_k)^l$, $l = \overline{1, n_k}$, $k \geqslant 1$, являются аналитическими в полуплоскости $C_{3\rho}$. Поэтому

$$\frac{(\gamma_k)^l |g(z)|}{|z-\lambda_k|^l} \leqslant |g(z)|, \qquad z \in C_{3\rho} \backslash B(\lambda_k, \gamma_k),$$

$$\frac{(\gamma_k)^l |g(z)|}{|z-\lambda_k|^l} \leqslant \max_{z \in S(\lambda_k, \gamma_k)} |g(z)|, \qquad z \in B(\lambda_k, \gamma_k).$$

Так как $\gamma_k / |\lambda_k| \leqslant 1/4$, то в силу (2.2.4), (2.2.5) и (1.2.2) имеем:

$$\max_{z \in S(\lambda_k, \gamma_k)} \ln |g(z)| \leqslant$$

$$\leqslant 2B(\operatorname{Re}\lambda_k + \gamma_k)\sigma_\Lambda(|z|) + 6B\rho b \ln|z| + 2M_1 b|z| + C_2(\operatorname{Re}\lambda_k + \gamma_k) + A_1 =$$

$$= 2B(\operatorname{Re}\lambda_k - \gamma_k)\sigma_\Lambda(|z|) + 4B\gamma_k\sigma_\Lambda(|z|) + 6B\rho b \ln|z| + 2M_1 b|z| +$$

$$+ C_2(\operatorname{Re}\lambda_k + \gamma_k) + A_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2Bx\sigma_\Lambda(|z|) + B|\lambda_k|\sigma_\Lambda(|\lambda_k|+\gamma_k) + 6B\rho b\ln(|z|) + 2M_1 b|z| +$$

$$+C_2(\operatorname{Re}\lambda_k+\gamma_k) + A_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2Bx\sigma_\Lambda(|z|) + 6B\rho b\ln|z| + B|\lambda_k|\sigma_\Lambda(|\lambda_k|) + 2b|\lambda_k| + 2M_1 b|z| +$$

$$+C_2(\operatorname{Re}\lambda_k+\gamma_k) + A_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2Bx\sigma_\Lambda(|z|) + 6B\rho b\ln|z| + B|\lambda_k|\sigma_\Lambda(|\lambda_k|) + A_2|\lambda_k| + 2M_1 b|z| + A_1, \quad k \geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\frac{(\gamma_k)^l|g(z)|}{|z-\lambda_k|^l} \leqslant c_1\alpha_k|g(z)|, \qquad z \in C_{3\rho}, \quad k \geqslant 1,$$

где $c_1 > 0$ и $\ln\alpha_k = B|\lambda_k|\sigma_\Lambda(|\lambda_k|) + A_2|\lambda_k|$. Отсюда с учетом (2.2.7) и (2.2.8) получаем:

$$|G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant c_2 n_k\alpha_k d_k\frac{(\gamma_k)^{j-1}}{(j-1)!}\frac{e^{\omega^*(x)}}{1+y^2}, \qquad z \in C_{3\rho}, \quad k \geqslant 1. \tag{2.2.9}$$

Оценим теперь оставшиеся сомножители. Из условия $m(\Lambda) < +\infty$ получаем: $n_k \leqslant b_0|\lambda_k|$, $k \geqslant 1$, где $b_0 > 0$. Учитывая, что $j! \geqslant j^j/3^j$ для всех $j \geqslant 1$, имеем:

$$\frac{1}{|\lambda_k|}\ln\frac{\left(\frac{|\lambda_k|}{3}\right)^{j-1}}{(j-1)!} \leqslant \frac{j-1}{|\lambda_k|}\ln\frac{|\lambda_k|}{j-1} \leqslant \sup_{t>0}\frac{\ln t}{t} \leqslant 1, \quad j = \overline{1,n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\frac{(\gamma_k)^{j-1}}{(j-1)!} \leqslant \frac{\left(\frac{|\lambda_k|}{3}\right)^{j-1}}{(j-1)!} \leqslant e^{|\lambda_k|}, \qquad j = \overline{1,n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Оценим, наконец, d_k. Так как $\gamma_k/|\lambda_k| \leqslant 1/4$, то все точки $z = x+iy$ окружностей $S(\lambda_k,\gamma_k)$, $k \geqslant k_0$, удовлетворяют неравенству $|y| \leqslant 2^{-1}(x+3\rho)$. Кроме того,

$$-([6B\rho b]+3)\ln|1+z+3\rho| \geqslant -B_0 x, \quad z \in S(\lambda_k,\gamma_k), \qquad k \geqslant k_0.$$

Следовательно, с учетом (2.2.6) для некоторых B_3, $B_4 > 0$ имеем:

$$\ln|G(z)| \geqslant 2B\,x\sigma_{\Lambda,3\rho}(|z|) -$$

$$-B_3 - B_4 x \geqslant 2B(\operatorname{Re}\lambda_k - \gamma_k)\sigma_{\Lambda,3\rho}(|\lambda_k|-\gamma_k) -$$

$$-B_3 - B_4\left(|\lambda_k| + \gamma_k\right).$$

Из соотношений (1.1.2) следует существование некоторой константы $C > 0$ такой, что выполнено неравенство $\operatorname{Re}\lambda_k \geqslant C\,|\lambda_k|$. Тогда для некоторых положительных $B_5,\ B_6$ с учётом (1.2.2) имеем:

$$\ln|G(z)| \geqslant \frac{3}{2}BC\,|\lambda_k|\,\sigma_{\Lambda,3\rho}\left(|\lambda_k| - \gamma_k\right) - B_3 - 2B_4\,|\lambda_k| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2}BC\,|\lambda_k|\,\sigma_{\Lambda}\left(|\lambda_k| - \gamma_k\right) - B_3 - 2B_4\,|\lambda_k| \geqslant$$

$$\geqslant \ \frac{3}{2}BC\,|\lambda_k|\,\sigma_{\Lambda}\left(|\lambda_k|\right) - B_5 - B_6\,|\lambda_k|\,, \qquad z \in S\left(\lambda_k, \gamma_k\right), \qquad k \geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\ln|d_k| \leqslant -\frac{3}{2}BC\,|\lambda_k|\,\sigma_{\Lambda}\left(|\lambda_k|\right) + B_5 + B_6\,|\lambda_k|\,, \qquad k \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом (2.2.9) получаем (2.2.2). Лемма доказана.

Положим

$$H_{\omega,k,j}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{\omega,k,j}(x+iy)\,e^{-(x+iy)t}\,dy, \qquad j = \overline{1,n_k}, \quad k \geqslant 1. \tag{2.2.10}$$

Следующая лемма устанавливает необходимые свойства функций $H_{\omega,k,j}$ и даёт необходимые оценки на них.

Лемма 2.2.2. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — почти вещественная и такая, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$, $\omega(t) \geqslant t^2$ при $t > 0$, и $G_{\omega,k,j}$ — функции и β_k — числа из леммы 2.2.1, $j = \overline{1,n_k}$, $k \geqslant 1$. Тогда на $\mathbb{R}$ по формуле (2.2.10) определены функции $H_{\omega,k,j}$, они непрерывны и для некоторых положительных чисел $D_1,\ D_2$ имеют место оценки*

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant D_1\beta_k\,e^{-\omega(t)}, \quad t \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n_k}, \ k \geqslant 1. \tag{2.2.11}$$

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant D_2\beta_k\,e^{-2\rho|t|}, \quad t < 0, \quad j = \overline{1,n_k}, \ k \geqslant 1. \tag{2.2.12}$$

Кроме того, верны равенства

$$G_{\omega,k,j}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,j}(t)\,e^{zt}\,dt, \quad x = \operatorname{Re} z > 0, \quad j = \overline{1,n_k}, \ k \geqslant 1. \tag{2.2.13}$$

Доказательство. Используем схему доказательства из леммы 4.3 в работе [53]. В силу (2.2.2) для каждого $x > -3\rho$ подынтегральная функция в (2.2.10) принадлежит пространству $L_1(-\infty, +\infty)$. Поскольку эта функция является аналитической в полуплоскости $C_{3\rho}$, то из (2.2.2) и интегральной теоремы Коши следует, что интеграл в (2.2.13) не зависит от x. Поэтому в силу (2.2.2) имеем:

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant C\beta_k\, e^{\omega^*(x)-xt} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = C\pi\beta_k e^{\omega^*(x)-xt}, \qquad j = \overline{1, n_k},\ k \geqslant 1,$$

где $x > -3\rho$. Поскольку $\omega^*(x) \geqslant 0$ и $\omega^*(0) = 0$, то при $t \geqslant 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (xt - \omega^*(x)) = \sup_{x\geqslant 0} (xt - \omega^*(x)).$$

Поэтому из предыдущего получаем:

$$\ln|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant \ln(C\pi\beta_k) + \inf_{x\geqslant 0} (\omega^*(x) - xt) = \ln(C\beta_k) - \sup_{x\geqslant 0} (xt - \omega^*(x)) =$$

$$= \ln(C\beta_k) - \sup_{x\in\mathbb{R}} (xt - \omega^*(x)) = \ln(C\beta_k) - \omega(t), \qquad t \geqslant 0,\ \ j = \overline{1, n_k},\ k \geqslant 1.$$

Это дает нам (2.2.11). Пусть теперь $t < 0$. Тогда

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant C\pi\beta_k e^{\omega^*(-2\rho)+2\rho t}.$$

Отсюда получаем (2.2.12).

Докажем, наконец, (2.2.13). Отметим, что для каждого $x > -3\rho$ функция $H_{\omega,k,j}(t)\, e^{xt}$ является преобразованием Фурье функции $G_{\omega,k,j,x} \in L_1(-\infty, +\infty)$, где $G_{\omega,k,j,x}(y) = G_{\omega,k,j}(x + iy)$. Последняя функция является дифференцируемой. Поэтому равенство (2.2.13) имеет место, где интеграл понимается в смысле главного значения. Покажем, что этот интеграл существует в обычном смысле для всех $x > 0$. Для этого достаточно доказать, что функция $H_{\omega,k,j}(t)\, e^{xt}$ принадлежит пространству $L_1(-\infty, +\infty)$ при $x > 0$. Это следует из неравенств (2.2.11) и (2.2.12) и условия $\omega(t) \geqslant t^2$ при $t > 0$. Лемма доказана.

Используя полученные сведения о функциях $H_{\omega,k,j}$, мы, наконец, можем доказать основной результат данной главы.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ почти вещественная, $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$, $\omega(t) \geqslant t^2$ при $t > 0$. Тогда* *система функционалов* $T_{\omega,k,j}$ *вида*

$$T_{\omega,k,j}(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,j}(t) f(t)\, dt, \tag{2.2.14}$$

$$f \in L_p^{\omega}, \quad x = \operatorname{Re} z > 0, \qquad j = \overline{1, n_k}, \ k \geqslant 1,$$

где функции $H_{\omega,k,j}(t)$ *определены равенством* (2.2.10), *является биортогональной системой функционалов к системе* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *в пространстве* L_p^{ω}.

Доказательство. Если функции $H_{\omega,k,j}(t)$ принадлежат пространству L_q^{ω}, $1/p + 1/q = 1$, то биортогональность системы функционалов $T_{\omega,k,j}$ автоматически следует из лемм 2.2.1 и 2.2.2. Докажем, что функции $H_{\omega,k,j}(t)$ принадлежат пространству L_q^{ω}.

Заметим сразу, что в виду (2.2.12), и того факта, что $\omega \in \Omega_\rho$,

$$\int\limits_{-\infty}^{0} H_{\omega,k,j}(t) e^{\omega(t)} dt \leqslant D_2 \beta_k \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\rho|t|} dt < +\infty, \ j = \overline{1, n_k}, \ k \geqslant 1. \tag{2.2.15}$$

Так как $\omega(t) \geqslant 0$, то из (2.2.2) следует, что

$$|G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant C_2 \beta_k \frac{e^{2\omega^*(x)}}{1+y^2}, \quad z \in C_{3\rho}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Кроме того, из доказательства леммы 2.2.2 следует, что интеграл в (2.2.13) не зависит от $x > 0$. Тогда из (2.2.10) следует, что

$$H_{\omega,k,j}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{\omega,k,j}(2x+iy)\, e^{-(2x+iy)t}\, dy, \qquad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Тогда, проводя оценки, аналогичные оценкам из доказательства леммы 2.2.2, вместо (2.2.11) получим

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant D_1 \beta_k\, e^{-2\omega(t)}, \quad t \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n_k}, \ k \geqslant 1.$$

С учётом $\omega \in \Omega_\rho$ отсюда следует, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty} H_{\omega,k,j}(t)\, e^{\omega(t)} dt \leqslant D_1 \beta_k \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\omega(t)} dt < +\infty, \ j = \overline{1, n_k}, \ k \geqslant 1.$$

Вместе с (2.2.15) данный факт даёт нам, что $H_{\omega,k,j} \in L_q^{\omega}$. Лемма доказана.

Глава 3

Представление рядами экспоненциальных мономов

3.1. Предварительные сведения и обозначения

В главе 2 были введены пространства L_p^ω и C^ω. Символами $W^p(\Lambda,\omega)$ $(p \geqslant 1)$ и $W^0(\Lambda,\omega)$ обозначим замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^ω и C^ω соответственно.

В данной главе диссертационного исследования изучаются условия, при которых каждая функция $f \in W^p(\Lambda,\omega)$ $\left(W^0(\Lambda,\omega)\right)$ продолжается до целой функции F, представимой во всей плоскости рядом

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{3.1.1}$$

Подобные задачи рассматривались в работах [52] и [53] при условиях, что все числа λ_k положительны, $n_k = 1$ и

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h, \quad k \geqslant 1. \tag{3.1.2}$$

и принадлежности последовательности Λ к классу $U(d,0)$. В частности, из принадлежности последовательности Λ классу $U(d,0)$, что последовательность Λ имеет плотность

$$n(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty}\frac{n(r,\Lambda)}{r} = d \leqslant \frac{1}{h}.$$

Отметим здесь результат из работы [53] (теорема 2.1). Для этого необходимо ввести понятие класса $U(d,0)$. Пусть $L(c,d)$ — класс строго возрастающих последовательностей $A = \{a_n\}$ положительных чисел, стремящихся к бесконечности. При этом для некоторого c для всех $n \geqslant 1$ выполнено неравенство $a_{n+1} - a_n \geqslant c$. Кроме того, последовательность A должна быть измеримой, и её плотность должна равняться d, то есть существует следующий предел и выполнено равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n} = d \geqslant 0.$$

Зафиксируем некоторую последовательность $A \in L(c,d)$ и два положительных числа α, δ таких, что $\alpha < 1$ и $\delta \leqslant \min\{4, c\}$. Теперь для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим замкнутый сегмент вещественной оси $T_n := \{x : |x - a_n| \leqslant a_n^\alpha\}$ и выберем в нём точку b_n, чтобы для любого $n \neq m$ выполнялось хотя бы одно из двух условий: (I) $b_n = b_m$ или (II) $|b_n - b_m| \geqslant \delta$. Таким образом будет построена последовательность $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Из условия (I) следует, что некоторые члены последовательности могут повторяться, но она необязательно неубывающая. Однако, перенумеровав члены последовательности по возрастанию модулей, мы можем записать её в виде $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Про построенную таким образом последовательность Λ будем говорить, что она принадлежит классу $U(d,0)$. Из условия (II) следует, что $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant \delta,\ k \geqslant 1$.

Если $\Lambda \in U(d,0)$ то из этого следует, что, во-первых, последовательность Λ измерима и её плотность равна d, то есть

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t} = d < \infty,$$

а во-вторых, выполнено условие на кратность: $n_k \leqslant \gamma \lambda_k^\alpha,\ \gamma > 0,\ k \in \mathbb{N}$. При этом γ не зависит от k.

Точная формулировка теоремы с использованием наших обозначений имеет следующий вид.

Теорема A (E.Zikkos, Theorem 2.1, [53]). *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *— последовательность, принадлежащая классу* $U(d,0)$ *для некоторого* d*. Пусть функция* $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$ $(\rho > 0)$ *и выполнены два условия:*

$$\omega\,(t) \geqslant t^2, \qquad t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

и для каждого $A > 0$ *существует* $t\,(A) > 0$ *такое, что*

$$\omega\,(t + A) \geqslant \omega\,(t) + t, \qquad t \geqslant t\,(A)\,.$$

Тогда каждая функция $f \in W^p\,(\Lambda, \omega)$ $\left(W^0\,(\Lambda,\omega)\right)$ *продолжается до целой функции* F*, для которой имеет место представление* (3.1.1).

В настоящей главе диссертации даётся формулировка и доказательство обобщения данного результата. Доказано, что каждая функция $f \in W^p\,(\Lambda, \omega)$ $\left(W^0\,(\Lambda,\omega)\right)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3.1.1). При этом условия, которые накладываются на последовательность Λ и функцию ω существенно слабее, чем условия из теоремы 2.1 в работе [53]. Кроме того, получены формулы для коэффициентов ряда.

В следующем утверждении докажем для начала некоторый аналог теоремы Коши-Адамара для рядов вида (3.1.1) (ср. [7], теорема 4.1)

Лемма 3.1.1. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *такая, что* $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, *и* $\{a_{k,n}\}_{k=1,\, n=0}^{\infty,\, n_k-1}$ *— последовательность комплексных чисел. Предположим, что*

$$\varliminf_{k\to\infty} \min_{0\leqslant n\leqslant n_k-1} \frac{-\ln\left(|a_{k,n}|\right)}{|\lambda_k|} = +\infty. \tag{3.1.3}$$

Тогда ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z} \tag{3.1.4}$$

сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Доказательство. Пусть K — компакт в плоскости. Положим

$$d = \max_{z\in K} |z|.$$

Можно считать, что $d \geqslant 1$. Так как $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, то по лемме 1.1.1 имеем $m(\Lambda) < +\infty$, следовательно, справедливо неравенство $n_k \leqslant b\,|\lambda_k|\,,\ k \geqslant 1$, для некоторого числа $b > 0$. И поскольку, $n < n_k$, имеем:

$$|a_{k,n}|\,|z|^n e^{\mathrm{Re}\,(z\lambda_k)} \leqslant |a_{k,n}|\, e^{d|\lambda_k| + n\ln d} \leqslant |a_{k,n}|\, e^{(d+b\ln d)|\lambda_k|}, \qquad z \in K.$$

В силу (3.1.3) найдем номер k_0 такой, что $\ln\left(1/|a_{k,n}|\right) \geqslant (d + b\ln d + 1)\,|\lambda_k|$ для всех $k \geqslant k_0$. Отсюда и предыдущего неравенства получаем:

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} |a_{k,n}|\,|z|^n e^{\mathrm{Re}\,(z\lambda_k)} \leqslant C + \sum_{k=k_0}^{\infty} n_k e^{-|\lambda_k|}, \qquad z \in K.$$

Поскольку $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, то последний ряд сходится. Действительно, так как при всех $t > 0$ для некоторого b_0 справедливо неравенство $n(t,\Lambda) \leqslant b_0 t$, то

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} n_k e^{-|\lambda_k|} = \int\limits_a^{+\infty} e^{-t}\, dn(t,\Lambda) = e^{-t} n(t,\Lambda)\Big|_a^{+\infty} + \int\limits_a^{+\infty} e^{-t} n(t,\Lambda)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant b_0 e^{-t} t\Big|_a^{+\infty} + b_0 \int\limits_a^{+\infty} e^{-t} t\, dt \leqslant A.$$

Лемма доказана.

3.2. Случай неограниченной функции $\sigma_\Lambda(r)$ на луче $r > 0$

Сейчас мы готовы сформулировать и доказать один из основных результатов настоящего диссертационного исследования.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ почти вещественная, $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\sigma_\Lambda(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$, $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3.1.3), где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t)\, dt, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1, \tag{3.2.1}$$

$\omega(t) = \omega_0(t)$ при $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_0(t) + t^2$ при $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ определены равенством (2.2.10). При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Доказательство. По условию $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда с учетом (2.2.4) $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Пусть $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$. Если $p > 1$, то используя неравенство Гельдера, с учетом определения функции ω, множества $\Omega_{\Lambda,\rho}$ и неравенств (2.2.11) и (2.2.12) получаем:

$$|a_{k,n}| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) e^{-\omega_0(t)} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| H_{\omega,k,n-1}(t) e^{\omega_0(t)} \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant \tag{3.2.2}$$

$$\leqslant D\beta_k, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Пусть теперь $f \in W^1(\Lambda, \omega_0)$. Тогда по тем же соображениям получаем:

$$|a_{k,n}| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t) H_{\omega,k,n-1}(t)|\, dt \leqslant \beta_k \max\{D_1, D_2\} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) e^{-\omega_0(t)} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant D\beta_k, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1.$$

По условию $\sigma_\Lambda(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$. Поэтому в обоих случаях имеем:

$$\varliminf_{k\to\infty} \min_{0 \leqslant n \leqslant n_k - 1} \frac{-\ln(|a_{k,n}|)}{|\lambda_k|} \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln D\beta_k}{|\lambda_k|} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln \beta_k}{|\lambda_k|} =$$

$$= 4^{-1} \varliminf_{k\to\infty} \sigma_\Lambda(\lambda_k) - C_1 = +\infty.$$

Следовательно, по лемме 3.1.1 ряд (3.1.1) сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости, а его сумма F является целой функцией.

Покажем, что $F(t) = f(t)\,,\ t \in \mathbb{R}$. По условию $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$, т.е. аппроксимируется экспоненциальными многочленами вида

$$P_l(t) = \sum_{k=1}^{q_l} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n,l} t^n e^{\lambda_k t}, \quad l \geqslant 1,$$

в топологии пространства L_p^ω. Из (2.2.11), (2.2.12) и определения функции ω следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| H_{\omega,m,j+1}(t)\, t^n e^{\lambda_k t} \right| dt < +\infty, \qquad j, n = \overline{0, n_k - 1}, \quad m, k \geqslant 1.$$

Поэтому в силу (2.2.13) имеем :

$$G_{\omega,m,j+1}^{(n)}(\lambda_k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,m,j+1}(t)\, t^n e^{\lambda_k t}\, dt, \qquad j, n = \overline{0, n_k - 1}, \quad m, k \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом равенств в лемме 2.2.2 получаем:

$$a_{k,n,l} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t)\, P_l(t)\, dt, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1. \tag{3.2.3}$$

Положим

$$Q_l(t) = \sum_{k=1}^{q_l} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} t^n e^{\lambda_k t}, \qquad l \geqslant 1.$$

Пусть $p > 1$. Фиксируем произвольный отрезок $[a, b]$ на прямой. Имеем:

$$A = \left\{ \int\limits_a^b \left| (f(t) - F(t))\, e^{-\omega_0(t)} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \int\limits_a^b \left| (f(t) - P_l(t))\, e^{-\omega_0(t)} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_a^b \left| (P_l(t) - Q_l(t))\, e^{-\omega_0(t)} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int\limits_a^b \left| (Q_l(t) - F(t))\, e^{-\omega_0(t)} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= A_l^1 + A_l^2 + A_l^3.$$

В силу выбора экспоненциальных многочленов P_l

$$A_l^1 \leqslant \|f - P_l\|_{p,\mathbb{R}}^{\omega} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(f\left(t\right) - P_l\left(t\right)\right) e^{-\omega_0(t)} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad l \to \infty.$$

Поскольку ряд (3.1.1) сходится равномерно на каждом компакте плоскости, то $A_l^3 \to 0, \quad l \to \infty$. Покажем, что $A_l^2 \to 0, \quad l \to \infty$. Имеем:

$$A_l^2 \leqslant \sum_{k=1}^{q_l} \sum_{n=0}^{n_k - 1} |a_{k,n,l} - a_{k,n}| \left\{ \int\limits_a^b \left| t^n \, e^{\lambda_k t} e^{-\omega_0(t)} \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

По условию $m\left(\Lambda\right) < +\infty$. Отсюда следует, что $n_k \leqslant b|\lambda_k|, \ k \geqslant 1$, для некоторого числа $b > 0$. Тогда найдется $D > 0$ такое, что

$$\int\limits_a^b \left| t^n e^{\lambda_k t} e^{-\omega_0(t)} \right|^p dt \leqslant e^{|\lambda_k| D}, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1.$$

В силу (3.1.4) и (3.2.3) как и в (3.2.2) получаем:

$$|a_{k,n,l} - a_{k,n}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}\left(t\right) \left(P_l\left(t\right) - f\left(t\right)\right) dt \right| \leqslant D_0 \beta_k \|f - P_l\|_{p,\mathbb{R}}^{\omega}.$$

Таким образом,

$$A_l^2 \leqslant D_0 \|f - P_l\|_{p,\mathbb{R}}^{\omega} \sum_{k=1}^{q_l} n_k \beta_k e^{|\lambda_k| D} \leqslant D_0 \|f - P_l\|_{p,\mathbb{R}}^{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} n_k \beta_k \, e^{|\lambda_k| D}.$$

По условию $S_\Lambda > -\infty$ и $m\left(\Lambda\right) < +\infty$. Поэтому в силу леммы 1.1.1 имеем: $\overline{n}\left(\Lambda\right) < +\infty$. Так как $\sigma_\Lambda\left(r\right) \to +\infty, \ r \to +\infty$, то последний ряд сходится. Следовательно, $A_l^2 \to 0, \quad l \to \infty$.

Мы показали, что

$$A = A_l^1 + A_l^2 + A_l^3 \to 0, \quad l \to \infty.$$

Это означает, что $A = 0$, т.е функция f почти всюду на отрезке $[a, b]$ совпадает с непрерывной функцией F. Так $[a, b]$ – произвольный отрезок, то можно считать, что $F\left(t\right) = f\left(t\right), \ t \in \mathbb{R}$.

Аналогично рассматривается случай $p = 1$. Теорема доказана.

Теорема 3.2.2. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ почти вещественная, $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\sigma_\Lambda(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$, $\omega_1 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3.1.1), где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t)\, dt, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1,$$

$\omega(t) = \omega_1(t) - t$ при $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_1(t) + t + t^2$ при $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ определены равенством (2.2.10). При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Доказательство. Пусть $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$, где $\omega_1 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Введём обозначение $\omega_0(t) = \omega_1(t) + |t|$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| e^{-\omega_0(t)} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| e^{-\omega_1(t) - |t|}\, dt \leqslant$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| f(t)\, e^{-\omega_1(t)} \right| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, dt = K ||f||_{\mathbb{R}}^{\omega_1} < +\infty,$$

где $||\cdot||_{\mathbb{R}}^{\omega_1}$ обозначает норму в пространстве C^{ω_1}. Таким образом, $f \in W^1(\Lambda, \omega_0)$ и, поскольку,

$$\omega_0(t) \leqslant (\rho + 1)|t|, \quad t < 0,$$

то $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda,\rho+1}$. Поэтому из теоремы 3.2.1 получаем требуемое. Теорема доказана.

Заметим, что, поскольку вопрос о представлении рядами по системе экспоненциальных мономов в пространстве C^ω свёлся к случаю пространства L_p^ω, то построения биортогональной системы функционалов для пространства C^ω в главе 2 не потребовалось.

Покажем, что теорема 2.1 из работы [53] является частным случаем теорем 3.2.1 и 3.2.2.

Теорема 3.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда утверждение теорем 3.2.1 и 3.2.2 остаётся справедливым.*

Доказательство. Достаточно показать, что любая последовательность Λ из класса $U(d,0)$, $d>0$, в работе [53] обладает следующими свойствами: $\sigma_\Lambda(r)\to+\infty$, $r\to+\infty$ и $S_\Lambda>-\infty$.

Пусть Λ — последовательность из класса $U(d,0)$, $d>0$. Тогда она имеет плотность $n(\Lambda)=d$. Отсюда следует, что $\sigma_\Lambda(\lambda_k)\geqslant c\ln\lambda_k$, $k\geqslant 1$, для некоторого числа $c>0$. Таким образом, $\sigma_\Lambda(r)\to+\infty$, $r\to+\infty$. В лемме 3.1 работы [53] утверждается, что для указанной последовательности Λ функция g_Λ удовлетворяет неравенствам:

$$\ln|g_\Lambda(z)|\leqslant 2x\,\sigma_\Lambda(|z|)+Ax,\qquad z\in\mathbb{C}_+,\tag{3.2.4}$$

$$\ln|g_\Lambda(z)|\geqslant 2x\,\sigma_\Lambda(|z|)-Bx,\quad z\in S(\lambda_k,\tau_k),\quad k\geqslant 1,\tag{3.2.5}$$

где $A,B>0$, $\tau_k\in(0,\tau_0)$, $k\geqslant 1$, и круги $B(\lambda_k,\tau_k)$ попарно не пересекаются. Можно считать, что $\tau_k\leqslant\lambda_k/3$, $k\geqslant 1$. Пусть $\delta\in\left(0,\frac{1}{5}\right)$. Рассмотрим функции

$$\varphi_m(z)=g_\Lambda(z)\exp\left(-\sum_{\lambda_k<2\lambda_m}\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right),\quad g_m(z)=\frac{\varphi_m(z)}{q_\Lambda^m(z,\delta)}\qquad m\geqslant 1.$$

В силу (3.2.4) имеем:

$$\ln|\varphi_m(z)|\leqslant 2x\,\sigma_\Lambda(|z|)+Ax-2x\sigma_\Lambda(2\lambda_m)\leqslant 2A\lambda_m,$$

$$z\in B(\lambda_m,5\delta\lambda_m),\quad m\geqslant 1.\tag{3.2.6}$$

Кроме того, используя те же соображения, что и при получении оценки (1.2.2), с учетом (3.2.5) получаем:

$$\ln|\varphi_m(z)|\geqslant -2x\left(\sigma_\Lambda(2\lambda_m)-\sigma_\Lambda(|z|)\right)-Bx\geqslant$$

$$\geqslant -2x\left(\sigma_\Lambda(3|z|)-\sigma_\Lambda(|z|)\right)-Bx\geqslant -B_1\lambda_m,\quad z\in S(\lambda_m,\tau_m),\quad m\geqslant 1.\tag{3.2.7}$$

Нетрудно заметить, что

$$|q_\Lambda^m(z,\delta)|\geqslant 1,\qquad z\in S(\lambda_m,5\delta\lambda_m),\qquad m\geqslant 1.$$

Тогда согласно (3.2.6) и принципу максимума имеем:

$$\ln|g_m(z)|\leqslant 2A\lambda_m,\quad z\in B(\lambda_m,5\delta\lambda_m),\quad m\geqslant 1.$$

Выберем номер $m(\delta)$ такой, что $\delta\lambda_m > \tau_m,\ \ m \geqslant m(\delta)$. Тогда с учетом (3.2.7) получаем:

$$\ln|q_\Lambda^m(z,\delta)| = \ln|\varphi_m(z)| - \ln|g_m(z)| \geqslant -(B_1+2A)\,\lambda_m,$$

$$z \in S(\lambda_m,\tau_m)\,, \quad m \geqslant m(\delta)\,.$$

Поскольку круги $B(\lambda_k,\tau_k)$ попарно не пересекаются, то $q_\Lambda^m(z,\delta)$ не обращается в нуль в круге $B(\lambda_m,\tau_m)$. Тогда по принципу минимума

$$\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)| \geqslant -(B_1+2A)\,\lambda_m, \quad m \geqslant m(\delta)\,, \quad \delta \in \left(0,\frac{1}{5}\right).$$

Отсюда следует, что $S_\Lambda > -\infty$. Теорема доказана.

Приведем теперь некоторые примеры случаев, когда теорема А не может быть применена, в то время как применимы теоремы 3.2.1 (3.2.2) .

1. Пусть $\Lambda = \left\{2^k, 2^k\right\}$. Тогда, как нетрудно заметить, $S_\Lambda = 0$ и $m(\Lambda) = 1$.

$$\sigma_\Lambda(r) \leqslant c + \frac{\ln r}{\ln 2}, \quad r > 0, \qquad \sigma_\Lambda(r) \to +\infty, \quad r \to +\infty.$$

Если $t\ln t \leqslant \omega(t) \leqslant e^{\alpha t}, \quad t > 0$, где $\alpha < 2^{-1}\ln 2$, то выполнены все условия теоремы 3.2.1 (3.2.2). Отметим, что последовательность Λ не принадлежит классу $U(d,0)$ из работы [53], т.к. она не имеет плотности. Кроме того, не выполняется условие на кратность $n_k \leqslant c(\lambda_k)^\alpha\,,\ \ k \geqslant 1,\ \alpha \in (0,1)$ для последовательностей класса $U(d,0)$. Следовательно, теорема 2.1 из работы [53] не применима в этом случае.

2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}$, где $\lambda_{2k} = k$ и $\lambda_{2k-1} = k + e^{-\varepsilon(k)k}$, $k \geqslant 1$, $\varepsilon(k) \to \varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0, \quad k \to \infty$.

Последовательность Λ имеет плотность $n(\Lambda) = 2$ и $m(\Lambda) = 0$. Она не принадлежит классу $U(d,0)$, т.к. не выполнено (3.1.2). Поэтому теорема 2.1 из работы [53] не применима и в этом случае. В работе [8] показано, что $S_\Lambda = -\varepsilon$. Кроме того, имеем:

$$\sigma_\Lambda(r) \leqslant b + 2\ln r, \quad r > 0, \qquad \sigma_\Lambda(r) \to +\infty, \quad r \to +\infty.$$

Если $t\ln t \leqslant \omega(t) \leqslant e^{\lambda t}, \quad t > 0$, где $\alpha < 4^{-1}$, то выполнены все условия теоремы 3.2.1 (3.2.2).

3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}$ состоит из всех натуральных чисел, лежащих на полуинтервалах $\left[2^{2m},\ 2^{2m+1}\right)$, $m \geqslant 1$. Последовательность Λ удовлетворяет условию (3.1.2). В этом случае, как показано в примере 1, §1.1, верно равенство $S_\Lambda = 0$. Имеем также $m(\Lambda) = 0$ и

$$\sigma_\Lambda(r) \leqslant d + \ln r, \quad r > 0, \qquad \sigma_\Lambda(r) \geqslant a \ln r \to +\infty, \quad r \to +\infty.$$

Если $t \ln t \leqslant \omega(t) \leqslant e^{\alpha t}, \quad t > 0$, где $\alpha < 2^{-1}$, то выполнены все условия теоремы 3.2.1 (3.2.2). Отметим еще, что последовательность Λ не имеет плотности. Поэтому теорема 2.1 из работы [53] не применима в этом случае.

3.3. Случай ограниченной функции $\sigma_\Lambda(r)$ на луче $r > 0$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда

$$\sigma_\Lambda(r) \leqslant b, \qquad r > 0. \tag{3.3.1}$$

Покажем, что теоремы 3.2.1 и 3.2.2 остаются верными и без условия неограниченности функции $\sigma_\Lambda(r)$. Прежде всего, докажем одно вспомогательное утверждение.

Последовательность $\Lambda_0 = \{\zeta_m, p_m\}$ будем называть пополнением последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, если существует подпоследовательность натуральных чисел m_k такая, что $\lambda_k = \zeta_{m_k}$ и $n_k \leqslant p_{m_k}, \ k \geqslant 1$.

Лемма 3.3.1 *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$, для некоторого $b > 0$ верно*

$$\sigma_\Lambda(r) \leqslant b \tag{3.3.2}$$

и $\omega \in \Omega_\rho$. Тогда существует пополнение $\Lambda_0 = \{\zeta_m, p_m\}$ последовательности Λ такое, что $m(\Lambda_0) = 0$, $S_{\Lambda_0} > -\infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda_0,\rho}$ и $\sigma_{\Lambda_0}(r) \to +\infty, \ r \to +\infty$.

Доказательство. Пусть (a_j, b_j), $\ b_j \leqslant a_{j+1}, \ \ j \geqslant 1$, — все связные компоненты объединения интервалов

$$\bigcup_{k \geqslant 1} \left(|\lambda_k| - n_k, |\lambda_k| + n_k\right),$$

и $j_s, s \geqslant 1$, — последовательность всех номеров j, для которых выполнено неравенство $a_{j+1} - b_j \geqslant 2$. Эта последовательность бесконечная. Действительно, в силу (3.3.1) Λ имеет нулевую плотность. Поэтому найдется p_0 такое, что $n\left(2^p, \Lambda\right) \leqslant 32^{-1}2^p, \quad p \geqslant p_0$. Тогда при $p \geqslant p_0$ общая длина отрезков

$$[|\lambda_k| - n_k - 1, |\lambda_k| + n_k + 1]\,, \ |\lambda_k| < 2^{p+1},$$

не превосходит $8^{-1}2^{p+1} = 2^{-1}2^{p-1}$. Следовательно, они не покрывают интервал $\left(2^{p-1}, 2^p\right)$. Таким образом, для каждого $p \geqslant p_0$ найдется номер j_s такой, что хотя бы один из концов интервала (a_{j_s}, b_{j_s}) лежит в интервале $\left(2^{p-1}, 2^p\right)$. Это означает, что $(a_{j_s}, b_{j_s})\,, \ s \geqslant 1,$ — бесконечная последовательность. Построим по индукции последовательность $r_l, \quad l \geqslant 1$, состоящую из положительных чисел первого и второго типа и удовлетворяющую следующим условиям:

a) $r_{l+1} - r_l \geqslant 2, \ l \geqslant 1$.

b) Если r_l — число первого типа, то $r_l = b_{j_s} + 2\mu - 1$ для некоторых натуральных s и μ.

При этом $r_l + 1 \leqslant a_{j_{s+1}}$, $r_{l-\nu} = b_{j_s} + 2(\mu - \nu) - 1, \ \ \nu = \overline{1, \mu - 1}$, и $r_{l-\nu}, \ \ \nu = \overline{1, \mu - 1}$ являются числами первого типа. Кроме того, если $r_{l-\mu}$ также является числом первого типа, то $r_{l-\mu} = b_{j_{s-1}} + 2\upsilon - 1$, где υ— натуральное число такое, что $a_{j_s} \geqslant b_{j_{s-1}} + 2\upsilon > a_{j_s} - 2$.

c) Если r_l— число первого типа, то верно неравенство

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda(r) + 2\Sigma_l\right) \leqslant \sqrt{r}, \qquad r > r_l, \tag{3.3.3}$$

где

$$\Sigma_l = \sum_{\nu \leqslant l} \frac{1}{r_\nu},$$

а суммирование ведется только по числам первого типа (если их нет, то $\Sigma_l = 0$).

d) Если r_l— число второго типа, то верно неравенство

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda\left(r_l\right) + 2\Sigma_l + 1\right) > \sqrt{r_l}. \tag{3.3.4}$$

Перейдем к построению последовательности $r_l, \ l \geqslant 1$. В силу (3.3.2) найдется $r_0 > 1$ такое, что

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda(r)\right) \leqslant \sqrt{r}, \qquad r \geqslant r_0. \tag{3.3.5}$$

Выберем какой-нибудь номер $s(0)$ из условия $b_{j_{s(0)}} \geqslant r_0$. Возможны два случая.

1. Выполнено неравенство

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda(r)+\frac{2}{b_{j_{s(0)}}+1}\right)\leqslant\sqrt{r},\qquad r>b_{j_{s(0)}}+1.$$

В этом случае полагаем $r_1=b_{j_{s(0)}}+1$ и r_1 назовем числом первого типа. Тогда, очевидно, выполнены условия b) и c).

2. Существует $r_1>b_{j_{s(0)}}+1$ такое, что

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda\left(r_1\right)+\frac{2}{b_{j_s}+1}\right)>\sqrt{r_1}.$$

В этом случае r_1 назовем числом второго типа. Поскольку $\omega(t)$ — неубывающая функция при $t>0$, то из последнего неравенства получаем (3.3.4). Предположим, что мы уже определили требуемые числа $r_1,\ldots,r_{l-1}$. Определим теперь r_l. Возможны два случая.

1. Число r_{l-1} является числом второго типа. Тогда выберем какой-нибудь номер s из условия $b_{j_s}\geqslant r_{l-1}+1$. Если

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda(r)+2\Sigma_{l-1}+\frac{2}{b_{j_s}+1}\right)\leqslant\sqrt{r},\qquad r>b_{j_s}+1,$$

то положим $r_l=b_{j_s}+1$ и r_l назовем числом первого типа. В силу последнего неравенства

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda(r)+2\Sigma_l\right)=\omega\left(2\sigma_\Lambda(r)+2\Sigma_{l-1}+\frac{2}{b_{j_s}+1}\right)\leqslant\sqrt{r},\qquad r>b_{j_s}+1=r_l,$$

т.е. верно (3.3.3). Очевидно, выполнено условие b). Кроме того, в силу выбора номера s имеем: $r_l=b_{j_s}+1\geqslant r_{l-1}+2$. Это дает нам условие a). Если же для некоторого числа $r_l>b_{j_s}+1$ выполнено неравенство

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda\left(r_l\right)+2\Sigma_{l-1}+\frac{2}{b_{j_s}+1}\right)>\sqrt{r_l},$$

то r_l назовем числом второго типа. Тогда $\Sigma_l=\Sigma_{l-1}$. Поскольку $\omega(t)$ — неубывающая функция при $t>0$, то из последнего неравенства получаем (3.3.4). Кроме того, в силу выбора номера s имеем: $r_l>b_{j_s}+1\geqslant r_{l-1}+2$.

2. Число r_{l-1} является числом первого типа. По допущению индукции $r_{l-1}=b_{j_s}+2\mu-1$ для некоторых натуральных s и μ. Предположим, что

$r_{l-1} \leqslant a_{j_{s+1}} - 3$. Если

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda(r) + 2\Sigma_{l-1} + \frac{2}{b_{j_s} + 2\mu + 1}\right) \leqslant \sqrt{r}, \qquad r > b_{j_s} + 2\mu + 1,$$

то положим $r_l = b_{j_s} + 2\mu + 1$ и r_l назовем числом первого типа. В силу последнего неравенства верно (3.3.3). Согласно допущению индукции условие b) выполнено для числа r_{l-1}. Тогда по построению оно выполнено и для числа r_l. Кроме того, имеем: $r_l = b_{j_s} + 2\mu + 1 = r_{l-1} + 2$. Если же для некоторого числа $r_l > b_{j_s} + 2\mu + 1$ выполнено неравенство

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda\left(r_l\right) + 2\Sigma_{l-1} + \frac{2}{b_{j_s} + 2\mu + 1}\right) > \sqrt{r_l},$$

то r_l назовем числом второго типа. Тогда $\Sigma_l = \Sigma_{l-1}$. Как и выше, верно (3.3.4). Кроме того, имеем: $r_l > b_{j_s} + 2\mu + 1 = r_{l-1} + 2$. Предположим теперь, что $r_{l-1} = b_{j_s} + 2\mu - 1 > a_{j_{s+1}} - 3$. Если

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda(r) + 2\Sigma_{l-1} + \frac{2}{b_{j_{s+1}} + 1}\right) \leqslant \sqrt{r}, \qquad r > b_{j_{s+1}} + 1,$$

то положим $r_l = b_{j_{s+1}} + 1$ и r_l назовем числом первого типа. В силу последнего неравенства верно (3.3.3). Условие b) выполнено по построению. По допущению индукции $r_l + 1 \leqslant a_{j_{s+1}}$. Следовательно, $r_l = b_{j_{s+1}} + 1 > a_{j_{s+1}} + 1 \geqslant r_{l-1} + 2$. Это дает нам условие a). Если же для некоторого числа $r_l > b_{j_{s+1}} + 1$ выполнено неравенство

$$\omega\left(2\sigma_\Lambda\left(r_l\right) + 2\Sigma_{l-1} + \frac{2}{b_{j_{s+1}} + 1}\right) > \sqrt{r_l},$$

то r_l назовем числом второго типа. Как и выше, верно (3.3.4), и оценка

$$r_l > b_{j_{s+1}} + 1 > a_{j_{s+1}} + 1 \geqslant r_{l-1} + 2.$$

Таким образом, мы построили требуемую последовательность $r_l,\ l \geqslant 1$.

Пусть $\{\xi_\nu\}$ — возрастающая модулю последовательность, состоящая из всех чисел r_l первого типа, и $\{\zeta_m\}$ — возрастающая последовательность, состоящая из всех чисел λ_k и всех чисел ξ_ν. Положим $\Lambda_0 = \{\zeta_m, p_m\}$, где $p_m = n_k$, если $\zeta_m = \lambda_k$, и $p_m = 1$, если $\zeta_m = \xi_\nu$. Тогда Λ_0— пополнение последовательности Λ. Покажем, что Λ_0 обладает всеми необходимыми свойствами.

Так как по построению последовательность ξ_ν состоит из положительных вещественных чисел, а последовательность Λ по условию почти вещественная, то последовательность Λ_0 также является почти вещественной.

Далее, поскольку Λ имеет нулевую плотность, то из построения следует $m\left(\Lambda_0\right)=0$. Из (3.3.2), (3.3.4) и условия a) следует, что $\{\xi_\nu\}$ — бесконечная и неограниченная последовательность. Докажем по индукции, что

$$\omega\left(2\sigma_{\Lambda_0}(r)\right)\leqslant\sqrt{r},\qquad r\in\left(r_0,\ \xi_\nu\right]\ ,\qquad \nu\geqslant 1. \tag{3.3.6}$$

На интервале $(0,\xi_1)$ нет чисел ξ_ν, $\nu\geqslant 1$. Поэтому в силу (3.3.5) имеем:

$$\omega\left(2\sigma_{\Lambda_0}(r)\right)=\omega\left(2\sigma_{\Lambda}(r)\right)\leqslant\sqrt{r},\qquad r\in\left(r_0,\ \xi_1\right].$$

Предположим, что (3.3.6) верно для чисел $\xi_1,\ldots,\xi_{\nu-1}$. Положим

$$\sigma_\nu=\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\xi_\mu}.$$

Из (3.3.3) и определения Λ_0 получаем:

$$\omega\left(2\sigma_{\Lambda_0}(r)\right)=\omega\left(2\sigma_{\Lambda}(r)+2\sigma_{\nu-1}\right)\leqslant\sqrt{r},\qquad r\in\left(\xi_{\nu-1},\ \xi_\nu\right].$$

Отсюда с учетом допущения индукции получаем неравенства (3.3.6). Из них следует, что $\omega\in\Omega_{\Lambda_0,\rho}$. Предположим, что имеется подпоследовательность $\left\{r_{l_\mu}\right\}$ чисел второго типа. В силу условия a) она неограниченна, и все числа r_l первого типа такие, что $l<l_\mu$, лежат на интервале $\left(0,r_{l_\mu}\right)$. Тогда согласно определению Λ_0 верно неравенство

$$\sigma_{\Lambda_0}\left(r_{l_\mu}\right)\geqslant\sigma_{\Lambda}\left(r_{l_\mu}\right)+\Sigma_{l_\mu},\quad \mu\geqslant 1.$$

Поскольку $\omega(t)$ — неубывающая функция на луче $t>0$, то отсюда с учетом (3.3.4) имеем:

$$\omega\left(2\sigma_{\Lambda_0}\left(r_{l_\mu}\right)+1\right)\geqslant\omega\left(2\sigma_{\Lambda}\left(r_{l_\mu}\right)+2\Sigma_{l_\mu}+1\right)>\sqrt{r_{l_\mu}},\quad \mu\geqslant 1.$$

Это означает, что $\sigma_{\Lambda_0}(r)\to+\infty,\ r\to+\infty$. Если наше предположение неверно, то найдется номер l_0 такой, что r_l — число первого типа для всех $l\geqslant l_0$. Тогда в силу условия b) существует номер $s(1)$ такой, что все числа вида $b_{j_s}+2\mu-1$ при $s\geqslant s(1)$, для которых верно вложение

$$\left(b_{j_s}+2\mu-2,b_{j_s}+2\mu\right)\subseteq\left(b_{j_s},a_{j_{s+1}}\right),$$

являются элементами последовательности $\{\xi_\nu\}$. Отсюда с учетом определения интервалов (a_{j_s}, b_{j_s}) следует, что отрезки $[|\zeta_m| - 2, |\zeta_m| + 2]$, $m \geqslant 1$, покрывают неограниченный интервал $(b_{j_s}, +\infty)$. Тогда по тем же соображениям, что и вначале доказательства последовательность Λ_0 не может иметь нулевую плотность, т.е. верно неравенство $\overline{n}(\Lambda_0) > 0$. Это означает, что $\sigma_{\Lambda_0}(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$.

Докажем, наконец, конечность индекса конденсации S_{Λ_0}. Для этого нужно оценить снизу величину $\left|q^m_{\Lambda_0}(\zeta_m, \delta)\right|$. Рассмотрим два случая.

1. $\zeta_m = \lambda_k$. Пусть $\delta \in (0, 1/3)$. Согласно определению $q^m_{\Lambda_0}(\zeta_m, \delta)$ и Λ_0 имеем:

$$\ln\left|q^m_{\Lambda_0}(\zeta_m, \delta)\right| = \ln\left|q^k_{\Lambda}(\lambda_k, \delta)\right| + \ln \prod_{\xi_\nu \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k)} \frac{|\lambda_k - \xi_\nu|}{3\delta\xi_\nu}. \tag{3.3.7}$$

Если круг $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ не содержит точек ξ_ν, то второе слагаемое отсутствует. В силу условия b) $|\lambda_k - \xi_\nu| \geqslant 2$, $\nu \geqslant 1$. Кроме того, согласно условию a) имеем:

$$|\xi_\nu - \xi_{\nu-p}| \geqslant 2p, \qquad |\xi_\nu - \xi_{\nu+p}| \geqslant 2p, \quad p \geqslant 1. \tag{3.3.8}$$

Отметим еще, что

$$\frac{|w - z|}{3\delta|z|} < 1, \qquad z \in B(w, \delta|w|). \tag{3.3.9}$$

Следовательно,

$$\prod_{\xi_\nu \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)} \frac{|\lambda_k - \xi_\nu|}{3\delta\xi_\nu} \geqslant \prod_{2p \leqslant \delta|\lambda_k|} \left(\frac{2p}{4\delta|\lambda_k|}\right)^2 \geqslant \frac{(\alpha_k!)^2}{(2\delta|\lambda_k|)^{2\alpha_k}} \geqslant \left(\frac{\alpha_k}{6\delta|\lambda_k|}\right)^{2\alpha_k}, \quad k \geqslant 1,$$

где α_k — целая часть числа $\delta|\lambda_k|$. Имеем:

$$\lim_{\delta \to 0} \varliminf_{k \to \infty} \frac{2\alpha_k}{|\lambda_k|} \ln \frac{\alpha_k}{6\delta|\lambda_k|} = 0.$$

Отсюда и (3.3.7) получаем:

$$\lim_{\delta \to 0} \varliminf_{m \to \infty} \frac{\ln\left|q^m_{\Lambda_0}(\zeta_m, \delta)\right|}{|\zeta_m|} \geqslant \lim_{\delta \to 0} \varliminf_{k \to \infty} \frac{\ln\left|q^k_{\Lambda}(\lambda_k, \delta)\right|}{|\lambda_k|} = S_\Lambda > -\infty.$$

2. $\zeta_m = \xi_\nu$. Положим $\Lambda_1 = \{\xi_\nu, 1\}$. Имеем:

$$\ln\left|q^m_{\Lambda_0}(\zeta_m, \delta)\right| = \ln|q^\nu_{\Lambda}(\xi_\nu, \delta)| +$$

$$+\ln\prod_{0<|\lambda_k|-\xi_\nu<\delta\xi_\nu}\left(\frac{|\lambda_k-\xi_\nu|}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}+\ln\prod_{0<\xi_\nu-|\lambda_k|<\delta\xi_\nu}\left(\frac{|\lambda_k-\xi_\nu|}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

Как и выше, используя (3.3.8), получаем:

$$\lim_{\delta\to0}\varliminf_{\nu\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^\nu(\xi_\nu,\delta)|}{\xi_\nu}=0.$$

Оценим теперь второе слагаемое в предыдущем равенстве (при условии, что оно присутствует). Выберем номер m такой, что

$$|\lambda_m-\xi_\nu|=\min_{0<|\lambda_k|-\xi_\nu<\delta\xi_\nu}|\lambda_k-\xi_\nu|.$$

Тогда

$$|\lambda_k-\xi_\nu|>|\lambda_k-\lambda_m|,\quad 0<|\lambda_k|-\xi_\nu<\delta\xi_\nu.$$

В силу условия b) $|\lambda_m-\xi_\nu|\geqslant n_m+1$. Так как $|\lambda_m|-\xi_\nu>0$, то верно вложение

$$B(\xi_\nu,\delta\xi_\nu)\subseteq B(\lambda_m,2\delta|\lambda_m|).$$

Следовательно,

$$\prod_{0<|\lambda_k|-\xi_\nu<\delta\xi_\nu}\left(\frac{|\lambda_k-\xi_\nu|}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}\geqslant\left(\frac{n_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{n_m}+|q_\Lambda^m(\lambda_m,2\delta)|.$$

Поскольку Λ имеет нулевую плотность, то $n_m/|\lambda_m|\to0,\ m\to\infty$. Кроме того, $(1+\delta)\xi_\nu\geqslant|\lambda_m|$. Отсюда получаем:

$$\lim_{\delta\to0}\varliminf_{\nu\to\infty}\frac{n_m}{\xi_\nu}\ln\frac{n_m}{3\delta|\lambda_m|}=0.$$

По условию

$$\lim_{\delta\to0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,2\delta)|}{\xi_\nu}\geqslant\lim_{\delta\to0}(1+\delta)\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,2\delta)|}{|\lambda_m|}=\mathcal{S}_\Lambda>-\infty.$$

Аналогично оценивается третье слагаемое. Таким образом, $S_{\Lambda_0}>-\infty$. Лемма доказана.

Пусть $\rho>0$, $\omega\in\Omega_\rho$ и $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$. Если Λ_0 является пополнением Λ, то верны вложения

$$W^p(\Lambda,\omega)\subseteq W^p(\Lambda_0,\omega),\qquad W^0(\Lambda,\omega)\subseteq W^0(\Lambda_0,\omega).$$

Таким образом, из теорем 3.2.1, 3.2.2 и леммы 3.3.1 получаем следующие утверждения.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\rho > 0$, $\omega_0 \in \Omega_\rho$, *последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *является почти вещественной и такой, что* $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$ *и верно* (3.3.1). *Тогда каждая функция* $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ *продолжается до целой функции* F, *для которой имеет место представление* (3.1.1), *где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t)\, dt, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1, \tag{4.2}$$

$\omega(t) = \omega_0(t)$ *при* $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_0(t) + t^2$ *при* $t > 0$, *и функции* $H_{\omega,k,j}$ *определены равенством* (2.2.10). *При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.*

Теорема 3.3.2. *Пусть* $\rho > 0$, $\omega_1 \in \Omega_\rho$, *последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *является почти вещественной и такой, что* $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$ *и верно* (3.3.1). *Тогда каждая функция* $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$ *продолжается до целой функции* F, *для которой имеет место представление* (3.1.1), *где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t)\, dt, \qquad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1,$$

$\omega(t) = \omega_1(t) - t$ *при* $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_1(t) + t + t^2$ *при* $t > 0$, *и функции* $H_{\omega,k,j}$ *определены равенством* (2.2.10). *При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.*

Замечание. Пусть $\rho > 0$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Если верно равенством (3.3.1), то классы выпуклых функций Ω_ρ и $\Omega_{\Lambda,\rho}$ совпадают. Таким образом, в силу теорем 3.3.1 и 3.3.2 теоремы 3.2.1 и 3.2.2 останутся верными, если из их формулировок изъять условие $\sigma_\Lambda(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$.

3.4. Неполнота системы экспоненциальных мономов

В заключительном параграфе диссертации покажем, что в условиях теорем 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2 система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространствах L_p^ω и C^ω.

Одним из первых результатов по неполноте системы $\{t^{\lambda_k}\}$ (которую при замене переменной можно считать частным случаем системы экспоненциальных мономов) в весовых подпространствах был результат П.Мальявена [47]. Работы Мальявена можно считать развитием результатов Фукса [41]. В работе Мальявена рассматривается вещественнозначная непрерывная функция W, определённая на множестве $[0;+\infty)$ такая, что функция $\ln|W(e^s)|$ будет выпуклой функцией аргумента s. Через C_W обозначается весовое банахово пространство комплекснозначных непрерывных функций на множестве $[0;+\infty)$ таких, что

$$C_W = \left\{ f : \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{W(t)} = 0,\ ||f||_W := \sup_{t\geqslant 0} \left| \frac{f(t)}{W(t)} \right| \right\}$$

Пусть также $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}$ — возрастающая и неограниченная последовательность положительных чисел, при этом

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h, \quad h > 0,\ k \geqslant 1.$$

Тогда для того, чтобы система $\{t^{\lambda_k}\}_{k=0}^{\infty}$ неполна в C_W тогда и только тогда, когда для некоторого $\eta \in \mathbb{R}$ конечен интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln\left|W\left(e^{2\sigma_\Lambda(t)-\eta}\right)\right|}{t^2}\, dt < +\infty.$$

Основываясь на исследованиях Мальявена, Э. Зиккосом в [53] было получено следующее развитие приведённого результата, который очень близок по содержанию к нашим исследованиям. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ принадлежит классу $U(d, 0)$ для некоторого d. Пусть функция $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$ $(\rho > 0)$ и выполнены два условия:

$$\omega(t) \geqslant t^2, \qquad t \geqslant \tau \geqslant 0,$$

и для каждого $A > 0$ существует $t(A) > 0$ такое, что

$$\omega(t + A) \geqslant \omega(t) + t, \qquad t \geqslant t(A).$$

Тогда для того, чтобы система экспоненциальных мономов $\mathcal{E}(\Lambda)$ была неполна в пространствах $L_p^\omega (p \geqslant 1)$ и C^ω, необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t) - \eta)}{t^2}\, dt$$

при некотором $\eta > 0$ был конечен.

Основной результат данного параграфа — достаточное условие для неполноты системы экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями.

Прежде всего докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.4.1. *Пусть $\rho > 0$, $\omega \in \Omega_\rho$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и $\bar{n}(\Lambda) < +\infty$. Предположим, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)$ $\left(W^0(\Lambda, \omega)\right)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3.1.1), где ряд сходится равномерно на компактах в плоскости. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $L^\omega_p(C^\omega)$.*

Доказательство. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в пространстве $L^\omega_p(C^\omega)$. Тогда по условию любая функция $e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$, продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3.1.1), где ряд сходится равномерно на компактах в плоскости. Однако, это возможно лишь в случае, когда λ совпадает с одним из чисел λ_k. Получили противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 3.4.1 и теорем 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2 получаем следующий результат.

Теорема 3.4.1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\omega \in \Omega_\rho$. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $L^\omega_p(C^\omega)$.*

Возникает естественный вопрос: справедливо ли обратное утверждение, то есть являются ли приведённые условия для неполноты системы экспоненциальных мономов также необходимыми? Это утверждение будет справедливым, если удастся показать, что из нарушения хотя бы одного из условий: $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$ — будет следовать полнота системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Оказывается, что это не так. И это демонстрирует следующий пример.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^\infty$ такова, что

$$\lambda_{2n} = n, \quad \lambda_{2n-1} = n - \frac{1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4.1}$$

Для этой последовательности относительная кратность $m(\Lambda)$ равна, очевидно, нулю, так как кратности всех точек равны единице. Покажем, что $S_\Lambda = -\infty$.

Имеем:

$$\ln\left|q_\Lambda^{2n}(\lambda_{2n},\delta)\right| = \ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}} + \sum_{\lambda_{2m}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n}),m\neq n}\ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2m}}{3\delta\lambda_{2m}}+$$

$$+\sum_{\lambda_{2m-1}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})}\ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2m-1}}{3\delta\lambda_{2m-1}} + \sum_{\lambda_{2m}\in(\lambda_{2n},\lambda_{2n}+\delta\lambda_{2n}),m\neq n}\ln\frac{\lambda_{2m}-\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2m}}+$$

$$\sum_{\lambda_{2m-1}\in(\lambda_{2n},\lambda_{2n}+\delta\lambda_{2n})}\ln\frac{\lambda_{2m-1}-\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2m-1}}.$$

В силу определения последовательности Λ, для достаточно больших номеров n можно считать, что количество точек вида λ_{2m-1} в интервале $(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})$ совпадает в количеством точек вида λ_{2m} в том же интервале. То же самое будет справедливо и для интервала вида $(\lambda_{2n},\lambda_{2n}+\delta\lambda_{2n})$ Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $\delta<2/3$. Тогда имеем следующую оценку:

$$\ln\left|q_\Lambda^{2n}(\lambda_{2n},\delta)\right| \leqslant \ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}} + 2\sum_{\lambda_{2m-1}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})}\ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2m-1}}{3\delta\lambda_{2m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{\lambda_{2m-1}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})}\ln\frac{\lambda_{2m}-\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}} + 2\sum_{\lambda_{2m-1}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})}\ln\frac{\delta\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2m-1}}+$$

$$+2\sum_{\lambda_{2m-1}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})}\ln\frac{\delta\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}} + 4\sum_{\lambda_{2m-1}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})}\ln\frac{\lambda_{2n}}{3\lambda_{2m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}} + 4\sum_{\lambda_{2m-1}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})}\ln\frac{\lambda_{2n}}{3(1-\delta)\lambda_{2n}} =$$

$$= \ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}} + 4\sum_{\lambda_{2m-1}\in(\lambda_{2n}-\delta\lambda_{2n},\lambda_{2n})}\ln\frac{1}{3(1-\delta)} \leqslant \ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}},$$

поскольку все слагаемые в последней сумме отрицательны. Аналогичная оценка будет справедлива и для выражения $\ln\left|q_\Lambda^{2n-1}(\lambda_{2n-1},\delta)\right|$:

$$\ln\left|q_\Lambda^{2n-1}(\lambda_{2n-1},\delta)\right| \leqslant \ln\frac{\lambda_{2n-1}-\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2n}}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\frac{\ln\left|q_\Lambda^{2n}\left(\lambda_{2n},\delta\right)\right|}{\lambda_{2n}} \leqslant \frac{1}{\lambda_{2n}} \ln\frac{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}{3\delta\lambda_{2n-1}},$$

$$\frac{\ln\left|q_\Lambda^{2n-1}\left(\lambda_{2n-1},\delta\right)\right|}{\lambda_{2n-1}} \leqslant \frac{1}{\lambda_{2n-1}} \ln\frac{\lambda_{2n-1}-\lambda_{2n}}{3\delta\lambda_{2n}}.$$

В силу определения последовательности Λ, в обоих случаях будет справедлива оценка сверху величиной $O(-\ln(n!n)/n)$. Из формулы Стирлинга имеем, что $n! \geqslant n^n/3^n$. Тогда

$$\frac{\ln(n!n)}{n} \geqslant \frac{\ln(\frac{n^n}{3^n}n)}{n} = \frac{n\ln\frac{n}{3}+\ln n}{n} \to +\infty, \quad n\to\infty.$$

Отсюда следует, что $S_\Lambda = -\infty$.

Покажем, что в этом случае система $\mathcal{E}(\Lambda)$ всё равно неполна, например, в пространстве L_p^ω.

Для доказательства неполноты системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ воспользуемся теоремой 2.2.1 и построим ненулевой линейный непрерывный функционал вида (2.2.14) на пространстве L_p^ω, который обращается в нуль на элементах системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Построим данный функционал, руководствуясь идеями из доказательства теоремы 1.1 работы [52] (Theorem 1.1).

Предположим, что, кроме условия $\omega\in\Omega_\rho$, весовая функция ω удовлетворяет следующим дополнительным условиям: для каждого $A>0$ существует $t\left(A\right)>0$ такое, что

$$\omega\left(t+A\right) \geqslant \omega\left(t\right)+t, \qquad t\geqslant t\left(A\right), \tag{3.4.2}$$

и, помимо этого,

$$\omega(t) > \sqrt{|t|}, \quad t<0. \tag{3.4.3}$$

Данные условия, а также тот факт, что $\omega\in\Omega_\rho$, не противоречат друг другу. Например, функция

$$\omega(t) = \begin{cases} e^t-1, & t\geqslant 0;\\ |t|, & t<0\end{cases}$$

удовлетворяет всем перечисленным выше условиям (см. [52], (1.5)).

Рассмотрим функцию

$$G_0(z) = \frac{g(z)h_{\omega,\rho}(z)\,e^{-2M_1b\,|z|-2C_2z}}{(1+z+3\rho)^{[6B\rho b]+2}}, \quad \operatorname{Re} z > -3\rho,$$

где функция $g(z)$ определена в доказательстве леммы 2.2.1 (при этом константы M_1, b, C_2, B так же описаны в процессе доказательства леммы 2.2.1), а функция $h_{\omega,\rho}$ — это функция, существование которой гарантируется леммой 1.3.1. Обратим внимание на то, что оценка (2.2.5), на функцию $g(z)$ и оценка (1.3.2) на функцию $h_{\omega,\rho}$ остаются справедливыми вне зависимости от того, является величина S_Λ конечной или бесконечной, требуется лишь конечность верхней плотности последовательности Λ, что, очевидно, является выполненным, так как

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{2[r]}{r} = 2.$$

Тогда из (2.2.5) и (1.3.2) следует, что функция $G_0(z)$ удовлетворяет следующей оценке

$$\ln|G_0(z)| \leqslant 2B\,x\sigma_\Lambda(|z|) - \omega(2B\sigma_\Lambda(|z|)) - C_2x + A_1 - 3\ln|1+z+3\rho| \leqslant$$
$$\leqslant \omega^*(x) - C_2x + A_1 - 2\ln|1+z+3\rho|, \quad x > -3\rho. \tag{3.4.4}$$

Положим

$$h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x+iy)\, e^{-(x+iy)t}\, dy, \tag{3.4.5}$$

откуда получаем, что функция $h_0(t)\,e^{xt}$ — это преобразование Фурье функции $G_0(x+iy)$ при всех $x > -3\rho$.

Покажем, что функция $G_0(x+iy)$ является обратным преобразованием Фурье для функции $h_0(t)\,e^{xt}$ при $x > 0$. Для этого достаточно показать, что функция $h_0(t)\,e^{xt}$ принадлежит пространству $L_1(-\infty;+\infty)$. Из (3.4.4) и (3.4.5) следует, что

$$h_0(t) \leqslant \inf_{x>-2\rho} \exp\left(\omega^*(x) - C_2x + A_1 - xt\right) \leqslant$$
$$\leqslant e^{A_1} \exp\left(\inf_{x>0}\{\omega^*(x) - C_2x - xt\}\right) =$$
$$= e^{A_1} \exp\left(-\sup_{x>0}\{x(t+C_2) - \omega^*(x)\}\right) = e^{A_1}\exp\left(-\omega(t+C_2)\right). \tag{3.4.6}$$

С учётом (3.4.4) так же, как и при доказательстве леммы 2.2.2, можно показать, что интеграл в (3.4.5) не зависит от x. В дальнейшем этот факт позволит нам подобрать таким образом значение параметра x, при котором будет выполнена необходимая оценка на функцию $h_0(t)$.

Из (3.4.2) следует, что

$$h_0(t) \leqslant e^{A_1} \exp\left(-\omega(t) - t\right), \quad t \geqslant t(C_2). \tag{3.4.7}$$

Поскольку $\omega \in \Omega_\rho$, то для любого фиксированного $x > -2\rho$ найдётся число $S(x) > 0$ такое, что будет верна оценка

$$|h_0(t)\, e^{xt}| \leqslant e^{-Mt}, \quad M > 0,\ t > S(x). \tag{3.4.8}$$

Согласно (3.4.2), найдётся такое $t_0 < 0$, что будет справедлива оценка

$$|h_0(t)\, e^{xt}| \leqslant e^{A_1} \exp\left(-\omega(t + C_2)\right) e^{xt} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\sqrt{|t+C_2|}-x|t|} \leqslant e^{A_1 - x|t|}, \quad t < t_0.$$

Отсюда с учётом (3.4.8) получаем, что для любого фиксированного $x > 0$ функция $h_0(t)e^{xt}$ является обратным преобразованием Фурье для функции $G_0(x+iy)$ при $x > 0$. Следовательно, справедливо равенство

$$G_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_0(t)\, e^{zt}\, dt, \quad x > 0. \tag{3.4.9}$$

Из (3.4.7) следует, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} |h_0(t)e^{\omega(t)}|^q\, dt, \quad 1/q + 1/p = 1,$$

является сходящимся. Далее, поскольку при каждом фиксированном $x > -3\rho$ функция $h_0(t)\, e^{xt}$ является преобразованием Фурье (некоторой функции), то $h_0(t)\, e^{xt} \to 0$ при $t \to \pm\infty$, $x > -3\rho$ (см., например, [31]). Тогда, полагая, например, что $x = -2\rho$, найдём число $t(\rho) < 0$ такое, что $h_0(t) < e^{-2\rho|t|}$ при $t < t(\rho)$. Откуда, поскольку $\omega \in \Omega_\rho$, то

$$|h_0(t)e^{\omega(t)}| \leqslant e^{A_1} \exp\left(-2\rho|t| + \omega(t)\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{A_1} \exp\left(-2\rho|t| + \rho|t|\right) = e^{A_1} \exp\left(-\rho|t|\right), \quad t < t(\rho) < 0.$$

Последнее означает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{0} |h_0(t)\, e^{\omega(t)}|^q\, dt < +\infty, \quad 1/q + 1/p = 1.$$

Таким образом, показано, что $h_0 \in L^\omega_q$.

Определим линейный непрерывный функционал T_0 на пространстве L^ω_p следующим образом:

$$T_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_0(t) f(t)\, dt, \quad f \in L^\omega_p.$$

Из определения функции $G_0(z)$ следует, что она обращается в нуль во всех точках λ_k, $k \geqslant 1$. Так как $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$, то, учитывая (3.4.9), получаем, что

$$T_0(e^{\lambda_k t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_0(t)\, e^{\lambda_k t}\, dt = G_0(\lambda_k) = 0.$$

Поскольку функционал T_0 нетривиален, то отсюда следует неполнота системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве L^ω_p.

Заключение

Диссертация посвящена исследованию вопроса о представлении функций рядами экспоненциальных мономов, то есть функций вида

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left\{t^n e^{\lambda_k t}\right\}_{k=1,\, n=0}^{\infty,\, n_k-1}.$$

При этом предполагается, что показатели данной системы образуются кратную последовательность комплексных чисел

$$\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty},\ |\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|,\ \lambda_k \to \infty,\ k \to \infty,\ n_k \in \mathbb{N}.$$

Помимо этого, в настоящем диссертационном исследовании накладывалось условие почти вещественности на показатели λ_k.

Рассматривались весовые функциональные пространства: весовое пространство L_p^ω абсолютно интегрируемых вместе с p -той степенью функций на вещественной прямой и весовое пространство C^ω непрерывных функций на всей числовой прямой. При этом весовая функция ω предполагалась выпуклой и принадлежала семейству Ω_ρ. В данных пространствах естественным образом определялась норма, относительно которой данные пространства были полными.

Основное внимание в настоящем исследовании уделялось следующему вопросу: при каких условиях на весовую функцию, последовательность показателей системы экспоненциальных мономов любая функция из замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в соответствующих пространствах L_p^ω и C^ω допускает аналитическое продолжение до целой функции, которая представляется во всей плоскости рядом по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$, то есть рядом вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}?$$

Для решения поставленной задачи о представлении рядами строится система функционалов, биортогональная к системе экспоненциальных мономов в пространстве L_p^ω, что позволяет получить формулы для коэффициентов ряда. При этом случай пространства C^ω сводится к случаю пространства L_p^ω. Система биортогональных функционалов строится на основании получения необходимых двусторонних оценок на модуль некоторой мероморфной функции специального вида (она использовалась также в работах В. Фукса, Р. Боаса, Э. Зиккоса и др.). Было доказано, что сходимость ряда при этом является абсолютной и равномерной на компактах плоскости.

Особенностью проведённого исследования является тот факт, что были существенно ослаблены условия на показатели системы экспоненциальных мономов, по сравнению с условиями, накладываемыми ранее авторами работ [36], [40], [41], [47], [50], [52]-[53]. Условия на показатели формулируются в терминах геометрических характеристик последовательности Λ: всевозможных плотностей и индекса конденсации S_Λ, введённого А. С. Кривошеевым.

Кроме того, в качестве приложения полученных результатов о представлении рядами экспоненциальных мономов, в заключительном параграфе диссертации было уделено внимание вопросу о неполноте системы экспоненциальных мономов в пространствах L_p^ω и C^ω. Было доказано, что возможность аналитического продолжения до целой функции любой функции из $W^p(\Lambda, \omega)$ или $W^0(\Lambda, \omega)$ с дальнейшим представлением в виде указанного ряда является достаточным условием для того, чтобы система $\mathcal{E}(\Lambda)$ была неполна.

В диссертации были получены следующие основные результаты:

- получены достаточные условия, при которых функции из весовых пространств L_p^ω и C^ω на вещественной прямой допускают аналитическое продолжение до целых функций, представимых во всей комплексной плоскости рядом экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями;

- получены условия существования биортогональной системы функционалов к системе экспоненциальных мономов для весового пространства L_p^ω; при этом случай пространства C^ω сводится к случаю пространства L_p^ω, поэтому непосредственного построения биортогональной системы функционалов в пространстве C^ω не понадобилось;

- получены формулы для коэффициентов указанных разложений в ряд экспоненциальных мономов; данные формулы получены с помощью построенной биортогональной системы функционалов;

- доказано, что сходимость указанного ряда экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями является абсолютной и равномерной на компактах плоскости;
- сформулированы условия на весовую функцию в пространствах L_p^ω и C^ω, при которых справедливы соответствующие утверждения о представлении рядами экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями;
- получены достаточные условия неполноты системы экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями в указанных функциональных пространствах; при этом приведён пример, показывающий, что данные условия не являются необходимыми для неполноты системы экспоненциальных мономов в рассматриваемых пространствах.

Список литературы

1. Бари, Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве / Н. К. Бари // Учёные записки Московского государственного университета. — 1951. — Т. 148. — С. 69–107.
2. Дьяченко, М. И. Мера и интеграл / М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. — М.: Факториал, 1998. – 160 с.
3. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа /А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.
4. Кривошеев, А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях / А. С. Кривошеев // Известия РАН. Серия математическая. — 2004. — Т. 68. — №2. — С. 71–136.
5. Кривошеев, А. С. Базис в инвариантном подпространстве целых функций / А. С. Кривошеев, О. А. Кривошеева // Алгебра и анализ. — 2015. — Т. 27. — №2. — С. 132–195.
6. Кривошеев, А. С. Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций / А. С. Кривошеев, О. А. Кривошеева // Математический сборник. — 2013. — Т. 204. — №12. С. 49–104.
7. Кривошеева, О. А. Область сходимости рядов экспоненциальных мономов / О. А. Кривошеева // Уфимский математический журнал. — 2011. — Т. 3. — №2. — С. 43–56.
8. Кривошеева, О. А. Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости / О. А. Кривошеева // Алгебра и анализ. — 2011. — Т. 23. — №2. — С. 162–205.
9. Кривошеева, О. А. Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром / О. А. Кривошеева, А. С. Кривошеев // Алгебра и анализ. — 2017. — Т. 29. — №4. — С. 82—139.
10. Кривошеева, О. А. Целые функции экспоненциального типа. Ряды Дирихле: монография / О. А. Кривошеева, А. С. Кривошеев, А. И. Абдулнагимов. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. — 196 с.
11. Кривошеев, А. С. Об одной теореме Леонтьева-Левина / А. С. Кривошеев, А. Ф. Кужаев // Уфимский математический журнал. — 2017. — Т.9. —

№3. — С. 89–101.

12. Кужаев, А. Ф. *О полноте экспоненциальной системы в некоторых весовых пространствах* / А. Ф. Кужаев // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.60 // Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии 2021 – Казань: Изд-во Академии наук РТ. — Т. 60, 2021. — С. 232–233.
13. Кужаев, А. Ф. *О биортогональной системе функционалов к системе экспоненциальных мономов* / А. Ф. Кужаев // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: спутник Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа-2021»: тезисы докладов XII Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 100-летию профессора БашГУ Фарзтдинова Миркашира Минигалиевича (г. Уфа, 6–9 октября 2021 г.)/отв. ред. Л.А. Габдрахманова. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. — С. 4.
14. Кужаев, А. Ф. *О представлении функций рядами экспоненциальных мономов* / А. Ф. Кужаев // Уфимская осенняя математическая школа: Материалы международной научной конференции (г. Уфа, 6-9 октября 2021 г.). В 2 томах. Том 1 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. — Уфа: Аэтерна, 2021. — С. 123–125.
15. Кужаев, А. Ф. *Представление функций рядами экспоненциальных мономов из весовых подпространств* / А. Ф. Кужаев // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 61 // Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения – 2021». Материалы Двадцатой молодёжной научной школы-конференции. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ. — Т. 61, 2021. — С. 61–63.
16. Кужаев, А. Ф. *О достаточных условиях неполноты системы экспоненциальных мономов* / А. Ф. Кужаев // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции (оз. Банное, 14–18 марта 2022 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. — Уфа: Аэтерна, 2022. — С. 43–44.
17. Кужаев, А. Ф. *О достаточных условиях существования биортогональной системы функционалов к системе экспоненциальных мономов* / А. Ф. Кужаев // Сборник тезисов I Всероссийской молодежной школы-конферен-

ции «Современные физика, математика, цифровые и нанотехнологии в науке и образовании (ФМЦН-22)», посвященной 100-летию со дня рождения А.Д. Сахарова. 25-27 апреля 2022 г., г. Уфа /Отв. редакторы: Л.И. Васильева, Р.Н. Измаилов, Н.Ф. Косарев, И.В. Хуснуллин, Р.М. Юсупова. — Уфа: Издательство БГПУ, 2022. — С. 17.

18. Кужаев, А. Ф. *О некоторых геометрических характеристиках последовательности показателей системы экспонент, и их применение к вопросам полноты* / А. Ф. Кужаев // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXXII» (3–9 мая 2021 г.) / Воронежский государственный университет; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2022. — С. 172–173.
19. Кужаев, А. Ф. *О представлении функций рядами экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями* / А. Ф. Кужаев // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022 г.). Том 1 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — С. 127–130.
20. Кужаев, А. Ф. *Биортогональная система функционалов к системе экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями* / А. Ф. Кужаев // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: спутник Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа-2022»: тезисы докладов XIII Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 50-летию образования математического и физического факультетов БашГУ (г. Уфа, 19–22 октября 2022 г.) / отв. ред. Л.А. Габдрахманова. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — 324 с.
21. Кужаев, А. Ф. *Представление функций из весовых подпространств рядами экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями* / А. Ф. Кужаев // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 65 // Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения – 2022». Материалы Двадцатой молодёжной научной школы-конференции. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Ака-

демии наук РТ. — Т. 65, 2022. — С. 43–46.

22. Кужаев А. Ф. *О достаточных условиях неполноты системы экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями* / А. Ф. Кужаев // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции (оз. Банное, 13 – 17 марта 2023 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. — Уфа: Аэтерна, 2023. — С. 65-66.
23. Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с.
24. Лейхтвейс, К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. — М.: Наука, 1985. — 336 с.
25. Леонтьев, А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент / А. Ф. Леонтьев. — М.: Наука, 1980. — 386 с.
26. Леонтьев, А. Ф. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. — М.: Наука, 1976. — 536 с.
27. Леонтьев, А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. — М.: Наука, 1983. — 176 с.
28. Напалков, В. В. Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси / В. В. Напалков, А. А. Румянцева, Р. С. Юлмухаметов // Уфимский математический журнал. — 2010. — Т. 2. — №1. — С. 97–109.
29. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ. / Р. Рокафеллар. — М.: Мир, 1973. — 472 с.
30. Седлецкий, А. М. О биортогональных разложениях по показательным функциям / А. М. Седлецкий // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1972. — Т. 36. — №3. — С. 583–590.
31. Федорюк, М. В. Асимптотика, интегралы и ряды М. В. Федорюк. — М.: Наука, 1987. — 544 с.
32. Хабибуллин, Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси / Б. Н. Хабибуллин // Доклады Академии Наук СССР. — 1988. — Т. 302. — №2. — С. 270–273.
33. Хабибуллин, Б. Н. О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями / Б. Н. Хабибуллин // Математические заметки. — 1988. — Т. 43. — №5. — С. 644–650.

34. Хабибуллин, Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси / Б. Н. Хабибуллин // Математический сборник. — 1989. — Т. 180 — №5. — С. 706–719.
35. Хабибуллин, Б. Н. О росте вдоль прямой целых функций экспоненциального типа с заданными нулями / Б. Н. Хабибуллин // Analysis Mathematica. — 1991. — Т. 17. — №3. — С. 239–256.
36. Anderson, J. M. Closure theorems with applications to entire functions with gaps / J. M. Anderson, K. G. Binmore // Transactions of the American Mathematical Society. — 1971. — V. 161. — P. 381–400.
37. Boas, R. P. Entire functions. / R. P. Boas. — New York: Academic Press, 1954. — pp. 276.
38. Bernstein, V. Lecëons sur les progress recents de la theorie des series de Dirichlet / V. Bernstein. — Paris: Gauthier-Villars, 1933. — pp. 320.
39. Carleson, L. On Bernsteins approximation problem / L. Carleson // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1951. — V. 2. — P. 953–962.
40. Deng, G. T. Incompleteness and closure of a linear span of exponential system in a weighted Banach space / G. T. Deng // Journal of Approximation Theory. — 2003. — V. 125. — №1. — P. 1–9.
41. Fuchs, W. H. J. On the closure of $\{e^{-t}t^{a_n}\}$ / W. H. J. Fuchs // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1946. — V. 42. — P. 91–105.
42. Krivosheev, A. S. The Representation by Series of Exponential Monomials of Functions From Weight Subspaces on a Line / A. S. Krivosheev, O. A. Krivosheeva, A. F. Kuzhaev // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – V. 42. – №6. — P. 1183–1200.
43. Krivosheev, A. S. A Completeness of a System of Exponential Monomials With Positive Exponents / A. S. Krivosheev, O. A. Krivosheeva, A. F. Kuzhaev // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — V. 43. — №9. — P. 1297–1305.
44. Kuzhaev, A. F. On the Representation by Series of Exponential Monomials with Almost Real Exponents / A. F. Kuzhaev, O. A. Krivosheeva // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — V. 44. — №5. — P. 1892–1907.
45. Kuzhaev, A. F. On the Necessary and Sufficient Conditions for the

Measurability of a Positive Sequence / A. F. Kuzhaev // Issues of Analysis. — 2019. — T. 8(26). — №3. — P. 63–72.

46. Lewin, S.S. Uber einige mit der Konvergenz im Mittel verbundenen Eigenchaften von Funktionenfolgen / S.S. Lewin // Mathematische Zeitschrift. — 1930. — V. 32. — H. 4. — S. 491–511.
47. Malliavin, P. Sur quelques procédés d'extrapolation / P. Malliavin // Acta Mathematica. — 1955. — V. 93. — P. 179–255.
48. Ostrowskii, A. Uber die analytishe Fortsetzung von Taylorshen und Dirichletchen Reihen / A. Ostrowskii // Mathematische Annalen. — 1955. — V. 129. — P. 1–43.
49. Pell, A. Biorthogonal systems of functions / A. Pell // Transactions of the American Mathematical Society. — 1911. — V. 12. — P. 135–164.
50. Vinnitskii, B. V. Completeness of exponentials with weight / B. V. Vinnitskii, A. V. Shapovalovskii // Ukrainian Mathematical Journal. — 1989. — V. 41. — P. 1464–1469.
51. Vinnitskii, B. V. A remark on the completeness of exponentials with weight in $L^2(\mathbb{R})$ / B. V. Vinnitskii, A. V. Shapovalovskii // Ukrainian Mathematical Journal. — 2000. — V. 52. — P. 1002–1009.
52. Zikkos, E. Completeness of an exponential system in weighted Banach spaces and closure of its linear span / E. Zikkos // Journal of Approximation Theory. — 2007. — V.146. — №1. — P. 115–148.
53. Zikkos, E. The Closed Span of some Exponential System in Weighted Banach Spaces on the Real Line and a Moment Problem / E. Zikkos // Analysis Mathematica. — 2018. — V. 44. — №4. — P. 605–630.