Отзыв официального оппонента

на диссертацию Кужаева Арсена Фанилевича "**Представление функций рядами экспоненциальных мономов**", представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Вопросы представления функций рядами и интегралами составляют важное направление классического анализа, которое продолжает активно развиваться и в наши дни. Ряды экспоненциальных мономов являются естественным обобщением рядов экспонент и находят многочисленные приложения в силу простой, но эффективной связи с операцией дифференцирования. Современная теория представления аналитических функций рядами экспонент и их обобщений сформировалась во многом благодаря исследованиям научных школ А. Ф. Леонтьева (Уфа) и Ю. Ф. Коробейника (Ростов-на-Дону). Много результатов окончательного характера о свойствах рядов экспоненциальных мономов и представляемых ими функций получено в последнее время А. С. Кривошеевым и О. А. Кривошеевой. Не упоминая работ других авторов (история вопроса достаточно полно изложена диссертантом во введении к работе), укажем только, что диссертация А. Ф. Кужаева примыкает к указанному актуальному разделу комплексного анализа.

Диссертация общим объёмом в 92 стр. состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 53 наименований. Кратко опишем содержание работы, выделяя лишь ключевые результаты.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней вводятся необходимые в дальнейшем характеристики последовательности комплексных чисел; напоминаются известные и выводятся новые связи между ними; доказываются двусторонние оценки модуля одной мероморфной функции, конструкция которой была предложена Р. Боасом в середине прошлого века; наконец, изучаются свойства специального семейства аналитических в полуплоскости функций. Полученные здесь результаты применяются затем в последующих главах.

Основная цель второй главы — построить биортогональную систему функционалов к системе экспоненциальных мономов в весовом пространстве интегрируемых функций на вещественной прямой. Эту задачу решает основная теорема 2.2.1, опирающаяся на несколько других, технически сложных утверждений этой главы.

Третья глава является центральной в работе. Здесь доказана серия теорем о продолжении функций из замыкания (в весовом пространстве) линейной оболочки системы экспоненциальных мономов до целых функций, представимых во всей плоскости соответствующими рядами. Система показателей выбирается почти вещественной и имеющей конечный индекс конденсации А. С. Кривошеева. Подчеркнём, что автору удалось усилить предшествующий результат Е. Зиккоса, сняв некоторые из наложенных там ограничений.

Все утверждения, выносимые на защиту, являются новыми и подкрепляются подробными доказательствами. Таким образом, диссертация А. Ф. Кужаева представляет собой полноценное научное исследование, согласованное с паспортом специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. В диссертационной работе получен ряд новых перспективных результатов, развивающих и уточняющих известные теоретические положения.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Основные результаты автора апробированы на двух научных семинарах и одиннадцати международных конференциях. По итогам исследования опубликованы три статьи в отечественных журналах, индексируемых БД Web of Science и Scopus. Ещё две статьи автора ([11], [45] по списку литературы) тесно примыкают к содержанию работы и вполне могли быть включены в список публикаций по теме диссертации.

Текст диссертации оформлен не очень аккуратно, что, по-видимому, нужно списать на его техническую сложность. Ниже приведён обширный список замечаний.

1. На стр. 5 (13-я строка снизу) должно быть $f \in \overline{V}$. На стр. 6 (10-я строка снизу) лучше вместо «ряда Дирихле» написать «ряда экспонент», поскольку $\lambda_k \in \mathbb{C}$. На стр. 15 в самом начале формулы (0.6) пропущен логарифм (та же опечатка на стр. 33 в формуле (1.1.3)). Как связана с формулой (0.6) следующая за ней выключная формула? На стр. 18 (или на стр. 42) полезно дать примеры функций из класса Ω_ρ. Между формулами (0.7) и (0.8) ((1.3.1) и (1.3.2)) надо написать Ω_ρ вместо $\Omega_{\Lambda,\rho}$. В формулировке леммы 1.3.1 словосочетание: «функция $h_{\omega,\rho}$, не обращающаяся в нуль в $\mathbb{C}$» воспринимается двусмысленно; более того, оно лишнее, ибо из (0.10) следует, что $h_{\omega,\rho}$ отлична от тождественного нуля.

2. На стр. 19 смущают различия в обозначениях норм $\|\cdot\|^{\omega}_{p,\mathbb{R}}$ и $\|\cdot\|^{\omega}_{C}$ для близких ситуаций (либо убрать $\mathbb{R}$ из первого обозначения, либо добавить во второе). На стр. 20 (в формулировке леммы 2.1.2) не указано, на каком множестве $\omega(t)$ является непрерывной выпуклой функцией. На стр. 23 в первой выключной формуле должен стоять обычный предел вместо верхнего. Чуть ниже лучше написать «... для некоторого $c > 0$ ...».

3. В начале главы I, § 1.1 (стр. 31) текстуальный повтор части введения с повтором опечаток. Вопрос к примеру на стр. 35: чему равна величина S_Λ в этом примере? На стр. 36 (правая часть формулы (1.1.7)) должно быть $k \to \infty$ вместо $|z| \to \infty$. На стр. 43 (2-я строка сверху) пропущены индексы у функции $h(z)$, а в формуле на 4-ой строке снизу присутствует странный фрагмент $\dfrac{2}{(yt^{-1}-1)^2} = 0$.

4. На стр. 49 (8, 9-я строки сверху) для функции $g \in C(\mathbb{R})$ без каких-либо дополнительных предположений сделан вывод, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| < +\infty$.

5. Стр. 56 (8 и 10-я строки снизу). Почему бы вместо $\sup\limits_{t>0} \dfrac{\ln t}{t} \leqslant 1$ не написать явно $\sup\limits_{t>0} \dfrac{\ln t}{t} = \dfrac{1}{e}$, а в формуле ниже мажоранту $e^{|\lambda_k|}$ не заменить гораздо более точной $e^{e^{-|\lambda_k|}}$? На стр. 58 (после «Поэтому из предыдущего получаем») в аргументе логарифма по ходу выкладки исчезло π.

6. Завершение доказательства теоремы 2.2.1 неубедительно — нужно правильно обосновать, что $H_{\omega,k,j} \in L_q^\omega$. Наконец, из представленного на стр. 78 очень короткого доказательства от противного леммы 3.4.1 не совсем ясно, из-за чего возникает противоречие.

Несмотря на очевидные погрешности в оформлении, текст диссертации наполнен серьёзным математическим содержанием и включает в себя много новых результатов в востребованном разделе современного анализа. Элементарных доказательств здесь ожидать не приходится, и автор демонстрирует владение разнообразными сложными методами теории функций и функционального анализа. На основании сказанного обоснованно заключаем, что диссертационная работа “**Представление функций рядами экспоненциальных мономов**” удовлетворяет требованиям п. 9 Положения ВАК о порядке присуждения учёных степеней, утверждённого Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 г. (с последующими изменениями), а её автор — Кужаев Арсен Фанилевич — вполне заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»
Шерстюков Владимир Борисович
12 сентября 2023 года.
Докторская диссертация
защищена по специальности
01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.
Даю согласие на обработку персональных данных.

Адрес основного места работы:
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра математического анализа,
рабочий тел.:+7(495)939-18-01,
адрес электронной почты: shervb73@gmail.com

Подпись заверяю спец. по кадрам
Карамасова С.А.