На правах рукописи
УДК 517.51, 517.54

Нас

Насибуллин Рамиль Гайсаевич

Анализ и геометрия одномерных и пространственных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Казань – 2024

Работа выполнена на кафедре теории функций и приближений института математики и механики имени Н. И. Лобачевского Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Научный консультант: **Авхадиев Фарит Габидинович**
доктор физико–математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Карманова Мария Борисовна**
доктор физико–математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории геометрической теории управления ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Малютин Константин Геннадьевич
доктор физико–математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и прикладной математики ФГБОУ ВО "Курский государственный университет"

Степанов Владимир Дмитриевич
доктор физико–математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник вычислительного центра ДВО РАН, обособленного подразделения ФГБУН Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН

Ведущая организация: ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург

Защита состоится «14» февраля 2025 г. в 14^{00} часов на заседании объединенного диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, ФГБОУ ВО "Уфимский университет науки и технологий", по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО "Уфимский университет науки и технологий" и на сайте https://uust.ru/.

Автореферат разослан «   »   2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Исаев Константин Петрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объекты исследования. Диссертация посвящена одномерным и пространственным интегральным неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми и их применениям. В ней исследуются оценки констант-функционалов, зависящих от геометрических характеристик областей, таких как объём, диаметр, внутренний радиус, максимальный конформный модуль области, а также зависящих от весовых функций и числовых параметров задачи. Рассмотрены некоторые применения доказанных одномерных и многомерных неравенств.

Актуальность темы. Функциональные и спектральные неравенства для заданных на отрезке или в многомерных областях с различным поведением на границе функций получили широкое развитие и применение. В силу разного рода приложений в математике и математической физике, в частности, в геометрической теории функций, в теории изопериметрических неравенств и в теории вложения функциональных пространств[1] [2] [3], особое место среди таких неравенств занимают неравенства типа Харди. Неравенства типа Харди связывают функцию и её производную в интегральном соотношении[4] [5]. В данной диссертационной работе впервые дается систематическое изложение теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области.

Неравенства Харди и неравенства типа Харди, которым уже чуть больше 100 лет, развивались и обобщались в различных направлениях и от обособленных неравенств это направление исследований перетекло в теорию. Теория, которая началась от классических дискретных и интегральных неравенств, развилась до весовых многомерных неравенств в различных классах областей. Широкое распространение получили дискретные и одномерные интегральные неравенства и их многомерные аналоги, установлены неравенства для различных весовых функций, получены необходимые и достаточные условия на весовые функции, которые гарантирует выполнение неравенств с конечными константами. В отдельное направление вытекло исследование точности констант и случая достижения равенства в неравенствах. Это послужило толчком усиления неравенств с точными константами с помощью дополнительных слагаемых. Направление неравенств типа Харди в многомерных областях само разбилось на

[1]Авхадиев, Ф.Г. *Теоремы вложения, связанные с жесткостью кручения и основной частотой*/ Ф.Г. Авхадиев // Изв. РАН. Сер. матем. – 2022. – Т. 86, № 1. – С. 3–35

[2]Соболев, С.Л. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных производных* / С.Л. Соболев // М.: Наука, 1989, – 254 с.

[3]Мазья, В.Г. *Пространства С.Л. Соболева* / В.Г. Мазья// Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

[4]Л. Аермарк, А. Лаптев *Неравенство Харди для оператора Грушина с магнитным полем типа Ааронова-Бома* // Алгебра и анализ - 2011. - Т. 23, №2. - С. 1-8

[5]Laptev, A. *Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms* / A. Laptev, T. Weidl // Operator Theory: Advances and Applications. - 1999. - Vol. 108. - P. 299-305.

различные течения как:

1. выявление класса областей, для которых справедливо нетривиальное неравенство;

2. обоснование или нахождение точных констант для конкретного класса областей;

3. расширение класса областей при фиксированной точной константе;

4. доказательство неравенств для конкретных многомерных областей.

Каждое из этих поднаправлений имеет свои сложности и остается множество нерешенных задач.

Естественным также является желание упорядочить и систематизировать эту теорию. Поэтому написано более 6 различных монографий, посвященных неравенствам типа Харди. Эти монографии имеют практически непересекающиеся содержания. В силу разнообразия и вариации неравенств такого вида, не очень ясно представляется путь этой систематизации и упорядочивания в максимальной общности. Наиболее удачным, на наш взгляд, путем систематизации является сужение охвата неравенств и рассматриваемых задач. Что подтверждается замечательной монографией Ф.Г. Авхадиева[6], посвященной только конформно инвариантным неравенствам. Многомерным неравенствам посвящена монография трех авторов А.А. Балинского, В.Д. Эванса и Р.Т. Льюиса[7]. В ней собраны, возможно, самые «красивые» неравенства. Особо стоит отметить одно из достоинств этой монографии — это разнообразие методов и различных идей, которые могут быть применены в других близлежащих областях. Тематике весовых неравенств типа Харди посвящена монография А. Куфнера и Л.Э. Персона[8].

В диссертационной работе мы рассматриваем неохваченное направление одномерных и многомерных неравенств Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области. На выбор этого направления повлияли следующие факты. Известны лишь отдельные и разрозненные неравенства, которые приведены в обзорной статье [2] и естественным является их систематизация и объединение. Более того, остается много нерешенных задач, которые несут самостоятельный интерес и имеют приложения. Мы выбрали путь изложения, связывающий соответствующие одномерные неравенства с методом получения их многомерных аналогов. В одномерных неравенствах со специальным весом нет сложностей, приходящих от области, они являются аналитической основой геометрических описаний. Геометрия одномерных неравенств диктуется методом

[6] Авхадиев, Ф.Г. *Конформно инвариантные неравенства* / Ф.Г. Авхадиев // Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2020 – 260 с.

[7] Balinsky, A.A. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality* / A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis // Heidelberg - New York- Dordrecht - London: Springer, 2015.

[8] Kufner, A. *Weighted inequalities of Hardy type* / A. Kufner, L.E. Persson // New JerseyLondon-Singapore-Hong Kong: World Scientific, 2003.

доказательства их пространственных аналогов. В основе различных классов вариационных задач лежат специально подобранные связанные одномерные весовые неравенства. Аппарат обоснования пространственных неравенств с использованием одномерных неравенств, вид и форма весовых функций которых диктуется геометрией областей, является недооцененным.

Развитие, обобщение и уточнение одномерных неравенств с различными весами и соответствующими методами доказательства позволит дать единую трактовку и основу обоснования пространственных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми.

Неравенства типа Харди, усиленные дополнительными слагаемыми, играют важную роль в теории уравнений в частных производных и нелинейном анализе. Они используются, например, при исследовании устойчивости решений эллиптических и параболических уравнений, а также при изучении существования и асимптотического поведения решений уравнений теплопроводности с сингулярными потенциалами. В статье[9] Х. Брезис и Дж.Л. Васкес рассматривают полулинейное эллиптическое уравнение

$$\Delta u = \lambda f(u)$$

в ограниченной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и с граничным условием Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Накладываются некоторые ограничения на нелинейность f, которые обеспечивают существование максимального значение λ_*, для которого задача имеет решение, и исследуются существование и свойства соответствующего неограниченного экстремального решения. Экстремальное решение и максимальное значение λ_* характеризуются двумя критериями, одним из которых является неравенство вида

$$H_1 \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^2}{|x|^2} dx + H_2 \left(\frac{\omega_n}{|\Omega|}\right)^{2/n} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx, \qquad (1)$$

справедливое для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и любой функции $g : \Omega \to \mathbb{R}$ из замыкания семейства непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω и с конечным интегралом Дирихле, где $|\Omega|$ — объём области, H_1 и H_2 — некоторые известные константы. Это неравенство доказано методом симметризации области, который позволяет вместо неравенства в Ω рассматривать соответствующее неравенство в n-мерном шаре с тем же объёмом. В дальнейшем Х. Брезис и М. Маркус[10] установили аналог предыдущего неравенства в терминах функции расстояния до границы и диаметра области.

[9]Brezis, H. *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems* / H. Brezis, J.L. Vázquez // Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid - 1997. - Vol. 10, №2. - P. 443-469.

[10]Brezis, H. *Hardy's inequality revisited* / H. Brezis, M. Marcus // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) – 1997. – Vol. 25, № 1-2. – P. 217–237.

Задача добавления дополнительного слагаемого в неравенства типа Харди также связана с классическими оценками первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ для лапласиана при граничных условиях Дирихле и с неравенством Пуанкаре. Широко известны оценка Пуанкаре и изопериметрическое неравенство Рэлея-Фабера-Крана в терминах диаметра и объёма области. Поэтому весьма ожидаемыми являются неравенства типа Харди с дополнительными слагаемыми, константы которых зависят от диаметра, объёма и внутреннего радиуса области или даже от этих характеристик одновременно. Существует множество путей, в сторону которых можно развивать и обобщать теорию неравенств Харди с дополнительными слагаемыми. Естественно рассматривать следующие направления:

1. получение L_1- и L_p- неравенств в одномерном и пространственном случае;
2. различные обобщения весовых функций[11];
3. поиск неравенств, для которых возможен эффект Брезиса-Маркуса[12];
4. распространение неравенств в классы областей, отличных от выпуклых;
5. установление неравенств-мостиков, связывающих эти три класса вариационных задач[13];
6. исследование возможных приложений.

Несмотря на то, что неравенствам Харди посвящали свои работы активно работающие в этой области российские и зарубежные математики такие, как Ф.Г. Авхадиев, В.И. Буренков, К.-Й. Виртс, Ф. Гецтези, М.Л. Гольдман, Ю.А. Дубинский, Е.Б. Дэвис, А. Куфнер, А. Лаптев, В.Г. Мазья, В.М. Миклюков, Р. Ойнаров, Д.В. Прохоров, Дж.М. Родригес, М. Ружанский, С.Л. Соболев, В.Д. Степанов, Д. Сураган, Дж. Тидблум, Дж.Л. Фернандес, и многие др., в этих направлениях получены лишь некоторые отдельные результаты, о которых будет упомянуто ниже. Поэтому целью диссертации является систематизация неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, их исследование и развитие в этих шести направлениях. Важной составной частью поставленной цели является изучение случаев, когда появляется возможность усиления соответствующих неравенств за счет дополнительных слагаемых. Отметим, что весьма существенным также оказывается исследование сильных и слабых констант-функционалов Харди.

В основе диссертации лежит, на первый взгляд, простая идея добавления дополнительного слагаемого в точные неравенства с недостижимыми константами. В.И. Левин[14], чьим учителем и формальным руководителем по аспирантской подготовке был Г.Х. Харди[15], показал, что константа 4 является

[11]Например, с весами, зависящими от гиперболического радиуса.

[12]Возможность добавления дополнительного слагаемого.

[13]Имеется ввиду неравенства в областях с фиксированным объёмом, диаметром и внутренним радиусом.

[14]Левин, В.И. *О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств* / В.И. Левин // Матем. сб. - 1938. - Т. 4(46), №2, – С. 309–324.

[15]Левин, В.И. *Виктор Иосифович Левин — выдающийся педагог и ученый* / В.И. Левин // Системы управления, связи и безопасности : журнал. - Санкт-Петербург: ООО <Корпорация Интел Групп>, 2023.

точной в следующем соотношении

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt < 4\int_0^1 y'^2(t)dt \tag{2}$$

для всех абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций y таких, что $y(0)=0$, $y \not\equiv 0$ и $y' \in L^2(0,1)$. Он также получил более сильную версию (2). А именно, показал, что для функций из того же класса справедливо с точной константой равной единице неравенство

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2(2-t)^2}dt < \int_0^1 y'^2(t)dt. \tag{3}$$

Мы легко можем преобразовать весовую функции $t^{-2}(2-t)^{-2}$ и переписать (3) в виде

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt + 2\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t(2-t)}dt + \int_0^1 \frac{y^2(t)}{(2-t)^2}dt < 4\int_0^1 y'^2(t)dt, \tag{3'}$$

по которому сразу становится ясно, каким именно образом усиливается неравенство (2) — с помощью дополнительных слагаемых.

Дальнейшие усиления и обобщения одномерного классического неравенства (2) были получены, например, в замечательных работах Х. Брезиса и М. Маркуса, М. Хоффманн-Остенхофа, Т. Хоффманн-Остенхофа и А. Лаптева[16], Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса[17]. Дополнительные слагаемые в этих неравенствах отличаются весовыми функциями и константами в них. Достаточно тяжело сказать какое неравенство точнее или лучше, т.к. они приводят к различным многомерным аналогам. Упомянутые работы послужили толчком для начала развития неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми как теории и отдельного направления исследований.

До наших исследований открытым оставался вопрос о возможности усиления неравенства (3) дополнительными слагаемыми. В диссертации показано, что для любой абсолютно непрерывной функции $y:[0,1]\to\mathbb{R}$ такой, что $y(0)=0$ и $y'\in L_2[0,1]$, справедливо точное неравенство

$$(1-\nu^2q^2)\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2(2-t)^2}dt + q^2 j'^2_\nu \int_0^1 \frac{y^2(t)}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}}dt \le \int_0^1 y'^2(t)dt,$$

где j'_ν — первый положительный корень производной J'_ν функции Бесселя J_ν порядка $\nu \ge 0$.

Дополнительной мотивацией к исследованию и обобщению неравенства (3) является то, что эти усиленные неравенства приводят к пространственным

- № 2. - С. 258-274.

[16]Hoffmann-Ostenhof, M. *A geometrical version of Hardy's inequality* / M. Hoffmann Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev // J. Funct. Anal. - 2002. - Vol. 189, №2. - P. 539-548.

[17]Avkhadiev, F.G. *Unified Unified Poincare and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* / F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // Z. Angew. Math. Mech. - 2007. - Vol. 87, №8-9. - P. 632-642.

неравенствам в терминах расстояния до границы области δ, в которых константа в дополнительном слагаемом больше чем в соответствующих известных многомерных неравенствах Х. Брезиса и М. Маркуса, М. Хоффманн-Остенхофа, Т. Хоффманн-Остенхофа и А. Лаптева в областях с конечным диаметром и объёмом. Этим результатам посвящены **первые два параграфа Главы 3**. Например, в выпуклых областях справедливы неравенства

$$\int_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)}dx + \frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}\int_\Omega g^2(x)dx,$$

а при $p \in (2,3]$ имеем

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \geq \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx + \frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2 B(n,p)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\int_\Omega |g(x)|^p dx,$$

где $C_0(1) \approx 1.25578$ и λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$(p-1)J_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Здесь через $C_0^1(\Omega)$ обозначено известное семейство непрерывно дифференцируемых функций $g : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями в области Ω, а через ∇g обозначен градиент g, т.е. $\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial g(x)}{\partial t_n}\right)$.

Для сравнения, максимальная известная константа в L_2-неравенстве была $1/4$, в нашем случае мы имеем — 0.985.

В пунктах **3.1.2–3.1.5**, **3.2.2-3.2.4** мы получаем аналогичные результаты в произвольных областях в терминах расстояния в среднем, в регулярных областях, в областях, удовлетворяющих условию θ-конуса, в λ близких к выпуклым и в выпуклых областях в терминах функции расстояния до границы области. Неравенства такого вида в областях, λ близких к выпуклым[18], доказываются впервые.

В свою очередь, задача добавления дополнительного слагаемого связана с классическими оценками первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ для лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_1(\Omega)\int_\Omega |g(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx, \quad \forall g \in C_0^1(\Omega).$$

В виде следствий наших результатов из **параграфов 1.4** в **4.4** мы получим, что в выпуклых областях

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{5\lambda_1^2 K(n)}{8|\Omega|^{2/n}},$$

где постоянная $\lambda_1 \approx 1.25578$, $K(n) = n\left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right]^{2/n}$, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности n-мерной единичной сферы и $|\Omega|$ — объём области. Аналогичные результаты справедливы также в различных классах невыпуклых областей.

[18]Авхадиев, Ф.Г. *Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна* 1/4 / Ф.Г.Авхадиев // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014.– Т. 78, № 5. – С. 3–26.

Достаточно неожиданным оказывается, что используя подходы З. Нехари[19] и Ф.Г. Авхадиева[20] родственные (3) неравенства удается применить для расширения известных классов однолистных мероморфных в односвязных областях функций. Этим результатам посвящен **параграф 4.1**. Отметим, что Я. Эфрамидис[21] получил достаточные условия типа Нехари уже для гармонических функций. Поэтому в **главе 4**, **параграф 2** рассматриваются другого вида достаточные условия Авхадиева-Беккера уже для бигармонических отображений, которые доказываются методом продолжений. Такого рода исследования могут прояснить взаимосвязь различных типов достаточных условий однолистности и многолистности.

Приведем далее точное с недостижимой константой неравенство Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса. Они показали, что для всех непрерывно дифференцируемых функций $y \in C^1([0,1])$ таких, что $y(0) = 0$ и $y \not\equiv 0$, справедливо точное неравенство

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt + q^2\lambda^2 \int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^{2-q}}dt < 4\int_0^1 y'^2(t)dt, \tag{4}$$

где λ является корнем специального уравнения для функции Бесселя.

Отметим также многомерный результат Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса с весовыми функциями, зависящими от функции Бесселя, в основе доказательства которого лежит одномерное неравенство. Им удалось доказать неравенство

$$\int_\Omega |\nabla g(x)|^2 \frac{dx}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)} \geq$$
$$\geq s\frac{1-\nu^2q^2}{4}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)}\frac{dx}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)} + \frac{sq^2\lambda_\nu^2(2/q)}{4\delta_0^q(\Omega)}\int_\Omega \frac{|g(x)|^2}{\delta^{2-q}(x)}\frac{dx}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)},$$

где s, ν и q — положительный числа, $\Phi_{\nu,q}(x) = \sqrt{x}J_\nu\left(\lambda_\nu(2/q)x^{q/2}\right)$, а $z = \lambda_\nu(2/q)$ — константа Лэмба, определяющееся как первое положительное решение уравнения

$$J_\nu(z) + qzJ'_\nu(z) = 0.$$

В **главе 3 (параграф 3.4)** получены различные L_1-и L_p-обобщения этого пространственного неравенства Авхадиева-Виртса. Например, доказано, что если Ω — n-мерная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n, \delta_0 = \delta_0(\Omega) < \infty$, $s \in (0,+\infty)$, $\nu \in (0,+\infty)$ и $p \in [2,+\infty)$, то для произвольной функции $g \in C_0^1(\Omega)$

[19] Nehari, Z. *The Schwarzian derivative and schlicht functions* / Z. Nehari // Bull. Amer. Math. Soc. - 1949. - Vol. 55, №6. - P. 545-551.

[20] Авхадиев, Ф.Г. *Достижения и проблемы в достаточных условиях конечнолистности аналитических функций* / Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев // Изв. вузов. Матем. - 1986. - №10. - С. 3-16.

[21] Efraimidis, I. *Criteria for univalence and quasiconformal extension for harmonic mappings on planar domains* / I. Efraimidis // Annales Fennici Mathematici - 2021. - Vol. 46, №3. - P. 1123-1134.

выполнено следующее неравенство типа Харди:

$$\int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})}dx \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\frac{\pi^2}{(2\delta_0)^p}\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)^{p-2}dx,$$

где $j_{\nu-1}$ — первый положительный нуль функции Бесселя $J_{\nu-1}(x)$.

Неравенство (4) и его усиления-обобщения в L_2-случае с точными константами[22] [23] являются одними из красивейших результатов в теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми. Естественно было бы обобщить и развить неравенства такого вида, например, получить их L_p-аналоги или добавить еще дополнительное слагаемое к уже усиленным неравенствам. Долгое время таких обобщений практически не было. Это связано с тем, что применяемый в статьях подход Авхадиева-Виртса так тщательно "подточен" под L_2-случай, что нет каких-либо известных техник для дальнейшего развития и обобщения. И, в общем, к настоящему времени нет достаточно хороших методов обоснования L_p-неравенств, а известные подходы тяжело поддаются обобщениям и алгоритмизации. Поэтому в **Главе 2** развиваются и исследуются различные способы получения L_p-неравенств и доказываются отдельно L_1-, L_2- и L_p-неравенства.

Один из подходов связан с обоснованием L_1-неравенств с дополнительными слагаемыми и последующим их применением. Сильная и слабая сторона L_1-неравенств в плане усиления добавлением дополнительных слагаемых — это достижимость констант. Поэтому естественной является идея ослабления точных констант. На первый взгляд техника ослабления констант в L_1-неравенствах может показаться неэффективной. На самом деле, в комбинации с техниками из **Главы 2** L_1-неравенства позволяют получить аналоги при $p > 1$ с константами лучшими чем в ранее известных неравенствах в L_p-случае. В **пункте 2.4** при $p \geq 2$, $s > 0$, $q \in (0, +\infty)$ и $\nu \in [0, \frac{s}{q}]$ для любой абсолютно непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции y получено следующее неравенство

$$\frac{p^p}{(s^2-\nu^2q^2)^{\frac{p}{2}}}\int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{s-p+1}}dt \geq$$
$$\geq \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}}\left(1+\frac{1-\nu^2q^2}{s^2-\nu^2q^2}\frac{p}{2}\frac{(4-t)t}{(2-t)^2}+\frac{2p\lambda^2q^2}{s^2-\nu^2q^2}\frac{t^q}{(2-t)^{2+q}}\right)dt,$$

где λ — первый положительный корень уравнения

$$-1-2\nu q+s+2qz\frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)}=0.$$

В **параграфе 1.1 первой главы** диссертации установлены неравенства при $p = 1$, а в **параграфе 3.3 третьей главы** рассмотрены их применения для

[22] Avkhadiev, F.G. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* / F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin - 2011. - Vol. 18, №4. - P. 723-736.

[23] Avkhadiev, F.G. *Weighted Hardy inequalities with sharp constants* / F.G. Avkhadiev, K.- J. Wirths // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2010. - Vol. 31, №1. - P. 1-7.

обоснования пространственных аналогов в случае $p > 1$. Обобщения касаются весовых функций в дополнительном слагаемом. Наиболее интересным является следующий наш результат: *при $\rho > 0$ и $\sigma < 1 < \mu$ для любой абсолютно непрерывной функции y такой, что $y(0) = 0$, справедливо точное неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\mu} dt + \rho^{\sigma-\mu} \frac{1-\sigma}{\mu-1} \int_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\sigma} dt \le \frac{1}{\mu-1} \int_0^\rho \frac{|y'(t)|}{t^{\mu-1}} \left(1 - \left(\frac{t}{\rho}\right)^{\mu-\sigma}\right) dt.$$

Равенство в этом неравенстве достигается на всех неубывающих допустимых функциях.

А также в **параграфе 1.1** получены неравенства для дробного интеграла Римана-Лиувилля. Определим дробный интеграл Римана-Лиувилля $I_{0+}^\alpha y$ порядка α следующим образом

$$I_{0+}^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0.$$

Если $0 < \sigma < \alpha < \mu$ и $\alpha \in [1-\sigma, 1]$, то для любой функции $y(t)/t^{\mu-\alpha} \in L^1[0,1]$ выполнено неравенство

$$\Gamma(\alpha) \int_0^1 |I_{0+}^\alpha y(t)| \left(\frac{\mu-\alpha}{t^\mu} + \frac{t^{-\sigma}}{B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right) dt \le \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{\mu-\alpha}} \left((\mu-\alpha)B(\mu-\alpha,\alpha) - \frac{t^\mu}{\alpha B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right) dt,$$

где Γ и B — соответственно гамма- и бета- функции Эйлера.

Неравенства типа Харди можно усиливать также за счет весовой функции. Из-за тривиальной оценки $\sin t \le \min\{t, \pi - t\}$, $t \in [0,\pi]$ следующее точное неравенство

$$\int_0^\pi \frac{|y(t)|^2}{\sin^2(t)} dt + \int_0^\pi |y(t)|^2 dt \le 4 \int_0^\pi |y'(t)|^2 dt, \tag{5}$$

справедливое для функций $y \in C_0^1(0,\pi)$ таких, что $y(0) = y(\pi) = 0$, является также усилением аналога (2) на произвольном отрезке $[a,b]$ неравенства

$$\int_a^b \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)} dt \le 4 \int_a^b y'^2(t) dt, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Используя замену переменной $t = \pi \log_q r$ при $0 < q \le r < 1$ в неравенстве (5), Ф.Г. Авхадиев для любой абсолютно непрерывной на $[q,1]$ функции y такой, что $y(q) = y(1)$, $y \not\equiv 0$ получил оценку

$$\int_q^1 \frac{|y(r)|^2}{\tau^2(r)} r dr + \frac{\pi^2}{4\ln^2 q} \int_q^1 \frac{|y(r)|^2}{\tau(r)} dr \le \int_q^1 \frac{|y'(r)|^2}{r} dr,$$

где
$$\tau(r)=\frac{2r\ln q}{\pi}\sin\frac{\pi\ln r}{\ln q}.$$

Пункт 2.1.4 первой главы диссертационной работы посвящен обобщениям неравенства Ф.Г. Авхадиева (5). А именно, мы распространим его на L_p-случай. Доказано, что для любой функции $y\in C_0^1(0,\pi)$ справедливо неравенство
$$\int_0^\pi\frac{|y'(t)|^p}{\sin^{s-p}t}dt\geq\frac{1}{p^{p-1}}\left(s-2+\frac{1}{p}\right)\int_0^\pi\frac{|y(t)|^p}{\sin^s t}dt+\frac{5-2s}{2p^{p-1}}\int_0^\pi\frac{|y(t)|^p}{\sin^{s-2}t}dt,$$
где $p\geq 2$ и $2-\frac{1}{p}\leq s\leq 2.5$.

В **пункте 3.5.5** используя последнее неравенство, доказано, что для любой функции $u\in C_0^1(\mathbb{R}_+^2)$ при $p\geq 2$ и $2-\frac{1}{p}\leq s\leq 2.5$ имеет место L_p-неравенство
$$\frac{p^{p-1}}{2^p}\iint_{\mathbb{R}_+^2}\frac{|\nabla u(\zeta)|^p}{R(\zeta,\mathbb{R}_+^2)^{s-p}}d\xi d\eta\geq$$
$$\geq\left(s-2+\frac{1}{p}\right)\iint_{\mathbb{R}_+^2}\frac{|u(\zeta)|^p}{R(\zeta,\mathbb{R}_+^2)^s}d\xi d\eta+\frac{5-2s}{8}\iint\limits_{\mathbb{R}_+^2}\frac{|u(\zeta)|^p}{|\zeta|^2R(\zeta,\mathbb{R}_+^2)^{s-2}}d\xi d\eta.$$

Это неравенство является промежуточным этапом при обосновании конформно инвариантных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, которым посвящен параграф **3.5 Главы 3**. Установлены неравенства в терминах конформного радиуса для кольца, в односвязных и двусвязных плоских областях. Полученные неравенства являются L_p-аналогами соответствующих L_2-неравенств Ф.Г. Авхадиева[24].

Первым, кто получил одномерное неравенство типа Харди с дополнительными слагаемыми можно считать В.И. Левина. Что касается многомерных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, то впервые они были получены В.Г. Мазьей[25] в случае, когда областью интегрирования является верхняя полуплоскость $\mathbb{R}_+^n=\{x=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n: t_n>0\}$, а весовые функции зависят от расстояния до начала координат.

В **пункте 3.5.5** получены неравенства в случае, когда весовая функция также есть и в правой части неравенства. Эти результаты обобщают соответствующие неравенства Дж. Тидблума[26]. А именно, если $p\geq 2$ и $2-\frac{1}{p}\leq s\leq 2.5$, то любой функции $g\in C_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ справедливо неравенство
$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\frac{|\nabla g(x)|^p}{t_n^{s-p}}dx\geq\frac{1}{p^{p-1}}\left(s-2+\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}_+^n}\frac{|g(x)|^p}{t_n^s}dx+\frac{5-2s}{2p^{p-1}}\int_{\mathbb{R}_+^n}\frac{|g(x)|^p}{t_n^{s-2}|t_{n-1}^2+t_n^2|}dx.$$

[24]Авхадиев, Ф.Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения* / Ф.Г. Авхадиев // Матем. сб. - 2015. - Т. 206, №12. - С. 3-28.

[25]Мазья, В.Г. *Пространства С.Л. Соболева* / В.Г. Мазья // Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

[26]Tidblom, J. *A Hardy inequality in the half-space* / J. Tidblom // Journal of Functional Analysis - 2005. - Vol. 221, №2. - P. 482-495

Можно заметить, несмотря на то, что в приведенных одномерных неравенствах с различными специальным весами нет сложностей, приходящих от области, они являются аналитической основой геометрических описаний. То есть геометрия одномерных неравенств диктуется методом доказательства их пространственных аналогов. Во введении диссертации собраны одномерные неравенства, которые совместно с методом перехода к многомерному случаю дают их пространственные аналоги. Во введении также исследуется взаимосвязь одномерных неравенств, приводящих к различным классам вариационных задач. Они в дальнейшем используются для вывода многомерных неравенств Харди в терминах функции расстояния до границы области с фиксированным объёмом, диаметром или внутренним радиусом, а также приводящих к конформно инвариантным неравенствам, с весами зависящими от конформного радиуса. Во второй главе обосновываются неравенства в L_p-случае и дается некоторая классификация-алгоритм доказательства таких неравенств. Многомерным неравенствам посвящена третья глава. В четвертом параграфе третьей главы нами излагаются результаты по конформно инвариантным неравенствам с дополнительными слагаемыми. Отметим, что эти конформно инвариантные неравенства с дополнительными слагаемыми также устанавливаются с применением одномерных неравенств на конечном отрезке для специальных весов. В четвертой главе рассматриваются приложения одномерных и пространственных неравенств при оценке первого собственного числа оператора Лапласа при граничных условиях Дирихле или при доказательстве неравенств типа Реллиха. Неравенства для веса Якоби применены для расширения известных классов однолистных в односвязных областях функций.

Таким образом, актуальность темы диссертации обусловлена источниками её мотивации. Она выражается в том, что решаемые в диссертации задачи находятся на стыке различных областей математики таких, как теория дискретных и интегральных неравенств из неклассического вариационного исчисления, теория достаточных условий однолистности и многолистности аналитических, гармонических и бигармонических функций из геометрической теории функций, теории изопериметрических неравенств, и демонстрируют их взаимосвязь. Полученные в диссертации результаты вносят вклад в дальнейшее естественное развитие фундаментальных исследований в упомянутых областях математики и способствуют появлению новых подходов и методов исследований. Кроме самостоятельного интереса одномерные и многомерные неравенства могут быть применены, например, при оценке первого собственного числа p-лапласиана при граничных условиях Дирихле в различных классах областей, при обосновании достаточных условий однолистности типа Нехари-Покорного и доказательстве многомерных неравенств типа Реллиха. Практическая значимость интегральных неравенств, справедливых для всех функций, которые принадлежат подходящему функциональному пространству в заданной области евклидова пространства, состоит также в том, что различные априорные оценки играют важную роль при исследовании краевых задач математической физики вариационным методом.

Степень разработанности темы неравенств типа Харди характеризуют упомянутые в обзорной части диссертации работы Ф.Г. Авхадиева, В.И. Буренкова, К.-Й. Виртса, Ф. Гецтези, М.Л. Гольдмана, Ю.А. Дубинского, Е.Б. Дэвиса, А. Куфнера, А. Лаптева, В.Г. Мазьи, В.М. Миклюкова, Р. Ойнарова, Д.В. Прохорова, Дж.М. Родригеса, М. Ружанского, С.Л. Соболева, В.Д. Степанова, Д. Сурагана, Дж. Тидблума, Дж.Л. Фернандеса и многих др., и содержащиеся в них факты. Также отметим, что имеются замечательные монографии, посвященные различным неравенствам типа Харди и имеющие, практически, непересекающиеся по типам неравенств содержания. Что же касается усиленных дополнительными слагаемыми одномерных и многомерных неравенств типа Харди, в этом направлении получены лишь некоторые отдельные и разрозненные результаты, которые мы привели выше.

Цели и задачи диссертации. Целью работы является

— систематическое изложение теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области;

— получение одномерных L_1-, L_2- и L_p-неравенств для различных весовых функций, которые имеют степенные особенности, содержат тригонометрические функции и функцию Бесселя, в частности, для веса Якоби;

— доказательство пространственных L_1-, L_2- и L_p-неравенств в произвольных областях, в областях регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях λ-близких к выпуклым и выпуклых областях;

— исследование приложений полученных результатов при оценке первого собственного числа p-лапласиана при граничных условиях Дирихле в различных классах областей, при обосновании достаточных условий однолистности типа Нехари-Покорного и доказательстве многомерных неравенств типа Реллиха.

Методология и методы исследования. В работе используются методы вещественного и функционального анализа, методы геометрической теории функций комплексного переменного. Ключевым и оригинальным моментом доказательства одномерных неравенств является выбор (подбор) специальных функций, которые являются решением или связаны с дифференциальными уравнениями типа Лэмба. Немаловажным является подбор весовых функций, которые напрямую не зависят от геометрии области, а содержат параметры и константы, которые диктуются областями и методом перехода на пространственный случай. При доказательстве пространственных неравенств типа Харди используется метод Ф.Г. Авхадиева, основанный на специальном разбиении областей на основании аппроксимации области элементарными ячейками различного вида, а также подход Е.Б. Дэвиса, сводящийся к применению и оценке расстояния в среднем в различных классах областей.

Основные положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие основные результаты, которые выносятся на защиту.

1. За счет недостижимости точных констант либо их ослабления, получены новые одномерные L_1-, L_2- и L_p- неравенства типа Харди, весовые функции которых имеют степенные особенности, содержат тригонометрические функции, функцию Бесселя, в частности, установлены неравенства для веса Якоби. Усилены дополнительными слагаемыми известные, а также новые, доказанные в данной диссертационной работе, неравенства.

2. Дано систематическое изложение теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области. Показано, что взаимосвязанные одномерные неравенства со специальными весами, напрямую не зависящими от геометрии области, а содержащие параметры и константы, которые диктуются областями и методом перехода на пространственный случай, приводят к различным классам вариационных задач.

3. Для непрерывно дифференцируемых или гладких функций с компактным носителем получены пространственные L_1-, L_2- и L_p-неравенства типа Харди в произвольных областях, в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях λ-близких к выпуклым и выпуклых областях. В плоских односвязных и двусвязных областях получены L_p- конформно инвариантные неравенства с дополнительными слагаемыми. Весовые функции, полученных неравенств, зависят от расстояния в среднем, функции расстояния до границы области или гиперболического радиуса, а константы-функционалы в дополнительных слагаемых содержат геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области.

4. Рассмотрены применения доказанных одномерных и пространственных неравенств при получении оценок первого собственного значения p-лапласиана для задачи Дирихле в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым, и выпуклых областях. Эти оценки зависят от геометрических характеристик областей, таких как объём, диаметр или внутренний радиус. Получены достаточные условия однолистности мероморфных в круге функций в терминах оценки модуля Шварциана, а

также достаточные условия однолистности и p-листности типа Авхадиева-Беккера для бигармонических функций. Также с применением одномерных неравенств получены многомерные неравенства типа Реллиха в различных классах областей.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные выше и выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер. Они могут применяться для дальнейших исследований в рамках теории дискретных и интегральных неравенств, теории достаточных условий однолистности различных классов функций и теории изопериметрических неравенств. Полученные неравенства можно трактовать как теоремы вложения функциональных пространств с весом, которые находят широкое применение, например, при решении интегро-дифференциальных уравнений приближенными методами. Более того, в данной диссертационной работе исследованы применения полученных неравенств при оценке первого собственного числа оператора Лапласа при граничных условиях Дирихле, а также эти неравенства использованы при обосновании достаточных условий однолистности и использованы как инструмент доказательства многомерных неравенств Реллиха с дополнительными слагаемыми. Полученные L_1-неравенства потенциально связаны с дифференциальными уравнениями в частных производных, в которых участвует так называемый 1-лапласиан, аналог обычного оператора Лапласа и p-лапласиана при $p > 1$. Результаты, представленные в диссертации, могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов Казанского (Приволжского) федерального университета и могут аналогично использоваться в других вузах Российской Федерации.

Степень достоверности результатов. Все результаты диссертации представлены в форме математических утверждений (лемм, предложений, теорем, утверждений, следствий). Они снабжены строгими доказательствами. Вспомогательные факты взяты автором диссертации из авторитетных математических научных журналов, учебников и монографий. Все результаты, которые выносятся на защиту, опубликованы в рецензируемых научных журналах.

Апробация работы. Основные результаты, включенные в диссертационную работу, были представлены на следующих международных конференциях и школах:

1. Международная научная конференция Discrete and Continuous Signals: Analysis, Information and Applications, St. Petersburg University 11.12.2023 - 16.12.2023; **2.** Международная конференция “Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации”, Уфа, 1.06.2023 - 3.06.2023;

3. Международная научная конференция “32th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis”, Санкт-Петербург, 01.07.2023 - 06.07.2023; **4.** III Международная конференция “Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ”, посвященная 100-летию В.С. Владимирова, 100-летию Л.Д. Кудрявцева и 85-летию О.Г. Смолянова, Московская область, г. Долгопрудный, 5-13 июля 2023 г.; **5.** Международная конференция “Теория функций, её приложения и смежные вопросы”, г. Казань, 22.082023-27.08.2023; **6.** Международная научная конференция “Уфимская осенняя математическая школа”, Уфа, 28.09.2022-01.10.2022; **7.** Международная конференция “Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации”, Уфа, 18.10.2022 - 22.10.2022; **8.** Международная научная школа-конференция “Экстремальные проблемы теории функций, посвященная 75-летию профессора Ф.Г. Авхадиева”, Казань, 29.10.2022 - 30.10.2022; **9.** Международная конференция “Вторая конференция Математических центров России Москва”, МГУ, 07.11.2022 - 11.11.2022; **10.** Международная школа-конференция “Комплексный анализ и его приложения”, Геленджик, 30.05.2021 - 05.06.2021; **11.** Международная научная конференция “30th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis”, Санкт-Петербург, 01.07.2021 - 06.07.2021; **12.** Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, 09.08.2021 - 13.08.2021; **13.** Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, Казань, 22.08.2021 - 28.08.2021; **14.** Вузовский научный семинар “Комплексный анализ и эллиптические уравнения”, Казань, 17.06.2020 - 17.06.2020; **15.** Международная конференция “Комплексный анализ и его приложения”, Казань, 24.08.2020 - 28.08.2020; **16.** Международная конференция “4th International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians”, Стамбул, 27.10.2020 - 30.10.2020; **17.** Международная научная конференция “3rd International Conference on Mathematics: "An Istanbul Meeting for World Mathematicians”, Стамбул, 01.07.2019 - 03.07.2019; **18.** XIV Международная Казанская школа-конференция "Теория функций, её приложения и смежные вопросы", Казань, 07.09.2019 - 12.09.2019; **19.** Международная научная конференция the International Conference on Modern Problems of Mathematics and Mechanics, Баку, 23.10.2019 - 25.10.2019; **20.** Международная научная конференция Scientific Workshop in Mathematics (Kazan University, Russia and Kanazawa University, Japan), Казань, 23.12.2019 - 23.12.2019; **21.** Международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию А.Ф. Леонтьева, Уфа, 24.05.2017 - 27.05.2017; **22.** XII Международная школа-конференция “Теория функций, её приложения и смежные вопросы”, Казань, 21.08.2017 - 27.08.2017.

Результаты диссертации также докладывались на следующих научно–исследовательских семинарах:

1. Семинар по геометрическому анализу, руководитель - д.ф.-м.н., проф. С.К. Водопьянов, 24 января 2024; **2.** Общеинститутский семинар ИМВЦ УФИЦ

РАН, 26 Января, 2024. **3.** Вузовский научный семинар "Комплексный анализ и эллиптические уравнения", Казань, 17 Июня 2020;

Работа в целом докладывалась на объединенном заседании кафедр математического анализа и теории функций приближений в К(П)ФУ 10 го июня 2024 г.

Публикации. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в работах [1] – [24] — это статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в списки RSCI, Scopus, Web of Science, тематике исследований посвящены также работы [25] – [29] — статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в списки RSCI, Scopus, Web of Science.

Личный вклад автора. Результаты диссертации, выносимые на защиту и составляющие её основное содержание, получены лично автором.

Часть результатов, включенных в диссертационную работу, опубликована в совместных статьях [8,9,11,15,16,22]. В каждой из статей [8,9] автору диссертации принадлежит одна вторая, а в работах [11,15,16,22] одна третья часть содержания. В работах [8,9,11] автору диссертации принадлежат постановка задачи и идеи доказательств. В диссертацию вошли лишь те результаты, доказательства которых получены автором самостоятельно. Её содержание и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные статьи.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, каждая из которых разбита на параграфы, заключения, указателей обозначений, списка использованной литературы, содержащего 214 наименований и включающего работы, опубликованные автором по теме диссертации. Общий объём диссертации составляет 270 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерация утверждений и определений, приводимых ниже, соответствует нумерации в диссертационной работе.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках темы диссертации, приводится обзор литературы и систематизируются известные результаты по изучаемым вопросам, формулируются цели и ставятся задачи. Здесь же формулируются основные результаты диссертации, обосновывается их новизна и значимость. Во **введении** также исследуется взаимосвязь одномерных неравенств, приводящих к различным классам вариационных задач таких, как многомерные неравенства Харди в терминах функции расстояния до границы области с фиксированным объёмом, диаметром или внутренним радиусом, а также приводящих к конформно инвариантным неравенствам, с весами зависящими от конформного радиуса. Такое изложение ранее не встречалось.

Глава 1, состоящая из четырех параграфов, посвящена одномерным неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми. Доказываются неравенства на отрезке для различных весовых функций. Мы немного отходим от классического определения веса и рассматриваем весовые функции не обязательно интегрируемые.

Забегая вперед, скажем, что в диссертации выделяется несколько подходов доказательства L_p-неравенств, в основе которых лежат L_1- и L_2- неравенства. Поэтому в **параграфе 1.1** доказываются L_1- и L_2- неравенства на отрезке. Выбор весовых функций, в частности, продиктован методом получения их многомерного аналога. Рассматриваются неравенства для абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций y таких, что $y(a) = y(b) = 0$ и для функций, для которых определен дробный интеграл Римана-Лиувилля.

Основным утверждением этого параграфа является

Теорема 1.1.1 *Пусть функция* $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ *является абсолютно непрерывной и удовлетворяет граничным условиям* $y(a) = y(b) = 0$ *и при этом* $y'(t)/\rho^{\mu-1}(t) \in L^1[a, b]$. *Тогда при любых* $\mu \in [1, +\infty)$ *и* $\sigma \in (-\infty, \mu)$ *выполнено неравенство*

$$(\mu - 1) \int_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^\mu(t)} dt + \frac{M(\mu, \sigma)}{\delta_0^{\mu-\sigma}} \int_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^\sigma(t)} dt \le N(\mu, \sigma) \int_a^b \frac{|y'(t)|}{\rho^{\mu-1}(t)} dt,$$

где

$$M(\mu, \sigma) := \begin{cases} 1 - \sigma & , \text{ если } \ \sigma < 1 < \mu, \\ e(\mu - 1) & , \text{ если } \ \sigma = 1, \ \mu > 1, \\ (\mu - 1) \left(\frac{\mu-\sigma}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} & , \text{ если } \ \sigma \ne 1 < \mu, \end{cases}$$

и

$$N(\mu, \sigma) := \begin{cases} 1 & , \text{ если } \ \sigma < 1 < \mu, \\ 1 + e^{-1/e} & , \text{ если } \ \sigma = 1, \ \mu > 1, \\ 1 + \left(1 + \left(\frac{\mu-1}{\mu-\sigma}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} \frac{\sigma-1}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} & , \text{ если } \ \sigma \ne 1 < \mu. \end{cases}$$

Следствие 1.1.1 *Пусть* $\rho > 0$ *и* $\sigma < 1 < \mu$. *Тогда для любой абсолютно непрерывной функции* y *такой, что* $y(0) = 0$, *справедливо следующее точное неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\mu} dt + \rho^{\sigma-\mu} \frac{1-\sigma}{\mu-1} \int_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\sigma} dt \le \frac{1}{\mu-1} \int_0^\rho \frac{|y'(t)|}{t^{\mu-1}} \left(1 - \left(\frac{t}{\rho}\right)^{\mu-\sigma}\right) dt.$$

Равенство достигается на всех неубывающих допустимых функциях.

Следствие 1.1.2 *Пусть $\rho > 0$ и функция y является абсолютно непрерывной на $[0, \rho]$ такой, что $y(0) = 0$. Тогда*

$$\int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^2} dt + \frac{e}{\rho} \int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|}{t} dt \leq (1 + e^{-1/e}) \int\limits_0^\rho \frac{|y'(t)|}{t} dt.$$

В **1.1** также доказаны новые неравенства типа Харди для дробного интеграла Римана-Лиувилля $I_{0+}^\alpha y$ порядка α, который определяется следующим образом

$$I_{0+}^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0,$$

где через Γ обозначена гамма-функция Эйлера. Заметим, что в случае $\alpha = 1$ дробный интеграл является обычной первообразной функции y.

Справедлива теорема.

Теорема 1.1.2 *Пусть $0 < \sigma < \alpha < \mu$ и $\alpha \in [1 - \sigma, 1]$. Тогда для любой функции $y \in L^1[0, 1]$ выполнено неравенство*

$$\int_0^1 |I_{0+}^\alpha y(t)| \left(\frac{\mu - \alpha}{t^\mu} + \frac{t^{-\sigma}}{B(\alpha - \sigma, \alpha)} \right) dt \leq$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{\mu-\alpha}} \left((\mu - \alpha) B(\mu - \alpha, \alpha) - \frac{t^\mu}{\alpha B(\alpha - \sigma, \alpha)} \right) dt,$$

где B — бета-функция Эйлера.

Параграф 1.2 посвящен неравенствам типа Харди, связанным с параметрическими уравнениями Лэмба. В нём развивается техника доказательств неравенств с дополнительными слагаемыми, основанная на ослаблении известных сильных констант Харди. Что позволяет получать неравенства как в L_1- и L_2- случаях. В общем случае L_1- неравенства типа Харди с точными константами невозможно усиливать за счет добавление дополнительных слагаемых[27], так как константы в них могут являться достижимыми. Данные результаты являются логическими продолжениями цикла работ Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса, посвященных неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми. Например, в этих пунктах получены следующие теоремы.

Теорема 1.2.1 *Предположим, что $s, q > 0, \nu \geq 0$ и y — абсолютно непрерывная на $[a, b]$ функция такая, что $y(a) = y(b) = 0$ и $y'(t)/\rho^s(t) \in L^1[0, 1]$.*

[27]см., например, Avkhadiev, F.G. *Selected results and open problems on Hardy-Rellich and Poincare-Friedrichs inequalities* / F.G. Avkhadiev // Analysis and mathematical physics - 2021. - Vol. 11, №3. - P. Article number: 134.

Если $\mu \in \left(0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, *то*

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s+1}(t)}\,dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s-q+1}(t)}\,dt \le$$

$$\le \left(2s+2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right)\int\limits_a^b \frac{|y'(t)|}{\rho^s(t)}\,dt + \left(\frac{q^2\mu^2}{s\delta_0^s} - \frac{2q\mu}{\delta_0^s}\right)\int\limits_a^b |y'(t)|\,dt,$$

и если $\mu \le 0$, *то*

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s+1}(t)}\,dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s-q+1}(t)}\,dt \le$$

$$2\,(s+\nu q)\int\limits_a^b \frac{|y'(t)|}{\rho^s(t)}\,dt - 2\frac{q\mu}{\delta_0^s}\int\limits_a^b |y'(t)|\,dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$ *и* $\lambda_\nu = \lambda_\nu(r)$ — *константа, являющаяся первым положительным решением уравнения:*

$$(r-2\mu)J_\nu(\lambda_\nu) + 2zJ'_\nu(\lambda_\nu) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Теорема 1.2.2 *Пусть* s *и* ν — *положительные числа, а функция* $F_\nu(t) := \sqrt{t}J_\nu(j_{\nu-1}t^{1/(2\nu)})$. *Тогда для любой абсолютно непрерывной функции* $y : [0;1] \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющей условиям* $y(0) = 0$ *и* $t^{-s}y'(t) \in L^1[0,1]$, *справедливо неравенство*

$$\frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2}\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-1/\nu}}\frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)} \le \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t}\frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)} - s\int_0^1 |y'(t)|R_{s,\nu}(t)dt,$$

где

$$R_{s,\nu}(t) = \int_t^1 F_\nu'^2(\tau)/F_\nu^{s+1}(\tau)d\tau.$$

Теорема 1.2.3 *Пусть* $y : [0;1] \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям* $y(0) = 0$ *и* $y'(t)/t^{1/2+s/2} \in L^1[0,1]$. *Предположим также, что* s *и* q — *положительные числа,* $\mu \in [0, 1/2)$ *и*

$$\Phi_q(t) := \sqrt{t}J_0\left(\lambda_0\,(q)\,t^{q/2}\right).$$

Тогда если $s \in (0,1]$, *то*

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} + \frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2}-s\mu^2\right)\int_0^1 \frac{|y'(t)|}{\Phi_q^{s-1}(t)}\frac{dt}{t} + s\mu^2\int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|}{\Phi_q^{s-1}(t)}dt - \frac{\mu}{J_0^{s-1}(\lambda_0(q))}\int\limits_0^1 |y'(t)|dt.$$

Если $s > 1$, то

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} + \frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4}\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \le$$

$$\le \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t}\left(\frac{1}{2\Phi_q^{s-1}(t)} - \frac{s\mu^2}{J_0^{s-1}(\lambda_0(q))}\right)dt + \frac{s\mu^2-\mu}{J_0^{s-1}(\lambda_0(q))}\int\limits_0^1 |y'(t)|dt,$$

где $\lambda_0 = \lambda_0(q)$ — первый положительный корень уравнения

$$(1-2\mu)J_0(\lambda_0) + q\lambda_0 J_0'(\lambda_0) = 0, \quad \lambda_0 \in (0, j_0).$$

Вышеприведенные три теоремы являются основой для доказательства их L_2-аналогов. Например, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.5 *Пусть λ_ν является константой Лэмба. Если s, q, r, m и ν положительны, y — абсолютно непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция такая, что $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^{\frac{(q\nu+r)(s-1)}{4}+\frac{r-1}{2}} \in L^2[0,1]$, то*

$$\frac{r^2-\nu^2q^2}{4}\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^{r+1}}\frac{dt}{F_{\nu,r,q}^{s-1}(t)} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(\frac{2r}{q})}{4}\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^{r-q+1}}\frac{dt}{F_{\nu,r,q}^{s-1}(t)} \le \frac{1}{s}\int\limits_0^1 \frac{y'^2(t)}{t^{r-1}}\frac{dt}{F_{\nu,r,q}^{s-1}(t)}.$$

Если $y \not\equiv 0$ и $s \le \frac{r-\nu q}{r+\nu q}$, то неравенство является строгим. Если $s > \frac{r-\nu q}{r+\nu q}$, то равенство в неравенстве достигается на функции $y(t) = CF_{r,\nu,q}^m(t)$, где C — некоторая произвольная константа.

В основе доказательства предыдущих трех теорем лежит новое свойство монотонности специальной функции, зависящей от функции Бесселя. Также обратим внимание, что в некоторых случаях получены точные константы.

Если в первых двух параграфах **Главы 1** рассматривались неравенства со степенными весами и весами, содержащими функцию Бесселя, то **§1.3** посвящен неравенствам типа Харди для весовой функции Якоби или для весов, сводящихся к весовой функции Якоби. Основные результаты этого параграфа приведены в следующих теоремах.

Теорема 1.3.1 *Пусть $\rho \in (0,1)$, $p > 0, q > 0$ и $\nu \in [0, p/q]$, а функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0,\rho]$, такой, что $y(0) = 0$ и $y'(\cdot)z(\cdot)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{2}} \in L_2(0,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z^{p-1}(t)}dt \ge (p^2-q^2\nu^2)\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1}(t)}dt + q^2\lambda_0^2\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1-q}(t)}dt +$$

$$+\left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^p(t)}dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ *и* $\lambda_0 = \sup\{\lambda : p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \geq 0\}$. *Константа* $p^2 - q^2\nu^2$ *является наилучшей из возможных.*

Теорема 1.3.2 *Пусть* $\rho \in (0,1)$, $q \in (0,2]$ *и* $\nu \in [0, 1/q]$, *а функция* y *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[-\rho, \rho]$, *такой, что* $y(-\rho) = y(\rho) = 0$ *и* $y' \in L_2(-\rho, \rho)$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t)dt > (1 - q^2\nu^2)\int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{|y(t)|^2}{(1-t^2)^2}dt + q^2\lambda_0^2 \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{|y(t)|^2}{(1-t^2)^{2-q}}dt +$$

$$+ \left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0 \frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right) \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{|y(t)|^2}{1-t^2}dt,$$

где константа $\lambda_0 = \sup\{\lambda : q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \geq 0\}$. *Постоянная* $(1 - q^2\nu^2)$ *является наилучшей из возможных.*

Также в **параграфе 1.3** рассматриваются неравенства без дополнительных слагаемых. Несмотря на то, что неравенства следующих двух теорем схожи, их доказательства существенно отличаются.

Теорема 1.3.3 *Если* $q \in [1,2]$ *и* $\rho \in (0,1)$, *то для любой абсолютно непрерывной на отрезке* $[-\rho, \rho]$ *функции* y *такой, что* $y(-\rho) = y(\rho) = 0$, *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}dt < \kappa' \int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t)dt,$$

где постоянная

$$\kappa' = \kappa'(q) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 B_t^2(1/2, q-1)\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt\right)^{1/2},$$

а $B_t(x,y) = \int_0^t \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1}d\tau$ *— неполная бета-функция.*

Теорема 1.3.4 *Пусть* $\rho \in (0,1)$, $q > 0$ *и* $\nu = 1/q$, *а* y *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[-\rho, \rho]$ *функцией такой, что* $y(-\rho) = y(\rho) = 0$ *и* $y' \in L^2(-\rho, \rho)$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$P_q \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}dt < \int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t)dt,$$

где постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & \textit{при} \quad q = 0, \\ \lambda_0^2 q^2 & \textit{при} \quad q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_0^2\alpha^2}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & \textit{при} \quad q \in (q_0, 1], \\ 2 & \textit{при} \quad q = 1, \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа λ_0 определяется как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν, а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q + 2^{q/2} \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)} = 0.$$

Результаты **§1.3** и **§1.4** возникли в попытке решить одну и ту же задачу — добавления дополнительного положительного слагаемого в точное неравенство В.И. Левина[28], но в **параграфе 1.4** установлены в некоторых случаях точные неравенства уже с другой весовой функцией в дополнительном слагаемом. Имеет место утверждение.

Теорема 1.4.1 *Пусть $q \in (0, \infty)$, $\nu \in \left[0, \frac{1}{q}\right]$ и $\rho \in (0, 1]$. Тогда для любой абсолютно непрерывной на отрезке $[0, \rho]$ функции $y : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y' \in L^2[0, \rho]$, имеет место точное неравенство*

$$(1 - \nu^2 q^2) \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^2(t)} dt + q^2 C_\nu^2(q) \frac{(2-\rho)^q}{\rho^q} \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} dt \le \int\limits_0^\rho y'^2(t) dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$, $C_\nu(q)$ — первый положительный корень уравнения

$$1 - \rho + qz \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

При $\nu \in \left(0, \frac{1}{q}\right]$ равенство в неравенстве достигается только на функции

$$y_0(t) = C\sqrt{z(t)} J_\nu \left(\lambda_\nu(q) \frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}}\right),$$

C — некоторая произвольная константа.

Константы неравенства **теоремы 1.4.1** являются точными.

Используя **теорему 1.4.1**, мы получили новые неравенства на отрезке, усиленные тремя дополнительными слагаемыми. Справедлива

Теорема 1.4.3 *Пусть $\nu \in (0, 1]$, $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$ и $\mu(t) = 2b - \rho(t)$. Тогда для любой функции $y \in C_0^1(0, 2b)$ такой, что $y' \in L^2[0, 2b]$, справедливы*

[28] Левин, В.И. О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств / В.И. Левин // Матем. сб. - 1938. - Т. 4(46), №2.

неравенства

$$\int_0^{2b} y'^2(t)dt \geq \frac{1-\nu^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + \frac{2-2\nu^2+j_\nu'^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt+$$
$$+\frac{1-\nu^2+2j_\nu'^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2 t)}{\mu^2(t)}dt + \frac{j_\nu'^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)\rho(t)}{\mu^3(t)}dt,$$

$$\int_0^{2b} y'^2(t)dt \geq \frac{1}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + \frac{C_0^2(1)}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt+$$
$$+\frac{3C_0^2(1)}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\mu^2(t)}dt + \frac{C_0^2(1)}{2}\int_0^{2b} y^2(t)\frac{\rho(t)}{\mu^3(t)}dt,$$

где j_ν' *— первый положительный корень производной* J_ν' *функции Бесселя* J_ν *и* $C_0(1) \approx 1.25578$ *— первое положительное решение уравнения*

$$1 - z\frac{J_1(z)}{J_0(z)} = 0, \quad z \in (0, j_0).$$

Неравенства **Главы 1** применяются для доказательства соответствующих неравенств в пространственном случае и для обоснования L_p-аналогов, которым посвящена **Глава 2** диссертации. Известны различные подходы доказательства L_p-неравенств, но ни один из них нельзя назвать универсальным способом. Каждое L_p-неравенство обосновывается по-своему.

Будем условно выделять три подхода к доказательству: 1) способ, основанный на применении теоремы об обобщенном среднем арифметическом 2) метод, основанный на применении неравенства Опиала; 3) подход, основанный на применении леммы Шама. Три подхода дают различные результаты.

Неравенствам доказанным первым способом посвящен **§2.1**. Доказываются ряд вспомогательных неравенств, которые несут самостоятельный интерес, а также рассматриваются неравенства с весами, содержащими степенные особенности, функцию sin. Основными результатами этого пункта являются следующие теоремы.

Теорема 2.1.1 *Предположим, что* $0 < b - a < \infty$, $\rho(t) = \max\{t-a, b-t\}$, $p \in [2,\infty)$, $s \in (0,\infty)$ $q \in (0,\infty)$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$ *и* $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ *— произвольная абсолютно непрерывная функция такая, что* $y(a) = y(b) = 0$ *и* $y'(t)/\rho^{(s-p+1)/p}(t) \in L^p[a,b]$. *Если* $\nu \in [0, s/q]$, *то выполнено следующее неравенство*

$$\int_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s-p+1}(t)}dt \geq c_s\int_a^b\frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)}dt + \frac{\mu_s}{\delta_0^q}\int_a^b\frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)}dt. \tag{6}$$

Если $\nu \geq s/q$, k *— положительное целое число и* $p = 2k$, *то*

$$\int_a^b \frac{y'^p(t)}{\rho^{s-p+1}(t)}dt + c_s(p-1)\int_a^b\frac{y^p(t)}{\rho^{s+1}(t)}dt \geq \frac{\mu_s}{\delta_0^q}\int_a^b\frac{y^p(t)}{\rho^{s-q+1}(t)}dt, \tag{7}$$

где

$$c_s = \frac{|s^2 - \nu^2 q^2|^{p/2}}{p^p} \quad \text{и} \quad \mu_s = c_s \frac{p}{2}\frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{|s^2-\nu^2q^2|}.$$

Теорема 2.1.3 *Предположим, что s и q — положительные числа, $p \geq 1$, $l \in [1,p]$. Если y является абсолютно непрерывной на $[0,1]$ функцией и такой, что $y(0) = 0$, то*

$$p^l\,(2+q)^l \int_0^1 \frac{|y(t)|^{p-l}|y'(t)|^l}{t^{2-l}} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt \geq$$

$$\left(1 - \frac{lq^2}{4}\right)\int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^2}\left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt + lq^2c_q^2\int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{2-q}}\left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt,$$

где константа c_q — число, удовлетворяющее условиям

$$2qc_q\cos c_q - (q-2)\sin c_q = 0 \quad \text{и} \quad c_q \in (0,\pi).$$

Лемма 2.1.4 *Пусть $p \geq 2$, $s \in [2 - \frac{1}{m}, 2.5]$ и $m \in [2,p]$. Тогда для любой функции $y \in C_0^1[0,\pi]$ справедливо неравенство*

$$\frac{m}{p^m}\left(s - 2 + \frac{1}{m}\right)\int_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^s t}dt + \frac{m(5-2s)}{2p^m}\int_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^{s-2} t}dt \leq \int_0^\pi \frac{|y(t)|^{p-m}|y'(t)|^m}{\sin^{s-m} t}dt.$$

Также в этом параграфе обосновываем неравенства, используя “технику ослабления” сильных констант Харди. Доказательство этих неравенств тесно связано с параметрическими уравнениями типа Лэмба. Приведем лишь одно из утверждений. Имеет место теорема.

Теорема 2.1.5 *Предположим, что $p \geq 1, r \in [1,p]$ и y — абсолютно непрерывная функция на $[a,b]$ такая, что $y(a) = y(b) = 0$. Пусть $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ и $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$. Тогда*

$$p^r s^{2(1-r)}\left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right)^r \int_a^b \frac{|y(t)|^{p-r}\cdot|y'(t)|^r}{\rho^{s-r+1}(t)}\,dt \geq$$

$$\left(s^2 - r\nu^2q^2\right)\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)}\,dt + \frac{qr}{\delta_0^q}\left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s)\left(2 - \frac{q\mu}{s}\right)\right)\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)}\,dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$ и $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Второму методу, основанному на применении неравенства Опиала, посвящен **параграф 2.2**. Получены L_p аналоги точных неравенств Авхадиева-Виртса. Приведем лишь два из них.

Положим, что

$$a_{s,\nu} = \frac{\left|(s-1)^2 - \nu^2 q^2\right| (s-1)^{p-2}}{2^{3-p} p^{p-1}} \quad \text{и} \quad b_{s,\nu} = \frac{(s-1)^{p-2} q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{2^{3-p} p^{p-1}},$$

где $\lambda_\nu(2s/q)$ — постоянная Лэмба, определяемая как первый положительный корень уравнения

$$sJ_\nu(z) + qzJ_\nu'(z) = 0.$$

Справедлива теорема.

Теорема 2.2.1 *Предположим, что* $0 < b - a < \infty$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$, $\rho(t) = \max\{t-a, b-t\}$, $p \in [2,\infty)$, $s \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty)$ *и* $\nu \in [0, s/q]$. *Если* $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ *является абсолютно непрерывной функцией такой, что* $y(a) = y(b) = 0$ *и* $y'(t)/\rho(t)^{(1-2s/p)(1/p-1)} \in L^p[a,b]$, *то имеет место неравенство*

$$\delta_0^{s(1-2/p)} \int_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho(t)^{(1-2s/p)(1-p)}} dt \geq a_{s,q} \int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)} dt + \frac{b_{s,\nu}}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)} dt \tag{8}$$

а если дополнительно $\nu \geq (s-1)/q$, k *— целое положительное число и* $p = 2k$, *то*

$$\delta_0^{s(1-2/p)} \int_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho(t)^{(1-2s/p)(1-p)}} dt + a_{s,\nu} \int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)} dt \geq \frac{b_{s,\nu}}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)} dt.$$

Теорема 2.2.3 *Предположим, что* $s, q > 0$, $\nu \geq 0$ *и* y *— абсолютно непрерывная на* $[a,b]$ *функция такая, что* $y(a) = y(b) = 0$. *Если* $\mu \in \left[0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, *то*

$$\frac{(s+1)^s}{s^s} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right) \int_a^b |y'(t)|^{s+1} dt + \frac{1}{\delta_0^s} \left(\frac{q^2\mu^2}{s} - 2q\mu\right) \int_a^b |y'(t)||y(t)|^s dt \geq$$

$$\geq \frac{s^2 - \nu^2 q^2}{(s+1)} \int_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s+1}(t)} dt + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{(s+1)\delta_0^q} \int_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s-q+1}(t)} dt,$$

и если $\mu \leq 0$, *то*

$$2\frac{(s+1)^{s+1}}{s^s} (s+\nu q) \int_a^b |y'(t)|^{s+1} dt - 2\frac{(s+1)q\mu}{\delta_0^s} \int_a^b |y'(t)| \cdot |y(t)|^s dt \geq$$

$$\geq \left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s+1}(t)} dt + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s-q+1}(t)} dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$, $z = \lambda_\nu(r)$ *— константа, являющаяся первым положительным решением уравнения:*

$$(r - 2\mu) J_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Подход, основанный на применении леммы Шама, которому посвящен **§2.3**, позволяет получать точные L_p неравенства в случае, когда $p \geq 2$. Положим, что

$$\Phi_q(t) = \sqrt{t} J_0(\lambda_0(2/q) t^{q/2}).$$

Верна следующая теорема.

Теорема 2.3.2 *Пусть* $s \in (0,+\infty), \nu \in (0,+\infty), p \in [2,+\infty)$ *и абсолютно непрерывная на* $[0,1]$ *функция* y *такая, что* $y(0) = 0$ *и* $y'(t)/t^{(s-1)/(2p)} \in L^p[0,1]$. *Тогда*

$$\frac{(p-1)^{p-2}}{(p+s-2)^{p-1}} \int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{\Phi_q^{s-1}(t)} dt \geq \int_0^1 |y(t)|^p \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(2/q)}{4t^{2-q}} \right) \left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)} \right)^{p-2} \frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}.$$

Равенство при $s > p-1$ *достигается тогда и только тогда, когда функция* $y(t) = C(\Phi_q(t))^{\frac{p+s-2}{p}-1}$, *где* C — *некоторая произвольная константа.*

В виде отдельного пункта мы вынесли **параграф 2.4**, результаты которого имеют ряд дальнейших применений.

Теорема 2.4.2 *Предположим, что* $0 < b < \infty$, $p \in [2,\infty)$ *и* $\nu \in [0, p-1]$. *Если* $y : [0,2b] \to \mathbb{R}$ *является абсолютно непрерывной функцией такой, что* $y(0) = y(2b) = 0$ *и* $|y'(t)| \in L^p[0,2b]$, *то имеет место следующее неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p \int_0^{2b} \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s+1-p}(t)} dt \geq \int_0^{2b} \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-1}(t)} \left(\frac{1}{\rho^2(t)} + \frac{p\lambda_1^2}{2s^2} \left[\frac{1}{\rho(t)\mu(t)} + \frac{3}{\mu^2(t)} + \frac{2\rho(t)}{\mu^3(t)} \right] \right) dt,$$

где λ_1 — *первый положительный корень уравнения*

$$sJ_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Способ, основанный на применении теоремы об обобщенном среднем арифметическом, позволяет доказывать не только интегральные, но дискретные неравенства с логарифмическими весами, т.е. случаи, когда вместо интегрирования используются суммирование.

Верна следующая теорема.

Теорема 2.5.1 *Пусть* $p > 1$, $l \in [1,p]$, $a_i \geq 0$ *и при целом* $n \geq 1$ *полагаем, что*

$$A_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{[R]-1} a_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i, & 1 \leq n \leq [R], \\ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i - \sum\limits_{i=0}^{[R]+1} a_i, & n \geq [R]+1, \end{cases}$$

где $[R]$ — *целая часть от нецелого числа* $R > 1$. *Тогда верно следующее неравенство типа Харди:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log \frac{n}{R}\right|^p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{p-l} a_n^l}{(n+1)^{1-l}} \left|\log \frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Глава 3 состоит из пяти параграфов и посвящена уже многомерным неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми, относящимся к различным типам вариационных задач. В отличие от одномерного случая, интегрирование в пространственных неравенствах ведется по пространственной области. Мы будем рассматривать непрерывно дифференцируемые или гладкие функции с компактным носителем. Как известно, замыканием этих пространств функций по соответствующей норме дает неравенства в более общих функциональных пространствах типа Соболева.

Параграф 3.1 посвящен геометрическим версиям L_2-неравенств типа Харди. В этом параграфе мы устанавливаем многомерные неравенства типа Харди в произвольных областях, в областях регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым и выпуклых областях.

Прежде введем основные обозначения. Пусть Ω — открытое связное собственное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ — элемент площади поверхности единичной сферы и $d\omega(\nu) = \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{|\mathbb{S}^{n-1}|}$ — нормированная мера на единичной сфере. Для любой точки $x \in \Omega$, $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ полагаем

$$\tau_\nu(x) := \min\{s > 0 : x + s\nu \notin \Omega\}$$

— расстояние от точки x до границы области Ω по направлению вектора ν,

$$\delta(x) = \inf_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \tau_\nu(x),$$

— расстояние от точки x до границы области Ω,

$$\rho_\nu(x) := \min\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\}, \quad \mu_\nu(x) := \max\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\},$$
$$D_\nu(x) := \tau_\nu(x) + \tau_{-\nu}(x), \quad D(\Omega) = \sup_{x\in\Omega, \nu\in\mathbb{S}^{n-1}} D_\nu(x),$$

и для произвольного $s \in (1, \infty)$ расстоянием в среднем называем величину

$$\delta_{M,s}(x)^{-s} := \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu(x)^s} = \frac{1}{B(n,s)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu(x)^s}.$$

Для краткости положим, что $\delta_M = \delta_{M,2}$.

Через $|\Omega|$ обозначим объём области Ω и через Ω_x — элементы множества Ω, которые “видны” из точки x. Напомним, что постоянная

$$K(n) = n\left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right]^{2/n}.$$

Основным результатом **параграфа 3.1**, из которого следуют частные случаи в специальных классах областей, можно назвать следующие две теоремы.

Теорема 3.1.1 *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $\nu \in (0,1]$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1-\nu^2}{4}\int_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)}dx +$$
$$+ K(n)\frac{5-5\nu^2+4j'^2_\nu}{8}\int_\Omega \frac{g^2(x)}{|\Omega_x|^{\frac{2}{n}}}dx + \frac{j'^2_\nu K(n) n}{32|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_\Omega \frac{g^2(x)\delta(x)}{|\Omega_x|^{\frac{3}{n}}}dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)}dx +$$
$$+\frac{5}{8}C_0^2(1)K(n)\int_\Omega \frac{g^2(x)}{|\Omega_x|^{2/n}}dx + \frac{C_0^2(1)K(n)n}{16|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_\Omega g^2(x)\frac{\delta(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$ — первое положительное решение уравнения

$$1 - z\frac{J_1(z)}{J_0(z)} = 0, \quad z \in (0, j_0).$$

Теорема 3.1.2 *Пусть Ω — произвольная ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $\nu \in (0,1]$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1-\nu^2}{4}\int_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)}dx +$$
$$+ n\frac{9-9\nu^2+6j'^2_\nu}{4D^2(\Omega)}\int_\Omega g^2(x)dx + \frac{nj'^2_\nu}{4D^2(\Omega)}\int_\Omega g^2(x)\delta(x)dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)}dx + n\frac{7C_0^2(1)}{4D^2(\Omega)}\int_\Omega g^2(x)dx + \frac{nC_0^2(1)}{2D^2(\Omega)}\int_\Omega g^2(x)\delta(x)dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$.

Геометрическим версиям неравенств типа Харди в L_p случае посвящен **§3.2**. В этом параграфе доказаны многомерные неравенства типа Харди в произвольных областях в терминах расстояния в среднем. Расстояние с среднем также иногда называют расстоянием по Дэвису. Полученные неравенства принимают более упрощенный вид выпуклых областях.

Имеют место теоремы

Теорема 3.2.1 *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geq 2$ и $p \geq s+1$. Если $s \in (0,1]$, то имеет место неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1)\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)}dx \geq$$
$$\geq \frac{5p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\int_\Omega \frac{|g(x)|^p\delta^{1-s}(x)}{|\Omega_x|^{2/n}}dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int_\Omega |g(x)|^p\frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Если $s \in (1,2]$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1)\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)}dx \geq$$
$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int_\Omega |g(x)|^p\frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \geq$$
$$\geq B(n,s+1) \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)} dx + \frac{p\lambda_1^2}{s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \geq$$
$$\geq B(n,s+1) \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)} dx + \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Если положим, что $p \leq s+1$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2.2 *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geq 2$ и $p \leq s+1$. Если $s \in (1,2]$, то справедливо неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - B(n,s+1) \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)} dx \geq$$
$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}} \int_\Omega |g(x)|^p \frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}} dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то имеет место неравенство

$$\frac{p^p}{s^p} \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx \geq \frac{B(n,s+1)}{B(n,p)} \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)} dx + \frac{p\lambda_1^2 s^{-2}}{B(n,p)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то выполнено неравенство

$$\frac{p^p}{s^p} \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx \geq \frac{B(n,s+1)}{B(n,p)} \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)} dx + \frac{9p\lambda_1^2 s^{-2}}{4B(n,p)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

В **пунктах 3.1.2-3.1.5**, **3.2.2-3.2.4** мы получаем аналогичные результаты в регулярных областях, в областях, удовлетворяющих условию θ-конуса, в λ близких к выпуклым и в выпуклых областях в терминах функции расстояния до границы области.

Оказывается, можно получать пространственные неравенства в произвольных областях не только в терминах расстояния в среднем, но и в терминах расстояния до границы области δ. В **параграфе 3.3** рассматриваются неравенства в произвольных открытых и в открытых выпуклых областях $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Обратим внимание, что мы используем метод Ф.Г. Авхадиева, который позволяет распространить одномерные неравенства на многомерные случай. В следующих двух теоремах получены соответственно L_1- и L_p- неравенства.

Теорема 3.3.1 *Предположим, что Ω является произвольной открытой областью $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $s > n$, $q > 0$ и внутренний радиус $\delta_0(\Omega) < \infty$. Тогда*

$$(s-n)\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \frac{q}{\delta_0^q(\Omega)}\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)}dx \leq 2\int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}dx$$

для произвольной функции $g \in C_0^1(\Omega)$. Более того, если $s - q < 1$, то для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$(s-n)\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \frac{q-s+1}{\delta_0^q(\Omega)}\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)}dx \leq \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}\left(1 - \left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)dx.$$

Теорема 3.3.2 *Предположим, что Ω — произвольная открытая область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $s > n$, $q > 0$, $p \geq 1$, $r \in [1,p]$ и внутренний радиус $\delta_0(\Omega) < \infty$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство*

$$\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \frac{rq}{(s-n)\delta_0^q(\Omega)}\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx \leq \left(\frac{2p}{s-n}\right)^r \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^r |g(x)|^{p-r}}{\delta^{s-r}(x)}dx.$$

Более того, если $s-q < 1$, для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \frac{r(1+q-s)}{(s-n)\delta_0(\Omega)^q}\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx \leq$$
$$\left(\frac{p}{s-n}\right)^r \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^r |g(x)|^{p-r}}{\delta^{s-r}(x)}\left(1 - \left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)^r dx.$$

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$. В дальнейшем нам также нужны будут следующие константы

$$M(s,q) := \begin{cases} q - s + 1, & \text{если } \ s - q < 1 < s, \\ e(\mu - 1), & \text{если } \ s - q = 1, \ s > 1, \\ (s-1)\left(\frac{q}{s-q-1}\right)^{\frac{q}{s-q+1}}, & \text{если } \ s - 1 \neq 1 < s, \end{cases}$$

и

$$N(s,q) := \begin{cases} 1, & \text{если } \ s - q < 1 < s, \\ 1 + e^{-1/e}, & \text{если } \ s - q = 1, \ s > 1, \\ 1 + \left(1 + \left(\frac{s-q-1}{q}\right)^{\frac{q}{1-s+q}} \frac{s-q-1}{s-1}\right)^{\frac{q}{1-s+q}}, & \text{если } \ s - q \neq 1 < s. \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3.3 *Если $s > 1$, $q > 0$ и Ω — выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$(s-1)\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \frac{M(s,s-q)}{\delta_0(\Omega)^q}\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)}dx \le N(s,s-q)\int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}dx. \quad (9)$$

Более того, если $s - q < 1$, то

$$(s-1)\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \frac{q-s+1}{\delta_0^q(\Omega)}\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)}dx \le \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}\left(1-\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)dx.$$

Результаты **параграфа 3.4** являются продолжением цикла работ, посвященных неравенствам, доказываемых с использованием дифференциальных уравнений для функций Бесселя. К тому же в этом параграфе обосновываем неравенства, получаемые ослаблением известных точных констант.

Теорема 3.4.1 *Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $s, q > 0$, $\nu \ge 0$, $g \in C_0^1(\Omega)$ и $g'(x)/\delta^s(x) \in L^1(\Omega)$. Если $\mu \in \left(0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, то*

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s+1}(x)}dx + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q}\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q+1}(x)}dx \le$$
$$\le \left(2s+2\nu q-\frac{q^2\mu^2}{s}\right)\int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \left(\frac{q^2\mu^2}{s\delta_0^s}-\frac{2q\mu}{\delta_0^s}\right)\int_\Omega |\nabla g(x)|dx,$$

и если $\mu \le 0$, то

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s+1}(x)}\,dx + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q}\int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q+1}(x)}\,dx \le$$
$$\le 2\left(s+\nu q\right)\int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^s(x)}\,dx - \frac{q\mu}{\delta_0^s}\int_\Omega |\nabla g(x)|\,dx,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r-2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Теорема 3.4.3 *Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $p \ge 1$, $r \in [1,p]$ и $g \in C_0^1(\Omega)$. Если $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ и $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$, то*

$$(s^2-r\nu^2q^2)\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)}dx + \frac{qr}{\delta_0^q}\left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \frac{\mu(q-s)(2s-q\mu)}{s}\right)\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q+1}(x)}dx \le$$
$$\le p^r s^{2(1-r)}\left(2s+2\nu q-\frac{q^2\mu^2}{s}\right)^r\int_\Omega \frac{|g(x)|^{p-r}\cdot|\nabla g(x)|^r}{\delta^{s-r+1}(x)}dx,$$

если $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ *и* $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$, *то*

$$\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)}\,dx + \frac{qr}{\delta_0^q}\left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s)\left(2 - \frac{q\mu}{s}\right)\right)\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q+1}(x)}\,dx \le$$
$$\le \frac{p^r}{s^r}\left(\frac{2s}{s-\nu q} - \frac{q^2\mu^2}{s^2-\nu^2q^2}\right)^r \int_\Omega \frac{|g(x)|^{p-r}\cdot|\nabla g(x)|^r}{\delta^{s-r+1}(x)}\,dx,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ *— константа, являющаяся первым положительным решением уравнения*

$$(r-2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Теорема 3.4.4 *Пусть* Ω *— n-мерная выпуклая область евклидова пространства* $\mathbb{R}^n, \delta_0 = \delta_0(\Omega) < \infty$. *Если* $s \in (0,+\infty), \nu \in (0,+\infty), p \in [2,+\infty)$, *то для произвольной функции* $g \in C_0^1(\Omega)$ *выполнено следующее неравенство типа Харди:*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})}dx \ge \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\frac{\pi^2}{(2\delta_0)^p}\int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)^{p-2}dx,$$

где $j_{\nu-1}$ *— первый положительный нуль функции Бесселя* $J_{\nu-1}(x)$.

Утверждения **§3.5** можно рассматривать с двух точек зрения: как усиление классического неравенства Харди с помощью замены функции расстояния на конформный радиус области и рассматривать как аналоги неравенства Пуанкаре в спектральной теории оператора Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны.

В первой части мы приводим L_p-аналоги результатов Фернандеса-Родригиса. Отметим, что эти результаты получены в совместной работе Ф.Г. Авхадиева, Р.Г. Насибуллина и И.К. Шафигуллина [18]. Вторая часть посвящена неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми. Эти неравенства являются L_p-аналогами соответствующих неравенств Ф.Г. Авхадиева. Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 3.5.5 1) *Предположим, что* Ω *является односвязной гиперболической областью в* $\mathbb{C}$, f *— любое однолистное конформное отображение* Ω *на верхнюю полуплоскость*

$$H_+ = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}.$$

Тогда для любой вещественно-значной функции $g \in C_0^1(\Omega)$ *и* $p \ge 2$ *справедливо следующее неравенство типа Авхадиева-Харди*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla g|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \ge \frac{2^p}{p^p}\iint_\Omega \frac{|g|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy + \frac{2^{p-3}}{p^{p-1}}\iint_\Omega |g|^p\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 dxdy$$

с точной константой $2^p/p^p$, *где* $z = x + iy$.

2) *Предположим, что* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *является двусвязной областью и* f *— любое однолистное конформное отображение* Ω *на кольцо*

$$A_q = \{\eta \in \mathbb{C} : q < |\eta| < 1\},$$

$q = \exp(-2\pi M(\Omega_2))$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $g \in C_0^1(\Omega)$ *имеет место следующее неравенство типа*

$$\frac{p^p}{2^p} \iint_\Omega \frac{|\nabla g|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \ge \iint_\Omega \frac{|g|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy + \frac{p}{2^5 M^2(\Omega)} \iint_\Omega |g|^p \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 dxdy,$$

где $z = x + iy$ *и* $M(\Omega)$ *— геометрический параметр, определяемый как верхняя грань модулей двусвязных областей, лежащих в области* Ω *и разделяющих его границу* $\partial\Omega$.

В **главе 4**, состоящей из четырех параграфов, приводятся применения полученных одномерных и многомерных неравенств. Мы применяем одномерные неравенства для обоснования достаточных условий однолистности мероморфных функций и для доказательства неравенств типа Реллиха, а пространственные неравенства при оценке первого собственного значения p-Лапласиана при граничном условии Дирихле. Получены новые классы однолистных аналитических в круге и в других односвязных областях функций в терминах оценки производной Шварца. Наши результаты усиливают соответствующие результаты Авхадиева Ф.Г. и являются усилением-обобщением соответствующих результатов З. Нехари и В.В. Покорного. В основе доказательства этих достаточных условий лежит новое одномерное неравенство типа Харди для веса Якоби.

Пусть теперь $f(z)$ мероморфная в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция, а

$$S_f(z) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

— производная Шварца или шварциан функции f. Предположим также, что

$$R(q) = \begin{cases} 2^{1+q}, & 0 \le q \le 1, \\ 2^{5-2q}\pi^{2(q-1)}, & 1 \le q \le q_0, \\ \frac{2}{\kappa'(q)}, & q_0 \le q \le q_1, \\ 2^{5-2q}\pi^{2(q-1)}, & q_1 \le q \le 2. \end{cases}$$

где $q_0 = 1.2823044502226741$, а $q_2 = 1.7950834115169039$ и

$$\kappa'(q) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 B_t^2(1/2, q-1)\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt\right)^{1/2}.$$

Имеет место теоремы

Теорема 4.1.3 *Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $\mu_k, k=\overline{1,n}$ выполняется неравенство*

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k A(\mu_k)}{(1-|z|^2)^{\mu_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причём $b_k = \frac{2P_{2-\mu_k}}{A(\mu_k)} a_k$, $a_1+a_2+\ldots+a_n \leq 1$, $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq 2$, постоянные В.В. Покорного имеют вид

$$A(\mu) = \begin{cases} 2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)}, & 0 \leq \mu \leq 1, \\ 2^{3-\mu}, & 1 \leq \mu \leq 2; \end{cases}$$

и постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & , \text{ при } \quad q=0, \\ \lambda_q & , \text{ при } \quad q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & , \text{ при } \quad q \in (q_0, 1], \\ 2 & , \text{ при } \quad q=1, \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа $\sqrt{\lambda_q}/q$ определяется как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q + 2^{q/2} \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)} = 0.$$

Здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν.

Теорема 4.1.6 *Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $q_k, k=\overline{1,n}$ выполняется неравенство*

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k R(q_k)}{(1-|z|^2)^{2-q_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причём $a_1+a_2+\ldots+a_n \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n \leq 2$.

На основании предыдущих теорем можно получить достаточные условия однолистности также для односвязных областей, отличных от круга. Пусть $F(\zeta)$ мероморфная в односвязная области $\mathfrak{D}$ и $\varphi(\zeta)$ — функция, однолистно отображающая область $\mathfrak{D}$ на единичный круг $\mathbb{D}$. Тогда функции F и $f(z) = F^{-1}(\varphi(\zeta))$ будут однолистными и неоднолистными одновременно.

Известно следующее равенство

$$S_f(z) = (\varphi'(\zeta))^{-2} \left(S_F(\zeta) - S_\varphi(\zeta)\right), \quad \zeta \in \mathfrak{D},$$

которое принимает более простой вид в случае, когда φ является дробно-линейным отображением, т.е. $S_\varphi(\zeta) \equiv 0$.

Следовательно, достаточное условие **теоремы 4.1.6** перепишется в виде

$$|S_F(\zeta) - S_\varphi(\zeta)| \leq \sum_{k=1}^{n} a_k R(q_k) \frac{|\varphi'(\zeta)|^2}{(1-|\varphi(\zeta)|^2)^{2-q_k}} \quad \forall \zeta \in \mathfrak{D},$$

Если, например, $\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ и $\varphi(\zeta) = \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$, то соответственно получим

Теорема 4.1.7 *Мероморфная во внешности единичного круга $\mathbb{D}^- = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$ функция $F(\zeta)$ будет однолистной в $\mathbb{D}^-$, если $F'(\zeta) \neq 0$ в $\mathbb{D}^-$ и при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $q_k, k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство*

$$|S_F(\zeta)| \leq \sum_{k=1}^{n} a_k R(q_k) \frac{|\zeta|^{-4}}{(1-|\zeta|^{-2})^{2-q_k}}, \quad \zeta \in \mathbb{D}^-,$$

причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n \leq 2$.

Теорема 4.1.8 *Мероморфная в правой полуплоскости $H_+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : \Re\zeta = \xi > 0\}$ функция $F(\zeta)$ будет однолистной в H_+, если $F'(\zeta) \neq 0$ в H_+ и при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $q_k, k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство*

$$|S_F(\zeta)| \leq \sum_{k=1}^{n} 4^{q_k-1} a_k R(q_k) \frac{|\zeta+1|^{2q_k}}{\xi^{2-q_k}}, \quad \zeta \in H_+,$$

причём $\xi = \Re\zeta$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n \leq 2$.

Параграф 4.2 посвящен достаточным условиям однолистности и многолистности типа Беккера для бигармонических отображений. Мы будем говорить, что функция f является p-листной в области Ω, где $p \geq 1$ — натуральное число, если

a) для любого $w \in \mathbb{C}$ уравнение $f(z) = w$ имеет m корней, где $0 \leq m \leq p$;

b) существует $w_0 \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение $f(z) = w_0$ имеет ровно p корней.

Пусть f —комплекснозначная бигармоническая функция в односвязной области Ω. Более точнее, мы предполагаем, что $f \in C^4(\Omega)$ и что f удовлетворяет уравнению $\triangle^2 f = 0$ на Ω, где

$$\triangle = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (z = x + iy)$$

— оператор Лапласа.

Известно, что каждую бигармоническую функцию f в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ можно записать в виде

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2 \left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right),$$

где h, g, h_1 и g_1 — аналитические в Ω функции.

Справедливы теоремы.

Теорема 4.2.1 *Предположим, что n — целое положительное число, $n \neq 0$, и бигармоническое отображение $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2 \left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right)$ локально однолистно и сохраняет ориентацию в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, где h, g, h_1 и g_1 голоморфные в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ функции такие, что*

$$h(z) = z^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = b_{n+1} z^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} b_k z^k,$$

$$h_1(z) = c_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k, \quad g_1(z) = d_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} d_k z^k$$

и

$$\lim_{z \to 0} z^{-n} f(z) = 1.$$

Также предположим

$$f_z(z) \neq \frac{\overline{z}}{n} f_{z\overline{z}} \quad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \quad \text{и} \quad |\omega(z)| := \left| \frac{f_{\overline{z}} - \frac{z}{n} f_{z\overline{z}}}{f_z - \frac{\overline{z}}{n} f_{z\overline{z}}} \right| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Если имеет место следующее неравенство

$$|\omega(z)| \left| n - \overline{z} \frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \right| + \left(1 - |z|^{2|n|}\right) \left| n - 1 - z \frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)} \right| \leq \left| n - \overline{z} \frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \right|$$

для любых $z \in \mathbb{D}$, то бигармоническая функция $f(z)$ является n-листной в $\mathbb{D}$.

Теорема 4.2.2 *Предположим, что бигармоническая функция*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2 \left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right)$$

является локально однолистной в круге и сохраняет ориентацию

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

где h, g, h_1 и g_1 — голоморфные в $\mathbb{D}$ функции такие, что

$$h_1(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad g_1(z) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k.$$

Также положим, что

$$f_z(z) \neq 0, f_z(z) \neq \overline{z} f_{z\overline{z}} \quad \text{и} \quad |\omega(z)| := \left| \frac{f_{\overline{z}}(z) - z f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z) - \overline{z} f_{z\overline{z}}(z)} \right| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Если имеет место следующее неравенство

$$|\omega(z)|\left|1-\overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)}\right|+\left(1-|z|^2\right)\left|z\frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)}\right|\leq\left|1-\overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)}\right|$$

для любого $z\in\mathbb{D}$, то $f(z)$ является однолистной в $\mathbb{D}$.

В **§4.3** мы получаем неравенства типа Реллиха в различных классах областей: области, регулярные в смысле Дэвиса, области, удовлетворяющие условию θ-конуса и выпуклые области. Приведем лишь соответствующие неравенства в открытых собственных подмножествах евклидова пространства. Имеет место теорема.

Теорема 4.3.1 *Пусть Ω — открытое собственное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим также, что $s>0$, $q>0$ и $\nu\in[0,s/q]$. Если $s\geq 1$ и $s+3\geq q$, то для любой функции $f\in C_0^2(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{n(n+2)}\int_\Omega\left[|\Delta u(x)|^2+2\sum_{i,j=1}^n\left|\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i\partial y_j}\right|^2\right]\frac{dx}{\delta^{s-1}(x)}\geq$$
$$\geq c(s)\int_\Omega|u(x)|^2\left(c(s+2)\rho(x,s+3)+\frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$

Если $s\geq 1$ и $s+3\leq q$, то для любой функции $f\in C_0^2(\Omega)$ имеем

$$\frac{1}{n(n+2)}\int_\Omega\left[|\Delta u(x)|^2+2\sum_{i,j=1}^n\left|\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i\partial y_j}\right|^2\right]\frac{dx}{\delta^{s-1}(x)}\geq$$
$$\geq c(s)\int_\Omega|u(x)|^2\left(c(s+2)\rho(x,s+3)+\frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$

Если $0<s\leq 1$ и $s+3\geq q$, то для любой функции $f\in C_0^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{3}{n(n+2)}\frac{2^{s-1}}{D^{s-1}(\Omega)}\int_\Omega|\Delta u(x)|^2dx\geq$$
$$\geq c(s)\int_\Omega|u(x)|^2\left(c(s+2)\rho(x,s+3)+\frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$

Если $0<s\leq 1$ и $s+3\leq q$, то для для любой функции $f\in C_0^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{3}{n(n+2)}\frac{2^{s-1}}{D^{s-1}(\Omega)}\int_\Omega|\Delta u(x)|^2dx\geq$$
$$\geq c(s)\int_\Omega|u(x)|^2\left(c(s+2)\rho(x,s+3)+\frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$

В **Главе 4** в виде следствия наших полученных результатов из третий главы, мы получаем новые неравенства типа Пуанкаре и оценки первого собственного значения p-лапласиана для задачи Дирихле в различных классах областей. Эти оценки включают две или три характеристики области как диаметр, объём и внутренний радиус одновременно. Например, при $p \in (2, 3]$, имеет место оценка

$$\lambda_p(\Omega) \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \left(\frac{1}{\delta_0^p(\Omega)} + \frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2 B(n,p)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\right),$$

где λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба.

Заключение. В диссертационной работе получены одномерные и пространственные неравенства типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, например, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области, а также рассмотрены их применения в теории достаточных условий однолистности, при оценке первого собственного числа p-лапласиана при граничных условиях Дирихле и при обосновании неравенств типа Реллиха. Все намеченные цели достигнуты и все поставленные задачи решены.

Естественное в теории интегральных неравенств направление исследований связано с получением L_1- и L_p- неравенств в одномерном и пространственном случае, различными обобщениями и усилениями весовых функций, поиском других неравенств, для которых возможен эффект Брезиса-Маркуса, распространением неравенств на другие классы областей отличных от выпуклых, установлением неравенств-“мостиков”, связывающих различные классы вариационных задач, получением неравенств с весами, зависящими от гиперболического радиуса, и с исследованием возможных приложений.

Получены новые L_1-, L_2- и L_p- усиленные дополнительными слагаемыми неравенства типа Харди, весовые функции которых имеют степенные особенности, содержат тригонометрические функции, функцию Бесселя; отдельно выделим неравенства для веса Якоби. Дополнительными слагаемыми усилены уже известные, а также новые неравенства, полученные в данной диссертационной работе. Дополнительные слагаемые удалось добавить за счет недостижимости и точности соответствующих констант либо за счет их ослабления. Поэтому важной составной частью исследований было изучение случаев, когда появляется возможность усиления соответствующих неравенства за счет дополнительных слагаемых.

Исследована взаимосвязь одномерных неравенств, приводящих к различным классам вариационных задач таких, как многомерные неравенства Харди в терминах функции расстояния до границы области с фиксированным объёмом, диаметром или внутренним радиусом, а также приводящих к конформно инвариантным неравенствам, с весами зависящими от конформного радиуса. Тем самым, построена единая теория неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми.

Для непрерывно дифференцируемых или гладких функций с компактным носителем получены L_1-, L_2- и L_p- неравенства типа Харди в пространственных областях. Получены неравенства в терминах расстояния в среднем в произвольных областях, а в терминах функции расстояния до границы — в произвольных областях, в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым и выпуклых областях. В плоских односвязных и двусвязных областях получены L_p-конформно инвариантные неравенства.

Рассмотрены применения доказанных одномерных и пространственных неравенств. А именно, получены оценки первого собственного значения p-лапласиана для задачи Дирихле в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым и выпуклых областях. Эти оценки включают две или три характеристики области как диаметр, объём и внутренний радиус одновременно. Получены достаточные условия однолистности мероморфных в круге функций в терминах оценки модуля шварциана, а также достаточные условия однолистности и p-листности типа Авхадиева-Беккера, тем самым расширен соответствующий класс однолистных функций. Также с применением одномерных неравенств получены многомерные неравенства типа Реллиха.

Результаты работы ставят новые интересные задачи и указывают перспективные направления в развитии идей, содержащихся в диссертации.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Авхадиеву Ф.Г. за обсуждения задач и всяческую поддержку[29], профессорам Насырову С.Р. и Гумерову Р.Н., а также доцентам Агачеву Ю.Р. и Ожеговой А.В. за ценные советы, критические замечания и постоянное внимание к работе. Также автор выражает свою искреннюю благодарность членам кафедры теории функций и приближений и кафедры математического анализа Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского. Не обойтись без огромной благодарности за поддержку и терпение моим родителям, семье и близким родственникам.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди для одной весовой функции и их применения* / Р.Г. Насибуллин // Изв. РАН. Сер. матем. - 2023. - Т. 87, №2. - С. 168-195.

[2] Насибуллин, Р.Г. *Геометрия одномерных и пространственных неравенств типа Харди* / Р.Г. Насибуллин // Изв. вузов. Матем. - 2022. - №11. - С. 52-88.

[3] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства Харди для веса Якоби и их применения* / Р.Г. Насибуллин // Сиб. матем. журн. - 2022. - Т. 63, №6. - С. 1313-1333.

[29]Выражения вида "всяческую поддержку" автор использовал при благодарности научного руководителя Авхадиева Ф.Г. в своих ранних публикациях, будучи еще аспирантом.

[4] Nasibullin, R.G. *Hardy and Rellich Type Inequalities with Remainders* / R.G. Nasibullin // Czechoslovak Mathematical Journal - 2022. - V. 72. - P. 87-110.

[5] Насибуллин, Р.Г. *Одномерные L_p-неравенства типа Харди для специальных весовых функций и их применения* / Р.Г. Насибуллин // Уфимск. матем.журн. - 2022. - Т. 14, №3. - С. 101-120.

[6] Nasibullin, R.G. *Sharp conformally invariant Hardy-type inequalities with remainders* / R.G. Nasibullin // Eurasian Math. J. - 2021. - Vol. 12, №3. - P. 46-56.

[7] Nasibullin, R.G. *Avkhadiev-Backer type p-valent conditions for biharmonic* / R.G. Nasibullin // Analysis and Mathematical Physics - 2021. - V. 11, №2. - Art. № 80.

[8] Макаров, Р.В. *Неравенства Харди с дополнительными слагаемыми и уравнения типа Лэмба* / Р.В. Макаров, Р.Г. Насибуллин // Сиб. матем. журн. - 2020. - Т. 61, №6. - С. 1377-1397.

[9] Makarov, R.V. *Hardy type inequalities and parametric Lamb equation* / R.V. Makarov, R.G. Nasibullin // Indagationes Mathematicae - 2020. - V. 31, №4. - P. 632-649.

[10] Nasibullin, R.G. *Avkhadiev-Becker type P-valent conditions for harmonic mappings of the unit disk and its exterior* / R.G. Nasibullin, I.K. Shafigullin // Mathematical Reports - 2020. - V. 22, №1. - P. 59-71.

[11] Makarov, R.V *Weighted Hardy Type Inequalities and Parametric Lamb Equation* / R.V. Makarov, R.G Nasibullin, G.R. Shaymardanova // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2020. - V. 41, №11. - P. 2198-2210.

[12] Nasibullin, R.G. *Brezis-Marcus type inequalities with Lamb constant* / R.G. Nasibullin // Сиб. электрон. матем. изв. - 2019. - Т. 16. - С. 449-464.

[13] Nasibullin, R.G. *A geometrical version of Hardy-Rellich type inequalities* / R.G. Nasibullin // Mathematica Slovaca - 2019. - V. 69, №4. - P. 785-800.

[14] Nasibullin, R.G. *Multidimensional Hardy Type Inequalities with Remainders* / R.G. Nasibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2019. - V. 40, №9. - P. 1383-1396.

[15] Авхадиев Ф.Г. *Конформные инварианты плоских областей гиперболического типа* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Уфимск. матем. журн. - 2019. - Т. 11, №2. - С. 3-18.

[16] Авхадиев, Ф.Г. *L_p-версии одного конформно инвариантного неравенства* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Изв. вузов. Матем. - 2018. - №8. - С. 88-92.

[17] Nasibullin, R.G. *Avkhadiev-Becker Type Univalence Conditions for Biharmonic Mappings* / R.G. Nasibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2018. - V. 39, №6. - P. 794-802.

[18] Насибуллин, Р.Г. *Точные интегральные неравенства типа Харди с весами, зависящими от функции Бесселя* / Р.Г. Насибуллин // Уфимск. матем. журн. - 2017. - Т. 9, №1. - С. 89-97.

[19] Насибуллин, Р.Г. *Условия p-листности типа Авхадиева-Беккера для гармонических отображений круга* / Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Изв. вузов. Матем. - 2017. - №3. - С. 84-88.

[20] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства, включающие дробные интегралы функции и её производную* / Р.Г. Насибуллин // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. - 2017. - Т. 140. - С. 68-77.

[21] Nasibullin, R.G. *Hardy type inequalities for fractional integrals and derivatives of Riemann-Liouville* / R.G. Nasibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2017. - Vol. 38, №3. - P. 709-718.

[22] Авхадиев Ф.Г. *Условия однолистности типа Беккера для гармонических отображений* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Изв. вузов. Матем. - 2016. - №11. - С. 80-85.

[23] Nasibullin, R.G. *Hardy type inequalities with weights dependent on the bessel functions* / R.G. Nasibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2016. - V. 37, №3. - P. 274-283.

[24] Насибуллин, Р.Г. *Об одном дискретном неравенстве типа Харди с логарифмическим весом* / Р.Г. Насибуллин // Владикавк. матем. журн. - 2016. - Т. 18, №2. - С. 67-75.

[25] Насибуллин, Р.Г. *Обобщения неравенств типа Харди в форме Ю.А. Дубинского* / Р.Г. Насибуллин // Матем. заметки - 2014. - Т. 95, №1. - С. 109-122.

[26] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин // Сиб. матем. журн. - 2014. - Т. 55, №2. - С. 239-250.

[27] Насибуллин, Р.Г. *Точность констант логарифмических неравенств типа Харди в открытых многомерных областях* / Р.Г. Насибуллин // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки - 2013. - Т. 155, №3. - Р. 111-125.

[28] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди с логарифмическими и степенными весами для специального семейства невыпуклых областей* / Р.Г. Насибуллин, А.М. Тухватуллина // Уфимск. матем. журн. - 2013. - Т. 5, №2. - С. 43-55.

[29] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Изв. вузов. Матем. - 2011. - №9. - С. 90-94.