ОТЗЫВ

оппонента на диссертацию Кужаева Арсена Фанилевича
«Представление функций рядами экспоненциальных мономов»,
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по научной специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Кужаева А.Ф. относится к тематике представления рядами экспоненциальных мономов. Автором работы получены достаточные условия на показатели системы экспоненциальных мономов и весовую функцию, при которых функции из весовых пространств L_p^ω и C^ω на вещественной прямой допускают продолжение до целых функций, представимых рядом экспоненциальных мономов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} t^n e^{\lambda_k t}, \tag{1}$$

сходящимся абсолютно и равномерно на компактах в плоскости. При этом пространства L_p^ω и C^ω определяются следующим образом:

$$L_p^\omega = \left\{ f \ : \quad ||f||_{p,\mathbb{R}}^{\omega} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) e^{-\omega(t)} \right|^p dt \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

$$C^\omega = \left\{ f \ : \ ||f||_{C}^{\omega} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| f(t) e^{-\omega(t)} \right| < +\infty \right\}.$$

Особенностью диссертационного исследования является тот факт, что последовательность показателей $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ системы экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left\{ t^n e^{\lambda_k t} \right\}_{k=1,\ n=0}^{\infty,\ n_k-1}$$

должна быть почти вещественной, то есть должны выполняться условия

$$\operatorname{Re}\lambda_k > 0 \ (k \geq 1), \qquad \frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{\operatorname{Re}\lambda_k} \to 0, k \to \infty.$$

Кроме этого, требуется ограниченность последовательности $n_k/|\lambda_k|$ и индекса конденсации S_Λ (индекса конденсации Кривошеева А.С).

Диссертация состоит из введения и трех глав.

В первой главе диссертации рассматриваются различные числовые характеристики последовательности показателей: верхняя плотность $\overline{n}(\Lambda)$, относительная кратность $m(\Lambda)$, индекс конденсации А.С. Кривошеева S_Λ. Отметим, что последняя характеристика играет важную роль при решении задач, связанных с представлением аналитических функций из различных функциональных пространств в виде ряда экспоненциальных мономов, с распределением особых точек на границе области сходимости этих рядов. Этот индекс схож по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна-Леонтьева, но является более универсальной характеристикой.

Вторая глава диссертации посвящена построению биортогональной системы функционалов к системе экспоненциальных мономов в соответствующих весовых пространствах. Результаты второй главы являются вспомогательными для третьей главы, но, в то же время, известно, что построение таких систем в различных функциональных пространствах является важной задачей в области функционального анализа.

Основные результаты диссертации содержатся в третьей главе. Рассматривается $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ − почти вещественная последовательность. Через $W^p(\Lambda,\omega)$ $(p \geq 1)$ и $W^0(\Lambda,\omega)$ обозначим соответственно замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^ω и C^ω, соответственно.

Для каждого $\rho > 0$ рассматривается множество Ω_ρ неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leq \rho|t|$ при $t \leq 0$, и

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\omega(t)}{t} = +\infty.$$

При этих условиях $\omega(t)$ − неубывающая функция при $t \geq 0$. Далее из множества Ω_ρ выделяется подмножество $\Omega_{\Lambda,\rho}$, для функций которого выполнено неравенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega\big(2\sigma_\Lambda(t)\big)}{t^2}\,dt < +\infty$$

Возникает естественный вопрос: какие условия нужно наложить на последовательность Λ и на вес ω, чтобы каждая функция f из $W^p(\Lambda,\omega)$ $(W^0(\Lambda,\omega))$ имела представление в виде ряда (1)? В 2018 году Э. Зиккосом был получен результат, частично отвечающий на этот вопрос. Э. Зиккос доказал, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda,\omega)$ $(W^0(\Lambda,\omega))$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (1), если выполнены следующие условия на Λ: последовательность Λ должна принадлежать классу $U(d,0)$, который строится при помощи простой $(n_k = 1)$ последовательности, удовлетворяющей условию

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0, \qquad k \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

В частности, принадлежность Λ классу $U(d,0)$ означает, что Λ имеет плотность $n(\Lambda) = d$, верно (2) и $n_k \leq c(\lambda_k)^\alpha$, $k \geq 1$, где $c > 0$ и $\alpha \in (0,1)$.

При этом функция $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$ $(\rho > 0)$ и выполнены еще два дополнительных условия:

1) $\omega(t) \geq t^2$ при $t \geq \tau \geq 0$;

2) для каждого $A > 0$ существует $t(A) > 0$ такое, что

$\omega(t + a) \geq \omega(t) + t$ при $t \geq t(A)$.

Результаты, полученные Кужаевым А.Ф. обобщают этот результат на случай почти вещественных последовательностей (теоремы 3.2.1 и 3.2.2), но условия, накладываемые на последовательность Λ и вес ω, существенно слабее, чем условия Э. Зиккоса. Также получен некий аналог теоремы Коши-Адамара (лемма 3.1.1), который обеспечивает абсолютную сходимость ряда (1) и равномерную сходимость этого ряда на компактах из плоскости. Помимо этого, приведена формула для вычисления коэффициентов ряда (1), которая была получена благодаря результатам из второй главы, связанных с построением системы функционалов биортогональных к системе экспоненциальных мономов.

В последнем параграфе третьей главы показывается, что задача о представлении рядами в весовых пространствах L_p^{ω} и C^{ω} тесно связана с вопросом о неполноте в этих пространствах системы экспоненциальных мономов. В теореме 3.4.1 диссертации доказано, что в условиях теорем 3.2.1 и 3.2.2 система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве L_p^{ω} (C^{ω}). Оказалось, что данные условия на последовательность Λ и функцию ω не являются необходимыми, что и продемонстрировано на примере.

Все полученные результаты являются новыми и снабжены строгими и подробными математическими доказательствами, которые опубликованы в рецензируемых изданиях из перечня RSCI, а также Web of Science, Scopus и в достаточной мере апробированы на Международных научных конференциях. Результаты, полученные Кужаевым А.Ф., носят теоретический характер, и могут быть использованы в теории целых функций, в проблемах спектрального анализа-синтеза в пространствах аналитических функций, а также при исследовании интерполяционных задач.

В работе имеются опечатки и неточности.

- Стр. 28, 9 строка снизу и стр. 80, 7 строка снизу. Вместо $t < 0$ должно быть $t < t_0$, где t_0 – некоторое отрицательное число,
- Стр. 33, 11-ая строка сверху. В формулы отсутствует знак логарифма
- Стр. 43, 4, строка снизу. Не может супремум положительной величины быть равным нулю,

Укажу в качестве замечания, что в конце содержательной части работы (в заключении) не хватает описания перспективных направлений для дальнейших исследований по тематике диссертации.

Отмеченные погрешности легко устранимы и не влияют на положительную оценку научно-квалификационной работы (диссертации) в целом и не умаляют ее достоинств.

Считаю, что диссертационная работа А.Ф. Кужаева удовлетворяет п. 9-11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней».

Соискатель заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент

Доктор физико-математических наук (01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ), доцент, профессор кафедры математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный педагогический университет»

Георгий Генрихович Брайчев

«02» 09 2023 г.

107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14
Телефон: 8 (499) 264-33-36
E-mail: braichev@mail.ru

Подпись Г. Г. Брайчева
УДОСТОВЕРЯЮ
Зам. начальника Управления делами
А.Б. Никитина