ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертацию Кужаева Арсена Фанилевича
«Представление функций рядами экспоненциальных мономов»,
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по научной специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации рассматриваются весовые пространства комплекснозначных интегрируемых и непрерывных функций на вещественной прямой с весом $\omega(t)$ $(p \geq 1)$

$$L_p^\omega = \left\{ f: \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) e^{-\omega(t)} \right|^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad C^\omega = \left\{ f: \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| f(t) e^{-\omega(t)} \right| < \infty \right\}.$$

Изучается проблема представления функций их этих пространств рядами экспоненциальных мономов, т.е. рядами вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k - 1} a_{k,n} t^n e^{\lambda_k t}, \tag{1}$$

построенных по системе $\mathcal{E}(\Lambda) = \left\{ t^n e^{\lambda_k t} \right\}$, где $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Также в диссертации выясняются условия полноты (неполноты) системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^ω и C^ω.

Одной из классических задач теории функций комплексного переменного является задача о представлении функций из различных пространств рядами (1) по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$. При исследовании данной проблемы возникают задачи, связанные с характером сходимости ряда (1), а также с получением формул для коэффициентов этого ряда. Отметим, что вопросы представления рядами (1) тесно связаны с вопросами полноты (неполноты) системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в соответствующих пространствах функций. Указанными выше задачами занимались такие математики, как В. Фукс, П. Мальявен, Д.М. Андерсон, К.Г. Бинмор, А.Ф. Леонтьев, Б.В. Винницкий, А.В. Шаповоловский, Г.Т. Денг, А.С. Кривошеев, Р.С. Юлмухаметов, Э. Зиккос и др.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

В первой главе диссертации рассматриваются различные числовые характеристики последовательности показателей: верхняя плотность $\overline{n}(\Lambda)$, относительная кратность $m(\Lambda)$, индекс конденсации А. С. Кривошеева S_Λ.

Отметим, что последняя характеристика играет важную роль при решении задач, связанных с представлением аналитических функций из различных функциональных пространств в виде ряда экспоненциальных мономов, с распределением особых точек на границе области сходимости этих рядов. Этот индекс схож по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна-Леонтьева, но является более универсальным.

В первом параграфе исследуется взаимосвязь перечисленных выше характеристик. Приводится следующий результат (лемма 1.1.1) для кратной комплексной последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$: если $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$, то и $m(\Lambda) < +\infty$, а, если $\mathcal{S}_\Lambda > -\infty$, то верно также и обратное утверждение. Во втором и третьем параграфе содержатся вспомогательные результаты, связанные с оценками сверху и снизу на функции специального вида и построению аналитической функции с подходящими оценками. Эти результаты необходимо получены для построения биортогональной системы функционалов.

Вторая глава диссертации посвящена построению биортогональной системы функционалов к системе экспоненциальных мономов в соответствующих весовых пространствах. С одной стороны, результаты второй главы являются вспомогательными для третьей главы. С другой известно, что построение таких систем в различных функциональных пространствах является важной задачей в области функционального анализа. В работах А.Ф. Леонтьева впервые было дано понятие биортогональной системы функций к системе экспоненциальных мономов в выпуклой области комплексной плоскости для случая простых и кратных показателей. Им же были получены необходимое и достаточное условие существование такой системы.

Первый параграф второй главы посвящен основным свойствам весовых пространств L_p^ω и C^ω. Во втором параграфе получен основной результат второй главы (теорема 2.2.1): построена система функционалов, биортогональная к системе экспоненциальных мономов в пространстве L_p^ω. Отметим, что данная система удовлетворяет дополнительным условиям на рост. Построенная система функционалов используется в третьей главе для получения формул на коэффициенты ряда по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Центральное место в диссертации отведено третьей главе. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ – почти вещественная последовательность, т.е. выполнено

$$\operatorname{Re}\lambda_k > 0 \ (k \geq 1), \qquad \frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{\operatorname{Re}\lambda_k} \to 0, k \to \infty.$$

Через $W^p(\Lambda, \omega)$ $(p \geq 1)$ и $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим соответственно замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^ω и C^ω, соответственно.

Возникает вопрос: какие условия нужно наложить на последовательность Λ и на вес ω, чтобы каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)$ $(W^0(\Lambda, \omega))$ имела представление в виде ряда (1)? В 2018 году Э. Зиккосом был получен результат, частично отвечающий на этот вопрос.

Для каждого $\rho > 0$ символом Ω_ρ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \le \rho|t|$, $t \le 0$, и

$$\lim_{t \to +\infty} \omega(t)/t = +\infty.$$

При этих условиях $\omega(t)$, $t > 0,-$ неубывающая функция. Подмножество Ω_Λ, для которого выполнено неравенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega\left(2\sigma_\Lambda(t)\right)}{t^2} \mathrm{d}t < \infty.$$

Обозначим $\Omega_{\Lambda,\rho}$. Э. Зиккос доказал, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)$ $(W^0(\Lambda, \omega))$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (1), если выполнены следующие условия на Λ: последовательность Λ должна принадлежать классу $U(d, 0)$, который строится при помощи простой ($n_k = 1$) последовательности, удовлетворяющей условию

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \ge h > 0, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

В частности, принадлежность Λ классу $U(d, 0)$ означает, что Λ имеет плотность $n(\Lambda) = d$, верно (2) и $n_k \le c(\lambda_k)^\alpha$, $k \ge 1$, где $c > 0$ и $\alpha \in (0,1)$. При этом функция $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$ $(\rho > 0)$ и выполнены еще два условия:

1) $\omega(t) \ge t^2$, $t \ge \tau \ge 0$;
2) для каждого $A > 0$ существует $t(A) > 0$ такое, что $\omega(t + a) \ge \omega(t) + t$, при $t \ge t(A)$.

А.Ф. Кужаеву удалось обобщить этот результат на случай почти вещественных последовательностей (теоремы 3.2.1 и 3.2.2), но условия, накладываемые на последовательность Λ и вес ω, существенно слабее, чем условия Э. Зиккоса. Также получен некий аналог теоремы Коши-Адамара, который обеспечивает абсолютную сходимость ряда (1) и равномерную сходимость этого ряда на компактах из плоскости. Более того, приведена формула для вычисления коэффициентов ряда (1), которая была получена благодаря результатам из второй главы, связанных с построением системы функционалов, биортогональных к системе экспоненциальных мономов.

В последнем параграфе третьей главы показывается, что задача о представлении рядами в весовых пространствах L_p^ω и C^ω тесно связана с вопросом о неполноте в этих пространствах системы экспоненциальных мономов. В теореме 3.4.1 диссертации доказано, что в условиях теорем 3.2.1 и 3.2.2 система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве L_p^ω (C^ω). Оказалось, что данные условия на последовательность Λ и функцию ω не являются необходимыми, что и продемонстрировано на примерах.

Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично А.Ф. Кужаевым, являются новыми, актуальными и представляют несомненный научный интерес для специалистов в области теории функций.

Основные положения диссертационной работы неоднократно докладывались соискателем на международных конференциях, на научных семинарах, проводимых в ФБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», ФБОГУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет». Результаты диссертационного исследования опубликованы в трех рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах данных Web of Science и Scopus.

Считаю, что А.Ф. Кужаев является сформировавшимся специалистом в области теории функций и комплексного анализа и его диссертационная работа удовлетворяет п. 9-11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней».

Соискатель заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель

Доктор физико-математических наук (01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ), доцент, профессор кафедры математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

ОКр / Кривошеева Олеся Александровна

«19» мая 2023 г.

450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
Телефон: 8(347)273-66-35
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

Подпись Кривошеевой О.А. заверяю:
Ученый секретарь Ученого совета университета
к. филол. наук, доцент Н.В. Ефименко