Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Казанский (Приволжский) федеральный университет

На правах рукописи

УДК 517.51, 517.54

Насибуллин Рамиль Гайсаевич

Анализ и геометрия одномерных и пространственных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Ф.Г. Авхадиев

Казань — 2024

Основные обозначения

$\mathbb{R}$:	множество действительных чисел
$\mathbb{R}^n$:	n-мерное евклидово пространство
$\mathbb{C}$:	комплексная плоскость
Γ :	гамма-функция Эйлера
B :	бета-функция
B_t :	неполная бета-функция
J_ν :	функция Бесселя порядка ν
j_ν :	первый положительный нуль функции Бесселя порядка ν
j'_ν :	первый положительный нуль производной J'_ν функции Бесселя порядка ν
Ω :	открытое подмножество $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$:	граница открытого подмножества Ω
$D(\Omega)$:	диаметр области Ω
$\|\Omega\|$:	объём области Ω
$\delta_0(\Omega)$:	внутренний радиус области Ω
$\delta(x)$:	функция расстояния от точки x до границы области Ω
$C_0^k(\Omega)$:	семейство функций с компактным носителем в области Ω, обладающих непрерывными производными вплоть до k-го порядка включительно
$C_0^\infty(\Omega)$:	пространство гладких функций с компактным носителем в области Ω
$L_{p,\rho}(\Omega)$:	пространства измеримых в области Ω функций, таких, что их p-я степень интегрируема с весом ρ, где $p \geq 1$.

Оглавление

Введение

Функциональные и спектральные неравенства для заданных на отрезке или в многомерных областях с различным поведением на границе функций получили широкое развитие и применение. В силу разного рода приложений в математике и математической физике, в частности, в геометрической теории функций, в теории изопериметрических неравенств и в теории вложения функциональных пространств (см., например, [1, 11, 17, 27, 31, 38, 44, 45, 61, 67, 115, 123, 170, 171, 187]), особое место среди таких неравенств занимают неравенства типа Харди. Неравенства Харди связывают функцию и её производную в интегральном соотношении (см. также [24, 93]). В данной диссертационной работе впервые дается систематическое изложение теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области.

Неравенства типа Харди, усиленные дополнительными слагаемыми, играют важную роль в теории уравнений в частных производных и нелинейном анализе. Они используются, например, при исследовании устойчивости решений эллиптических и параболических уравнений, а также при изучении существования и асимптотического поведения решений уравнений теплопроводности с сингулярными потенциалами. В статье [77] Х. Брезис и Дж.Л. Васкес рассматривают полулинейное эллиптическое уравнение

$$\Delta u = \lambda f(u)$$

в ограниченной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и с граничным условием Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Накладываются некоторые ограничения на нелинейность f, которые обеспечивают существование максимального значение λ_*, для которого задача имеет решение, и исследуются существование и свойства соответствующего неограниченного экстремального решения. Экстремальное решение и максимальное значение λ_* характеризуются двумя критериями, одним из которых является неравенство вида

$$H_1 \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^2}{|x|^2} dx + H_2 \left(\frac{\omega_n}{|\Omega|}\right)^{2/n} \int\limits_\Omega |g(x)|^2 dx \le \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx, \qquad (0.0.1)$$

справедливое для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и любой функции $g : \Omega \to \mathbb{R}$ из замыкания семейства непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω и с конечным интегралом Дирихле, где $|\Omega|$ — объём области, H_1 и H_2 — некоторые известные константы. Это неравенство доказано методом симметризации области, который позволяет вместо неравенства в Ω рассматривать соответствующее неравенство в n-мерном шаре с тем же объёмом. В дальнейшем[1] Х. Брезис и М. Маркус в [76] установили аналог предыдущего неравенства в терминах функции расстояния до границы и диаметра области.

Задача добавления дополнительного слагаемого в неравенства типа Харди также связана с классическими оценками первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ для лапласиана при граничных условиях Дирихле и с неравенством Пуанкаре. Широко известны оценка Пуанкаре и изопериметрическое неравенство Рэлея-Фабера-Крана в терминах диаметра и объёма области. Поэтому весьма ожидаемыми являются неравенства типа Харди с дополнительными слагаемыми, константы которых зависят от диаметра, объёма и внутреннего радиуса области или даже от этих характеристик одновременно. Существует множество путей, в сторону которых можно развивать и обобщать теорию неравенств Харди с дополнительными слагаемыми. Естественно рассматривать следующие направления:

1. получение L_1- и L_p- неравенств в одномерном и пространственном случае;
2. различные обобщения весовых функций[2];
3. поиск неравенств, для которых возможен эффект Брезиса-Маркуса[3];
4. распространение неравенств в классы областей, отличных от выпуклых;
5. установление неравенств-мостиков, связывающих эти три класса вариационных задач[4];
6. исследование возможных приложений.

Несмотря на то, что неравенствам Харди посвящали свои работы активно работающие в этой области российские и зарубежные математики такие, как Ф.Г. Авхадиев, В.И. Буренков, К.-Й. Виртс, Ф. Гецтези, М.Л. Гольдман, Ю.А. Дубинский, Е.Б. Дэвис, А. Куфнер, А. Лаптев, В.Г. Мазья, В.М. Миклюков, Р. Ойнаров, Д.В. Прохоров, Дж.М. Родригес, М. Ружанский, С.Л. Соболев, В.Д. Степанов, Д. Сураган, Дж. Тидблум, Дж.Л. Фернандес, и многие др., в этих направлениях получены лишь некоторые отдельные результаты, о которых будет упомянуто ниже. Поэтому целью диссертации является систематизация неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, их исследование и развитие в этих шести направлениях. Важной составной частью поставленной цели является изучение случаев, когда появляется возможность усиления соответствующих неравенств за счет дополнительных слагаемых. Забегая вперед, скажем, что для этого будут рассматриваться сильные и слабые константы-функционалы Харди.

Рассмотрим открытое связное собственное подмножество Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$,

[1]Заметим, что обе статьи [76] и [77] изданы в 1997 году и нам не вполне ясно, какой результат был первым.

[2]Например, с весами, зависящими от гиперболического радиуса.

[3]Возможность добавления дополнительного слагаемого.

[4]Имеется ввиду неравенства в областях с фиксированным объёмом, диаметром и внутренним радиусом.

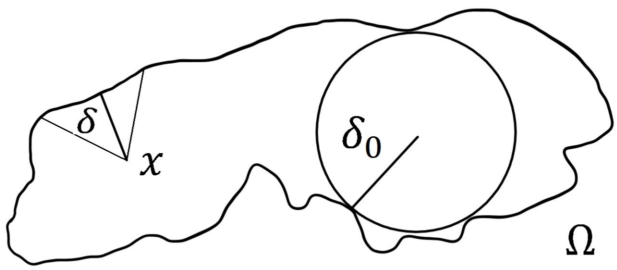

Рисунок 0.0.1: Функция расстояния до границы и внутренний радиус области.

$n \geq 2$. В области Ω естественным образом можно определить функцию расстояния δ от точки x (см. рис. 0.0.1) этой области до её границы $\partial\Omega$:

$$\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

и внутренний радиус области

$$\delta_0(\Omega) = \sup\{\delta(x) : x \in \Omega\}.$$

Более подробную информацию о свойствах и применениях функции расстояния открытого подмножества евклидового пространства можно найти в недавних работах [2,5,66] (см. также [99], [148]).

Через $C_0^1(\Omega)$ будем обозначать семейство непрерывно дифференцируемых функций $g : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями в Ω. Без ограничения общности далее будем рассматривать пространственные неравенства лишь для семейства непрерывно дифференцируемых или гладких функций с компактным носителем. Известно, что любая непрерывная функция аппроксимируется непрерывно дифференцируемыми функциями [33, 38]. Например, это можно сделать, используя усредняющее ядро и средние функции (см. пример использования в [199]). Для получения неравенств в более общих случаях (например, в весовых пространствах Соболева) достаточно рассмотреть замыкание класса непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем по соответствующей норме (см., например, [38]).

Объектом исследования данной диссертационной работы является следующее весовое неравенство[5]

$$c \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)} Q(x)dx + a \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)} H(x)dx \leq \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)} V(x)dx, \tag{0.0.2}$$

[5] В одномерном случае областью интегрирования является отрезок, а градиент функции совпадает с обычной производной.

справедливое для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$, где $x = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$, Q, V и H — некоторые весовые функции и через ∇g обозначен градиент g, т.е.

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial g(x)}{\partial t_n} \right),$$

а p, q, s — вещественные параметры[6], a и c — не зависящие от функции g константы.

Неравенство (0.0.2) будем называть *неравенством типа Харди*, так как оно является обобщением на пространственный случай и случай произвольных весовых функций доказанного в 1920 году Г.Х. Харди [110] для абсолютно непрерывной функции $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$, $y'(x) \geq 0$ и $y' \in L^2(0, +\infty)$, следующего неравенства

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{y^2(t)}{t^2} dt \leq 4 \int\limits_0^{+\infty} y'^2(t) dt, \tag{0.0.3}$$

которое в литературе известно как *классическое* или *базовое неравенство Харди*.

В классическом неравенстве (0.0.3) константа 4 является точной, т.е. её нельзя уменьшить, а равенство достигается лишь на функции $y(t) \equiv 0$. Точность константы стоит понимать в следующем смысле: *при любом* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* y_ε *такая, что*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{y_\varepsilon^2(t)}{t^2} dt > (4 - \varepsilon) \int\limits_0^{+\infty} y_\varepsilon'^2(t) dt.$$

Недостижимость точной константы в неравенствах типа Харди — отличительная особенность неравенств такого вида. Отметим, что доказательство точных неравенств типа Харди состоит из двух не уступающих друг другу по сложности и оригинальности обоснования этапов:

1) доказательство непосредственно неравенства;

2) обоснование точности константы в полученном неравенстве.

Также добавим, что основная работа при исследовании неравенств заключается в оценках констант-функционалов, зависящих от областей, весовых функций и числовых параметров задачи (см. [12]). Существование положительных констант означает ограниченность норм соответствующих операторов вложения, и это требование приводит к “сортировке” областей, т.е. к определению типов областей, для которых соответствующая задача математической физики имеет решение и смысл [4].

Далее, следуя статье Е.Б. Дэвиса [89] (см. также [13, 76]), *слабую константу Харди* определим как супремум на множестве всех положительных постоянных c таких, что неравенство (0.0.2) будет выполняться при некотором $a < \infty$. В работах Е.Б. Дэвиса показано, что слабая константа имеет локально-геометрическую природу.

[6] Известны работы (см., например [96, 111, 129, 130, 157]), в которых получены обобщения на случай, когда степень p является функцией.

Сильной константой Харди назовем наибольшую константу c, для которой это неравенство будет выполнено при $a = 0$. Для удобства сильную константу-функционал будем обозначать через $S^{\Omega}_{p,n}(s, Q, V)$, т.е.

$$S^{\Omega}_{p,n}(s, Q, V) = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)} V(x)dx : g \in C^1_0(\Omega) \text{ и } \int_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)} Q(x)dx = 1 \right\}.$$

Изучаемое неравенство при $a = 0$ является содержательным, если сильная константа $S^{\Omega}_{p,n}(s, Q, V) > 0$.

Соответственно, обратной к слабой константе-функционалу является следующая величина

$$\mu_w(\Omega) = \sup_{a \in \mathbb{R}} W^{\Omega,a}_{p,n,q}(s, Q, H, V),$$

где

$$W^{\Omega,a}_{p,n,q}(s, Q, H, V) = \inf_{g \in C^1_0(\Omega), g \not\equiv 0} \frac{\int_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)} V(x)dx - a \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)} H(x)dx}{\int_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)} Q(x)dx}.$$

Также при фиксированном c через $P^{\Omega,c}_{p,n,q}(s, Q, H, V)$ обозначим точную константу-функционал, определенный следующим образом:

$$P^{\Omega,c}_{p,n,q}(s, Q, H, V) = \inf_{g \in C^1_0(\Omega), g \not\equiv 0} \frac{\int_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)} V(x)dx - c \int_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)} Q(x)dx}{\int_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)} H(x)dx},$$

т.е. $P^{\Omega,c}_{p,n,q}(s, Q, H, V)$ — максимальная возможная константа перед дополнительным слагаемым.

Исследования таких констант-функционалов позволяют, например, ответить на вопрос о возможности дальнейшего усиления неравенств типа Харди за счет добавления дополнительных слагаемых (см. [76]).

Классическое неравенство Харди (0.0.3) обобщалось в различных направлениях, и литература, посвященная таким неравенствам, весьма разнообразна и обширна. Получены неравенства типа Харди для конкретных, например, логарифмических [27, 60, 201], и произвольных весовых функций [25, 30, 36, 39–41, 162], доказаны пространственные неравенства (см. [66] и литературу в ней), неравенства для дробных производных и интегралов [128,161,192,193], неравенства для старших производных [29,32,80,169], известны неравенства Харди в гомогенных группах [149–154] и т.д.

Изучение неравенств Харди для областей началось с работы Дж. Некаса [137]. Он перенес соответствующее одномерное неравенство Харди на области с локально липшицевыми границами, т.е. в случае, когда граница $\partial\Omega$ области Ω является локально липшицевой, константа $S^{\Omega}_{2,n}(2, 1, 1)$ является положительной. Достаточные условия типа Гёльдера на поведение границы области, при которых выполняется неравенство Харди, были получены А. Куфнером [118], А. Куфнером и Б. Опичем [141].

Ряд красивых результатов получен в областях с равномерно совершенной границей. Из результатов Х. Поммеренке [146] и А. Анконы [55] следует, что $S_{2,2}^{\Omega}(2,1,1)$ положительна тогда и только тогда, когда граница области Ω является равномерно совершенной. А также из более общих результатов Ф.Г. Авхадиева [60] следует, что

$$\frac{1}{16(\pi M_0(\Omega)+a_0)^4} \le S_{2,2}^{\Omega}(2,1,1) \le \frac{1}{4M_0^2(\Omega)}, \quad a_0 \approx 4.38,$$

где $M_0(\Omega)$ — геометрический параметр, определяемый как максимальный модуль колец, лежащих в области Ω с центром на границе $\partial\Omega$ и разделяющих границу. Эта оценка, для которой известна также её L_p-версия (см. там же [60]), является прямым доказательством утверждения Анконы-Поммеренке, поскольку условие $M_0(\Omega) < \infty$ равнозначно равномерной совершенности границы $\partial\Omega$ области.

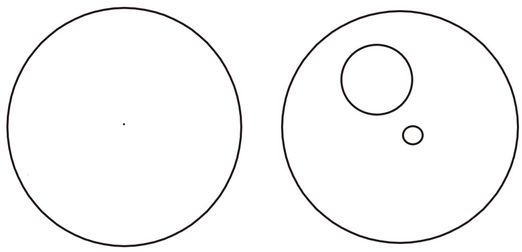

Рисунок 0.0.2: Круг с выколотым центром — пример области, не имеющей равномерно совершенную границу. Вторая область — пример области, которая имеет равномерно совершенную границу.

Отметим неравенства Ф.Г. Авхадиева из статьи [12], которые являются аналогами (0.0.2), например, при

$$c = p^p, a = 0, s = n, V(x) = \left(\log\frac{\delta_0(\Omega)}{\delta(x)}\right)^p \quad \text{и} \quad Q(x) = 1$$

уже с логарифмическими весами и справедливыми в произвольных областях евклидова пространства. Штрафной логарифмический множитель компенсирует любое “плохое” поведение границы области. В нашей совместной статье [201] этот результат обобщен на случай итерированных или вложенных логарифмов (см. также [15]).

Из результатов В.М. Миклюкова и М.К. Вуоринена из [135] также можно получить двусторонние оценки константы $S_{2,2}^{\Omega}(2,1,1)$, но уже в терминах изопериметрического профиля, а В.Г. Мазья [31] дал ёмкостные характеристики неравенств типа Харди (см. также [116]).

В случае невыпуклых областей точные константы $S_{2,2}^{\Omega}(2,1,1)$ неизвестны, и задача их поиска до сих пор остается открытой. В 1986 году, используя теорему Кёбе об одной четверти, А. Анкона в статье [55] показал, что для односвязной плоской области константа

$$S_{2,2}^{\Omega}(2,1,1) \geq \frac{1}{16}.$$

В статье [122] А. Лаптев и А.В. Соболев рассмотрели классы областей, для которых существует более общая версия теоремы Кёбе. Тем самым они получили более точные оценки этой константы для областей, удовлетворяющих дополнительным условиям. Добавим, что до сих пор нет необходимого и достаточного условия в терминах евклидовых характеристик положительности константы $S_{2,n}^{\Omega}(2,1,1)$. Эта задача является открытой при $n \geq 3$.

Наиболее простым является случай выпуклых областей. В этом случае известно, что

$$S_{2,n}^{\Omega}(2,1,1) = \frac{1}{4}.$$

Этот факт доказан в нескольких статьях, опубликованных в 1995-1998 годах (см. [76,89,132, 133]). Стоит отметить, что условие выпуклости не является необходимым условием того, что

$$S_{2,n}^{\Omega}(2,1,1) = \frac{1}{4}.$$

Существуют примеры экзотических невыпуклых областей, для которых константа также равна 1/4 (см., например, [64, 70]). Целый класс таких множеств был получен Ф.Г. Авхадиевым в статье [12] (см. также [10,14]). Он описал области λ-близкие к выпуклым. Этот класс областей можно описать как области, которые можно снаружи "окрасить" шаром определенного радиуса. Остановимся на этом классе подробнее. Справедливо утверждение: *предположим, что $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Если для любой граничной точки $y \in \partial\Omega$ существует шар B_y с радиусом*

$$r_n = \delta_0(\Omega)/\Lambda_n$$

такой, что $y \in \overline{B}_y \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega$, где $\delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} dist(x, \partial\Omega)$, а Λ_n — корни специального уравнения типа Лэмба, то $S_{2,n}^{\Omega}(2,1,1) = 1/4$. Числовые значения констант Λ_n легко вычисляются, в частности $\Lambda_2 \approx 2.49$, $\Lambda_3 = 1$, $\Lambda_4 \approx 0.61$ и $\Lambda_5 \approx 0.44$.

Основой доказательства этого утверждения являются одномерные интегральные неравенства — аналоги неравенства Харди со специальными весовыми функциями. В частности, появление постоянных Λ_n в формулировке этого утверждения обусловлено следующим неравенством

$$\frac{1}{4}\int_1^{\rho} \frac{y^2(t)}{(t-1)^2} t^{n-1} dt < \int_1^{\rho} y'^2(t) t^{n-1} dt$$

для любой абсолютно непрерывной функции y, удовлетворяющей условиям: $y(1) = 0$ и $y \not\equiv 0$, где $1 < \rho \leq \Lambda_n$. Постоянные $1/4$ и Λ_n являются точными.

Как можно заметить, несмотря на то, что в одномерном неравенстве со специальным весом нет сложностей, приходящих от области, они являются аналитической основой геометрических описаний. То есть геометрия одномерных неравенств диктуется методом доказательства их пространственных аналогов.

В основе доказательства пространственных неравенств, рассматриваемых во введении данной диссертационной работы, лежат одномерные неравенства со специальными весами и новыми константами, связанными с этими неравенствами. Эти одномерные неравенства напрямую не зависят от геометрии области, а содержат параметры и константы, которые диктуются областями. Поэтому была выбрана следующая структура диссертации.

Во введении собраны одномерные неравенства, для которых известны их пространственные аналоги, исследуется взаимосвязь одномерных неравенств, приводящих к различным классам вариационных задач. Они в дальнейшем используются для вывода многомерных неравенств Харди в терминах функции расстояния до границы области с фиксированным объёмом, диаметром или внутренним радиусом, а также приводящих к конформно инвариантным неравенствам с весами, зависящими от конформного радиуса. Первая глава диссертации посвящена одномерным неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми в L_1- и L_2-случаях. Во второй главе обосновываются неравенства в L_p-случае и дается некоторая классификация-алгоритм доказательства таких неравенств. Многомерным неравенствам посвящена третья глава. Там же излагаются результаты по конформно инвариантным неравенствам с дополнительными слагаемыми. В четвертой главе рассматриваются приложения одномерных и пространственных неравенств. Отметим, что по ходу изложения обзорной части мы приводим для удобства сравнения также результаты, полученные в данной диссертации. В конце введения будет отдельно приведены наши результаты в полном объёме и общности.

Рисунок 0.0.3: Порядок доказательства пространственных неравенств.

Продолжим обзорную часть. Что касается одномерных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми в L_2- и L_1-случаях, ряд точных неравенств со степенными особенностями на конечном отрезке был доказан в статье [30] В.И. Левиным, чьим учителем и формальным руководителем по аспирантской подготовке был Г.Х. Харди[7]. Например, он показал, что константа 4 также является точной в следующем соотношении

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt < 4\int_0^1 y'^2(t)dt \tag{0.0.4}$$

для всех абсолютно непрерывных функций y таких, что $y(0) = 0$, $y \not\equiv 0$ и $y' \in L^2(0,1)$.

Несмотря на то, что константа 4 в неравенстве (0.0.4) является неулучшаемой, В.И. Левин в той же статье [30] получил более сильную версию (0.0.4). А именно, он показал, что для любой непрерывно дифференцируемой функции y такой, что $y(0) = 0$, справедливо следующее с точной константой равной единице неравенство

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2(2-t)^2}dt < \int_0^1 y'^2(t)dt. \tag{0.0.5}$$

Весовая функция $t^{-2}(2-t)^{-2}$ легко преобразуется и соотношение (0.0.5) записывается в виде

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt + 2\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t(2-t)}dt + \int_0^1 \frac{y^2(t)}{(2-t)^2}dt < 4\int_0^1 y'^2(t)dt, \tag{0.0.5$'$}$$

из которого становится ясно, каким именно образом усиливается неравенство (0.0.4) — с помощью дополнительных слагаемых. В последние десятилетия опубликовано множество работ, посвященных неравенствам с дополнительными слагаемыми (см. [8]), но в литературе[8] практически не упоминается этот результат В.И. Левина как усиление классического неравенства Харди с помощью дополнительных слагаемых.

Достаточно интересной по форме и содержанию является аналог неравенства (0.0.5′) на отрезке $[0, 2b]$ для абсолютно непрерывных функций таких, что $y(0) = y(2b) = 0$. А именно,

$$\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + 2\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt + \int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\mu^2(t)}dt < 4\int_0^{2b} y'^2(t)dt, \qquad (0.0.5''),$$

где $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$ и $\mu(t) = 2b - \rho(t)$. Близкое к (0.0.5″) неравенство

$$\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + \int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt \leq 4\int_0^{2b} y'^2(t)dt \tag{0.0.6}$$

использовано М. Хоффманн-Остенхофом, Т. Хоффманн-Остенхофом и А. Лаптевым в статье [114] для доказательства многомерного случая. Если получить усиления неравенства

[7]Левин, В.И. Виктор Иосифович Левин — выдающийся педагог и ученый / В.И. Левин // Системы управления, связи и безопасности : журнал. - Санкт-Петербург: ООО <Корпорация Интел Групп>, 2023. - № 2. - С. 258-274.

[8]Даже, собственно, в статье В.И. Левина [30].

(0.0.5″), то с использованием подхода из статьи [114] (см. также [66], [98]) можно получить многомерные неравенства, усиливающие результаты из [114].

Далее заметим, что неравенство (0.0.4) является точным с недостижимой константой, а (0.0.5) его усиливает и при этом также константа равная единице точна и также недостижима. Открытым остается вопрос о возможности эффекта Брезиса и Маркуса для неравенства (0.0.5). Т.е. можно ли добавить дополнительное слагаемое в неравенство (0.0.5) для его усиления? В параграфах **§1.3** и **§1.4 первой главы** диссертации удалось дать ответ на этот вопрос. Например, показано, что для любой абсолютно непрерывной функции $y:[0,1]\to\mathbb{R}$ такой, что $y(0)=0$ и $y'\in L^2[0,1]$, справедливо точное неравенство

$$(1-\nu^2q^2)\int\limits_0^1\frac{y^2(t)}{t^2(2-t)^2}dt+q^2{j'}_\nu^2\int\limits_0^1\frac{y^2(t)}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}}dt\le\int\limits_0^1 y'^2(t)dt,$$

а для любой функции $y\in C_0^1(0,2b)$ такой, что $y'\in L^2[0,2b]$, имеет место оценка

$$\int\limits_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt+C_0^2(1)\int\limits_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt+3C_0^2(1)\int\limits_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\mu^2(t)}dt+2C_0^2(1)\int\limits_0^{2b}y^2(t)\frac{\rho(t)}{\mu^3(t)}dt\le 4\int\limits_0^{2b}y'^2(t)dt,$$

где $C_0(1)\approx 1.25578$, j'_ν — первый положительный корень производной J'_ν функции Бесселя J_ν порядка $\nu\ge 0$, определяемая в виде сходящегося степенного ряда

$$J_\nu(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+1+\nu)},\quad t\in[0,1],$$

где Γ — это гамма-функция Эйлера.

Нельзя не отметить родственный результат из статьи [98] (см. также [66]), в котором В.Д. Эванс и Р.Т. Льюис показали, что

$$\int\limits_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt+4\int\limits_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt+4\int\limits_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\mu^2(t)}dt\le 4\int\limits_0^{2b}y'^2(t)dt.$$

Но, судя по доказательству этого неравенства, функция y должна принадлежать более узкому классу, а именно, $y\in C^1(0,2b)$ такая, что

$$y(0)=y(b)=y(2b)=0,$$

то есть в отличие от предыдущих случаев дополнительно накладывается условие $y(b)=0$.

Обратим внимание, что неравенство (0.0.5″) относительно введенных выше сильных и слабых констант-функционалов можно рассматривать с различных точек зрения. В наших обозначениях имеем, что

$$S_{2,1}^{[0,2b]}(2,1,1)=\frac14\quad\text{и}\quad P_{2,1,1}^{[0,2b],\frac14}(2,1,\mu^{-1}(t),1)\le\frac12$$

или

$$S_{2,1}^{[0,2b]}(2,1,1) = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad P_{2,1,2}^{[0,2b],\frac{1}{4}}(2,1,\mu^{-2}(t),1) \leq \frac{1}{4}.$$

Более того,

$$S_{2,1}^{[0,2b]}\left(2, \frac{b^2}{\mu^2(t)}, 1\right) = 1.$$

Поэтому имеет смысл говорить не только о точных константах в неравенствах, но и о *точных весовых функциях.* Термин "точная весовая функция" не является общепринятым и используется в диссертации впервые для уточнения и различения точных констант в одних и тех же неравенствах с различными весовыми функциями.

Также естественными являются вопросы: какие ещё положительные слагаемые можно добавить в (0.0.4) и можно ли добавить такое слагаемое, которое сделает это неравенство уже с достижимой константой? Ответ на вопрос можно найти в работе Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса [58], в которой получен мостик между неравенствами Харди и Пуанкаре-Фридрихса. Они показали, что при $q > 0$ и $\nu \in \left[0, \frac{1}{q}\right]$ для всех непрерывно дифференцируемых функций $y \in C^1[0,1]$ таких, что $y(0) = 0$, справедливо точное неравенство

$$(1-\nu^2 q^2)\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt + q^2\lambda^2 \int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^{2-q}}dt \leq 4\int\limits_0^1 y'^2(t)dt. \tag{0.0.7}$$

Здесь константа λ является первым положительным решением специального уравнения типа Лэмба

$$J_\nu(\lambda) + q\lambda J'_\nu(\lambda) = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

для функции Бесселя J_ν порядка $\nu \geq 0$, где через j_ν обозначаем первый положительный корень функции J_ν.

В случае, когда $\nu > 0$ равенство в неравенстве (0.0.7) достигается на функции $y(t) = \sqrt{t}J_\nu(\lambda t^{q/2})$, т.е. весовая функция

$$\frac{1-\nu^2 q^2}{4t^2} + \frac{q^2\lambda^2}{t^{2-q}}$$

является точной. Этого авторы добились ослаблением постоянной 1/4. Обратим внимание, что этот факт имеет место только для случая $\nu > 0$, а при $\nu = 0$ константы являются недостижимыми, и можно ли добавить ещё дополнительное слагаемое в уже усиленное неравенство неясно, задача остается открытой.

Следуя статьям [57–59], величину λ будем называть постоянной Лэмба (см. также [180,181,183]). Поясним названия "постоянная и уравнение Лэмба". Дело в том, что частный случай этого уравнения впервые был рассмотрен Х. Лэмбом в статье [121] (см. также [26, с. 502]). Позже оно развивалось и так названо Ф.Г. Авхадиевым и К.-Й. Виртсом в статье [58]. По этой же причине более общие уравнения такого вида в данной диссертации называются *параметрическим уравнением Лэмба*, а его корни *постоянными Лэмба.*

Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Виртс в [59] обобщили последнее неравенство (0.0.7) добавлением степенной особенности также в интеграл с правой стороны. Приведем это неравенство для абсолютно непрерывных функций y таких, что $y(a) = y(b) = 0$. Справедливо неравенство

$$\frac{s^2-\nu^2q^2}{4}\int\limits_a^b \frac{y^2(t)}{\rho^{s+1}(t)}dt + \frac{q^2\lambda^2}{4\delta_0^2}\int\limits_a^b \frac{y^2(t)}{\rho^{s+1-q}(t)}dt \leq \int\limits_a^b \frac{y'^2(t)}{\rho^{s-1}(t)}dt, \tag{0.0.8}$$

где $s > 0$, $q > 0$, $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$, $\rho(t) = \max\{t-a; b-t\}$ — функция расстояния до границы области, $\delta_0 = (b-a)/2$ и константа λ является решением специального уравнения для функции Бесселя J_ν порядка ν, а именно, следующего уравнения типа Лэмба

$$sJ_\nu(\lambda) + q\lambda J_\nu'(\lambda) = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu).$$

Константы $\frac{s^2-\nu^2q^2}{4}$ и $\frac{q^2\lambda^2}{4}$ в этом неравенстве являются точными, т.е.

$$S_{2,1}^{[a,b]}(s+1,1,1) = \frac{s^2}{4} \quad \text{и} \quad P_{2,1,q}^{[a,b],\frac{s^2-\nu^2q^2}{4}}(s+1,1,1,1) = \frac{q^2\lambda^2}{4}.$$

Более того, так же как и в (0.0.7) при $\nu > 0$ существует экстремальная функция, для которой в неравенстве достигается равенство и

$$S_{2,1}^{[a,b]}\left(s+1, \frac{s^2-\nu^2q^2}{2} + \frac{q^2\lambda^2}{4\delta_0^q}\rho^q(t), 1\right) = 1.$$

Следовательно, можем сказать, что неравенство (0.0.8) при $\nu > 0$ справедливо с точными константами и точной весовой функцией. В случае $\nu = 0$ Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Виртс построили минимизирующую последовательность, через которую показали точность и недостижимость констант в (0.0.8). При этом вид минимизирующей последовательности был подобран с учетом функции $y(t) = t^{p/2}J_\nu(\lambda t^{q/2})$, на которой в неравенстве (0.0.8) достигается равенство при $\nu > 0$.

Таким образом, доказательство неравенств с точной весовой функцией и достижимой (возможно за счет ослабления) постоянной упрощают обоснование второго этапа — построение минимизирующей последовательности в случае недостижимых констант. Поэтому в **главе 1** (**§1.2**) и в **главе 2** (**§2.2**) развивается техника доказательства новых соответственно L_2- и L_p-неравенств с ослабленными константами, сводящимися предельным переходом к точным [9].

Отметим также результаты Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса из статьи [57] с весовыми функциями, зависящими от функции Бесселя. Им удалось также доказать следующее неравенство

$$\frac{1-\nu^2q^2}{4}\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}\frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} + \frac{q^2\lambda_\nu^2\left(\frac{2}{q}\right)}{4}\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^{2-q}}\frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} \leq \frac{1}{s}\int\limits_0^1 y'^2(t)\frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)}, \tag{0.0.9}$$

[9] Не исключены случаи, когда предельным переходом получаются уже известные неравенства

где s, ν и q — положительный числа, $\Phi_{\nu,q}(t) = \sqrt{t} J_\nu \left(\lambda_\nu(2/q) t^{q/2}\right)$, а $z = \lambda_\nu(2/q)$ — константа Лэмба, определяющаяся как первое положительное решение уравнения

$$J_\nu(z) + qzJ'_\nu(z) = 0.$$

Последние три неравенства с точными константами Лэмба являются одним из красивейших результатов в теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми. Естественно было бы обобщить и развить неравенства такого вида, например, получить их L_p-аналоги или добавить ещё дополнительное слагаемое к уже усиленным неравенствам. Долгое время таких обобщений практически не было. Это связано с тем, что применяемый в статьях подход Авхадиева-Виртса так тщательно "подточен" под L_2-случай, что нет каких-либо известных техник для дальнейшего развития и обобщения. И, в общем, к настоящему времени нет достаточно хороших методов обоснования L_p-неравенств, а известные подходы тяжело поддаются обобщениям и алгоритмизации.

Наш опыт доказательства L_p-неравенств говорит, что "разными мирами" являются случаи $p = 1$, $p \in (1, 2)$, $p = 2$ и $p > 2$. Поэтому в **Главе 2** развиваются и исследуются различные способы получения L_p-неравенств и доказываются отдельно L_1-, L_2- и L_p-неравенства.

Один из подходов связан с обоснованием L_1-неравенств с дополнительными слагаемыми и последующим их применением. Сильная и слабая сторона L_1-неравенств в плане усиления добавлением дополнительных слагаемых — это достижимость констант, т.е. сложность или даже невозможность их дальнейшего уточнения. Поэтому в диссертации развивается идея ослабления точных констант. На первый взгляд техника ослабления констант в L_1-неравенствах может показаться неэффективной. На самом деле, в комбинации с методами из **Главы 2** L_1-неравенства позволяют получать аналоги при произвольных $p > 1$ с константами лучшими, чем в ранее известных неравенствах в L_p-случае. Подробнее об этом скажем позже.

Приведем лишь результат из **§2.2**. Предположим, что $p \geq 2$, $s > 0$, $q \in (0, \infty)$ и y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функцией такой, что $y(0) = 0$ и $y'(t) t^{(1-2s/p)(1-1/p)} \in L^p[0, 1]$. Если $\nu \in [0, s/q]$, то

$$\frac{|(s-1)^2 - \nu^2 q^2|\,(s-1)^{p-2}}{2^{3-p} p^{p-1}} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}} dt + \frac{(s-1)^{p-2} q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{2^{3-p} p^{p-1}} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-q+1}} dt \leq \int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{(1-2s/p)(1-p)}} dt,$$

где $\lambda_\nu(2s/q)$ — постоянная Лэмба.

А в пункте **§2.4** при $p \geq 2$, $s > 0$, $q \in (0, +\infty)$, $\nu \in [0, s/q]$ для любой абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции y получено следующее неравенство

$$\frac{p^p}{(s^2 - \nu^2 q^2)^{p/2}} \int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{s-p+1}} dt \geq \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}} \left(1 + \frac{1 - \nu^2 q^2}{s^2 - \nu^2 q^2} \frac{p}{2} \frac{(4-t)t}{(2-t)^2} + \frac{2p\lambda^2 q^2}{s^2 - \nu^2 q^2} \frac{t^q}{(2-t)^{2+q}}\right) dt,$$

где λ — первый положительный корень уравнения

$$-1 - 2\nu q + s + 2qz\frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)} = 0.$$

Особый интерес и множество интересных результатов по неравенствам типа Харди, усиленным дополнительными слагаемыми, последовало после работы Х. Брезиса и М. Маркуса [76], в которой подчеркивается и развивается идея усиления точного неравенства (0.0.4). Поэтому иногда неравенства с дополнительными слагаемыми называют неравенствами Брезиса-Маркуса. Приведем для начала одномерный результат из этой статьи, который запишем в виде

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}\,(1+t)\,dt \le 4\int_0^1 y'^2(t)(1-t)dt. \tag{0.0.10}$$

Интересно сравнить неравенство Х. Брезиса и М. Маркуса (0.0.10) с неравенством Ф.Г. Авхадиева [60]

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}\left(1+2t^2\right)dt \le 4\int_0^1 y'^2(t)(1-t^2)^2dt,$$

которое является следствием более общей оценки на произвольном конечном отрезке $[a,b]$, и с тремя следующими неравенствами Авхадиева-Виртса из статьи [65]

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}\left(1+8t^2\right)(1-t)dt \le 4\int_0^1 y'^2(t)(1-t)dt,$$

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}\left(1+4j_0^2t^2\right)(1-t)^2dt \le 4\int_0^1 y'^2(t)(1-t)^2dt$$

и при $n \ge 4$

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}\left(1+4j_0^2t^2+(n-1)(n-3)t^2\right)(1-t)^{n-1}dt \le 4\int_0^1 y'^2(t)(1-t)^{n-1}dt.$$

Хотя последние пять одномерных неравенств схожи, они возникли при обосновании и решении различных задач. Например, последние три из них используются в статье Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса [65] при получении и оценке наилучших констант в соответствующем неравенстве Брезиса-Маркуса в шаре.

Исследование неравенств вида

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2(2-t)^2}(1-t)dt < C\int_0^1 y'^2(t)(1-t)dt$$

также связано с конформно инвариантными неравенствами, весовые функции которых зависят от конформного радиуса (см. [9]). Применяемая и развиваемая в данной диссертации техника доказательств одномерных неравенств, может помочь увеличить ранее упомянутую известную константу $1/16$ из соответствующего неравенства Харди в односвязных областях (см. подробнее [55, 122]).

Дополнительные слагаемые можно добавлять не только со степенными особенностями, но и с логарифмическими. Неравенства Харди с весовыми функциями, имеющими логарифмические особенности [27, 28, 70, 76, 84, 92, 114], представляют особый интерес. Например, справедливо неравенство

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}\left(1+\frac{1}{\ln^2\frac{e}{t}}\right)dt \le 4\int_0^1 y'^2(t)dt, \tag{0.0.11}$$

доказанное Х. Брезисом и М. Маркусом в статье [76]. В статье [114] М. Хофман-Остенхофом, Т. Хофман-Остенхофом и А. Лаптевым получены или точнее использованы неравенства для логарифмических весов в более сильной форме

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}\left(1+\frac{1}{\ln^2\frac{e}{\alpha t}}+4\left(t-t^2\right)\frac{\ln^2\alpha/2}{(1-\ln\alpha/2)^2}\right)dt \le 4\int_0^1 y'^2(t)dt, \quad 0<\alpha<2.$$

Как можно заметить, в левой части неравенства появилось ещё одно дополнительное положительное слагаемое. В статье [70] Г. Барбатис, С. Филиппас и А. Тертикас добавили дополнительные слагаемые, содержащие уже итерационные или, как ещё их называют, вложенные логарифмы. Здесь этот результат не приводится, так как в [70] одномерное неравенство не было выписано в виде отдельного утверждения, а прослеживается в виде цепочки оценок.

Систематические исследования весовых неравенств типа Харди можно найти в статьях В.И. Левина [30], П.Р. Бисака [74], Дж. Таленти [164], Дж. Томаселли [167], Д.У. Бойда [80], Б. Макенхаупта [136], Г. Синнамона [159], Г. Синнамона и В.Д. Степанова [160], Л. Перссона и В.Д. Степанова [144] и в книге А. Куфнера и Л. Персона [117].

Неравенства типа Харди можно усиливать также за счет весовой функции. Из-за тривиальной оценки $\sin t \le \min\{t, \pi-t\}$, $t\in[0,\pi]$ следующее точное неравенство[10]

$$\int_0^\pi \frac{|y(t)|^2}{\sin^2(t)}dt+\int_0^\pi |y(t)|^2dt \le 4\int_0^\pi |y'(t)|^2dt, \tag{0.0.12}$$

справедливое для функций $y\in C^1(0,\pi)$ таких, что $y(0)=y(\pi)=0$, является усилением аналога (0.0.4) на произвольном отрезке $[a,b]$ неравенства

$$\int_a^b \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt \le 4\int_a^b y'^2(t)dt, \quad y(a)=y(b)=0.$$

[10] Даже без дополнительного слагаемого.

Неравенство (0.0.12) впервые получено Ф.Г. Авхадиевым в статье [11] и позже передоказано другими методами Ф. Гестези, Майклом М.Х. Пангом и Д. Стенфиллом в статье [105]. Заметим, что в оригинальной статье [105] нет ссылки на работу [11], а вот соответствующий препринт статьи в Arxiv.org [106] дополнен этой ссылкой и комментариями к ней.

Используя замену переменной $t = \pi \log_q r$ при $0 < q \leq r < 1$ в неравенстве (0.0.12), Ф.Г. Авхадиев для любой абсолютно непрерывной на $[1, q]$ функции y такой, что $y(q) = y(1)$ и $y \not\equiv 0$, получил оценку

$$\int_q^1 \frac{|y(r)|^2}{\tau^2(r)} r dr + \frac{\pi^2}{4\ln^2 q} \int_q^1 \frac{|y(r)|^2}{\tau(r)} dr \leq \int_q^1 \frac{|y'(r)|^2}{r} dr,$$

где

$$\tau(r) = \frac{2r \ln q}{\pi} \sin \frac{\pi \ln r}{\ln q}.$$

Пункт 2.1.4 первой главы диссертационной работы посвящен обобщениям неравенства Ф.Г. Авхадиева (0.0.12). А именно, получены L_p-налоги этого неравенства. Например, показано, что для любой функции $y \in C_0^1(0, \pi)$

$$\int_0^\pi \frac{|y'(t)|^p}{\sin^{s-p} t} dt \geq \frac{1}{p^{p-1}} \left(s - 2 + \frac{1}{p}\right) \int_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^s t} dt + \frac{5-2s}{2p^{p-1}} \int_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^{s-2} t} dt,$$

где $p \geq 2$ и $2 - \frac{1}{p} \leq s \leq 2.5$.

Как видно, каждое неравенство из этого пункта является одномерным и явным образом не связано с какими-либо областями, не зависит от размерности пространства, но весовые функции, параметры и константы в этих неравенствах подобраны таким образом, чтобы проходил метод получения их многомерного аналога.

До этого рассматривались L_2-неравенства, т.е. неравенства, справедливые для квадратично суммируемых с различным весом функций. Не менее развита теория L_p-неравенств и известно множество статей и книг, посвященных неравенствам такого вида. L_p-аналогом (0.0.4) является следующее неравенство (см., например, [16, 60]), справедливое для любой непрерывно дифференцируемой функции y такой, что $y(a) = y(b) = 0$ и которое уже приведем на произвольном отрезке,

$$\left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^s(t)} dt \leq \int_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s-p}(t)} dt, \tag{0.0.13}$$

где $p \geq 1$ и $s > 1$. По-прежнему полагаем, что $\rho(t) = \min\{t - a, b - t\}$. Также имеет место следующий результат Ф.Г. Авхадиева и Р.Г. Насибуллина из [198] при $s < 1$

$$\left(\frac{1-s}{p}\right)^p \int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^s(t)} dt \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{p(1-s)} \int_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s-sp}(t)} dt.$$

Отметим, что если $p > 1$ и $y \not\equiv 0$, то равенство в (0.0.13) не достигается, но постоянная $(s-1)^p p^{-p}$ по-прежнему является точной. Поэтому опять появляется возможность добавления дополнительного слагаемого в это неравенство. Наиболее сильным результатом в направлении усиления (0.0.13) добавлением дополнительного слагаемого, скорее всего, является следующее неравенство из статьи Ф.Г. Авхадиева [60], справедливое для любой непрерывно дифференцируемой функции y такой, что $y(a) = y(b) = 0$,

$$\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^s(t)} dt + \frac{p}{(s-1)\delta_0^s} \int\limits_a^b |y(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{s-1}\right)^p \int\limits_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s-p}(t)} \left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{\delta_0}\right)^s\right)^p dt, \qquad (0.0.14)$$

где $p \geq 1, s > 1$ и $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$. Легко заметить, что (0.0.13) усилено двумя дополнительными слагаемыми и при этом

$$S_{p,1}^{[a,b]}\left(s, 1, \left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{\delta_0}\right)^s\right)^p\right) = \left(\frac{s-1}{p}\right)^p$$

и

$$P_{p,1,s}^{[a,b],(s-1)^p/p^p}\left(s, 1, 1, \left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{\delta_0}\right)^s\right)^p\right) \geq \frac{(s-1)^{p-1}}{p^{p-1}\delta_0^s}.$$

В **§1.1** диссертации установлены обобщения неравенства (0.0.14) при $p = 1$, а в **§3.3** рассмотрены их применения для обоснования пространственных аналогов в случае $p > 1$. Обобщения касаются весовых функций в дополнительном слагаемом. А также в **§1.1** получены аналоги неравенства (0.0.14) для дробного интеграла Римана-Лиувилля. Наиболее интересным является следующий наш результат при $\rho > 0$ и $\sigma < 1 < \mu$. Для любой абсолютно непрерывной на $[0, \rho]$ функции y такой, что $y(0) = 0$, справедливо следующее точное неравенство

$$\int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\mu} dt + \rho^{\sigma-\mu} \frac{1-\sigma}{\mu-1} \int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\sigma} dt \leq \frac{1}{\mu-1} \int\limits_0^\rho \frac{|y'(t)|}{t^{\mu-1}} \left(1 - \left(\frac{t}{\rho}\right)^{\mu-\sigma}\right) dt.$$

Равенство в этом неравенстве достигается на всех неубывающих допустимых функциях.

Определим дробный интеграл Римана-Лиувилля $I_{0+}^\alpha y$ порядка α следующим образом

$$I_{0+}^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0.$$

Если $0 < \sigma < \alpha < \mu$ и $\alpha \in [1-\sigma, 1]$, то для любой функции $y(t)/t^{\mu-\alpha} \in L^1[0,1]$ выполнено неравенство

$$\Gamma(\alpha) \int\limits_0^1 \left|I_{0+}^\alpha y(t)\right| \left(\frac{\mu-\alpha}{t^\mu} + \frac{t^{-\sigma}}{B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right) dt \leq \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{\mu-\alpha}} \left((\mu-\alpha)B(\mu-\alpha,\alpha) - \frac{t^\mu}{\alpha B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right) dt,$$

где Γ и B — соответственно гамма- и бета-функции Эйлера.

В рассмотренных выше неравенствах p может равняться единице, что в общем случае не является очевидным и требует обоснования. Например, неравенство Дж. Тидблума из [165] случай $p = 1$ уже не включает. Справедливо неравенство

$$\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^p(t)} dt + \frac{p-1}{\delta_0^p} \int_a^b |y(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |y'(t)|^p dt, \tag{0.0.15}$$

где также $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$ и $p > 1$. Сравнение констант в неравенствах (0.0.14) при $s = p$ и (0.0.15) показывает, что при $p > 2.61803$ имеет место следующая оценка $p - 1 > p/(p-1)$. В **§2.4** получены одномерные L_p-неравенства, родственные результатам Тидблума, которые будут использованы для обоснования многомерных неравенств в областях с конечным объёмом.

В некоторых частных случаях равенство в неравенстве (0.0.13) при $p = 1$ достигается на монотонных функциях. Следовательно, в общем случае не получится усилить точное неравенство Харди при $p = 1$ с помощью дополнительных слагаемых. Это препятствие можно обойти путем ослабления соответствующих точных констант. В **§1.2** установлено утверждение: *Пусть $s > 1$, $q > 0$, $\nu \geq 0$ и y — абсолютно непрерывная на $[0,1]$ функция такая, что $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^{s-1} \in L^1[0,1]$. Если $\mu \in \left[0; \frac{s-1+\nu q}{q}\right)$, то*

$$\frac{(s-1)^2 - \nu^2 q^2}{4} \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^s} dt + \frac{q^2}{4} \lambda_\nu^2 \left(\frac{2(s-1)}{q}\right) \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s-q}} dt \leq$$
$$\leq \left(\frac{s-1+\nu q}{2} - \frac{q^2\mu^2}{4(s-1)}\right) \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^{s-1}} dt + \left(\frac{q^2\mu^2}{4s-1} - \frac{q\mu}{2}\right) \int_0^1 |y'(t)| dt,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu) J_\nu(z) + 2z J'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Такого рода неравенства ранее не были известны.

Первым, кто получил одномерное неравенство типа Харди с дополнительными слагаемыми можно считать В.И. Левина. Что касается многомерных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, то впервые они были получены В.Г. Мазьей в работе [31] в случае, когда областью интегрирования является верхняя полуплоскость

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_n > 0\},$$

а весовые функции зависят от расстояния до начала координат (см. также, например, [44, 107]).

Например, в [31] В.Г. Мазья для гладких функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^n_+$ получил следующее неравенство

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^2}{t_n^2} dx + \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^2}{t_n (t_{n-1}^2 + t_n^2)^{1/2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla g(x)|^2 dx, \tag{0.0.16}$$

причём

$$S_{2,1}^{\mathbb{R}^n_+}(2,1,1) = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad P_{2,1,s}^{\mathbb{R}^n_+,\frac{1}{4}}\left(s,1,(t_{n-1}^2+t_n^2)^{-1/2},1\right) \geq \frac{1}{16}.$$

Также им был сформулирован вопрос о справедливости L_p-версии (0.0.16)

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^p}dx + \alpha(p,\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^{p-\tau}(t_{n-1}^2+t_n^2)^{\tau/2}}dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla g(x)|^p dx,$$

где $p>1, \tau>0, \alpha(p,\tau)$ — некоторая положительная постоянная и $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

На этот вопрос положительно ответил Дж. Тидблум в статье [166], получивший следующее неравенство для любых гладких функций g с компактным носителем в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^n_+$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^p}dx + A(p,\tau)\frac{p}{p-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^{p-\tau}(t_{n-1}^2+t_n^2)^{\tau/2}}dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla g(x)|^p dx, \tag{0.0.17}$$

где постоянная

$$A(p,\tau) = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2(1+p\tau^2)}, & \text{если } 1<p<2, \\ \frac{\tau^2}{2(p-1)(1+2\tau^2)}, & \text{если } p \geq 2. \end{cases}$$

В той же статье Дж. Тидблумом в более слабой форме, но с большей константой в дополнительном слагаемом доказано, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^p}dx + D(p)\frac{p}{p-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^{p-1}(t_{n-1}^2+t_n^2)^{1/2}}dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla g(x)|^p dx \tag{0.0.18}$$

для любой гладкой функции $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ с компактным носителем в $\mathbb{R}^n_+$, где постоянная

$$D(p) = \begin{cases} \frac{2}{2+3p}, & \text{если } 1<p<2, \\ \frac{1}{4(p-1)}, & \text{если } p \geq 2. \end{cases}$$

Также в [166] Дж. Тидблумом получены L_2-аналоги (0.0.18). А именно, он установил справедливость неравенств

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^2}{t_n^2}dx + \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^2}{t_{n-1}^2+t_n^2}dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla g(x)|^2 dx,$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^2}{t_n^2}dx + \frac{1}{8}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^2}{t_n(t_{n-1}^2+t_n^2)^{1/2}}dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla g(x)|^2 dx,$$

которые уточняют константу в (0.0.16) и показывают, что соответствующие постоянные в неравенствах (0.0.17) и (0.0.18) не являются оптимальными. Добавим, что в работе [166] автор не использует в качестве инструмента одномерные неравенства.

Результаты нашей статьи [178], приведенные в **пункте 3.5.6**, обобщают эти результаты Дж. Тидблума. Получены неравенства в случае, когда весовая функция также есть и в правой части неравенства. А именно, если $p \geq 2$ и $2 - \frac{1}{p} \leq s \leq 2.5$, то для любой функции $g \in C_0^1(\mathbb{R}^n_+)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|\nabla g(x)|^p}{t_n^{s-p}} dx \geq \frac{1}{p^{p-1}} \left(s - 2 + \frac{1}{p} \right) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^s} dx + \frac{(5-2s)}{2p^{p-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^{s-2} |t_{n-1}^2 + t_n^2|} dx.$$

В статье [54] А. Альвино, Р. Вольпичелли и А. Фероне исследуют класс неравенств, которые интерполируют неравенство Като и неравенство Харди в полупространстве. Им удалось добавить так называемое следовое дополнительное слагаемое. Перейдем к точным формулировкам. Пусть $n \geq 3$ и g — действительнозначная в верхней полуплоскости с компактным носителем функция такая, что её градиент $|\nabla g| \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Тогда для любого $\beta \in [2, n)$ найдется положительная константа $H(n, \beta)$ такая, что

$$H(n,\beta) \int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^2}{|x|} dx + \frac{(\beta-2)^2}{4} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^2}{|x|^2 + t^2} dx dt \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla g(x)|^2 dx dt. \tag{0.0.19}$$

Наилучшее значение постоянной $H(n, \beta)$ задается следующим образом:

$$H(n,\beta) = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{n+\beta}{4} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-\beta}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\beta}{4} - 1\right) \Gamma\left(\frac{n-\beta}{4}\right)}.$$

В этом неравенстве удалось добавить дополнительное слагаемое, аналогичное тому, которое появляется в неравенстве Като, за счет уменьшения оптимальной константы уже в соответствующем неравенстве без дополнительного слагаемого. Поэтому это неравенство можно назвать неравенством Мазьи-Като-Харди.

В статье [139] В.Х. Нгуен распространили неравенство (0.0.19) на любой выпуклый многогранный конус $\mathcal{C}$, определяемый формулой

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, u_i, \rangle > 0, i = 1, \ldots, m\},$$

где $u_1, \ldots, u_m$ — единичные вектора в $\mathbb{R}^{n+1}, n \geq 1$. Для любого $x \in \mathcal{C}$ расстояние от x до границы $\mathcal{C}$ определяют следующим образом:

$$d_{\mathcal{C}}(x) = \operatorname{dist}(x, \partial \mathbb{C}) = \min_{1 \leq i \leq m} \langle x, u_i \rangle.$$

А именно, он доказал справедливость неравенства для любой функции g из пополнения семейства $C_0^\infty(\overline{\mathcal{C}})$ по соответствующей норме

$$H(n,s,\beta) \int\limits_{\partial \mathcal{C}} \frac{g^2(x)}{|x|^{1-s}} d\mathcal{H}^n(x) + \frac{(\beta-2)^2}{4} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{g^2(x)}{|x|^2} d_{\mathcal{C}}(x)^s dx \leq \int\limits_{\mathcal{C}} |\nabla g(x)|^2 d_{\mathcal{C}}(x)^s dx,$$

где $\mathcal{H}^n$ — n-мерная мера Хаусдорфа на $\partial \mathcal{C}$. Наилучшее значение постоянной $H(n, s, \beta)$ задается следующим образом

$$H(n,s,\beta) = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_s+\beta-2-2s}{4}\right) \Gamma\left(\frac{n_s-\beta+2-2s}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_s+\beta-4}{4}\right) \Gamma\left(\frac{n_s-\beta}{4}\right)}.$$

В работе [168] К. Циракис также исследует неравенства, которые интерполируют весовые неравенства Харди и неравенство Като. Он устанавливает неравенства с дополнительными слагаемыми уже с логарифмическими весами.

В статье [11] в плоском случае Ф.Г. Авхадиевым было получено неравенство в верхней полуплоскости, когда весовая функция зависит от конформного радиуса верхней полуплоскости

$$R(\rho e^{i\varphi}, \mathbb{R}^2_+) = 2\eta = 2\rho \sin\varphi.$$

А именно, с учетом обозначения $\zeta = \xi + i\eta$ Ф.Г. Авхадиев установил справедливость следующего неравенства для любой функции $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{|g(\zeta)|^2}{R^2(\zeta, \mathbb{R}^2_+)} d\xi d\eta + \frac{1}{4} \iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{|g(\zeta)|^2}{|\zeta|^2} d\xi d\eta \leq \iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} |\nabla g(\zeta)|^2 d\xi d\eta.$$

В **пункте 3.5.6** показано, что для любой функции $g \in C_0^1(\mathbb{R}^2_+)$ при $p \geq 2$ и $2 - \frac{1}{p} \leq s \leq 2.5$ имеет место L_p-неравенство

$$\frac{p^{p-1}}{2^p} \iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{|\nabla g(\zeta)|^p}{R(\zeta, Q)^{s-p}} d\xi d\eta \geq \left(s - 2 + \frac{1}{p}\right) \iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{|g(\zeta)|^p}{R(\zeta, Q)^s} d\xi d\eta + \frac{5-2s}{8} \iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} \frac{|g(\zeta)|^p}{|\zeta|^2 R(\zeta, Q)^{s-2}} d\xi d\eta.$$

Последнее неравенство Ф.Г. Авхадиева и наше неравенство являются промежуточными этапами при обосновании конформно инвариантных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми (см. подробнее **§3.5 Главы 3**).

Далее перейдем к пространственным неравенствам в областях, отличных от верхней полуплоскости. Известно, что если Ω является выпуклой областью и функция $g \in C_0^1(\Omega)$, то пространственным аналогом (0.0.3) является следующее неравенство Харди

$$\frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)} dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \tag{0.0.20}$$

с точной, но недостижимой константой $1/4$ (см., например, [76, 89, 90, 131, 132]).

Как было сказано выше, недостижимость равенства в уже ставшем классическим неравенстве (0.0.20) является одной из его особенностей. Вторая особенность этого неравенства, также тесно связанная с точной константой, — это возможность усиления неравенства за счет добавления дополнительного слагаемого. Приведем результат Х. Брезиса и М. Маркуса из [76]: *Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с диаметром $D(\Omega)$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \frac{1}{4D^2(\Omega)} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \tag{0.0.21}$$

и

$$\frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)} \ln(eD(\Omega)/\delta(x)) dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx, \tag{0.0.22}$$

где соответственно

$$S_{2,n}^{\Omega}(2,1,1)=\frac{1}{4}, P_{2,n,2}^{\Omega}(2,1,1,1)\geq\frac{1}{4D^2(\Omega)}\quad\text{или}\quad P_{2,n,2}^{\Omega}\left(2,1,\log\frac{eD(\Omega)}{\delta(x)},1\right)\geq\frac{1}{4}.$$

Для доказательства этих двух неравенств Х. Брезис и М. Маркус используют соответственно одномерное неравенство (0.0.10) со степенной особенностью и неравенство (0.0.11) с логарифмическим весом.

Задача добавления дополнительного слагаемого в (0.0.20) связана с классическими оценками первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ для лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_1(\Omega)\int\limits_{\Omega}|g(x)|^2dx\leq\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^2dx,\quad\forall g\in C_0^1(\Omega).$$

Следовательно, в наших обозначениях легко получим, что

$$W_{2,n,2}^{\Omega,\lambda_1(\Omega)}(2,1,1,1)=0\quad\text{или}\quad P_{2,n,2}^{\Omega}(2,1,1,1)\leq\lambda_1(\Omega).$$

Широко известны оценка Пуанкаре $\lambda_1(\Omega)>\pi^2/D^2(\Omega)$ и знаменитое изопериметрическое неравенство Рэлея-Фабера-Крана

$$\lambda_1(\Omega)>P_{2,n,2}^{\Omega}(2,1,1,1)=\frac{\omega^{2/n}}{|\Omega|^{2/n}}j_{n/2-1}^2,$$

где j_ν — первый нуль функции Бесселя J_ν порядка ν (см. [68]).

В той же статье [76] Х. Брезис и М. Маркус поставили вопрос о возможности заменить константу в дополнительном слагаемом на величину вида $K'(n)|\Omega|^{-2/n}$, где $|\Omega|$ — объём области, а $K'(n)$ — некоторая положительная универсальная константа.

В статье [114] М. Хофман-Остенхоф, Т. Хофман-Остенхоф и А. Лаптев дали положительный ответ на этот вопрос. А именно, они показали, что

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)}dx+\frac{1}{4}\frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^2dx\leq\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^2dx,\quad\forall g\in C_0^1(\Omega),\tag{0.0.23}$$

где $K(n)=n\left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right]^{2/n}$ и $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности n-мерной единичной сферы.

В.Д. Эванс и Р.Т. Льюис [98] доказали аналогичное (0.0.23) неравенство, в котором перед $K(n)$ стоит константа $3/2$ вместо $1/4$, но, судя по доказательству, это неравенство будет справедливо в более узком классе функций, чем семейство $C_0^1(\Omega)$.

Как следствие этого результата М. Хофман-Остенхофа, Т. Хофман-Остенхофа и А. Лаптева имеем опять

$$S_{2,n}^{\Omega}(2,1,1)=\frac{1}{4}$$

и первое собственное число лапласиана $\lambda_1(\Omega)$ в случае выпуклых областей с фиксированным объёмом может быть оценено следующим образом

$$\lambda_1(\Omega) \geq P^{\Omega}_{2,n,2}(2,1,1,1) \geq \frac{1}{4}\frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}}.$$

Добавим, что с использованием подхода из статьи [114] и неравенство В.И. Левина (0.0.5) можно получить новое ранее неопубликованное неравенство

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^2}{\delta(x)^2}dx + \frac{3}{8}\frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^2dx \leq \int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^2dx, \quad \forall g \in C_0^1(\Omega)$$

и аналогичную оценку первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ лапласиана

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{3}{8}\frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}}.$$

В виде следствий наших результатов из параграфа **§1.4** в **§4.4** будет получена оценка первого собственного числа, с константой улучшенной более чем в два раза. А именно, будет установлено следующее неравенство

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{5\lambda_1^2 K(n)}{8|\Omega|^{2/n}},$$

где постоянная $\lambda_1 \approx 1.25578$ является корнем уравнения типа Лэмба.

Вопрос нахождения точных констант в вышеприведенных неравенствах типа Харди с дополнительными слагаемыми и в изопериметрических неравенствах остается открытым, и даже задача усиления этих неравенств является весьма сложной и актуальной. В **главе 3** диссертационной работы в параграфах **§3.1** и **§3.2** получены обобщения неравенств (0.0.21) и (0.0.23). А именно, установлены L_2-неравенства с более точными константами и доказаны их L_p-аналоги. Эти многомерные неравенства типа Харди рассматриваются в произвольных областях, в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым и выпуклых областях. В выпуклых областях они принимают более простой вид. Справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^2dx \geq \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega}\frac{g^2(x)}{\delta^2(x)}dx + \frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}\int\limits_{\Omega}g^2(x)dx + \frac{C_0^2(1)K(n)n}{16|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{3/n}}\int\limits_{\Omega}g^2(x)\delta(x)dx,$$

а при $p \in (2,3]$ имеем

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p B(n,p)\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx - B(n,p)\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx \geq$$

$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{8(p-1)^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{3}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^{p-3}(x)}dx.$$

Здесь $C_0(1) \approx 1.25578$ и λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$(p-1)J_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Несмотря на внешнюю схожесть неравенств (0.0.21) и (0.0.23), как класс вариационных задач они являются весьма различными. Первая экстремальная задача рассматривается в областях с конечным диаметром, а вторая — в областях с конечным объёмом. Третьей разновидностью экстремальных задач являются неравенства с дополнительными слагаемыми в областях с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} \delta(x)$ (см. подробнее [16, 58, 60, 102]).

В силу того, что существуют области с конечным внутренним радиусом, но с бесконечным объёмом и диаметром, например, полоса, третий класс задач является более широким. Такая же причина послужила развитию оценок первого собственного значения лапласиана в терминах внутреннего радиуса. Например, при горизонтальном расширении квадрата со сторонами, равными единице, у которого объём конечен, получается уже полоса с неограниченным объёмом, но с конечным внутренним радиусом.

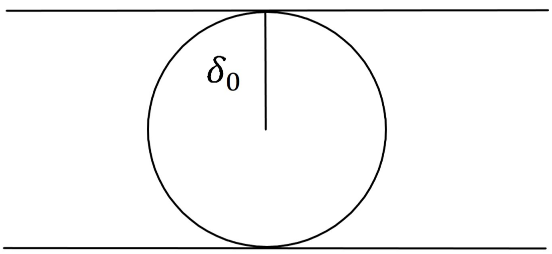

Рисунок 0.0.4: Пример области с конечным внутренним радиусом, но с бесконечным объёмом и диаметром.

В этом направлении первые результаты были получены С. Филиппасом, В.Г. Мазьей, А. Тертикасом в статье [102], но на наш взгляд наиболее полным решением “задачи Брезиса-Маркуса в терминах внутреннего радиуса” является результат Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса [58], который утверждает, что для любой непрерывно дифференцируемой функции g с компактным носителем в выпуклой области Ω с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{1-\nu^2 q^2}{4}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)}dx + \frac{q^2\lambda_q^2}{4\delta_0^q(\Omega)}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^2}{\delta^{2-q}(x)}dx \leq \int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^2 dx, \qquad (0.0.24)$$

где $q > 0, \nu \in \left[0, \frac{1}{q}\right]$, $\delta(x)$ — функция расстояния до границы области и константа λ_q является решением специального уравнения для функции Бесселя J_ν порядка ν, а именно, уравнения типа Лэмба

$$J_\nu(\lambda) + q\lambda J_\nu'(\lambda) = 0.$$

В той же работе [58] авторами доказано, что

$$S_{2,n}^{\Omega}(2,1,1)=\frac{1}{4} \quad \text{и} \quad P_{2,n,q}^{\Omega,\frac{1-\nu^2q^2}{4}}(2,1,1,1)=\frac{q^2\lambda_q^2}{4\delta_0^q(\Omega)}$$

или

$$S_{2,n}^{\Omega}\left(2,\frac{1-\nu^2q^2}{4}+\frac{q^2\lambda_q^2\delta(x)^q}{4\delta_0^2(\Omega)},1\right)=1.$$

Одномерным аналогом (0.0.24), или точнее сказать, тем неравенством, которым пользовались при его доказательстве, является неравенство (0.0.8).

Неравенство Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса (0.0.24) в случае n-мерных выпуклых областей является вторым способом доказательства известных оценок первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ лапласиана (см. [113, 142])

$$\lambda_1(\Omega)\geq\frac{\pi^2}{4\delta_0^2(\Omega)}\geq\frac{\pi^2}{D^2(\Omega)}.$$

Параграф §3.1 Главы 3 посвящен оценкам $\lambda_1(\Omega)$ через диаметр области в других классах областей.

Отметим также результат Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса [57] с весовыми функциями, зависящими от функции Бесселя. Им удалось также доказать следующее неравенство

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^2\frac{dx}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)}\geq s\frac{1-\nu^2q^2}{4}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)}\frac{dx}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)}+\frac{sq^2\lambda_\nu^2(2/q)}{4\delta_0^q(\Omega)}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^2}{\delta^{2-q}(x)}\frac{dx}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)},$$

где s,ν и q — положительный числа, $\Phi_{\nu,q}(x)=\sqrt{x}J_\nu\left(\lambda_\nu(2/q)x^{q/2}\right)$, а $z=\lambda_\nu(2/q)$ — константа Лэмба, определяющееся как первое положительно решение уравнения

$$J_\nu(z)+qzJ_\nu'(z)=0.$$

Здесь

$$S_{2,n}^{\Omega}\left(2,\frac{1}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)},\frac{1}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)}\right)=\frac{s}{4} \quad \text{и}$$

$$P_{2,n,q}^{\Omega,s\frac{1-\nu^2q^2}{4}}\left(2,\frac{1}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)},\frac{1}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)},\frac{1}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)}\right)=\frac{sq^2\lambda_\nu^2(2/q)}{4\delta_0^q(\Omega)},$$

или даже

$$S_{2,n}^{\Omega}\left(2,\frac{1}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)}\left(s\frac{1-\nu^2q^2}{4}+\frac{sq^2\lambda_\nu^2(2/q)}{4\delta_0^q(\Omega)}\delta(x)^q\right),\frac{1}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)}\right)=1$$

при $s>\frac{1-\nu q}{1+\nu q}$.

В **главе 3 параграф §3.4** получены различные L_1- и L_p-обобщения неравенства Авхадиева-Виртса (0.0.24). Например, доказано, что если Ω — n-мерная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $\delta_0 = \delta_0(\Omega) < \infty$, $s \in (0, +\infty)$, $\nu \in (0, +\infty)$ и $p \in [2, +\infty)$, то для произвольной функции $g \in C_0^1(\Omega)$ выполнено следующее неравенство типа Харди:

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} dx \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^2}{(2\delta_0)^p} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)^{p-2} dx.$$

В основе доказательства этих неравенств в областях лежат специально подобранные одномерные весовые неравенства типа Харди и метод получения пространственного случая, по существу, сводящийся к повторному интегрированию.

Неравенство (0.0.23) М. Хофман-Остенхоф, Т. Хофман-Остенхоф и А. Лаптев доказали исходя из аргументов Э.Б. Дэвиса [89] и одномерного неравенства (0.0.6). Причём, переходным результатом является неравенство для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в терминах расстояния в среднем, а именно, если для любой точки $x \in \Omega$ и $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ полагать $\tau_\nu(x) := \min\{s > 0 : x + s\nu \notin \Omega\}$, $\delta(x) = \inf_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \tau_\nu(x)$ и $\rho_\nu(x) := \min\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\}$, то

$$\frac{n}{4} \int\limits_\Omega \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu^2(x)} d\omega(\nu) |g(x)|^2 dx + \frac{n^{(n-2)/n} |\mathbb{S}^{n-1}|^{2/n}}{4} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^2}{|\Omega_x|^{2/n}} dx \leq \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx.$$

Здесь $|\Omega|$ — объём области Ω и Ω_x — элементы множества Ω, которые "видны" из точки x, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ — элемент площади поверхности единичной сферы и $d\omega(\nu) = \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{|\mathbb{S}^{n-1}|}$ — нормированная мера на единичной сфере.

Соответствующим L_p-аналогом (0.0.20) в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является следующее с точной константой $p^p/(p-1)^p$ неравенство

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)} dx \leq \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx.$$

По аналогии с L_2-случаем задача добавления дополнительного слагаемого в L_p-неравенствах связана с оценками первого собственного числа $\lambda_p(\Omega)$ для p-лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_p(\Omega) \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx \leq \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx, \quad \forall g \in C_0^1(\Omega).$$

То есть $\lambda_p(\Omega)$ совпадает с наименьшим $\lambda \in \mathbb{R}$, таким, что краевая задача

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u, \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0, \quad \text{на } \partial\Omega,$$

имеет нетривиальное решение из соответствующего класса функций. Здесь

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

где

$$|\nabla u|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial t_n}\right)^2\right]^{(p-2)/2}.$$

Ясно, что Δ_2 совпадает с обычным оператором Лапласа Δ.

Что касается L_1-неравенств Харди, они интересны тем, что потенциально связаны с дифференциальными уравнениями в частных производных, в которых участвует так называемый 1-лапласиан, аналог обычного оператора Лапласа и p-лапласиана при $p > 1$, а также они являются инструментом доказательства L_p-неравенств.

Дж. Тидблум в статье [165] установил L_p-аналоги результатов М. Хофман-Остенхофа, Т. Хофман-Остенхофа и А. Лаптева. Им доказано следующее неравенство в произвольной области Ω при $p > 1$:

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu^p(x)} d\omega(\nu)|g(x)|^p dx + (p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{p/n} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{p/n}} dx \leq$$
$$\leq \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx,$$

а в виде следствия в выпуклой области установлено, что

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + \frac{a(p,n)}{|\Omega|^{p/n}} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx, \tag{0.0.25}$$

где постоянная

$$a(p,n) = \frac{(p-1)^{p+1}}{p^p} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{p/n} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Неравенство, доказанное Дж. Тидблумом, интересно сравнить с неравенствами из работ [66] и [98]. Например, в статье [98] были получены обобщения и усиления неравенства (0.0.15), но в виде следствия авторы получают такую же константу $a(p,n)$ в дополнительном слагаемом.

Несмотря на то, что неравенство (0.0.25) было доказано в 2005 году, до результатов автора из статей [184] и [177] не было уточнений постоянной $a(p,n)$. Этим нашим результатам посвящена **третья глава §3.2**, в которой константа $a(p,n)$ усилена при $p \geq 2$:

Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и $\lambda_\nu(2(p-1)/p)$ — константа Лэмба. Если $p \in [2,\infty)$, то для всех функций $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx \geq c_p \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + \frac{p^3 \lambda_0^2(2(p-1)/p)}{2B(n,p)(p-1)^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p dx \right),$$

где $c_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p$. Также доказано, что

$$\frac{p^3 \lambda_0^2(2(p-1)/p)}{2(p-1)^2 B(n,p)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}} \geq \frac{(p-1)}{B(n,p)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}.$$

Добавим, что в **главе 3** также доказаны L_p-аналоги результатов М. Хофман-Остенхофа, Т. Хофман-Остенхофа и А. Лаптева в произвольных и регулярных в смысле Дэвиса областях, в областях, для которых выполнено условие внешнего θ-конуса, в λ выпуклых и в выпуклых областях.

В работе С. Филиппаса, В.Г. Мазьи и А. Тертикаса [102] показано, что в выпуклых областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при $1 < p < n$ и $p \le q < \frac{np}{n-p}$ точная константа $C(\Omega)$ в L_p-неравенстве

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx + C(\Omega)\left(\int\limits_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{p/q} \le \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx$$

может быть двусторонне оценена через внутренний радиус следующим образом

$$c_1(p,q,n)(\delta_0(\Omega))^{n-p-\frac{np}{q}} \ge C(\Omega) \ge c_2(p,q,n)(\delta_0(\Omega))^{n-p-\frac{np}{q}},$$

где $c_1(p,q,n)$ и $c_2(p,q,n)$ — некоторые константы, существование которых обосновывается.

Отметим, что довольно ожидаемыми являются неравенства-мостики с дополнительными слагаемыми, которые содержат одновременно объём, диаметр и внутренний радиус области (см., например, [98]). Таким результатам посвящен **§3.2**.

Известны неравенства типа Харди в произвольных областях также в терминах функции до границы области. В [16] Ф.Г. Авхадиев для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ при $p \ge 1$ доказал, что

$$\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \frac{p}{(s-1)\delta_0^s(\Omega)}\int\limits_\Omega |g(x)|^p dx \le \left(\frac{p}{s-n}\right)^p \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}\left(1-\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^s\right)^p dx, \quad (0.0.26)$$

где $[p/(s-n)]^p$ в общем случае не может быть заменена меньшей постоянной. Это неравенство установлено с использованием одномерного неравенства (0.0.14) и специального метода для получения многомерного аналога. Неравенство (0.0.26) является решением известной задачи Дж.Л. Льюиса [125] и А. Ваннебы [169] (см. также статью [60]). В **главе 3 §3.3** установлены L_1- и L_p-обобщения (0.0.26) в случае, когда область Ω является выпуклой. Например, доказано, что если $s - q < 1$, то

$$(s-1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \frac{q-s+1}{\delta_0^q(\Omega)}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)}dx \le \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}\left(1-\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)dx$$

и

$$\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \frac{p(q-s+1)}{\delta_0^q(\Omega)(s-1)}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx \le \left(\frac{p}{s-1}\right)^p \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}\left(1-\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)^p dx.$$

В [147] Дж. Псарадакис получил другой L_1-аналог неравенства (0.0.26). Он показал, что при $s \ge 1$ для любой функции $g \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство

$$(s-1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \mathfrak{B}_1\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}dx \le \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta(x)^{s-1}}dx,$$

где $\mathfrak{B}_1$ — некоторая константа и Ω — подобласть $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию равномерной внутренней сферы.

Как и в одномерном случае, можно добавлять дополнительные слагаемые с логарифмическими особенностями. Г. Барбатис, С. Филиппас и А. Тертикас в работе [70] установили существование такой постоянной $D_0 \geq \delta_0(\Omega)$, что для любой функции $g \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо следующее обобщение неравенства Брезиса-Маркуса (0.0.22) в ограниченных или неограниченных областях с конечным внутренним радиусом

$$\frac{1}{4}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)}dx + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^\infty \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)} X_1^2(\delta(x)/D_0)\dots X_j^2(\delta(x)/D_0)dx \leq \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx,$$

где

$$X_1(t) = (1-\ln t)^{-1}, t \in (0,1], X_1(1) = 1,$$

$$X_j(t) = X_1(X_{j-1}(t)) \quad t \in (0,1], \quad X_j(1) = 1, \quad j = 2, 3, \dots.$$

Как уже выше отмечали, класс вариационных задач с внутренним радиусом включает наиболее широкий класс областей. Если внутренний радиус области стремится к бесконечности, то дополнительное слагаемое исчезает. Может сложиться впечатление, что максимальный класс областей, в котором можно усиливать неравенство (0.0.20) с помощью дополнительного слагаемого, — это области с конечным внутренним радиусом. Результаты **параграфа §3.5** показывают, что все зависит от вида дополнительного слагаемого. Оказывается, можно добавлять дополнительное слагаемое в любых односвязных и двусвязных областях гиперболического типа.

Результаты, которые будут рассмотрены далее, можно рассматривать с двух точек зрения: как усиление классического неравенства (0.0.20) с помощью замены функции расстояния на конформный радиус области и как аналоги неравенства Пуанкаре в спектральной теории оператора Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны.

Пусть Ω — область гиперболического типа, т.е. область, содержащая не менее трех граничных точек на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим семейство непрерывно дифференцируемых функций $g : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями в Ω. Если $\infty \in \Omega$, то гладкость $g(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ понимается как гладкость $g(1/z)$ в точке $z = 0$.

В каждой точке $z = x + iy \in \Omega$ определим гиперболический радиус формулой

$$R(z,\Omega) = 1/\lambda_\Omega(z),$$

где λ_Ω — коэффициент метрики Пуанкаре области Ω с гауссовой кривизной $k = -4$ (см., например, [52], [63]).

Хорошо известны результаты Д. Салливана [163], Х.Л. Фернандеса [100], Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса [101] из спектральной теории оператора Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны. В этих статьях рассматривается неравенство

$$C_2(\Omega)\iint\limits_{\Omega}\frac{|g(x,y)|^2}{R^2(z,\Omega)}dxdy \le \iint\limits_{\Omega}|\nabla g(x,y)|^2dxdy, \quad \forall g\in C_0^1(\Omega), \tag{0.0.27}$$

где

$$C_2(\Omega)=\inf_{g\in C_0^1(\Omega),g\not\equiv 0}\iint\limits_{\Omega}|\nabla g(x,y)|^2dxdy\left(\iint\limits_{\Omega}\frac{|g(x,y)|^2}{R^2(z,\Omega)}dxdy\right)^{-1}.$$

Известно, что $C_2(\Omega)=1$ для любой односвязной или двусвязной области гиперболического типа (см. [100] и [163]), а также $C_2(\Omega)\in[0,1]$ для любой области гиперболического типа. Существуют области, для которых $C_2(\Omega)=0$, т.е. существуют области, для которых неравенство (0.0.27) не является содержательным. Эти утверждения являются следствиями известных фактов гиперболической геометрии и формулы Элстродта-Паттерсона-Сулливана ([163], с. 333):

$$C_2(\Omega)=\left\{1 \text{ для } 0\le\beta\le 1/2;\;\; 4\beta\,(1-\beta) \text{ для } 1/2\le\beta\le 1\right\},$$

где $\beta=\beta(\Omega)$ — критический показатель сходимости рядов Пуанкаре-Дирихле для фундаментальной группы преобразований Ω.

В [100] Х.Л. Фернандес доказал, что условие $M(\Omega)<\infty$ влечет положительность величины $C_2(\Omega)$. Ключевым результатом статьи [101] Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса являются оценки

$$1/\left(2h(\Omega)\right)^2\le C_2(\Omega)\le 3/h(\Omega),$$

где

$$h(\Omega)=\sup_G\iint\limits_{G}\frac{1}{R^2(z,\Omega)}dxdy\left(\int\limits_{\partial G}\frac{1}{R(z,\Omega)}|dz|\right)^{-1}.$$

Здесь точная верхняя граница берется по всем областям G, ограниченным кусочно гладкими кривыми, и таким, что $\overline{G}\subset\Omega$.

Для односвязных и двусвязных областей точная константа $C_2(\Omega)$ в неравенстве (0.0.27) равна 1 и также известно, что она недостижима. Оказывается, эффект Брезиса и Маркуса для неравенства (0.0.27) также возникает в случае односвязных и двусвязных областей, за исключением двусвязных областей с бесконечным модулем.

В статье [11], используя одномерные неравенство (0.0.12), Ф.Г. Авхадиев установил точный конформно инвариантный аналог (0.0.20) для односвязных областей $\Omega\subset\mathbb{R}^2, \Omega\neq\mathbb{R}^2$, когда весовая функция зависит от гиперболического радиуса $R(z,\Omega)$. А именно, он доказал, что

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|g(z)|^2}{R^2(z,\Omega)}dxdy + \frac{1}{4}\iint\limits_{\Omega} |g(z)|^2 \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 dxdy \le \iint\limits_{\Omega} |\nabla g(z)|^2 dxdy, \qquad (0.0.28)$$

где $z = x + iy$ и f — любое однолистное конформное отображение Ω на верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Постоянная $1/4$ не может быть заменена бо̀льшей величиной.

В случае двусвязных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ Ф.Г. Авхадиев там же в [11] показал, что для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|g(x,y)|^2}{R^2(z,\Omega)}dxdy + \frac{1}{16M^2(\Omega)}\iint\limits_{\Omega} |g(x,y)|^2 \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 dxdy \le \iint\limits_{\Omega} |\nabla g(x,y)|^2 dxdy,$$

где $z = x + iy$, f — любое однолистное конформное отображение Ω на кольцо

$$A_q = \{\eta \in \mathbb{C} : q < |\eta| < 1\},$$

$q = \exp(-2\pi M(\Omega))$ и $M(\Omega)$ — геометрический параметр, определяемый как верхняя грань конформных модулей двусвязных областей, лежащих в области Ω и разделяющих её границу $\partial\Omega$. Постоянная $1/16$ не может быть заменена бо̀льшей величиной. Для обоснования двусвязного случая также используется соответствующее одномерное неравенство.

Известны также неравенства в L_p-случае. В статье [11] Ф.Г. Авхадиев установил, что если Ω — односвязная или двусвязная область в $\mathbb{C}$, $g \in C_0^1(\Omega)$ и $p \in [1,\infty)$, то справедливо точное неравенство

$$\frac{2^p}{p^p}\iint\limits_{\Omega} \frac{|g(x,y)|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy \le \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x,y)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy. \qquad (0.0.29)$$

Известно (см., например, [63]), что если Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, то $R(z,\Omega) \le 4\delta(z), \quad z \in \Omega$, а если Ω — выпуклая область, то $R(z,\Omega) \le 2\delta(z), \quad z \in \Omega$. С использованием этих двух фактов, легко получить два новых неравенства в виде следствия.

Предположим, что Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}$, f — любое однолистное конформное отображение Ω на верхнюю полуплоскость

$$H_+ = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}.$$

Тогда для всех действительных функций $g \in C_0^1(\Omega)$ и $p \ge 2$ справедливо следующее неравенство типа Авхадиева-Харди

$$\frac{1}{p^p}\iint\limits_{\Omega} \frac{|g(x,y)|^p}{\delta^2(z)}dxdy + \frac{1}{2p^{p-1}}\iint\limits_{\Omega} |g(x,y)|^p \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 dxdy \le \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x,y)|^p}{\delta^{2-p}(z)}dxdy,$$

где $z = x + iy$. Константа $1/p^p$ является точной.

Оказывается, дополнительное отрицательное слагаемое можно добавлять также в левую часть неравенства (0.0.29). В той же статье Ф.Г. Авхадиев показал, что если $p \in [1, \infty)$ и $\Omega \subset \mathbb{C}$ — односвязная область гиперболического типа или двусвязная область с конечным модулем, $z = x + iy$, то существует непрерывная функция $\theta_\Omega : \Omega \to (0, \pi)$ такая, что для любой вещественнозначной функции $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\frac{2^p}{p^p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|g(x,y)|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy \leq \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x,y)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} (1 - \sin^2 \theta_\Omega(z))^{p/2} dxdy.$$

Если модуль двусвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа равен бесконечности, то имеет место неравенство (0.0.29).

В статье [3] изучены конформно инвариантные интегральные неравенства для вещественнозначных функций, заданных в областях Ω евклидова пространства размерности n. Рассматриваются области гиперболического типа, т.е. такие области, в которых определен гиперболический радиус $R = R(x, \Omega)$, удовлетворяющий нелинейному дифференциальному уравнению Лиувилля и обращающийся в нуль на границе области. Доказаны несколько неравенств, справедливых для всех гладких финитных функций, определенных в заданной области гиперболического типа.

Приведем ещё один вид неравенств с дополнительными слагаемыми в областях слабо средне-выпуклых (см. [124]). Под слабо средневыпуклой областью $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ понимается область с C^2 границей $\partial\Omega$ с положительной средней кривизной $H(y)$ для любой точки $y \in \partial\Omega$. В этом случае если $H_0 := \inf_{x \in \partial\Omega} H(x) \geq 0$, то для любых гладких функций g с компактным носителем в слабо средневыпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \lambda(n, \Omega) \int\limits_{\Omega} |g(x)|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx,$$

где постоянная $\lambda(n, \Omega) = \inf_{x \in \Omega} \frac{-\triangle \delta(x)}{2\delta(x)} \geq \frac{2}{n} H_0^2$.

Наконец отметим, что нерешенными являются задачи о точных оценках сверху и снизу величины константы в дополнительных слагаемых из неравенств (0.0.21) и (0.0.23) в семействе выпуклых областей с фиксированным диаметром или объёмом. Аналогичная задача частично решена Ф.Г. Авхадиевым и К.-Й. Виртсом в статье [65] в семействе областей с конечным внутренним радиусом. Ими изучается точная константа $c(n)$ в неравенстве

$$\int\limits_{B_n} \frac{|g(x)|^2}{(\rho - |x - x_0|)^2} dx + \frac{c(n)}{\rho^2} \int\limits_{B_n} |g(x)|^2 dx \leq \int\limits_{B_n} |\nabla g(x)|^2 dx$$

для всех функций из семейства непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в шаре $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\}$. Установлено, что

1. $c(1) = \lambda_0^2$, где $\lambda_0 = 0.94\ldots$ — постоянная Лэмба, определенная как первый положительный нуль функции $J_0(t) + 2tJ_0'(t)$;

2. $c(2) \geq 2$;

3. $c(3) = j_0^2$, где $j_0 = 2.4048\ldots$ — первый положительный нуль функции Бесселя $J_0(t)$ порядка 0;

4. для любого $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ имеет место нижняя оценка

$$c(n) \geq j_0^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4};$$

и следующее асимптотическое поведение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{n^2} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом неравенства Харди и неравенства типа Харди, которым уже чуть больше 100 лет, связывают в интегральном соотношении функцию и её производную. Они развивались в различных направлениях и от обособленных неравенств это направление исследований перетекло в теорию.

Связанный с приложениями интерес к неравенствам типа Харди привел к бурному росту исследований в этом направлении. Теория, которая началась от классических дискретных и интегральных неравенств, развилась до весовых многомерных неравенств в различных классах областей. Широкое распространение получили дискретные и одномерные интегральные неравенства и их многомерные аналоги, установлены неравенства для различных весовых функций, получены необходимые и достаточные условия на весовые функции, которые гарантирует выполнение неравенств с конечными константами. В отдельное направление вытекло исследование точности констант и случая достижения равенства в неравенствах. Это послужило толчком усиления неравенств с точными константами с помощью дополнительных слагаемых. Направление неравенств типа Харди в многомерных областях само разбилось на различные течения как:

1. выявление класса областей, для которых справедливо нетривиальное неравенство;
2. обоснование или нахождение точных констант для конкретного класса областей;
3. расширение класса областей, при фиксированной точной константе.
4. доказательство неравенств для конкретных многомерных областей.

Каждое из этих поднаправлений имеет свои сложности и остается множество нерешенных задач.

Естественным также является желание упорядочить и систематизировать эту теорию. Поэтому написано более 6 различных монографий, посвященных неравенствам типа Харди. Эти монографии имеют практически непересекающиеся содержания. В силу разнообразия и вариации неравенств такого вида, не очень ясно представляется путь этой систематизации и упорядочивания в максимальной общности. Наиболее удачным, на наш взгляд, путем систематизации является сужение охвата неравенств и рассматриваемых задач. Это подтверждается замечательной монографией Ф.Г. Авхадиева [4], посвященной только конформно инвариантным неравенствам. Многомерным неравенствам посвящена монография трех авторов А.А. Балинского, У.Д. Эванса и Р.Т. Льюиса [66]. В ней собраны, возможно, самые «красивые» неравенства. Особо стоит отметить одно из достоинств этой монографии — это разнообразие методов и различных идей, которые могут быть применены в других близлежащих областях. Тематике весовых неравенств типа Харди посвящена монография А. Куфнера и Л.Э. Персона [117].

В данной диссертации мы рассматриваем неохваченное направление одномерных и многомерных неравенства Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области. На выбор этого направления повлияли следующие факты. Известны лишь отдельные и разрозненные неравенства, которые мы привели в обзорной части, и естественным является их систематизация и объединение. Более того, остается много нерешенных задач, которые несут самостоятельный интерес и имеют приложения.

В этой работе мы выбрали путь изложения, связывающий соответствующие одномерные неравенства с методом получения их многомерных аналогов. В одномерном неравенстве со специальным весом нет сложностей, приходящих от области, они являются аналитической основой геометрических описаний. Геометрия одномерных неравенств диктуется методом доказательства их пространственных аналогов. К такому изложению нас привели следующие соображения. Как указано выше, используя неравенство В.И. Левина (0.0.5), можно получить неравенство М. Хофман-Остенхофа, Т. Хофман-Остенхофа и А. Лаптева (0.0.23), константа в дополнительном слагаемом которого зависит от объёма. Также, используя неравенство (0.0.7), Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Виртс получили пространственное неравенство с дополнительным слагаемым, зависящим от внутреннего радиуса. Неочевидным образом, с применением неравенства (0.0.5) и подход из статьи [114], можно установить неравенство Х. Брезиса и М. Маркуса уже с диаметром области. Неявными рассуждениями, используя обобщения неравенств вида (0.0.5), мы можем получить также конформно инвариантные неравенства. То есть в основе различных классов вариационных задач лежат специально подобранные связанные одномерные весовые неравенства. Аппарат обоснования пространственных неравенств с использованием одномерных неравенств, вид и форма весовых функций которых диктуется геометрией областей, является недооцененным.

Развитие, обобщение и уточнение одномерных неравенств с различными весами и соответствующими методами доказательства позволило дать единую трактовку и основу обоснования пространственных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми.

Стоит отметить, что нам удалось полученные неравенства применить для обоснования достаточных условий однолистности типа Нехари-Покорного (см. [18–23, 34]), а также использовать их при доказательстве неравенств типа Реллиха в различных классах областей. Также в виде следствий многомерных неравенств типа Харди получены L_p-аналоги неравенства Пуанкаре, в которых константа зависит от диаметра, объёма и (или) внутреннего радиуса области. Соответствующие константы из одномерных неравенств типа Харди используются при оценке шварициана аналитической функции. В статье [97] Я. Эфрамидис получил родственные достаточные условия типа Нехари уже для гармонических функций. Поэтому мы дополнительно рассматриваем другого вида достаточные условия Авхадиева-Беккера уже для бигармонических отображений. Эти утверждения доказываются методом продолжений (см., подробнее, [22]). Исследования, схожие с результатами **§4.2** могут прояснить взаимосвязь различных типов достаточных условий однолистности. К тому же, точные константы в дополнительных слагаемых, первые собственные значения Лапласиана при граничных условиях Дирихле и точные константы из достаточных условий однолистности функций, скорее всего, имеют более тесную логическую связь, которая может быть найдена благодаря исследованиям, проведенным в данной диссертации.

Актуальность темы диссертации обусловлена тем, что решаемые в диссертации задачи находятся на стыке различных областей математики, таких как теория дискретных и интегральных неравенств из неклассического вариационного исчисления, теория достаточных условий однолистности и многолистности аналитических, гармонических и бигармонических функций из геометрической теории функций, теории изопериметрических неравенств, и демонстрируют их взаимосвязь. Полученные в диссертации результаты вносят вклад в дальнейшее естественное развитие фундаментальных исследований в упомянутых областях математики и способствуют появлению новых подходов и методов исследований. Кроме самостоятельного интереса одномерные и многомерные неравенства могут быть применены, например, при оценке первого собственного числа p-лапласиана при граничных условиях Дирихле в различных классах областей, при обосновании достаточных условий однолистности типа Нехари-Покорного и доказательстве многомерных неравенств типа Реллиха. Практическая значимость интегральных неравенств, справедливых для всех функций, которые принадлежат подходящему функциональному пространству в заданной области евклидова пространства, состоит также в том, что различные априорные оценки играют важную роль при исследовании краевых задач математической физики вариационным методом.

Степень разработанности темы неравенств типа Харди характеризуют упомянутые в обзорной части работы Ф.Г. Авхадиева, В.И. Буренкова, К.-Й. Виртса, Ф. Гецтези, М.Л. Гольдмана, Ю.А. Дубинского, Е.Б. Дэвиса, А. Куфнера, А. Лаптева, В.Г. Мазьи, В.М. Миклюкова, Р. Ойнарова, Д.В. Прохорова, Дж.М. Родригеса, М. Ружанского, С.Л. Соболева, В.Д. Степанова, Д. Сурагана, Дж. Тидблума, Дж.Л. Фернандеса и многих др., и содержащиеся в них факты. Также отметим замечательные монографии [3, 31, 66, 91, 109, 117, 149], посвященные различным неравенствам типа Харди и имеющие, практически, непересекающиеся по типам неравенств содержания. Что же касается усиленных дополнительными слагаемыми одномерных и многомерных неравенств типа Харди, то в этом направлении получены лишь некоторые отдельные и разрозненные результаты, которые мы привели выше.

Целью работы является:

— систематическое изложение теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области;

— получение одномерных L_1-, L_2- и L_p-неравенств для различных весовых функций, которые имеют степенные особенности, содержат тригонометрические функции и функцию Бесселя, в частности, для веса Якоби;

— доказательство пространственных L_1-, L_2- и L_p-неравенств в произвольных областях, в областях регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях λ-близких к выпуклым и выпуклых областях;

— исследование приложений полученных результатов при оценке первого собственного числа p-лапласиана при граничных условиях Дирихле в различных классах областей, при обосновании достаточных условий однолистности типа Нехари-Покорного и доказательстве многомерных неравенств типа Реллиха.

Методология и методы исследования. В работе используются методы вещественного и функционального анализа, методы геометрической теории функций комплексного переменного. Ключевым и оригинальным моментом доказательства одномерных неравенств является выбор (подбор) специальных функций, которые являются решением или связаны с дифференциальными уравнениями типа Лэмба. Немаловажным является подбор весовых функций, которые напрямую не зависят от геометрии области, а содержат параметры и константы, которые диктуются областями и методом перехода на пространственный случай. При доказательстве пространственных неравенств типа Харди используется метод Ф.Г. Авхадиева, основанный на специальном разбиении областей на основании аппроксимации области элементарными ячейками различного вида, а также подход Е.Б. Дэвиса, сводящийся к оценке расстояния в среднем в различных классах областей.

Основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту, приводятся ниже.

1. За счет недостижимости точных констант либо их ослабления, получены новые одномерные L_1-, L_2- и L_p-неравенства типа Харди, весовые функции которых имеют степенные особенности, содержат тригонометрические функции, функцию Бесселя, в частности, установлены неравенства для веса Якоби. Усилены дополнительными слагаемыми известные, а также новые, доказанные в данной диссертационной работе, неравенства.

2. Дано систематическое изложение теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области. Показано, что взаимосвязанные одномерные неравенства со специальными весами, напрямую не зависящими от геометрии области, а содержащие параметры и константы, которые диктуются областями и методом перехода на пространственный случай, приводят к различным классам вариационных задач.

3. Для непрерывно дифференцируемых или гладких функций с компактным носителем получены пространственные L_1-, L_2- и L_p-неравенства типа Харди в произвольных областях, в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях λ-близких к выпуклым и выпуклых областях. В плоских односвязных и двусвязных областях получены L_p- конформно инвариантные неравенства с дополнительными слагаемыми. Весовые функции, полученных неравенств, зависят от расстояния в среднем, функции расстояния до границы области или гиперболического радиуса, а константы-функционалы в дополнительных слагаемых содержат геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области.

4. Рассмотрены применения доказанных одномерных и пространственных неравенств при получении оценок первого собственного значения p-лапласиана для задачи Дирихле в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым, и выпуклых областях. Эти оценки зависят от геометрических характеристик областей, таких как объём, диаметр или внутренний радиус. Получены достаточные условия однолистности мероморфных в круге функций в терминах оценки модуля Шварциана, а также достаточные условия однолистности и p-листности типа Авхадиева-Беккера для бигармонических функций. Также с применением одномерных неравенств получены многомерные неравенства типа Реллиха в различных классах областей.

й

Научная новизна. Все основные результаты, представленные выше и выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость диссертации. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер. Они могут применяться для дальнейших исследований в рамках теории дискретных и интегральных неравенств, теории достаточных условий однолистности различных классов функций и теории изопериметрических неравенств. Полученные неравенства можно трактовать как теоремы вложения функциональных пространств с весом, которые находят широкое применение, например, при решении интегро-дифференциальных уравнений приближенными методами. Более того, в данной диссертационной работе исследованы применения полученных неравенств при оценке первого собственного числа оператора Лапласа при граничных условиях Дирихле, использованы неравенства Харди при обосновании достаточных условий однолистности и использованы как инструмент доказательства многомерных неравенств Реллиха с дополнительными слагаемыми. Полученные L_1-неравенства потенциально связаны с дифференциальными уравнениями в частных производных, в которых участвует так называемый 1-лапласиан, аналог обычного оператора Лапласа и p-лапласиана при $p > 1$. Результаты, представленные в диссертации, могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов Казанского (Приволжского) федерального университета и могут использоваться в других вузах Российской Федерации.

Степень достоверности результатов. Все результаты диссертации представлены в форме математических утверждений (лемм, предложений, теорем, утверждений, следствий). Они снабжены строгими доказательствами. Вспомогательные факты взяты автором диссертации из авторитетных математических научных журналов, учебников и монографий. Все результаты, которые выносятся на защиту, опубликованы в рецензируемых научных журналах.

Апробация работы. Основные результаты, включенные в диссертационную работу, были представлены на следующих международных конференциях и школах:

1. Международная научная конференция Discrete and Continuous Signals: Analysis, Information and Applications, St. Petersburg University 11.12.2023 - 16.12.2023;

2. Международная конференция "Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации", Уфа, 1.06.2023 - 3.06.2023;

3. Международная научная конференция "32th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis", Санкт-Петербург, 01.07.2023 - 06.07.2023;

4. III Международная конференция "Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ", посвященная 100-летию В.С. Владимирова, 100-летию Л.Д. Кудрявцева и 85-летию О.Г. Смолянова, Московская область, г. Долгопрудный, 5-13

июля 2023 г.;

5. Международная конференция “Теория функций, её приложения и смежные вопросы”, г. Казань, 22.08.2023-27.08.2023;

6. Международная научная конференция “Уфимская осенняя математическая школа”, Уфа, 28.09.2022 - 01.10.2022;

7. Международная конференция “Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации”, Уфа, 18.10.2022 - 22.10.2022;

8. Международная научная школа-конференция “Экстремальные проблемы теории функций, посвященная 75-летию профессора Ф.Г. Авхадиева”, Казань, 29.10.2022 - 30.10.2022;

9. Международная конференция “Вторая конференция Математических центров России Москва”, МГУ, 07.11.2022 - 11.11.2022;

10. Международная школа-конференция “Комплексный анализ и его приложения”, Геленджик, 30.05.2021 - 05.06.2021;

11. Международная научная конференция “30th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis”, Санкт-Петербург, 01.07.2021 - 06.07.2021;

12. Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, 09.08.2021 - 13.08.2021;

13. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, Казань, 22.08.2021 - 28.08.2021;

14. Вузовский научный семинар “Комплексный анализ и эллиптические уравнения”, Казань, 17.06.2020 - 17.06.2020;

15. Международная конференция “Комплексный анализ и его приложения”, Казань, 24.08.2020 - 28.08.2020;

16. Международная конференция “4th International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians”, Стамбул, 27.10.2020 - 30.10.2020;

17. Международная научная конференция “3rd International Conference on Mathematics: "An Istanbul Meeting for World Mathematicians”, Стамбул, 01.07.2019 - 03.07.2019;

18. XIV Международная Казанская школа-конференция "Теория функций, её приложения и смежные вопросы", Казань, 07.09.2019 - 12.09.2019;

19. Международная научная конференция the International Conference on Modern Problems of Mathematics and Mechanics, Баку, 23.10.2019 - 25.10.2019;

20. Международная научная конференция Scientific Workshop in Mathematics (Kazan University, Russia and Kanazawa University, Japan), Казань, 23.12.2019 - 23.12.2019;

21. Международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию А.Ф. Леонтьева, Уфа, 24.05.2017 - 27.05.2017;

22. XII Международная школа-конференция “Теория функций, её приложения и смежные вопросы”, Казань, 21.08.2017 - 27.08.2017.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно–исследовательских семинарах:

1. Семинар по геометрическому анализу, руководитель - д.ф.-м.н., проф. С.К. Водопьянов, 24 января 2024;

2. Общеинститутский семинар ИМВЦ УФИЦ РАН, 26 января, 2024.

Работа в целом докладывалась на объединенном заседании кафедры математического анализа и кафедры теории функций и приближений в К(П)ФУ 10 го июня 2024 г.

Публикации. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в [173]–[196] работах — это статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в списки RSCI, Scopus, Web of Science.

Личный вклад автора. Результаты диссертации, выносимые на защиту и составляющие её основное содержание, получены лично автором. Часть основных положений, выносимых на защиту, опубликована в совместных статьях. Постановки задач в совместных работах [180, 181, 183] принадлежат Р.Г. Насибуллину. Доказательство всех теорем и утверждений, выносимых на защиту, принадлежит автору работы. Результаты из совместных работ [187, 188, 191] на защиту не выносятся.

Содержание диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, каждая из которых разбита на параграфы, заключения, указателей обозначений, списка использованной литературы, содержащего 214 наименований и включающего работы, опубликованные автором по теме диссертации. Общий объём диссертации составляет 270 страниц.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках темы диссертации, приводится обзор литературы и систематизируются известные результаты по изучаемым вопросам, формулируются цели и ставятся задачи. Здесь же формулируются основные результаты диссертации, обосновывается их новизна и значимость. Во введении также исследуется взаимосвязь одномерных неравенств, приводящих к различным классам вариационных задач, таких как многомерные неравенства Харди в терминах функции расстояния до границы области с фиксированным объёмом, диаметром или внутренним радиусом, а также приводящих к конформно инвариантным неравенствам с весами, зависящими от конформного радиуса. Такое изложение ранее в литературе не встречалось.

Глава 1, состоящая из четырех параграфов, посвящена одномерным неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми. Доказываются неравенства на отрезке для различных весовых функций.

Забегая вперед, скажем, что можно выделить несколько подходов доказательства L_p-

неравенств, в основе которых лежат L_1- и L_2-неравенства. Поэтому в **§1.1** доказываются L_1- и L_2-неравенства на отрезке. Выбор весовых функций, в частности, продиктован методом получения их многомерного аналога. Неравенства рассматриваются для абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций y таких, что $y(a)=y(b)=0$ и для функций, для которых определен дробный интеграл Римана-Лиувилля.

Основным утверждением этого параграфа является

Теорема 1.1.1 *Пусть функция $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной и удовлетворяет граничным условиям $y(a)=y(b)=0$ и при этом $y'(t)/\rho^{\mu-1}(t)\in L^1[a,b]$. Тогда при любых $\mu\in[1,+\infty)$ и $\sigma\in(-\infty,\mu)$ выполнено неравенство*

$$(\mu-1)\int\limits_a^b\frac{|y(t)|}{\rho^{\mu}(t)}dt+\frac{M(\mu,\sigma)}{\delta_0^{\mu-\sigma}}\int\limits_a^b\frac{|y(t)|}{\rho^{\sigma}(t)}dt\le N(\mu,\sigma)\int\limits_a^b\frac{|y'(t)|}{\rho^{\mu-1}(t)}dt,$$

где

$$M(\mu,\sigma):=\begin{cases}1-\sigma & ,\ \text{если}\ \ \sigma<1<\mu,\\ e(\mu-1) & ,\ \text{если}\ \ \sigma=1,\ \mu>1,\\ (\mu-1)\left(\frac{\mu-\sigma}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} & ,\ \text{если}\ \ \sigma\ne1<\mu,\end{cases}$$

и

$$N(\mu,\sigma):=\begin{cases}1 & ,\ \text{если}\ \ \sigma<1<\mu,\\ 1+e^{-1/e} & ,\ \text{если}\ \ \sigma=1,\ \mu>1,\\ 1+\left(1+\left(\frac{\mu-1}{\mu-\sigma}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}}\frac{\sigma-1}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} & ,\ \text{если}\ \ \sigma\ne1<\mu.\end{cases}$$

Из теоремы 1.1.1 получены

Следствие 1.1.1 *Пусть $\rho>0$ и $\sigma<1<\mu$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции y такой, что $y(0)=0$, справедливо следующее точное неравенство*

$$\int\limits_0^{\rho}\frac{|y(t)|}{t^{\mu}}dt+\rho^{\sigma-\mu}\frac{1-\sigma}{\mu-1}\int\limits_0^{\rho}\frac{|y(t)|}{t^{\sigma}}dt\le\frac{1}{\mu-1}\int\limits_0^{\rho}\frac{|y'(t)|}{t^{\mu-1}}\left(1-\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\mu-\sigma}\right)dt.$$

Равенство достигается на всех неубывающих допустимых функциях.

Следствие 1.1.2 *Пусть $\rho>0$ и функция y является абсолютно непрерывной на $[0,\rho]$ такой, что $y(0)=0$. Тогда*

$$\int\limits_0^{\rho}\frac{|y(t)|}{t^2}dt+\frac{e}{\rho}\int\limits_0^{\rho}\frac{|y(t)|}{t}dt\le(1+e^{-1/e})\int\limits_0^{\rho}\frac{|y'(t)|}{t}dt.$$

В **§1.1** также доказаны новые неравенства типа Харди для дробного интеграла Римана-Лиувилля $I^{\alpha}_{0+}y$ порядка α, который определяется следующим образом

$$I^{\alpha}_{0+}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau,\quad t>0,$$

где через Γ обозначена гамма-функция Эйлера. Заметим, что в случае $\alpha = 1$ дробный интеграл является обычной первообразной функции y.

Справедлива теорема.

Теорема 1.1.2 *Пусть $0 < \sigma < \alpha < \mu$ и $\alpha \in [1-\sigma, 1]$. Тогда для любой функции $y(t)t^{\alpha-\mu} \in L^1[0,1]$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^1 \left|I_{0+}^{\alpha} y(t)\right| \left(\frac{\mu-\alpha}{t^{\mu}} + \frac{t^{-\sigma}}{B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right) dt \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{\mu-\alpha}} \left((\mu-\alpha)B(\mu-\alpha,\alpha) - \frac{t^{\mu}}{\alpha B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right) dt,$$

где B — бета-функция Эйлера.

§1.2 посвящен неравенствам типа Харди, связанных с параметрическими уравнениями Лэмба. Мы развиваем технику доказательств неравенств с дополнительными слагаемыми, основанную на ослаблении известных сильных констант Харди, что позволяет получать неравенства в L_1- и L_2- случаях. В общем случае L_1-неравенства типа Харди с точными константами невозможно усиливать за счет добавления дополнительных слагаемых (см., например, [62]), так как константы в них могут являться достижимыми. Данные результаты являются логическими продолжениями цикла работ [58], [180], посвященных неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми. Например, в этих пунктах получены следующие теоремы.

Теорема 1.2.1. *Предположим, что $s, q > 0, \nu \ge 0$ и y — абсолютно непрерывная на $[a,b]$ функция такая, что $y(a) = y(b) = 0$ и $y'(t)/\rho(t)^s \in L^1[0,1]$. Если $\mu \in \left(0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, то*

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s+1}(t)}\, dt + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s-q+1}(t)}\, dt \le$$

$$\le \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right) \int\limits_a^b \frac{|y'(t)|}{\rho^s(t)}\, dt + \left(\frac{q^2\mu^2}{s\delta_0^s} - \frac{2q\mu}{\delta_0^s}\right) \int\limits_a^b |y'(t)|\, dt,$$

и если $\mu \le 0$, то

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s+1}(t)}\, dt + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s-q+1}(t)}\, dt \le 2\left(s + \nu q\right) \int\limits_a^b \frac{|y'(t)|}{\rho^s(t)}\, dx - 2\frac{q\mu}{\delta_0^s} \int\limits_a^b |y'(t)|\, dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$ и $\lambda_\nu = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения:

$$(r - 2\mu)J_\nu(\lambda_\nu) + 2zJ'_\nu(\lambda_\nu) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Теорема 1.2.2. *Пусть s и ν — положительные числа, а функция $F_\nu(t) := \sqrt{t}J_\nu(j_{\nu-1}t^{1/(2\nu)})$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0;1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $y(0) = 0$ и $t^{-s}y'(t) \in L^1[0,1]$, справедливо неравенство*

$$\frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2} \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-1/\nu}} \frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)} \le \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t} \frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)} - s\int_0^1 |y'(t)| R_{s,\nu}(t) dt,$$

где

$$R_{s,\nu}(t)=\int_t^1 F_\nu'^2(\tau)/F_\nu^{s+1}(\tau)d\tau.$$

Теорема 1.2.3. *Пусть* $y:[0;1]\to\mathbb{R}$ *абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям* $y(0)=0$ *и* $y'(t)/t^{1/2+s/2}\in L^1[0,1]$. *Предположим также, что* s *и* q *— положительные числа,* $\mu\in[0,1/2)$ *и*

$$\Phi_q(t):=\sqrt{t}J_0\left(\lambda_0\left(q\right)t^{q/2}\right).$$

Тогда если $s\in(0,1]$, *то*

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1\frac{|y(t)|}{t^2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}+\frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4}\int\limits_0^1\frac{|y(t)|}{t^{2-q}}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}\le$$

$$\le\left(\frac{1}{2}-s\mu^2\right)\int_0^1\frac{|y'(t)|}{\Phi_q^{s-1}(t)}\frac{dt}{t}+s\mu^2\int\limits_0^1\frac{|y'(t)|}{\Phi_q^{s-1}(t)}dt-\frac{\mu}{J_0^{s-1}(\lambda_0(q))}\int\limits_0^1|y'(t)|dt.$$

если $s>1$, *то*

$$\frac{1}{4}\int_0^1\frac{|y(t)|}{t^2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}+\frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4}\int_0^1\frac{|y(t)|}{t^{2-q}}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}\le$$

$$\le\int_0^1\frac{|y'(t)|}{t}\left(\frac{1}{2\Phi_q^{s-1}(t)}-\frac{s\mu^2}{J_0^{s-1}(\lambda_0(q))}\right)dt+\frac{s\mu^2-\mu}{J_0^{s-1}(\lambda_0(q))}\int\limits_0^1|y'(t)|dt,$$

где $\lambda_0=\lambda_0(q)$ *— первый положительный корень уравнения*

$$(1-2\mu)J_0\left(\lambda_0\right)+q\lambda_0J_0'\left(\lambda_0\right)=0,\quad \lambda_0\in(0,j_0).$$

Вышеприведенные три теоремы являются основой для доказательства их L_2-аналогов. Например, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.5. *Пусть* λ_ν *является константой Лэмба. Если* s, q, r, m *и* ν *— положительны,* y *— абсолютно непрерывная на отрезке* $[0,1]$ *функция такая, что* $y(0)=0$ *и* $y'(t)/t^{\frac{(q\nu+r)(s-1)}{4}+\frac{r-1}{2}}\in L^2[0,1]$. *Тогда*

$$\frac{r^2-\nu^2q^2}{4}\int\limits_0^1\frac{y^2(t)}{t^{r+1}}\frac{dt}{F_{\nu,r,q}^{s-1}(t)}+\frac{q^2\lambda_\nu^2(\frac{2r}{q})}{4}\int\limits_0^1\frac{y^2(t)}{t^{r-q+1}}\frac{dt}{F_{\nu,r,q}^{s-1}(t)}\le\frac{1}{s}\int\limits_0^1\frac{y'^2(t)}{t^{r-1}}\frac{dt}{F_{\nu,r,q}^{s-1}(t)}.$$

Если $y\not\equiv 0$ *и* $s\le\frac{r-\nu q}{r+\nu q}$, *то неравенство является строгим. Если* $s>\frac{r-\nu q}{r+\nu q}$, *то равенство в неравенстве достигается на функции* $y(t)=CF_{r,\nu,q}^m(t)$, *где* C *— некоторая произвольная константа.*

В основе доказательства предыдущих трех теорем лежит новое свойство монотонности специальной функции, зависящей от функции Бесселя. Также обратим внимание, что в некоторых случаях удалось получить точные константы.

Если в первых двух параграфах **Главы 1** доказаны неравенства со степенными весами и весами, содержащими функцию Бесселя, то в **§1.3** рассматриваются неравенства типа Харди для весовой функции Якоби или для весов, сводящихся к весовой функции Якоби. Основные результаты этого параграфа приведены в следующих теоремах.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\rho \in (0,1)$, $p > 0, q > 0$ *и* $\nu \in [0, p/q]$, *а функция* y *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[0,\rho]$, *такой, что* $y(0) = 0$ *и* $y'(\cdot)z(\cdot)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{2}} \in L^2(0,\rho)$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z^{p-1}(t)}dt \geq (p^2 - q^2\nu^2)\int_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1}(t)}dt + q^2\lambda_0^2\int_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1-q}(t)}dt+$$
$$+\left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^p(t)}dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ *и* $\lambda_0 = \sup\{\lambda : p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \geq 0\}$. *Константа* $p^2 - q^2\nu^2$ *является наилучшей из возможных.*

Теорема 1.3.2. *Пусть* $\rho \in (0,1)$, $q \in (0,2]$ *и* $\nu \in [0, 1/q]$, *а функция* y *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[-\rho,\rho]$, *такой, что* $y(-\rho) = y(\rho) = 0$ *и* $y' \in L^2(-\rho,\rho)$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int_{-\rho}^\rho y'^2(t)dt > (1 - q^2\nu^2)\int_{-\rho}^\rho \frac{|y(t)|^2}{(1-t^2)^2}dt + q^2\lambda_0^2\int_{-\rho}^\rho \frac{|y(t)|^2}{(1-t^2)^{2-q}}dt+$$
$$+\left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_{-\rho}^\rho \frac{|y(t)|^2}{1-t^2}dt,$$

где константа $\lambda_0 = \sup\{\lambda : q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \geq 0\}$. *Постоянная* $(1 - q^2\nu^2)$ *является наилучшей из возможных.*

Также в **§1.3** получены неравенства без дополнительных слагаемых. Такая задача отыскания наилучших констант в дополнительных слагаемых является естественной. В силу дальнейших приложений мы остановились на исследовании и улучшении констант в неравенстве вида

$$\int_{-\rho}^\rho \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}dt < C(q)\int_{-\rho}^\rho y'^2(t)dt.$$

Ф.Г. Авхадиев (см. [21]) показал, что

$$C^{-1}(q) = \begin{cases} 2^{4-3q}\pi^{2(q-1)}, & q \in [1,2] \\ 2^q, & q \in [0,1]. \end{cases}$$

Несмотря на то, что неравенства следующих двух теорем из **§1.3** схожи, их доказательства существенно отличаются.

Теорема 1.3.3. *Если $q \in [1,2]$ и $\rho \in (0,1)$, то для любой абсолютно непрерывной на отрезке $[-\rho,\rho]$ функции y такой, что $y(-\rho) = y(\rho) = 0$, справедливо неравенство*

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}} dt < \kappa' \int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t) dt,$$

где постоянная

$$\kappa' = \kappa'(q) = \frac{1}{2} \left(\int\limits_0^1 B_t^2(1/2, q-1) \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \right)^{1/2},$$

а $B_t(x,y) = \int_0^t \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1} d\tau$ — неполная бета-функция.

Теорема 1.3.4 *Пусть $\rho \in (0,1)$, $q > 0$ и $\nu = 1/q$, а g является абсолютно непрерывной на отрезке $[-\rho,\rho]$ функцией такой, что $y(-\rho) = y(\rho) = 0$ и $y' \in L^2(-\rho,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$P_q \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}} dt < \int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t) dt,$$

где постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad q = 0, \\ \lambda_0^2 q^2 & \text{при} \quad q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_0^2 \alpha^2}{2^\alpha} \right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & \text{при} \quad q \in (q_0, 1], \\ 2 & \text{при} \quad q = 1, \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа λ_0 определяется как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν, а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q + 2^{q/2} \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)} = 0.$$

Численные вычисления показывают, что $\kappa'(q) < C^{-1}(q)$ для любого $q \in [q_0, q_1] = [1.2823044502226741, 1.7950834115169039]$. В концевых точках этого отрезка значение $\kappa'(q) - C^{-1}(q)$ близко к нулю. То есть числа q_0 и q_1 появляются как численное решение уравнения $\kappa'(q) - C^{-1}(q) = 0$.

Результаты **§1.3** и **§1.4** возникли в попытке решить одну и ту же задачу — добавления дополнительного положительного слагаемого в неравенство В.И. Левина (0.0.5), но в параграфе **§1.4** установлены в некоторых случаях точные неравенства уже с другой весовой функцией в дополнительном слагаемом. Имеет место утверждение.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $q \in (0, \infty)$, $\nu \in \left[0, \frac{1}{q}\right]$ *и* $\rho \in (0, 1]$. *Тогда для любой абсолютно непрерывной на отрезке* $[0, \rho]$ *функции* $y : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ *такой, что* $y(0) = 0$ *и* $y' \in L^2(0, \rho)$, *имеет место точное неравенство*

$$(1 - \nu^2 q^2) \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^2(t)} dt + q^2 C_\nu^2(q) \frac{(2-\rho)^q}{\rho^q} \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} dt \le \int\limits_0^\rho y'^2(t) dt,$$

где $z(t) = t(2 - t)$, $C_\nu(q)$ — *первый положительный корень уравнения*

$$1 - \rho + qz \frac{J_\nu'(z)}{J_\nu(z)} = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

При $\nu \in \left(0, \frac{1}{q}\right]$ *равенство в неравенстве достигается только на функции*

$$y_0(t) = C\sqrt{z(t)} J_\nu\left(\lambda_\nu(q) \frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}}\right),$$

C — *некоторая произвольная константа.*

Константы неравенства теоремы 1.4.1 являются точными. Справедливо следующее предложение.

Предложение 1.4.1. *Если* $\nu = 0$ *и* $\rho \in (0, 1]$, *то существуют функции* f_ε *и* g_ε *такие, что для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнены неравенства*

$$(1 + \varepsilon) \int\limits_0^\rho \frac{f_\varepsilon^2(t)}{z^2(t)} dt + q^2 C_0(q)^2 \frac{(2-\rho)^q}{\rho^q} \int\limits_0^\rho \frac{f_\varepsilon^2(t)}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} dt > \int\limits_0^\rho (f_\varepsilon'(t))^2 dt$$

и

$$\int\limits_0^\rho \frac{g_\varepsilon^2(t)}{z^2(t)} dt + \left(q^2 C^2 \frac{(2-\rho)^q}{\rho^q} + \varepsilon\right) \int\limits_0^\rho \frac{g_\varepsilon^2(t)}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} dt > \int\limits_0^\rho (g_\varepsilon'(t))^2 dt.$$

Используя теорему 1.4.1, мы получили новые неравенства на отрезке, усиленные тремя дополнительными слагаемыми. Справедлива

Теорема 1.4.3. *Пусть* $\nu \in (0, 1]$, $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$ *и* $\mu(t) = 2b - \rho(t)$. *Тогда для любой функции* $y \in C_0^1(0, 2b)$ *такой, что* $y' \in L^2[0, 2b]$, *справедливы неравенства*

$$\int\limits_0^{2b} y'^2(t) dt \ge \frac{1 - \nu^2}{4} \int\limits_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)} dt + \frac{2 - 2\nu^2 + j_\nu'^2}{4} \int\limits_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)} dt +$$
$$+ \frac{1 - \nu^2 + 2j_\nu'^2}{4} \int\limits_0^{2b} \frac{y^2 t)}{\mu^2(t)} dt + \frac{j_\nu'^2}{4} \int\limits_0^{2b} \frac{y^2(t)\rho(t)}{\mu^3(t)} dt,$$

$$\int\limits_0^{2b} y'^2(t) dt \ge \frac{1}{4} \int\limits_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)} d\tau + \frac{C_0^2(1)}{4} \int\limits_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)} dt + \frac{3C_0^2(1)}{4} \int\limits_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\mu^2(t)} dt + \frac{C_0^2(1)}{2} \int\limits_0^{2b} y^2(t) \frac{\rho(t)}{\mu^3(t)} dt,$$

где j'_ν — первый положительный корень производной J'_ν функции Бесселя J_ν и $C_0(1) \approx$ 1.25578 *— первое положительное решение уравнения*

$$1 - z\frac{J_1(z)}{J_0(z)} = 0, \quad z \in (0, j_0).$$

Забегая вперед, скажем, что все неравенства **Главы 1** применяются для доказательства соответствующих неравенств в пространственном случае и для обоснования L_p-аналогов, которым посвящена **Глава 2** диссертации. Известны различные подходы доказательства L_p-неравенств (см., например, [32]), но ни один из них нельзя назвать универсальным способом. Каждое L_p-неравенство обосновывается по-своему.

Будем условно выделять три подхода к доказательству: 1) способ, основанный на применении теоремы об обобщенном среднем арифметическом; 2) метод, основанный на применении неравенства Опиала; 3) подход, основанный на применении леммы Шама. Три подхода дают различные результаты.

Неравенствам, доказанным первым способом, посвящен **§2.1**. Мы доказываем ряд вспомогательных неравенств, которые несут самостоятельный интерес, а также рассматриваются неравенства с весами, содержащими степенные особенности, функцию синус. Основными результатами этого пункта являются следующие теоремы.

Теорема 2.1.1. *Предположим, что $0 < b - a < \infty$, $\rho(t) = \max\{t - a, b - t\}$, $p \in [2, \infty)$, $s \in (0, \infty)$ и $q \in (0, \infty)$ и $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ — произвольная абсолютно непрерывная функция такая, что $y(a) = y(b) = 0$ и $y'(t)/\rho(t)^{(s-p+1)/p} \in L^p[a, b]$. Если $\nu \in [0, s/q]$, то выполнено следующее неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s-p+1}(t)}dt \geq c_s \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)}dt + \frac{\mu_s}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)}dt. \tag{0.0.30}$$

Если $\nu \geq s/q$, k — положительное целое число и $p = 2k$, то

$$\int\limits_a^b \frac{y'^p(t)}{\rho^{s-p+1}(t)}dt + c_s(p-1) \int\limits_a^b \frac{y^p(t)}{\rho^{s+1}(t)}dt \geq \frac{\mu_s}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{y^p(t)}{\rho^{s-q+1}(t)}dt, \tag{0.0.31}$$

где $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$,

$$c_s = \frac{|s^2 - \nu^2 q^2|^{p/2}}{p^p} \quad \text{и} \quad \mu_s = c_s \frac{p}{2} \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{|s^2 - \nu^2 q^2|}.$$

Теорема 2.1.3. *Предположим, что s и q — положительные числа, $p \geq 1$, $l \in [1, p]$. Если y абсолютно непрерывна в $[0, 1]$ и такая, что $y(0) = 0$, то*

$$p^l (2+q)^l \int_0^1 \frac{|y(t)|^{p-l}|y'(t)|^l}{t^{2-l}} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt \geq$$
$$\geq \left(1 - \frac{lq^2}{4}\right) \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^2} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt + lq^2 c_q^2 \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{2-q}} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt,$$

где константа c_q — число, удовлетворяющее условиям

$$2qc_q \cos c_q - (q-2)\sin c_q = 0 \quad и \quad c_q \in (0,\pi).$$

Лемма 2.1.4. *Пусть $p \geq 2$, $s \in [2-\frac{1}{m}, 2.5]$ и $m \in [2,p]$. Тогда для любой функции $y \in C_0^1[0,\pi]$ справедливо неравенство*

$$\frac{m}{p^m}\left(s-2+\frac{1}{m}\right)\int\limits_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^s t}dt + \frac{m(5-2s)}{2p^m}\int\limits_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^{s-2} t}dt \leq \int\limits_0^\pi \frac{|y(t)|^{p-m}|y'(t)|^m}{\sin^{s-m} t}dt.$$

Также в этом параграфе мы обосновываем неравенства, используя “технику ослабления” сильных констант Харди. Доказательство этих неравенств тесно связано с параметрическими уравнениями типа Лэмба. Приведем лишь одно из утверждений. Имеет место теорема.

Теорема 2.1.5. *Предположим, что $p \geq 1, r \in [1,p]$ и y — абсолютно непрерывная функция на $[a,b]$ такая, что $y(a) = y(b) = 0$. Пусть $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ и $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$. Тогда*

$$p^r s^{2(1-r)}\left(2s+2\nu q-\frac{q^2\mu^2}{s}\right)^r \int_a^b \frac{|y(t)|^{p-r}\cdot|y'(t)|^r}{\rho^{s-r+1}(t)}\,dt \geq$$
$$\geq \left(s^2-r\nu^2q^2\right)\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)}\,dt + \frac{qr}{\delta_0^q}\left(q\lambda_\nu^2(2s/q)+\mu(q-s)\left(2-\frac{q\mu}{s}\right)\right)\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)}\,dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$ и $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r-2\mu)J_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Второму методу, основанному на применении неравенства Опиала, посвящен **§2.2**. Мы получаем L_p-аналоги точных неравенств Авхадиева-Виртса. Приведем лишь два из них.

Положим

$$a_{s,\nu} = \frac{|(s-1)^2-\nu^2q^2|\,(s-1)^{p-2}}{2^{3-p}p^{p-1}} \quad и \quad b_{s,\nu} = \frac{(s-1)^{p-2}q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{2^{3-p}p^{p-1}},$$

где $\lambda_\nu(2s/q)$ — постоянная Лэмба, определяемая как первый положительный корень уравнения

$$sJ_\nu(z) + qzJ_\nu'(z) = 0.$$

Справедлива теорема.

Теорема 2.2.1. *Предположим, что $0 < b-a < \infty$, $\rho(t) = \max\{t-a, b-t\}$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$, $p \in [2,\infty)$, $s \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty)$ и $\nu \in [0, s/q]$. Если $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ является абсолютно* *непрерывной функцией такой, что $y(a) = y(b) = 0$ и $y'(t)/\rho(t)^{(1-2s/p)(1/p-1)} \in L^p[a,b]$. Тогда имеет место неравенство*

$$\delta_0^{s(1-2/p)} \int\limits_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho(t)^{(1-2s/p)(1-p)}} dt \geq a_{s,q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho(t)^{s+1}} dt + \frac{b_{s,\nu}}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho(t)^{s-q+1}} dt, \tag{0.0.32}$$

а если дополнительно $\nu \geq (s-1)/q$, k — целое положительное число и $p = 2k$, то

$$\delta_0^{s(1-2/p)} \int\limits_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho(t)^{(1-2s/p)(1-p)}} dt + a_{s,\nu} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho(t)^{s+1}} dt \geq \frac{b_{s,\nu}}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho(t)^{s-q+1}} dt.$$

Теорема 2.2.3. *Предположим, что $s, q > 0$, $\nu \geq 0$ и y — абсолютно непрерывная функция на $[a,b]$ такая, что $y(a) = y(b) = 0$. Если $\mu \in \left[0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, то*

$$\frac{(s+1)^{s+1}}{s^s} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right) \int_a^b |y'(t)|^{s+1} dt + \frac{(s+1)}{\delta_0^s} \left(\frac{q^2\mu^2}{s} - 2q\mu\right) \int_a^b |y'(t)||y(t)|^s dt \geq$$
$$\geq \left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho(t)^{s+1}}\, dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho(t)^{s-q+1}}\, dt,$$

и если $\mu \leq 0$, то

$$2\frac{(s+1)^{s+1}}{s^s}\,(s+\nu q) \int_a^b |y'(t)|^{s+1}\, dt - 2\frac{(s+1)q\mu}{\delta_0^s} \int_a^b |y'(t)| \cdot |y(t)|^s\, dt \geq$$
$$\geq \left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s+1}(t)}\, dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s-q+1}(t)}\, dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$, $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения:

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Подход, основанный на применении леммы Шама, которому посвящен **§2.3**, позволяет получать точные L_p-неравенства в случае, когда $p \geq 2$. Положим, что

$$\Phi_q(t) = \sqrt{t} J_0(\lambda_0(2/q)t^{q/2}).$$

Верна следующая теорема.

Теорема 2.3.2. *Пусть $s \in (0, +\infty), \nu \in (0, +\infty), p \in [2, +\infty)$ и абсолютно непрерывная функция y на $[0,1]$ такая, что $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^{(s-1)/(2p)} \in L^p[0,1]$. Тогда*

$$\frac{(p-1)^{p-2}}{(p+s-2)^{p-1}} \int\limits_0^1 |y'(t)|^p \frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \geq \int\limits_0^1 |y(t)|^p \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(2/q)}{4t^{2-q}}\right) \left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)}\right)^{p-2} \frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}.$$

Равенство при $s > p - 1$ достигается тогда и только тогда, когда функция $y(t) = C(\Phi_q(t))^{\frac{p+s-2}{p}-1}$, где C — некоторая произвольная константа.

В виде отдельного пункта мы вынесли параграф **§2.4**, результаты которого имеют ряд дальнейших применений.

Теорема 2.4.2. *Предположим, что* $0 < b < \infty$, $p \in [2, \infty)$ *и* $\nu \in [0, p-1]$. *Если* $y : [0, 2b] \to \mathbb{R}$ *является абсолютно непрерывной функцией такой, что* $y(0) = y(2b) = 0$ *и* $|y'(t)|\rho^{-(s+1-p)/p}(t) \in L^p[0, 2b]$, *то имеет место следующее неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_0^{2b} \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s+1-p}(t)} dt \geq \int\limits_0^{2b} \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-1}(t)} \left(\frac{1}{\rho^2(t)} + \frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\left[\frac{1}{\rho(t)\mu(t)} + \frac{3}{\mu^2(t)} + \frac{2\rho(t)}{\mu^3(t)}\right]\right) dt,$$

где λ_1 *— первый положительный корень уравнения*

$$sJ_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Способ, основанный на применении теоремы об обобщенном среднем арифметическом, позволяет доказывать не только интегральные, но дискретные неравенства с логарифмическими весами [86–88,103,127,134,140], т.е. случай, когда вместо интегрирования используются суммирование.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.1. *Пусть* $p > 1$, $l \in [1, p]$, $a_i \geq 0$ *и при целом* $n \geq 1$ *полагаем*

$$A_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{[R]-1} a_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i, & 1 \leq n \leq [R], \\ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i - \sum\limits_{i=0}^{[R]+1} a_i, & n \geq [R]+1, \end{cases}$$

где $[R]$ *— целая часть от нецелого числа* $R > 1$. *Тогда верно следующее неравенство типа Харди:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log \frac{n}{R}\right|^p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{p-l} a_n^l}{(n+1)^{1-l}} \left|\log \frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Глава 3 состоит из пяти параграфов и посвящена уже многомерным неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми, относящимся к различным типам вариационных задач. В отличие от одномерного случая, интегрирование в многомерных неравенствах ведется по пространственной области. Мы будем рассматривать непрерывно дифференцируемые или гладкие функции с компактным носителем. Как известно, замыкание этих пространств функций по соответствующей норме дает неравенства в более общих функциональных пространствах типа Соболева.

Прежде введем основные используемые обозначения. Пусть Ω — открытое связное собственное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ — элемент площади поверхности единичной сферы и $d\omega(\nu) = \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{|\mathbb{S}^{n-1}|}$ — нормированная мера на единичной сфере. Для любой точки $x \in \Omega$, $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ полагаем

$$\tau_\nu(x) := \min\{s > 0 : x + s\nu \notin \Omega\}$$

— расстояние от точки x до границы области Ω по направлению вектора ν,

$$\delta(x) = \inf_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \tau_\nu(x),$$

— расстояние от точки x до границы области Ω,

$$\rho_\nu(x) := \min\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\}, \quad \mu_\nu(x) := \max\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\},$$

$$D_\nu(x) := \tau_\nu(x) + \tau_{-\nu}(x), \quad D(\Omega) = \sup_{x \in \Omega, \nu \in \mathbb{S}^{n-1}} D_\nu(x),$$

и для произвольного $s \in (1, \infty)$ расстоянием в среднем называем величину (см. [66, с. 83], [98, 165])

$$\delta_{M,s}(x)^{-s} := \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)} = \frac{1}{B(n,s)} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)}.$$

Ясно, что $\delta_{M,2} = \delta_M$.

Через $|\Omega|$ обозначим объём области Ω и через Ω_x — элементы множества Ω, которые "видны" из точки x. Напомним, что постоянная

$$K(n) = n\left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right]^{2/n}.$$

§3.1 посвящен геометрическим версиям L_2-неравенств типа Харди. В этом параграфе мы устанавливаем многомерные неравенства типа Харди в произвольных областях, в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым и выпуклых областях. Основным результатом, из которого следуют частные случаи в специальных классах областей, можно назвать следующие две теоремы.

Теорема 3.1.1. *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $\nu \in (0, 1]$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \ge \frac{1-\nu^2}{4} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx + K(n) \frac{5 - 5\nu^2 + 4{j'}_\nu^2}{8} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{|\Omega_x|^{\frac{2}{n}}} dx + \frac{{j'}_\nu^2 K(n) n}{32|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)\delta(x)}{|\Omega_x|^{\frac{3}{n}}} dx,$$

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \ge \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx + \frac{5}{8} C_0^2(1) K(n) \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{|\Omega_x|^{2/n}} dx + \frac{C_0^2(1) K(n) n}{16|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_\Omega g^2(x) \frac{\delta(x)}{|\Omega_x|^{3/n}} dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$ — первое положительное решение уравнения

$$1 - z\frac{J_1(z)}{J_0(z)} = 0, \quad z \in (0, j_0).$$

Теорема 3.1.2. *Пусть Ω — произвольная ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $\nu \in (0,1]$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1-\nu^2}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx + n \frac{9 - 9\nu^2 + 6{j'}_\nu^2}{4D^2(\Omega)} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{n{j'}_\nu^2}{4D^3(\Omega)} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx + n \frac{7C_0^2(1)}{4D^2(\Omega)} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{nC_0^2(1)}{2D^3(\Omega)} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx$ 1.25578.

Геометрическим версиям неравенств типа Харди в L_p случае посвящен **§3.2**. В этом параграфе мы получим многомерные неравенства типа Харди в произвольных областях в терминах расстояния в среднем. Расстояние в среднем также иногда называют расстоянием по Дэвису. Полученные неравенства принимают более упрощенный вид выпуклых областях.

Имеют место теоремы

Теорема 3.2.1. *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geq 2$ и $p \geq s+1$. Если $s \in (0,1]$, то имеет место неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)} dx \geq$$

$$\geq \frac{5p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{2}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p \delta^{1-s}(x)}{|\Omega_x|^{2/n}} dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p \frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}} dx.$$

Если $s \in (1,2]$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)} dx \geq$$

$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p \frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}} dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx \geq B(n,s+1) \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)} dx + \frac{p\lambda_1^2}{s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx \geq B(n,s+1) \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)} dx + \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Если положим, что $p \le s+1$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2.2. *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \ge 2$ и $p \le s+1$. Если $s \in (1,2]$, то справедливо неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p)\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)}dx - B(n,s+1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)}dx \ge$$

$$\ge \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int\limits_\Omega |g(x)|^p\frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p)\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)}dx \ge B(n,s+1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)}dx + \frac{p\lambda_1^2}{s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p)\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)}dx \ge B(n,s+1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{s,M}^{s+1}(x)}dx + \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

В пунктах **3.1.2-3.1.5, 3.2.2-3.2.4** мы получаем аналогичные результаты в регулярных областях, в областях, удовлетворяющих условию θ-конуса, в λ близких к выпуклым и в выпуклых областях в терминах функции расстояния до границы области.

Оказывается, можно получать пространственные неравенства в произвольных областях не только в терминах расстояния в среднем, но и в терминах расстояния до границы области δ. В параграфе **§3.3** мы рассматриваем неравенства в произвольных открытых и в открытых выпуклых областях $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. При этом мы используем метод Ф.Г. Авхадиева чтобы распространить одномерные неравенства на многомерный случай (см., например, [16, 60, 198]). В следующих двух теоремах получены соответственно L_1- и L_p-неравенства.

Теорема 3.3.1. *Предположим, что Ω является произвольной открытой областью в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, $s > n$, $q > 0$ и внутренний радиус $\delta_0(\Omega) < \infty$. Тогда*

$$(s-n)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta(x)^s}dx + \frac{q}{\delta_0(\Omega)^q}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta(x)^{s-q}}dx \le 2\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta(x)^{s-1}}dx$$

для произвольной функции $g \in C_0^1(\Omega)$. Более того, если $s - q < 1$, то для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$(s-n)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \frac{q-s+1}{\delta_0^q(\Omega)}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta(x)^{s-q}}dx \le \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta(x)^{s-1}}\left(1 - \left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)dx.$$

Теорема 3.3.2. *Предположим, что Ω — произвольная открытая область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $s > n$, $q > 0$, $p \geq 1$, $r \in [1, p]$ и внутренний радиус $\delta_0(\Omega) < \infty$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)} dx + \frac{rq}{(s-n)\delta_0^q(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)} dx \leq \left(\frac{2p}{s-n}\right)^r \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^r |g(x)|^{p-r}}{\delta^{s-r}(x)} dx.$$

Более того, если $s - q < 1$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)} dx + \frac{r(1+q-s)}{(s-n)\delta_0^q(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)} dx \leq$$
$$\leq \left(\frac{p}{s-n}\right)^r \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^r |g(x)|^{p-r}}{\delta^{s-r}(x)} \left(1 - \left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)^r dx.$$

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$.

В дальнейшем нам нужны будут следующие константы

$$M(s,q) := \begin{cases} q - s + 1, & \text{если} \;\; s - q < 1 < s, \\ e(\mu - 1), & \text{если} \;\; s - q = 1, \; s > 1, \\ (s-1)\left(\frac{q}{s-q-1}\right)^{\frac{q}{s-q+1}}, & \text{если} \;\; s - 1 \neq 1 < s, \end{cases}$$

и

$$N(s,q) := \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; s - q < 1 < s, \\ 1 + e^{-1/e}, & \text{если} \;\; s - q = 1, \; s > 1, \\ 1 + \left(1 + \left(\frac{s-q-1}{q}\right)^{\frac{q}{1-s+q}} \frac{s-q-1}{s-1}\right)^{\frac{q}{1-s+q}}, & \text{если} \;\; s - q \neq 1 < s. \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3.3. *Если $s > 1$, $q > 0$ и Ω — выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$(s-1)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)} dx + \frac{M(s, s-q)}{\delta_0(\Omega)^q} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)} dx \leq N(s, s-q) \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)} dx.$$

Более того, если $s - q < 1$, то

$$(s-1)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)} dx + \frac{q-s+1}{\delta_0^q(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)} dx \leq \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)} \left(1 - \left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right) dx.$$

Результаты параграфа **§3.4** являются продолжением цикла работ [58], [180] посвященных неравенствам, доказываемых с использованием дифференциальных уравнений для функций Бесселя. К тому же в этом параграфе обосновываем неравенства, получаемые ослаблением известных точных констант.

Теорема 3.4.1. *Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $s, q > 0$, $\nu \geq 0$, $g \in C_0^1(\Omega)$ и $g'(x)/\delta^s(x) \in L^1(\Omega)$. Если $\mu \in \left(0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, то*

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s+1}(x)} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q+1}(x)} dx \leq$$

$$\leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right) \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^s(x)} dx + \left(\frac{q^2\mu^2}{s\delta_0^s} - \frac{2q\mu}{\delta_0^s}\right) \int_\Omega |\nabla g(x)| dx,$$

и если $\mu \leq 0$, то

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta(x)^{s+1}}\, dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta(x)^{s-q+1}}\, dx \leq$$

$$\leq 2\,(s + \nu q) \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^s(x)}\, dx - \frac{q\mu}{\delta_0^s} \int_\Omega |\nabla g(x)|\, dx,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu) J_\nu(z) + 2z J_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Теорема 3.4.3. *Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $p \geq 1$, $r \in [1, p]$ и $g \in C_0^1(\Omega)$. Если $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ и $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$, то*

$$(s^2 - r\nu^2 q^2) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx + \frac{qr}{\delta_0^q} \left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \frac{\mu(q-s)(2s - q\mu)}{s}\right) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q+1}(x)} dx \leq$$

$$\leq p^r s^{2(1-r)} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right)^r \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^{p-r} \cdot |\nabla g(x)|^r}{\delta^{s-r+1}(x)} dx,$$

если $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ и $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$, то

$$\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)}\, dx + \frac{qr}{\delta_0^q} \left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s)\left(2 - \frac{q\mu}{s}\right)\right) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q+1}(x)}\, dx \leq$$

$$\leq \frac{p^r}{s^r} \left(\frac{2s}{s - \nu q} - \frac{q^2\mu^2}{s^2 - \nu^2 q^2}\right)^r \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^{p-r} \cdot |\nabla g(x)|^r}{\delta^{s-r+1}(x)}\, dx,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu) J_\nu(z) + 2z J_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Теорема 3.4.4. *Пусть Ω — n-мерная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n, \delta_0 = \delta_0(\Omega) < \infty$. Если $s \in (0, +\infty), \nu \in (0, +\infty), p \in [2, +\infty)$, то для произвольной функции $g \in C_0^1(\Omega)$ выполнено следующее неравенство типа Харди:*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} dx \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^2}{(2\delta_0)^p} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)^{p-2} dx,$$

где $j_{\nu-1}$ — первый положительный нуль функции Бесселя $J_{\nu-1}(x)$.

Результаты **§3.5** можно рассматривать с двух точек зрения: как усиление классического неравенства (0.0.20) с помощью замены функции расстояния на конформный радиус области и рассматривать как аналоги неравенства Пуанкаре в спектральной теории оператора Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны.

В первой части приводится L_p-аналоги результатов Фернандеса-Родригеса. Отметим, что эти результаты получены в совместной работе Ф.Г. Авхадиева, Р.Г. Насибуллина и И.К. Шафигуллина [187]. Вторая часть посвящена неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми. Эти неравенства являются L_p-аналогами неравенств Авхадиева из статьи [11]. Основным результатом **§3.5** является следующая теорема.

Теорема 3.5.5. 1) *Предположим, что Ω является односвязной гиперболической областью в $\mathbb{C}$, f — любое однолистное конформное отображение Ω на верхнюю полуплоскость*

$$H_+ = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}.$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $g \in C_0^1(\Omega)$ и $p \geq 2$ справедливо следующее неравенство типа Авхадиева-Харди

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \geq \frac{2^p}{p^p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|g(z)|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy + \frac{2^{p-3}}{p^{p-1}} \iint\limits_{\Omega} |g(z)|^p \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 dxdy$$

с точной константой $2^p/p^p$, где $z = x + iy$.

2) *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ является двусвязной областью и f — любое однолистное конформное отображение Ω на кольцо*

$$A_q = \{\eta \in \mathbb{C} : q < |\eta| < 1\},$$

$q = \exp(-2\pi M(\Omega))$. *Тогда для любой вещественнозначной функции $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство*

$$\frac{p^p}{2^p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \geq \iint\limits_{\Omega} \frac{|g(z)|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy + \frac{p}{2^5 M^2(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} |g(z)|^p \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 dxdy,$$

где $z = x+iy$ и $M(\Omega)$ — геометрический параметр, определяемый как верхняя грань модулей двусвязных областей, лежащих в области Ω и разделяющих его границу $\partial\Omega$.

В **главе 4**, состоящей из четырех параграфов, рассматриваются применения полученных одномерных и многомерных неравенств. Одномерные неравенства используются для обоснования достаточных условий однолистности мероморфных функций и для доказательства неравенств типа Реллиха, а пространственные неравенства при оценке первого собственного значения p-Лапласиана при граничном условии Дирихле.

Получены новые классы однолистных аналитических в круге и в других односвязных областях функций в терминах оценки производной Шварца. Наши результаты усиливают соответствующие результаты Ф.Г. Авхадиева и являются усилением-обобщением соответствующих результатов З. Нехари и В.В. Покорного. В основе доказательства этих достаточных условий лежит новое одномерное неравенство типа Харди для веса Якоби.

Пусть теперь $f(z)$ мероморфная в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция, а

$$S_f(z) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

— производная Шварца или шварциан функции f. Предположим также, что

$$R(q) = \begin{cases} 2^{1+q}, & 0 \le q \le 1, \\ 2^{5-2q}\pi^{2(q-1)}, & 1 \le q \le q_0, \\ \frac{2}{\kappa'(q)}, & q_0 \le q \le q_1, \\ 2^{5-2q}\pi^{2(q-1)}, & q_1 \le q \le 2, \end{cases}$$

где $q_0 = 1.2823044502226741$, а $q_1 = 1.7950834115169039$ и

$$\kappa'(q) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 B_t^2(1/2, q-1)\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt\right)^{1/2}.$$

Имеют место теоремы

Теорема 4.1.3. *Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и μ_k, $k = \overline{1,n}$, выполняется неравенство*

$$|S_f(z)| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k A(\mu_k)}{(1-|z|^2)^{\mu_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причём $b_k = \frac{2P_{2-\mu_k}}{A(\mu_k)}a_k$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le 1$, $0 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \ldots \le \mu_n \le 2$, постоянные В.В. Покорного имеют вид

$$A(\mu) = \begin{cases} 2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)}, & 0 \le \mu \le 1, \\ 2^{3-\mu}, & 1 \le \mu \le 2; \end{cases}$$

и постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & , \quad \text{при} \quad q = 0, \\ \lambda_0 q^2 & , \quad \text{при} \quad q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_0\alpha^2}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & , \quad \text{при} \quad q \in (q_0, 1], \\ 2 & , \quad \text{при} \quad q = 1, \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа λ_0 определяется как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q + 2^{q/2} \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)} = 0.$$

Здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν.

Теорема 4.1.6. *Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и q_k, $k = \overline{1,n}$, выполняется неравенство*

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k R(q_k)}{(1-|z|^2)^{2-q_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n \leq 2$.

На основании предыдущих теорем можно получить достаточные условия однолистности также для односвязных областей, отличных от круга. Пусть $F(\zeta)$ — мероморфная в односвязной области $\mathfrak{D}$ и $\varphi(\zeta)$ — функция, однолистно отображающая область $\mathfrak{D}$ на единичный круг $\mathbb{D}$. Тогда функции F и $f(z) = F^{-1}(\varphi(\zeta))$ будут однолистными и неоднолистными одновременно.

Известно следующее равенство

$$S_f(z) = (\varphi'(\zeta))^{-2} \left(S_F(\zeta) - S_\varphi(\zeta)\right), \quad \zeta \in \mathfrak{D},$$

которое принимает более простой вид в случае, когда φ является дробно-линейным отображением, т.е. $S_\varphi(\zeta) \equiv 0$.

Следовательно, достаточное условие теоремы 4.1.3 перепишется в виде

$$|S_F(\zeta) - S_\varphi(\zeta)| \leq \sum_{k=1}^{n} a_k R(q_k) \frac{|\varphi'(\zeta)|^2}{(1-|\varphi(\zeta)|^2)^{2-q_k}}, \quad \zeta \in \mathfrak{D},$$

Если, например, $\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ и $\varphi(\zeta) = \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$, то соответственно получим

Теорема 4.1.7. *Мероморфная во внешности единичного круга $\mathbb{D}^- = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$ функция $F(\zeta)$ будет однолистной в $\mathbb{D}^-$, если $F'(\zeta) \neq 0$ в $\mathbb{D}^-$ и при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $q_k, k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство*

$$|S_F(\zeta)| \leq \sum_{k=1}^{n} a_k R(q_k) \frac{|\zeta|^{-4}}{(1-|\zeta|^{-2})^{2-q_k}}, \quad \zeta \in \mathbb{D}^-,$$

причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n \leq 2$.

Теорема 4.1.8. *Мероморфная в правой полуплоскости $H_+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : \Re\zeta = \xi > 0\}$ функция $F(\zeta)$ будет однолистной в H_+, если $F'(\zeta) \neq 0$ в H_+ и при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и q_k, $k = \overline{1,n}$, выполняется неравенство*

$$|S_F(\zeta)| \leq \sum_{k=1}^{n} 4^{q_k-1} a_k R(q_k) \frac{|\zeta+1|^{2q_k}}{\xi^{2-q_k}}, \quad \zeta \in H_+,$$

причём $\xi = \Re\zeta$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n \leq 2$.

§4.2 посвящен достаточным условиям однолистности и многолистности типа Беккера для бигармонических отображений. Будем говорить, что функция f является p-листной в области Ω, где $p \geq 1$ — натуральное число, если

a) для любого $w \in \mathbb{C}$ уравнение $f(z) = w$ имеет m корней, где $0 \leq m \leq p$;

b) существует $w_0 \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение $f(z) = w_0$ имеет ровно p корней.

Пусть f —комплекснозначная бигармоническая функция в односвязной области Ω. Будем предполагать также, что $f \in C^4(\Omega)$ и f удовлетворяет уравнению $\triangle^2 f = 0$ на Ω, где

$$\triangle = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (z = x + iy)$$

— оператор Лапласа.

Известно, что каждую бигармоническую функции f в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ можно записать в виде

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2 \left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right),$$

где h, g, h_1, g_1 — аналитические в Ω функции.

Достаточные условия обосновываются в единичном круге и во внешности единичного круга отдельно, вместо того чтобы применить преобразование

$$\mathbb{D}^- \to \mathbb{D} \setminus \{0\}, \quad z \to \frac{1}{z},$$

так как при таком преобразовании получаемый нами подкласс бигармонических многолистных функций в единичном круге не отображается в подкласс бигармонических многолистных функций во внешности единичного круга.

Справедливы следующие теоремы, в которых получены достаточные условия однолистности бигармонических отображений единичного круга.

Теорема 4.2.1. *Предположим, что n — целое положительное число, $n \neq 0$, и бигармоническое отображение $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2 \left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right)$ локально однолистно и сохраняет ориентацию в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, где h, g, h_1 и g_1 — голоморфные в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ функции такие, что*

$$h(z) = z^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = b_{n+1} z^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} b_k z^k,$$

$$h_1(z) = c_{n-1}z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k, \quad g_1(z) = d_{n-1}z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} d_k z^k$$

и

$$\lim_{z\to 0} z^{-n} f(z) = 1.$$

Также предположим

$$f_z(z) \neq \frac{\overline{z}}{n} f_{z\overline{z}}(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}\setminus\{0\} \quad \text{и} \quad |\omega(z)| := \left|\frac{f_{\overline{z}} - \frac{z}{n} f_{z\overline{z}}}{f_z - \frac{\overline{z}}{n} f_{z\overline{z}}}\right| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Если имеет место следующее неравенство

$$|\omega(z)| \left| n - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \right| + \left(1 - |z|^{2|n|}\right) \left| n - 1 - z\frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)} \right| \leq \left| n - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \right|$$

для любых $z \in \mathbb{D}$, то бигармоническая функция $f(z)$ является n-листной в $\mathbb{D}$.

Теорема 4.2.2. *Предположим, что бигармоническая функция*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2 \left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right)$$

является локально однолистной в круге и сохраняет ориентацию

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

где h, g, h_1 и g_1 — голоморфные в $\mathbb{D}$ функции такие, что

$$h_1(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad g_1(z) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k.$$

Также предположим, что

$$f_z(z) \neq 0, \quad f_z(z) \neq \overline{z} f_{z\overline{z}} \quad \text{и} \quad |\omega(z)| := \left|\frac{f_{\overline{z}} - z f_{z\overline{z}}}{f_z - \overline{z} f_{z\overline{z}}}\right| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Если имеет место следующее неравенство

$$|\omega(z)| \left| 1 - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \right| + \left(1 - |z|^2\right) \left| z\frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)} \right| \leq \left| 1 - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \right|$$

для любого $z \in \mathbb{D}$, то $f(z)$ является однолистной в $\mathbb{D}$.

В **§4.3** получены неравенства типа Реллиха в различных классах областей: области, регулярные в смысле Дэвиса, области, удовлетворяющие условию θ-конуса и выпуклые области. Приведем лишь соответствующие неравенства в открытых собственных подмножествах евклидова пространства. Имеет место теорема.

Теорема 4.3.1. *Пусть Ω — открытое собственное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим также, что $s > 0$, $q > 0$ и $\nu \in [0, s/q]$. Если $s \geq 1$ и $s + 3 \geq q$, то для любой функции $f \in C_0^2(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{n(n+2)} \int\limits_{\Omega} \left[|\Delta u(x)|^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j} \right|^2 \right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Если $s \geq 1$ и $s+3 \leq q$, то для любой функции $f \in C_0^2(\Omega)$ имеем

$$\frac{1}{n(n+2)} \int\limits_{\Omega} \left[|\Delta u(x)|^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j} \right|^2 \right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Если $0 < s \leq 1$ и $s+3 \geq q$, то для любой функции $f \in C_0^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{3}{n(n+2)} \frac{2^{s-1}}{D(\Omega)^{s-1}} \int\limits_{\Omega} |\Delta u(x)|^2 dx \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Если $0 < s \leq 1$ и $s+3 \leq q$, то для для любой функции $f \in C_0^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{3}{n(n+2)} \frac{2^{s-1}}{D(\Omega)^{s-1}} \int\limits_{\Omega} |\Delta u(x)|^2 dx \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Как уже говорилось выше, задача добавления дополнительного слагаемого в неравенства типа Харди связана с классическими оценками первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ для лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_1(\Omega) \int\limits_{\Omega} |g(x)|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx, \quad \forall g \in C_0^1(\Omega).$$

По аналогии с L_2-случаем задача добавления дополнительного слагаемого в L_p-неравенствах связана с оценками первого собственного числа $\lambda_p(\Omega)$ для p-лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_p(\Omega) \int\limits_{\Omega} |g(x)|^p dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx, \quad \forall g \in C_0^1(\Omega).$$

Поэтому в **Главе 4** в виде следствия наших полученных результатов из третьей главы, получены также новые неравенства типа Пуанкаре и оценки $\lambda_p(\Omega)$ первого собственного значения p-лапласиана для задачи Дирихле в различных классах областей. Эти оценки включают две или три характеристики области, такие как диаметр, объём и внутренний радиус одновременно. Например, при $p \in (2, 3]$, имеет место оценка

$$\lambda_p(\Omega) \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \left(\frac{1}{\delta_0^p(\Omega)} + \frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2 B(n,p)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|} \right)^{\frac{p}{n}} \right),$$

где λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба.

Глава 1. Одномерные неравенства для суммируемых и квадратично-суммируемых на отрезке функций

Данная глава посвящена одномерным неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми. Доказываются неравенства на отрезке для различных весовых функций. Мы немного отходим от классического определения веса и рассматриваем весовые функции, не обязательно интегрируемые. Выбор весовых функций, в частности, продиктован методом получения их многомерного аналога.

Рассматриваются неравенства на конечном отрезке для суммируемых и квадратично-суммируемых с весом функций. Кроме того, что мы получаем новые неравенства, стоит отметить, что оригинальными являются также подходы к доказательствам этих утверждений.

Первый подход связан с доказательством L_1-неравенств. Под L_1-неравенством будем понимать неравенства, в которые функция и её производная входят в первой степени. Преимущество этого метода в том, что он позволяет получать неравенства для различных весовых функций и дает возможность расширять или изменять класс функций, в котором рассматривается неравенство. К тому же при "удачном выборе" весовой функции, одномерные неравенства удается распространить на пространственный случай. Также добавим, что получаемые в этой главе неравенства являются инструментом обоснования L_p-неравенств.

Что касается изменения или расширения класса функций, то используя этот поход, мы доказываем неравенства для дробных интегралов Римана-Лиувилля. Неравенства Харди в пространстве L_1 представляют отдельный интерес (см., например, [30]), так как они потенциально связаны с дифференциальными уравнениями в частных производных, в которых участвует так называемый 1-лапласиан, аналог обычного оператора Лапласа и p-лапласиана при $p > 1$.

В случае же L_2-неравенств, т.е. в случае, когда функция и её производная входят в неравенство во второй степени, мы доказываем оценки, используя дифференциальное уравнение типа Лэмба для функции Бесселя, связывающее весовые функции в правой и левой части неравенства. Обычно использование дифференциального уравнения при доказательстве неравенства позволяет получать или угадывать экстремальную функцию, на которой будет достигаться равенство в этом неравенстве. Отметим, что мы также применяем дифференциальные уравнения при доказательстве L_1-неравенств, чего ранее не делалось в других работах.

§1.1 L_1-неравенства с дополнительными слагаемыми

В этом параграфе мы получим новые одномерные неравенства типа Харди для абсолютно непрерывных на конечном отрезке $[a, b]$ функций y, удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = y(b) = 0$. Далее будем полагать, что $0 < b - a < \infty$, $\rho(t) = \min\{t - a, b - t\}$ и $\delta_0 = (b - a)/2$. Как обычно через $L^1[a, b]$ будем обозначать пространство интегрируемых по Лебегу на $[a, b]$ функций. Отметим, что результаты этого параграфа лежат в основе доказательств неравенств в L_p-случае.

Нам понадобятся следующие постоянные, определенные для всех значений числовых параметров: $\mu > 1$ и $\sigma < \mu$,

$$M(\mu, \sigma) := \begin{cases} 1 - \sigma & \text{, если } \sigma < 1 < \mu, \\ e(\mu - 1) & \text{, если } \sigma = 1,\ \mu > 1, \\ (\mu - 1)\left(\frac{\mu-\sigma}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} & \text{, если } \sigma \neq 1 < \mu, \end{cases}$$

и

$$N(\mu, \sigma) := \begin{cases} 1 & \text{, если } \sigma < 1 < \mu, \\ 1 + e^{-1/e} & \text{, если } \sigma = 1,\ \mu > 1, \\ 1 + \left(1 + \left(\frac{\mu-1}{\mu-\sigma}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} \frac{\sigma-1}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} & \text{, если } \sigma \neq 1 < \mu. \end{cases}$$

Полученные утверждения являются усилением-обобщением следующих неравенств, доказанных соответственно в [60] и [198]:

$$(\mu - 1)\int_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^\mu(t)}\left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\left(\frac{\rho(t)}{\delta_0}\right)^\mu\right)dt \leq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{\rho^{\mu-1}(t)}\left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{\delta_0}\right)^\mu\right)dt$$

и

$$M(\sigma, \mu)\int_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^\sigma(t)}dt < \delta_0^{\mu-\sigma}\int_a^b |y'(t)|\rho(t)dt,$$

где $\mu > 1$ и $\sigma < \mu$.

1.1.1 Неравенства для абсолютно непрерывных функций

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mu \in [1, +\infty)$, $\sigma \in (-\infty, \mu)$, функция $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной и удовлетворяет граничным условиям $y(a) = y(b) = 0$ и при этом $y'(t)/\rho(t)^{\mu-1} \in L^1[a, b]$. Тогда выполнено неравенство*

$$(\mu - 1)\int_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^\mu(t)}dt + \frac{M(\mu, \sigma)}{\delta_0^{\mu-\sigma}}\int_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^\sigma(t)}dt \leq N(\mu, \sigma)\int_a^b \frac{|y'(t)|}{\rho^{\mu-1}(t)}dt.$$

Для доказательства теоремы 1.1.1 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.1.1. *Если $\rho > 0$, $\mu \in [1, +\infty)$ и $\sigma \in (-\infty, \mu)$, то для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$, имеет место неравенство*

$$(\mu - 1) \int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\mu} dt + \frac{M(\mu, \sigma)}{\rho^{\mu-\sigma}} \int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\sigma} dt \le N(\mu, \sigma) \int\limits_0^\rho \frac{|y'(t)|}{t^{\mu-1}} dt. \tag{1.1.1}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\rho = 1$, поскольку общий случай является следствием линейной замены переменной интегрирования.

Используя следующее равенство для абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции y такой, что $y(0) = 0$,

$$y(t) = \int\limits_0^t y'(\tau) d\tau$$

и изменяя порядок интегрирования в повторных интегралах, получим

$$(\mu - 1) \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^\mu} dt + M(\mu, \sigma) \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^\sigma} dt \le$$

$$\le \int\limits_0^1 \left(\frac{\mu - 1}{t^\mu} + \frac{M(\mu, \sigma)}{t^\sigma} \right) \int\limits_0^t |y'(\tau)| d\tau dt = \int\limits_0^1 |y'(\tau)| T_{\sigma,\mu}(\tau) d\tau,$$

где

$$T_{\sigma,\mu}(\tau) = (\mu - 1) \int\limits_\tau^1 \frac{dt}{t^\mu} + M(\mu, \sigma) \int\limits_\tau^1 \frac{dt}{t^\sigma}.$$

Далее рассмотрим три случая изменения параметров.

Случай 1: $\sigma < 1 < \mu$ и $M(\mu, \sigma) = 1 - \sigma$. Легко показать, что в этом случае

$$T_{\sigma,\mu}(\tau) = (\mu - 1) \int\limits_\tau^1 \frac{dt}{t^\mu} + (1 - \sigma) \int\limits_\tau^1 \frac{dt}{t^\sigma} = \frac{1}{\tau^{\mu-1}} - \tau^{1-\sigma}.$$

Следовательно, имеем неравенство

$$(\mu - 1) \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^\mu} dt + (1 - \sigma) \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^\sigma} dt \le \int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^{\mu-1}} \left(1 - t^{\mu-\sigma}\right) dt. \tag{1.1.2}$$

Случай 2: $\sigma = 1$, $\mu > 1$ и $M(\mu, 1) = e(\mu - 1)$. Непосредственными вычислениями получим

$$T_{\sigma,\mu}(\tau) = (\mu - 1) \int\limits_\tau^1 \frac{dt}{t^\mu} + e(\mu - 1) \int\limits_\tau^1 \frac{dt}{t} = \frac{1}{\tau^{\mu-1}} - 1 + e(\mu - 1) \log \frac{1}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{\tau^{\mu-1}} \left(1 + \tau^{\mu-1} e(\mu - 1) \log \frac{1}{\tau} - \tau^{\mu-1} \right).$$

Рассмотрим функцию g_0, определенную следующим образом

$$g_0(\tau) = \tau^{\mu-1} e(\mu-1)\log\frac{1}{\tau} - \tau^{\mu-1}, \quad \tau \in [0,1].$$

Очевидно, что производная этой функции

$$g_0'(\tau) = (\mu-1)\tau^{-2+\mu}\left(-1 - e + e(\mu-1)\log\frac{1}{\tau}\right).$$

Следовательно, g_0 имеет единственный строгий максимум на $[0,1]$ в точке

$$\tau_0 = e^{\left(1+\frac{1}{e}\right)(1-\mu)^{-1}} \quad \text{и} \quad \max_{\tau\in[0,1]} g_0(\tau) = g_0(\tau_0) = e^{-1/e} \approx 0.692201.$$

Таким образом,

$$(\mu-1)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^\mu}dt + e(\mu-1)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t}dt \le \left(1+e^{-1/e}\right)\int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^{\mu-1}}dt. \tag{1.1.3}$$

Случай 3: $\sigma \neq 1$, $\mu > \sigma$ и $M = \left(\frac{\mu-\sigma}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}}$. Непосредственными вычислениями получим

$$T_{\sigma,\mu}(\tau) = (\mu-1)\int\limits_\tau^1 \frac{dt}{t^\mu} + M(\mu-1)\int\limits_\tau^1 \frac{dt}{t^\sigma} = \frac{1}{\tau^{\mu-1}} - 1 + \frac{M(\mu-1)}{\sigma-1}\tau^{1-\sigma} - \frac{M(\mu-1)}{\sigma-1} =$$

$$= \frac{1}{\tau^{\mu-1}}\left(1 + \frac{1}{\sigma-1}\left(M(\mu-1)\tau^{\mu-\sigma} - \left(M(\mu-1)+\sigma-1\right)\tau^{\mu-1}\right)\right).$$

Рассмотрим функцию g_1, определенную формулой

$$g_1(\tau) = \frac{1}{\sigma-1}\left(M(\mu-1)\tau^{\mu-\sigma} - \left(M(\mu-1)+\sigma-1\right)\tau^{\mu-1}\right).$$

Ясно, что производная этой функции

$$g_1'(\tau) = \frac{\mu-1}{\sigma-1}\tau^{\mu-\sigma-1}(M(\mu-\sigma) - (\sigma-1+M(\mu-1))\tau^{\sigma-1})$$

равна нулю в точке

$$\tau_1 = \left(\frac{\sigma-1+M(\mu-1)}{M(\mu-\sigma)}\right)^{1/(1-\sigma)} = \left(1 + \frac{(1+M)(\sigma-1)}{M(\mu-\sigma)}\right)^{1/(1-\sigma)} \in [0,1].$$

Так как

$$\operatorname{sign} g_1'\left(\tau_1(1-\varepsilon)^{1/(\sigma-1)}\right) = \operatorname{sign}(\sigma-1) \quad \text{и} \quad \operatorname{sign} g_1'\left(\tau_1(1+\varepsilon)^{1/(\sigma-1)}\right) = -\operatorname{sign}(\sigma-1),$$

то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ заключаем, что функция g_1 имеет максимум в точке τ_1 и

$$\max_{\tau\in[0,1]} g_1(\tau) = g_1(\tau_1) = M\left(\frac{M(\mu-1)+\sigma-1}{M(\mu-\sigma)}\right)^{(\mu-\sigma)/(1-\sigma)} =$$

$$= M^{\frac{\mu-\sigma}{\sigma-1}+1}\left(\frac{M(\mu-1)}{\mu-\sigma}+\frac{\sigma-1}{\mu-\sigma}\right)^{(\mu-\sigma)/(1-\sigma)} =$$

$$= M^{\frac{\mu-\sigma}{\sigma-1}+1}M^{(\mu-\sigma)/(1-\sigma)}\left(\frac{\mu-1}{\mu-\sigma}\right)^{(\mu-\sigma)/(1-\sigma)}\left(1+\frac{\sigma-1}{M(\mu-1)}\right)^{(\mu-\sigma)/(1-\sigma)} =$$

$$= \left(1+\frac{\sigma-1}{M(\mu-1)}\right)^{(\mu-\sigma)/(1-\sigma)} < 1.$$

Таким образом,

$$T_{\sigma,\mu}(\tau) \leq \left(1+\left(1+\frac{\sigma-1}{M(\mu-1)}\right)^{(\mu-\sigma)/(1-\sigma)}\right)\frac{1}{\tau^{\mu-1}}$$

и

$$(\mu-1)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^\mu}dt + M(\mu-1)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^\sigma}dt \leq \left(1+\left(1+\frac{\sigma-1}{M(\mu-1)}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}}\right)\int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^{\mu-1}}dt. \qquad (1.1.4)$$

В силу того, что $\mu-\sigma < (\mu-1)M < e(\mu-\sigma)$ и

$$e(\mu-\sigma) > (\mu-1)\left(\frac{\mu-\sigma}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} = (\mu-\sigma)\left(1+\frac{1-\sigma}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu-1}{1-\sigma}} > \mu-\sigma,$$

имеем

$$1 \leq 1+\left(1+\frac{\sigma-1}{M(\mu-1)}\right)^{\frac{\mu-\sigma}{1-\sigma}} < 2.$$

Объединяя (1.1.2), (1.1.3) и (1.1.4), получим утверждение леммы 1.1.1. □

Доказательство теоремы 1.1.1. Применяя неравенство (1.1.1) при $\rho = (b-a)/2$ к функциям $y(t) = f(t+a)$ и $y(t) = f(b-t)$, имеем

$$N(\mu,\sigma)\int\limits_a^{\frac{b+a}{2}} \frac{|f'(\tau)|}{(\tau-a)^{\mu-1}}d\tau \geq (\mu-1)\int\limits_a^{\frac{b+a}{2}} \frac{|f(\tau)|}{(\tau-a)^\mu}d\tau + \frac{M(\mu,\sigma)}{\delta_0^{\mu-\sigma}}\int\limits_a^{\frac{b+a}{2}} \frac{|f(\tau)|}{(\tau-a)^\sigma}d\tau$$

и

$$N(\mu,\sigma)\int\limits_{\frac{b+a}{2}}^b \frac{|f'(\tau)|}{(b-t)^{\mu-1}}d\tau \geq (\mu-1)\int\limits_{\frac{b+a}{2}}^b \frac{|f(\tau)|}{(b-\tau)^\mu}d\tau + \frac{M(\mu,\sigma)}{\delta_0^{\mu-\sigma}}\int\limits_{\frac{b+a}{2}}^b \frac{|f(\tau)|}{(b-\tau)^\sigma}d\tau.$$

Суммируя последние два неравенства, получим утверждение теоремы. □

Следствие 1.1.1. *Пусть $\rho > 0$ и $\sigma < 1 < \mu$. Тогда для любой абсолютно непрерывной на отрезке $[0,\rho]$ функции y такой, что $y(0) = 0$, справедливо следующее точное неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\mu}dt + \rho^{\sigma-\mu}\frac{1-\sigma}{\mu-1}\int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^\sigma}dt \leq \frac{1}{\mu-1}\int\limits_0^\rho \frac{|y'(t)|}{t^{\mu-1}}\left(1-\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\mu-\sigma}\right)dt.$$

Равенство достигается на всех неубывающих допустимых функциях.

Доказательство. Утверждение следует из оценки (1.1.2). □

Следствие 1.1.2. *Пусть $\rho > 0$ и функция y является абсолютно непрерывной на $[0,\rho]$ и такой, что $y(0) = 0$. Тогда*

$$\int_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^2}dt + \frac{e}{\rho}\int_0^\rho \frac{|y(t)|}{t}dt \le (1+e^{-1/e})\int_0^\rho \frac{|y'(t)|}{t}dt.$$

Доказательство. Следствие 1.1.2 получается из неравенства (1.1.3). □

1.1.2 Неравенства для дробных интегралов

Подход, примененный при доказательстве неравенств из пункта **1.1.1**, позволяет получать варианты неравенств для других классов областей. Теперь мы получим новые неравенства с дополнительными слагаемыми для дробных интегралов Римана-Лиувилля (см. подробнее [37] для полной информации о дробных производных и интегралах). Также отметим, что множество статей посвящено неравенствам типа Харди для дробных интегралов и производных (см., например, [37, 56, 109, 128, 145]), но нам неизвестны другие работы, в которых получены такие неравенства с дополнительными слагаемыми.

Пусть $y \in L^1[0,1]$. Тогда для функции y её дробный интеграл Римана-Лиувилля $I^\alpha_{0+}y$ порядка α определяется следующим образом

$$I^\alpha_{0+}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau, \quad t > 0,$$

где через Γ обозначена гамма-функция Эйлера. Заметим, что в случае $\alpha = 1$ дробный интеграл является обычной первообразной функции y. Справедлива теорема.

Теорема 1.1.2. *Пусть $0 < \sigma < \alpha < \mu$ и $\alpha \in [1-\sigma, 1]$. Тогда для любой функции $y(t)/t^{\mu-\alpha} \in L^1[0,1]$ выполнено неравенство*

$$\int_0^1 \left|I^\alpha_{0+}y(t)\right| \left(\frac{\mu-\alpha}{t^\mu} + \frac{t^{-\sigma}}{B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right)dt \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{\mu-\alpha}}\left((\mu-\alpha)B(\mu-\alpha,\alpha) - \frac{t^\mu}{\alpha B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right)dt, \quad (1.1.5)$$

где Γ и B — соответственно гамма- и бета-функции Эйлера.

Доказательство. Используя определение интеграла Римана-Лиувилля и изменяя порядок интегрирования в повторных интегралах, получаем

$$\Gamma(\alpha)\int_0^1 \left|I^\alpha_{0+}y(t)\right| \left(\frac{\mu-\alpha}{t^\mu} + \frac{t^{-\sigma}}{B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right)dt \le \int_0^1 \left(\frac{\mu-\alpha}{t^\mu} + \frac{t^{-\sigma}}{B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right)\int_0^t \frac{|y(\tau)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau dt =$$

$$= \int_0^1 |y(\tau)| \int_\tau^1 \left(\frac{\mu-\alpha}{t^\mu(t-\tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{B(\alpha-\sigma,\alpha)}\frac{1}{t^\sigma(t-\tau)^{1-\alpha}}\right)dtd\tau.$$

Далее оценим два внутренних интеграла. Для первого из них непосредственные вычисления дают

$$\int\limits_{\tau}^{1} \frac{dt}{t^{\mu}(t-t)^{1-\alpha}} = \tau^{\alpha-\mu} \int\limits_{\tau}^{1} t^{\mu-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt =$$

$$= \tau^{\alpha-\mu} \left(\int\limits_{0}^{1} t^{\mu-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt - \int\limits_{0}^{\tau} t^{\mu-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt \right) = t^{\alpha-\mu} \left(B(\mu-\alpha,\alpha) - B_{\tau}(\mu-\alpha,\alpha) \right),$$

где $B_{\tau}(\mu-\alpha,\alpha)$ — неполная бета-функция.

Ясно, что при $\mu > \alpha > 0$, $\alpha \in (0,1]$ и $\tau \in [0,1]$ бета- и неполная бета-функция положительны и для неполной бета-функции имеет место следующее представление

$$t^{-a}B_t(a,b) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} (j-b) \frac{t^k}{k!(a+k)}.$$

Поэтому, так как

$$\left(\tau^{\alpha-\mu}B_{\tau}(\mu-\alpha,\alpha)\right)' = \frac{(1-\tau)^{\alpha-1} - (\mu-\alpha)\tau^{\alpha-\mu}B(\tau,\mu-\alpha,\alpha)}{\tau} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^{k}(j-\alpha) - \prod_{j=1}^{k}(j-\alpha)\frac{\mu-\alpha}{\mu-\alpha+j} \right) \frac{\tau^{k-1}}{k!} \geq 0,$$

то мы получим, что $\tau^{\alpha-\mu}B_{\tau}(\mu-\alpha,\alpha)$ — монотонно возрастающая функция и

$$\inf_{\tau\in[0,1]} \tau^{\alpha-\mu}B_{\tau}(\mu-\alpha,\mu) = \lim_{\tau\to 0} \tau^{\alpha-\mu}B_{\tau}(\mu-\alpha,\mu) = \frac{1}{\mu-\alpha}.$$

Следовательно, для первого внутреннего интеграла получим

$$(\mu-\alpha)\int\limits_{\tau}^{1} \frac{dt}{t^{\mu}(t-\tau)^{1-\alpha}} \leq \frac{(\mu-\alpha)B(\mu-\alpha,\alpha)}{\tau^{\mu-\alpha}} - 1.$$

Теперь оценим второй внутренний интеграл. Имеем

$$\int\limits_{\tau}^{1} \frac{dt}{t^{\sigma}(t-\tau)^{1-\alpha}} \leq \int\limits_{\tau}^{1} \frac{dt}{(t-\tau)^{\sigma-\alpha+1}} = \frac{(1-\tau)^{\alpha-\sigma}}{\alpha-\sigma}.$$

Рассмотрим функцию

$$v(\tau) = (1-\tau)^{\alpha-\sigma} + (\alpha-\sigma)B_{\tau}(\alpha,\alpha-\sigma) - (\alpha-\sigma)B(\alpha-\sigma,\alpha),$$

у которой первая производная

$$v'(\tau) = \frac{1}{\tau}(\alpha-\sigma)(1-\tau)^{\alpha-\sigma-1}\left(\tau^{\alpha}-\tau\right)$$

положительна при $\tau \in (0,1)$. Также ясно, что

$$\lim_{\tau\to 0} v'(t) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{\tau\to 1} v'(\tau) = 0.$$

То есть функция $v(\tau)$ возрастает при $\tau \in [0,1]$ и

$$\sup_{\tau\in[0,1]} v(\tau) = \lim_{\tau\to 1} v(\tau) = 0.$$

Следовательно, $v(\tau)$ является отрицательной функцией при $\tau \in [0,1]$. Поэтому

$$\frac{(1-\tau)^{\alpha-\sigma}}{\alpha-\sigma} \le B(\alpha-\sigma,\alpha) - B_\tau(\alpha,\alpha-\sigma)$$

и для второго внутреннего интеграла имеем

$$\frac{1}{B(\alpha-\sigma,\alpha)} \int\limits_\tau^1 \frac{dt}{t^\sigma(t-\tau)^{1-\alpha}} \le 1 - \frac{B_t(\alpha,\alpha-\sigma)}{B(\alpha-\sigma,\alpha)} \le$$

$$\le 1 - \frac{\tau^\alpha}{B(\alpha-\sigma,\alpha)} \inf_{\tau\in[0,1]} \frac{B_\tau(\alpha,\alpha-\sigma)}{\tau^\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha B(\alpha-\sigma,\alpha)}\tau^\alpha.$$

Выше мы воспользовались тем, что

$$\left(\frac{B_\tau(\alpha,\alpha-\sigma)}{\tau^\alpha}\right)' = \frac{(1-\tau)^{-1+\alpha-\sigma} - \alpha\tau^{-\alpha}B_\tau(\alpha,\alpha-\sigma)}{\tau} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\prod_{j=1}^{k}(j-\alpha+\sigma) - \prod_{j=1}^{k}(j-\alpha+\sigma)\frac{\alpha}{j+\alpha}\right)\frac{\tau^k}{k!} \ge 0$$

и

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{B_\tau(\alpha,\alpha-\sigma)}{\tau^\alpha} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\prod_{j=1}^{k}\frac{(j-\alpha+\sigma)}{j+\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_\tau^1 \left(\frac{\mu-\alpha}{t^\mu(t-\tau)^{1-\alpha}} + \frac{\tau^{-\sigma}(t-\tau)^{\alpha-1}}{B(\alpha-\sigma,\alpha)}\right)dt \le \frac{(\mu-\alpha)B(\mu-\alpha,\alpha)}{\tau^{\mu-\alpha}} - \frac{\alpha^{-1}\tau^\alpha}{B(\alpha-\sigma,\alpha)},$$

что завершает доказательство теоремы. □

Теперь мы докажем L_2-аналог неравенства из теоремы 1.1.2 при $\mu = \alpha$. Как мы увидим ниже, в этом случае в используемых L_1-неравенствах ожидаемо будут возникать веса, имеющие логарифмические особенности. Имеет место теорема.

Теорема 1.1.3. *Пусть $\rho > 0, \alpha \in (0,1]$, $s < 1$ и $p > 1$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y' \in L^2(0,\rho)$, справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^\alpha}\int\limits_0^t \frac{|y(\tau)||y'(\tau)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \le \left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha)\right)\frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)}\int\limits_0^\rho \frac{|y'(t)|^2}{t^{-s}}dt + \frac{2}{j_0^2}\int\limits_0^\rho |y'(t)|^2dt,$$

где гармоническое число

$$H(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{1-\tau^\alpha}{1-\tau}d\tau,$$

а $j_0 \approx 2.404826$ — это наименьший положительный корень функции Бесселя нулевого порядка J_0.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1.1.2. *Пусть* $\varphi \in L^1(0,\rho)$ *и* $\alpha \in (0,1]$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha \varphi)(t)\right|}{t^\alpha} dt \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\rho |\varphi(t)| \left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha) + \log\frac{\rho}{t}\right) dt.$$

Доказательство. Используя определение оператора I_{0+}^α и меняя порядок интегрирования в кратном интеграле, получим

$$\int\limits_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha \varphi)(t)\right|}{t^\alpha} dt \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^\alpha} \int\limits_0^t \frac{|\varphi(\tau)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\rho |\varphi(\tau)| \Phi(\tau) d\tau,$$

где

$$\Phi(\tau) = \int\limits_\tau^\rho \frac{dt}{t^\alpha (t-\tau)^{1-\alpha}} = \int\limits_\tau^\rho \frac{(t-\tau)^\alpha dt}{t^{\alpha+1}} + \tau \int\limits_\tau^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}(t-\tau)^{1-\alpha}}.$$

Посчитаем каждое слагаемое по отдельности. Имеем

$$\tau \int\limits_\tau^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}(t-\tau)^{1-\alpha}} = \int\limits_\tau^\rho \frac{d\left(1-\frac{\tau}{t}\right)}{(1-\frac{\tau}{t})^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\tau}{\rho}\right)^\alpha.$$

Несложно показать, что

$$\int\limits_\tau^\rho \frac{(t-\tau)^\alpha dt}{t^{\alpha+1}} = \int\limits_\tau^\rho \frac{\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^\alpha dt}{t} = \int\limits_\tau^\rho \frac{\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^\alpha - 1}{t} dt + \log\frac{\rho}{\tau}.$$

В первом слагаемом последнего соотношения сделаем замену переменных $y = 1 - \frac{t}{t}$. Получим

$$\int\limits_\tau^\rho \frac{(t-\tau)^\alpha dt}{t^{\alpha+1}} = \int\limits_0^{1-\tau/\rho} \frac{y^\alpha - 1}{1-y} dy + \log\frac{\rho}{t} =$$

$$= -\int\limits_0^1 \frac{1-y^\alpha}{1-y} dy - \int\limits_{1-\tau/\rho}^1 \frac{y^\alpha - 1}{1-y} dy + \log\frac{\rho}{\tau} = -H(\alpha) + G(\tau) + \log\frac{\rho}{\tau},$$

где $H(\alpha)$ — гармоническое число, а функция $G(\tau)$ равна

$$G(\tau) = -\int\limits_{1-\tau/\rho}^1 \frac{y^\alpha - 1}{1-y} dy.$$

Таким образом,

$$\Phi(\tau) = -H(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\tau}{\rho}\right)^\alpha + G(\tau) + \log\frac{\rho}{\tau}.$$

Далее получим верхнюю оценку функции Φ. Непосредственными вычислениями можно показать, что при $\tau \in (0,1)$ выполнено следующее неравенство

$$\left(\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\tau}{\rho}\right)^\alpha + G(\tau)\right)' < 0.$$

Следовательно,

$$\Phi(\tau) \leq \max_{\tau\in[0,\rho]} \left\{ \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\tau}{\rho}\right)^{\alpha} + G(\tau) \right\} - H(\alpha) + \log\frac{\rho}{\tau} = \frac{1}{\alpha} - H(\alpha) + \log\frac{\rho}{\tau}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Также нам понадобится

Лемма 1.1.3. *Пусть $\rho > 0$. Тогда для абсолютно непрерывной функции $y : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y' \in L^2(0,\rho)$, справедливо следующее точное неравенство*

$$\int_0^\rho |y'(t)y(t)| \log\frac{\rho}{t} dt \leq \frac{2}{j_0^2} \int_0^\rho |y'(t)|^2 dt,$$

где $j_0 \approx 2.404826$ — это наименьший положительный корень функции Бесселя нулевого порядка J_0.

Доказательство. При доказательстве этой леммы будем опираться на следующее неравенство (см. [79]), которое справедливо для всех абсолютно непрерывных функций y, таких что $y(0) = 0$:

$$\int_0^\rho |y'(t)y^{p-1}(t)| w(t) dt \leq \frac{1}{\lambda_0 p} \int_0^\rho |y'(t)|^p \sigma(t) dt, \quad p > 1, \tag{1.1.6}$$

где λ_0 — наименьшее собственное значение следующей граничной проблемы

$$\frac{d}{dt}\{\sigma(t) u'^{p-1}(t)\} = \lambda w'(t) u^{p-1}(t). \tag{1.1.7}$$

Причём, равенство в неравенстве (1.1.6) достигается на собственной функции, соответствующей собственному числу λ_0.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1.7) при $p = 2$ для следующих весовых функций

$$w(t) = \log\frac{\rho}{t} \quad \text{и} \quad \sigma(t) = 4/j_0^2.$$

Получим следующую граничную задачу

$$\frac{4}{j_0^2} u''(t) + \frac{1}{t} u(t) = 0, \quad u(0) = 0,$$

решением которой является функция

$$u(t) = \frac{2}{j_0} C_1 \sqrt{t} J_1\left(j_0\sqrt{t}\right).$$

Напомним, что J_1 — это функция Бесселя первого порядка.

Используя (1.1.7), получим

$$\int\limits_0^\rho |y'(t)y(t)|\log\frac{1}{t}dt \le \frac{2}{j_0^2}\int\limits_0^\rho |y'(t)|^2dt. \tag{1.1.8}$$

Обратим внимание, что в последнем неравенстве и в точном неравенстве Авхадиева-Виртса

$$\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t}dt \le \frac{4}{j_0^2}\int\limits_0^1 y'^2(t)dt.$$

точность достигается на одних и тех же функциях (см. [58, 59]).

Докажем теперь точность константы $2/j_0^2$. Предположим, что эту константу можно уменьшить. Допустим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_0^\rho |y'(t)y(t)|\log\frac{1}{t}dt \le \left(\frac{2}{j_0^2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\int\limits_0^\rho |y'(t)|^2dt.$$

Несложно показать (см., например, [60], [143]), что выполнено следующее неравенство

$$\int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|^2}{t}dt \le 2\int\limits_0^\rho |y'(t)y(t)|\log\frac{\rho}{t}dt.$$

Тогда применяя (1.1.8), получим

$$\int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|^2}{t}dt \le 2\int\limits_0^\rho |y'(t)y(t)|\log\frac{1}{t}dt \le \left(\frac{4}{j_0^2}-\varepsilon\right)\int\limits_0^\rho |y'(t)|^2dt,$$

что противоречит точному вышеприведенному неравенству Авхадиева-Виртса. $\square$

Следствие 1.1.3. *Наименьшим собственным значением следующей граничной задачи*

$$u''(t) = -\lambda\frac{1}{t}u(t), \quad u(0) = 0$$

является число $\lambda_0 = j_0^2/4$ и собственной функцией, соответствующей этому собственному числу, является функция

$$u_0(t) = \frac{2}{j_0}C_1\sqrt{t}J_1\left(j_0\sqrt{t}\right).$$

Учитывая, что $t^{r-\alpha} \le \rho^{r-\alpha}$ при $r > \alpha$, получим

Следствие 1.1.4. *Пусть $\varphi \in L^1(0,\rho)$, $r > \alpha$ и $\alpha \in (0,1]$. Тогда выполнено следующее неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha\varphi)(t)\right|}{t^\alpha}dt \le \frac{\rho^{r-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\rho \frac{|\varphi(t)|}{t^{r-\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}-H(\alpha)+\log\frac{\rho}{t}\right)dt,$$

где $H(\alpha)$ — гармоническое число.

Доказательство теоремы 1.1.3. Пусть g — монотонная положительная абсолютно непрерывная функция, причём $g(0)=0$. Применяя лемму 1.1.2 к функции вида $\varphi(t)=g(t)g'(t)$, получим

$$\int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^\alpha}\left|\int\limits_0^t \frac{g(\tau)g'(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right| \le \left(\frac{1}{\alpha}-H(\alpha)\right)\int\limits_0^\rho |g(t)g'(t)|dt + \int\limits_0^\rho |g(t)g'(t)|\log\frac{\rho}{t}dt.$$

Используя следующее известное неравенство Опиала из статьи [158]

$$\int\limits_0^\rho |g(t)||g'(t)|dt \le \frac{1}{2}\frac{\rho^{1-s}}{(1-s)}\int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^{-s}}dt$$

и неравенство леммы 1.1.3, имеем

$$\int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^\alpha}\left|\int\limits_0^t \frac{g(\tau)g'(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right| \le \left(\frac{1}{\alpha}-H(\alpha)\right)\frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)}\int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|^2}{t^{-s}}dt + \frac{2}{j_0^2}\int\limits_0^\rho |g'(t)|^2dt.$$

Пусть теперь

$$g(t)=\int_0^t |y'(\tau)|d\tau \quad \text{и} \quad y(t)=\int_0^t y'(\tau)d\tau,$$

где y — произвольная абсолютно непрерывная функция, причём $y(0)=0$. Тогда

$$|y(t)| \le \int_0^t |y'(\tau)|d\tau = g(t), \quad g'(t)=|y'(t)|.$$

Откуда следует, что

$$\int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^\alpha}\int\limits_0^t \frac{|y(\tau)||y'(\tau)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \le \int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^\alpha}\left|\int\limits_0^t \frac{g(\tau)g'(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right| \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\alpha}-H(\alpha)\right)\frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)}\int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|^2}{t^{-s}}dt + \frac{2}{j_0^2}\int\limits_0^\rho |g'(t)|^2dt =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha}-H(\alpha)\right)\frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)}\int\limits_0^\rho \frac{|y'(t)|^2}{t^{-s}}dt + \frac{2}{j_0^2}\int\limits_0^\rho |y'(t)|^2dt.$$

Таким образом, получаем неравенство для произвольной абсолютно непрерывной функции.

□

§1.2 Неравенства типа Харди и параметрическое уравнение Лэмба

В данном параграфе мы устанавливаем неравенства, в которых добавляются два дополнительных слагаемых — в правую и левую часть неравенства. Константы в этих неравенствах подобраны таким образом, чтобы мы могли использовать параметрические уравнения Лэмба.

1.2.1 Свойства функции Бесселя и параметрическое уравнение Лэмба

Для дальнейшего изложения нам понадобится функция Бесселя J_ν порядка $\nu \geq 0$. Напомним, что функцию Бесселя можно записать в виде следующего сходящегося степенного ряда

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+1+\nu)}, \quad t \in [0,1],$$

где Γ — это гамма-функция Эйлера. Через j_ν будем обозначать первый нуль функции Бесселя J_ν. Подробную информацию о свойствах функции Бесселя и её нулях можно найти в монографии Дж.Н. Ватсона [26].

Приведем лишь некоторые свойства этой функции, которые в дальнейшем мы будем использовать. Например, известно, что

а) J_ν является каноническим решением дифференциального уравнения Бесселя:

$$t^2 u''(t) + t u'(t) + \left(t^2 - \nu^2\right) u(t) = 0; \tag{1.2.1}$$

б) при достаточно малых t справедлива следующая асимптотическая формула

$$J_\nu(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu .$$

Пусть p и q — произвольные положительные числа, отображение $z : [0,1] \to [0,1]$ — некоторая дважды непрерывно-дифференцируемая функция. В этом и в последующих параграфах мы также будем использовать свойства функции

$$F(t) = z(t)^{p/2} J_\nu(\lambda z(t)^{q/2}),$$

где положительная константа λ такая, что значение выражения

$$p - q\lambda J'_\nu(\lambda)/J_\nu(\lambda)$$

не превосходит некоторую положительную постоянную K и при этом λ не превосходит первый положительный корень j_ν функции Бесселя J_ν.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1.2.1. *Для функции $F(t)$ при $t \in (0,1]$ справедливы следующие равенства*

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{z'(t)}{2z(t)} \left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right)$$

и

$$\frac{F''(t)}{F(t)} = \frac{z''(t)}{2z(t)} \left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right) + \frac{z'(t)^2}{4z(t)^2} \left(-p^2 + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + 4(p-1)\frac{F'(t)z(t)}{F(t)z'(t)}\right).$$

Доказательство. Первое равенство очевидно следует из того, что

$$F'(t) = \frac{z'(t)}{2}\left(pz(t)^{\frac{p-2}{2}} J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right) + q\lambda z(t)^{\frac{p+q-2}{2}} J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)\right).$$

Для доказательства второго равенства мы воспользуемся дифференциальным уравнением (1.2.1) для функции Бесселя J_ν порядка ν. Непосредственные вычисления дают

$$F''(t) - \frac{z''(t)F'(t)}{z'(t)} = \frac{z'(t)^2}{4}(p(p-2)z(t)^{\frac{p-4}{2}} J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right) + \frac{z'(t)^2}{4} pq\lambda z(t)^{\frac{p+q-4}{2}} J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right) +$$

$$+\frac{z'(t)^2}{4}\left(q\lambda(p+q-2)z(t)^{\frac{p+q-4}{2}} J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right) + q^2\lambda^2 z(t)^{\frac{p+2q-4}{2}} J''_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{z'(t)^2}{4}\left(p(p-2)z(t)^{\frac{p-4}{2}} J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right) + q\lambda(2p-2)z(t)^{\frac{p+q-4}{2}} J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)\right) +$$

$$+\frac{z'(t)^2}{4} q^2 z(t)^{\frac{p-4}{2}}\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right) + \lambda^2 z(t)^q J''_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{z'(t)^2}{4}\left(p(p-2)z(t)^{\frac{p-4}{2}} J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right) + q\lambda(2p-2)z(t)^{\frac{p+q-4}{2}} J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)\right) -$$

$$-\frac{z'(t)^2}{4} q^2 z(t)^{\frac{p-4}{2}}\left(\lambda^2 z(t)^q - \nu^2\right) J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{F''(t)}{F(t)} = \frac{z''(t)}{2z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right) +$$

$$+\frac{z'(t)^2}{4z(t)^2}\left(p(p-2) + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + q\lambda(2p-2)z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right) =$$

$$= \frac{z''(t)}{2z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right) +$$

$$+\frac{z'(t)^2}{4z(t)^2}\left(-p^2 + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + 2(p-1)\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda + z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right)\right) =$$

$$= \frac{z''(t)}{2z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right) + \frac{z'(t)^2}{4z(t)^2}\left(-p^2 + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + 4(p-1)\frac{F'(t)z(t)}{F(t)z'(t)}\right),$$

что доказывает лемму 1.2.1. □

В дальнейшем нам также понадобится следующая лемма.

Лемма 1.2.2. *Пусть $\rho \in [0,1]$, $p \in (0,+\infty)$ и $q \in (0,+\infty)$, а также $\nu \geq 0$ и $t \in [0,\rho]$. Если $z : [0,1] \to [0,1]$ является непрерывно дифференцируемой, возрастающей и вогнутой функцией, удовлетворяющей граничным условиям $z(0) = 1$ и $z(1) = 1$, то функция*

$$h(t) = z(t)\frac{F'(t)}{F(t)}$$

является убывающей. При этом,

$$\inf_{t\in[0,\rho]} h(t) = z(\rho)\frac{F(\rho)}{F(\rho)} \quad \text{и} \quad \sup_{t\in[0,\rho]} h(t) = \lim_{t\to 0} h(t).$$

Доказательство. Для доказательства убывания функции проверим, что $h'(t) \le 0$ при $t \in (0, \rho]$. Непосредственными вычислениями получим

$$h'(t) = z'(t)\frac{F'(t)}{F(t)} + z(t)\frac{F''(x)}{F(t)} - z(t)\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right)^2 =$$

$$= \frac{z'(t)^2}{2z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right) - \frac{z'(t)^2}{4z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right)^2 +$$

$$+ \frac{z''(t)}{2}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right) +$$

$$+ \frac{z'(t)^2}{4z(t)}\left(-p^2 + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + 2(p-1)\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right)\right) =$$

$$= \frac{q^2 z'(t)^2}{4z(t)}\left(\nu^2 - \lambda^2 z^q(t) - \lambda^2 z^q(t)\left(\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right)^2\right) + \frac{z''(t)}{2}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right).$$

Покажем, что два слагаемых в последней строке являются отрицательными. Для этого рассмотрим функцию (из второго слагаемого)

$$v(t) = p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)},$$

производная которой

$$v'(t) = \frac{q^2 z'(t)}{2z(t)}\left(\nu^2 - \lambda^2 z^q(t) - \lambda^2 z^q(t)\left(\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right)^2\right)$$

по знаку совпадает со знаком первого слагаемого и как мы покажем ниже — отрицательна. Следовательно, используя определение постоянной λ, получим

$$p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)} \ge \inf_{t\in(0,1)} p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)} = p + q\lambda\frac{J'_\nu(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \ge K,$$

и так как $z''(t) \le 0$ при $t \in [0,1]$, то

$$A := \frac{z''(t)}{2}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right)}\right) \le 0.$$

Теперь рассмотрим два случая.

Случай 1: $\nu = 0$. Имеем

$$h'(t) = -\frac{q^2 z'(t)^2}{4z(t)}\left(\lambda^2 z^q(t) + \lambda^2 z^q(t)\left(\frac{J'_0\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_0\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right)^2\right) + A \le 0.$$

Случай 2: $\nu > 0$. Получим, что

$$B := \nu^2 - \lambda^2 z^q(t) - \lambda^2 z^q(t)\left(\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right)^2 = \nu^2\left(1 - \frac{\lambda^2 z^q(t)}{\nu^2} - \frac{\lambda^2 z^q(t)}{\nu^2}\left(\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right)^2\right).$$

Пусть теперь $w = \lambda z(t)^{q/2} \in (0, j_n)$, тогда используя следующие соотношения из [26, с. 17]

$$J'_\nu(w) = \frac{1}{2}(J_{\nu-1}(w) - J_{\nu+1}(w)) \quad \text{и} \quad J_\nu(z) = \frac{w}{2\nu}(J_{\nu-1}(w) + J_{\nu+1}(w)),$$

имеем

$$\begin{aligned} B = \nu^2 \left(1 - \left(\frac{J_{\nu-1}(w) - J_{\nu+1}(z)}{J_{\nu-1}(w) + J_{\nu+1}(w)}\right)^2 - \frac{w^2}{\nu^2}\right) = \\ = \nu^2 \left(\frac{4J_{\nu+1}(w)}{J_{\nu-1}(w) + J_{\nu+1}(z)} - \left(\frac{2J_{\nu+1}(w)}{J_{\nu-1}(w) + J_{\nu+1}(w)}\right)^2 - \frac{w^2}{\nu^2}\right) = \\ = \nu^2 \left(\frac{w^2}{\nu(\nu+1)} \frac{J_\nu(w) + J_{\nu+2}(z)}{J_\nu(w)} - \frac{w^2}{\nu^2} \frac{J^2_{\nu+1}(w)}{J^2_\nu(z)} - \frac{w^2}{\nu^2}\right) = \\ = w^2 \left(\frac{2\nu}{w} \frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)} - \frac{J^2_{\nu+1}(w)}{J^2_\nu(w)} - 1\right) = w^2 \left(-1 + \frac{J_{\nu+1}(w) J_{\nu-1}(w)}{J^2_\nu(w)}\right). \end{aligned}$$

Известно, что функция Бесселя удовлетворяет равенству (см. [26, с. 152])

$$\frac{1}{4} w^2 \left(J^2_{\nu-1}(z) - J_{\nu-2}(z) J_\nu(w)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + 2n) J^2_{\nu+2n}(w).$$

Применяя это равенство, очевидно получим

$$B = \frac{w^2}{J^2_\nu(w)} \left(J_{\nu+1}(z) J_{\nu-1}(w) - J^2_\nu(w)\right) = -\frac{4}{w J^2_\nu(z)} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + 2n + 1) J^2_{\nu+2n+1}(w) \le 0.$$

Следовательно, $h'(t) = A + B \le 0$.

Таким образом, функция $h(t)$ — убывающая на всем отрезке, и как следствие, супремум достигается в левом конце интервала $[0, \rho]$, а инфимум — правом. □

Если положим, что $z(t) = t(2 - t)$, то в условиях леммы 1.2.2 имеем следующее утверждение.

Следствие 1.2.1. *Функция $h(t) = t(2 - t)F'(t)/F(t)$ является убывающей и принимает только положительные значения.*

Доказательство. Используя лемму 1.2.2, получим

$$z(t) \frac{F'(t)}{F(t)} = (1 - t) \left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right).$$

Следовательно,

$$\inf_{z \in [0,\rho]} z(t) \frac{F'(t)}{F(t)} = z(\rho) \frac{F'(\rho)}{F(\rho)} \ge \frac{F'(1)}{F(1)} = 0.$$

□

Если положим $z(t) = t$, то имеем

Следствие 1.2.2. *Если $F(t) = t^{\frac{p}{2}} J_\nu\left(\lambda t^{\frac{q}{2}}\right)$, то функция $tF'(t)/F(t)$ убывающая, при этом*

$$\sup_{t \in [0,1]} \frac{tF'(t)}{F(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{tF'(t)}{F(t)} = \frac{p + \nu q}{2} \quad \text{и} \quad \inf_{t \in [0,1]} \frac{tF'(t)}{F(t)} = \frac{F'(1)}{F(1)} = \frac{p}{2} + q\lambda \frac{J'_\nu(\lambda)}{2J_\nu(\lambda)}.$$

1.2.2 Неравенства на единичном интервале

В этом пункте мы получим одномерные L_1-неравенства типа Харди. В дальнейшем мы будем их использовать для получения L_p-неравенств. Здесь в виде примеров мы также приведем несколько частных случаев наших общих неравенств.

В рассматриваемых далее неравенствах константы будут зависеть от первого положительного корня следующего уравнения для функции Бесселя

$$(s-q\mu)J_\nu\left(\lambda_\nu\right)+q\lambda_\nu J_\nu'\left(\lambda_\nu\right)=0, \quad \lambda\in(0,j_\nu), \tag{1.2.2}$$

где $s>0$, $q>0$ и параметр $\mu\in\left[0,\frac{s+\nu q}{q}\right)$. Отметим, что мы можем включить в рассматриваемый отрезок для μ также значение $\mu=\frac{s+\nu q}{q}$, но в этом случае константа $\lambda_\nu=0$. Действительно, при $\mu=\frac{s+\nu q}{q}$ получим уравнение

$$\lambda J_{\nu+1}\left(\lambda_\nu\right)=0,$$

которое на $(0,j_\nu)$ не имеет ненулевого решения.

Напрямую аналитически решить параметрическое уравнение Лэмба 1.2.2 в общем случае достаточно сложно. Поэтому необходимо рассматривать частные случаи и делать предварительные преобразования. Например, используя равенство

$$\nu J_\nu\left(\lambda_\nu\right)+\lambda_\nu J_\nu'\left(\lambda_\nu\right)=\lambda_\nu J_{\nu-1}\left(\lambda_\nu\right),$$

уравнение Лэмба (1.2.2) при $s>\nu q$ и $\mu=(s-\nu q)/q$ перепишем в более простом виде

$$\lambda_\nu J_{\nu-1}\left(\lambda_\nu\right)=0.$$

Ясно, что в этом случае постоянная Лэмба $\lambda_\nu=j_{\nu-1}$, где $j_{\nu-1}$ — первый положительный корень функции Бесселя $J_{\nu-1}$ порядка $\nu-1$.

Если же рассмотреть уравнение (1.2.2) при $\nu=1/2$, т.е. при $J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x/\sqrt{x}$, то для нахождения константы Лэмба $\lambda_{1/2}$ получим следующее уравнение

$$2q\lambda_{1/2}\cos\lambda_{1/2}+(2s-2q\mu-q)\sin\lambda_{1/2}=0.$$

Интересный подход к решению уравнений типа Лэмба в общем виде нашли Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Виртс в статье [59]. А именно, они доказали, что константа Лэмба $z=\lambda_\nu(r)$, определенная как первый положительный корень уравнения

$$rJ_\nu(z)+2zJ_\nu'(z)=0,$$

как функция переменной r может быть найдена как решение следующей краевой задачи для дифференциального уравнения, аппарат численного решения которой достаточно хорошо разработан,

$$\frac{dz}{dr}=\frac{2z}{r^2-4\nu^2+4z^2}.$$

Обычно дифференциальные уравнения, связывающие весовые функции в интегральных неравенствах, авторы используют при доказательстве неравенств в L_2- и L_p-случаях при $p > 1$ (см., например, [58, 59, 178, 183]). Нам неизвестны другие работы, в которых применяются дифференциальные уравнения для доказательства L_1 неравенств типа Харди.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.2.3. *Предположим, что $s > 0$, $q > 0$, $\nu \geq 0$ и y — абсолютно непрерывная на $[0,1]$ функция такая, что $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^s \in L^1[0,1]$. Если $\mu \in \left[0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, то*

$$\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s+1}} dt + \frac{q^2}{4} \lambda_\nu^2 \left(\frac{2s}{q}\right) \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s-q+1}} dt \leq$$
$$\leq \left(\frac{s+\nu q}{2} - \frac{q^2\mu^2}{4s}\right) \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^s} dt + \left(\frac{q^2\mu^2}{4s} - \frac{q\mu}{2}\right) \int_0^1 |y'(t)| dt,$$

и если $\mu \leq 0$, то

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s+1}} \, dt + q^2 \lambda_\nu^2 \left(\frac{2s}{q}\right) \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s-q+1}} \, dt \leq 2(s+\nu q) \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^s} \, dt - 2q\mu \int_0^1 |y'(t)| \, dt,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu) J_\nu(z) + 2z J_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(t) = t^{\frac{s}{2}} J_\nu\left(\lambda t^{q/2}\right)$, для которой справедливо дифференциальное уравнение

$$t^2 F''(t) + (1-s) t F'(t) + \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4t^{s+1}} + \frac{q^2 \lambda^2}{4t^{s-q+1}}\right) F(t) = 0.$$

Используя неравенство $|y(t)| \leq \int_0^t |y'(\tau)| dt$ и меняя порядок интегрирования в повторном интеграле, получаем

$$\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s+1}} \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2s/q)}{4t^{-q}}\right) dt \leq \int_0^1 |y'(\tau)| T(\tau) \, d\tau,$$

где

$$T(\tau) = \int_\tau^1 \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4t^{s+1}} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2s/q)}{4t^{s-q+1}}\right) dt.$$

Согласно дифференциальному уравнению для $F(t)$, имеем

$$T(\tau) = -\int_\tau^1 \frac{1}{t^{s+1}} \left(\frac{t^2 F''(t)}{F(t)} + \frac{(1-s) t F'(t)}{F(t)}\right) dt = -\int_\tau^1 \left(\frac{F'(t)}{t^{s-1} F(t)}\right)' + \frac{1}{t^{s-1}} \left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right)^2 dt.$$

Выше мы использовали очевидное соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{F'(t)}{t^{s-1} F(t)}\right) = \frac{F''(t)}{t^{s-1} F(t)} + \frac{(1-s) F'(t)}{t^s F(t)} - \frac{1}{t^{s-1}} \left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right)^2.$$

Теперь рассмотрим два случая.

Случай 1: $tF'(t)/F(t) \geq 0$, $t \in [0,1]$. Так как в силу следствия 1.2.2 функция $tF'(t)/F(t)$ убывающая, то получим

$$\inf_{t\in[0,1]} t\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{F'(1)}{F(1)} \quad \text{и} \quad \inf_{t\in[0,1]} \left(t\frac{F'(t)}{F(t)}\right)^2 = \left(\frac{F'(1)}{F(1)}\right)^2 \geq 0,$$

а значит

$$T(\tau) = -\int_\tau^1 \left(\frac{F'(t)}{t^{s-1}F(t)}\right)' + \frac{1}{t^{s-1}}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right)^2 dt \leq \frac{F'(\tau)}{\tau^{s-1}F(\tau)} - \frac{F'(1)}{F(1)} - \left(\frac{F'(1)}{F(1)}\right)^2 \int_\tau^1 \frac{dt}{t^{s+1}} =$$
$$= \frac{F'(\tau)}{\tau^{s-1}F(\tau)} - \frac{F'(1)}{F(1)} + \frac{1}{s}\left(\frac{F'(1)}{F(1)}\right)^2 - \frac{1}{s\tau^s}\left(\frac{F'(1)}{F(1)}\right)^2.$$

Согласно следствию 1.2.2 также выполнено равенство

$$\sup_{t\in[0,1]} \frac{\tau F'(\tau)}{F(\tau)} = \frac{s+\nu q}{2}.$$

Следовательно, имеем следующую оценку

$$T(\tau) \leq \frac{1}{\tau^s}\sup_{\tau\in[0,1]} \frac{\tau F'(\tau)}{F(\tau)} - \frac{F'(1)}{F(1)} + \frac{1}{s}\left(\frac{F'(1)}{F(1)}\right)^2 - \frac{1}{s\tau^s}\left(\frac{F'(1)}{F(1)}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{s+\nu q}{2} - \frac{1}{s}\left(\frac{F'(1)}{F(1)}\right)^2\right)\frac{1}{\tau^s} + \frac{1}{s}\left(\frac{F'(1)}{F(1)}\right)^2 - \frac{F'(1)}{F(1)}.$$

Обратим внимание, что по условию доказываемой леммы мы выбрали $z = \lambda_\nu(2s/q)$ как константу, которая удовлетворяет следующим условиям

$$\frac{2}{q}\frac{F'(1)}{F(1)} = \frac{s}{q} + z\frac{J_\nu'(z)}{J_\nu(z)} = \mu \quad \text{и} \quad z \in (0, j_\nu).$$

Таким образом, получим

$$\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s+1}}\left(\frac{s^2-\nu^2q^2}{4} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{4t^{-q}}\right)dt \leq$$
$$\leq \left(\frac{s+\nu q}{2} - \frac{q^2\mu^2}{4s}\right)\int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^s}dt + \left(\frac{q^2\mu^2}{4s} - \frac{q\mu}{2}\right)\int_0^1 |y'(t)|dt.$$

Случай 2: существует $t_0 \in (0,1)$ такое, что $t_0F'(t_0)/F(t_0) = 0$. В этом случае, так как $tF'(t)/F(t)$ убывает, мы имеем

$$\inf_{t\in[0,1]} t\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{F'(1)}{F(1)} \quad \text{и} \quad \inf_{t\in[0,1]} \left(t\frac{F'(t)}{F(t)}\right)^2 = 0,$$

а значит

$$T(\tau) = -\int_\tau^1 \left(\frac{F'(t)}{t^{s-1}F(t)}\right)' + \frac{1}{t^{s-1}}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right)^2 dt \leq \frac{F'(\tau)}{\tau^{s-1}F(\tau)} - \frac{F'(1)}{F(1)}.$$

Используя те же выкладки и идеи, что и в случае 1, мы получаем

$$\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s+1}}\left(\frac{s^2-\nu^2q^2}{4} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{4t^{-q}}\right)dt \leq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^s}\left(\frac{s+\nu q}{2} - \frac{q\mu}{2}t^s\right)dt.$$

Этим завершается доказательство леммы. $\square$

Отметим, что в [59] авторы рассмотрели уравнение Лэмба при условии $\mu = 0$. В этом случае лемма 1.2.3 примет следующий вид.

Следствие 1.2.3. *Предположим, что $s, q > 0$, $\nu \geq 0$ и y — абсолютно непрерывная функция на $[0,1]$ такая, что $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^s \in L^1[0,1]$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s+1}}\, dt + q^2 \lambda_\nu^2(2s/q) \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s-q+1}}\, dt \leq (2s + 2\nu q) \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^s}\, dt,$$

где константа $z = \lambda_\nu(r)$ — первое положительное решение уравнения

$$rJ_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Следствие 1.2.4. *Предположим, что $s > 0$, $q > s$, $\nu \geq 0$ и y — абсолютно непрерывная функция на $[0,1]$ такая, что $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^s \in L^1[0,1]$. Если $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ и $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$, то*

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s+1}} dt + \left(q^2 \lambda_\nu^2 \left(\frac{2s}{q}\right) + q\mu(q-s)\frac{2s - q\mu}{s}\right) \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{s-q+1}} dt \leq$$
$$\leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right) \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t^s} dt,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Доказательство. Известно, что если $\sigma < 1$ и y — абсолютно непрерывная функция на $[0,1]$ такая, что $y(0) = 0$, то справедливо следующее точное неравенство (см. [198, Лемма 1]):

$$(1 - \sigma) \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^\sigma}\, dt < \int_0^1 |y'(t)|\, dt.$$

Подставляя в него $\sigma = s - q + 1$ и используя лемму 1.2.3, мы получим требуемое утверждение.

□

1.2.3 Неравенства на произвольном отрезке

Теперь получим неравенства на произвольном отрезке $[a,b]$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Предположим, что $s,\ q > 0, \nu \geq 0$ и y — абсолютно непрерывная на $[a,b]$ функция такая, что $y(a) = y(b) = 0$ и $y'(t)/\rho(t)^s \in L^1[a,b]$. Если $\mu \in \left(0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, то*

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s+1}(t)}\, dt + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s-q+1}(t)}\, dt \leq$$
$$\leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right) \int\limits_a^b \frac{|y'(t)|}{\rho^s(t)}\, dt + \left(\frac{q^2\mu^2}{s\delta_0^s} - \frac{2q\mu}{\delta_0^s}\right) \int\limits_a^b |y'(t)|\, dt,$$

и если $\mu \le 0$, то

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s+1}(t)}\,dt+\frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{\rho^{s-q+1}(t)}\,dt \le 2\,(s+\nu q)\int\limits_a^b \frac{|y'(t)|}{\rho^{s}(t)}\,dt-2\frac{q\mu}{\delta_0^s}\int\limits_a^b |y'(t)|\,dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$ и $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения:

$$(r-2\mu)J_\nu(z)+2zJ_\nu'(z)=0, \quad z\in(0,j_\nu).$$

Доказательство. Для произвольного $\rho > 0$, сделаем замену переменной $t = \rho\tau$ в первом неравенстве леммы 1.2.3 и получим

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^{s+1}}\,dt+\frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\rho^q}\int_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^{s-q+1}}\,dt \le$$
$$\le \left(2s+2\nu q-\frac{q^2\mu^2}{s}\right)\int_0^\rho \frac{|y'(t)|}{t^s}\,dt+\left(\frac{q^2\mu^2}{s\rho}-\frac{2q\mu}{\rho}\right)\int_0^\rho |y'(t)|\,dt.$$

Применяя последнее неравенство к двум функциям $y(t) = g(t+a)$ и $y(t) = g(b-t)$ с $\rho = \delta_0 = (b-a)/2$, имеем

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|g(\tau)|}{(\tau-a)^{s+1}}\,d\tau+\frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\rho^q}\int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|g(\tau)|}{(\tau-a)^{s-q+1}}\,d\tau \le$$
$$\le \left(2s+2\nu q-\frac{q^2\mu^2}{s}\right)\int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|g'(\tau)|}{(\tau-a)^s}\,d\tau+\left(\frac{q^2\mu^2}{s\rho}-\frac{2q\mu}{\rho}\right)\int\limits_a^{(a+b)/2} |g'(\tau)|\,d\tau$$

и

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|g(\tau)|}{(b-\tau)^{s+1}}\,d\tau+\frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\rho^q}\int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|g(\tau)|}{(b-\tau)^{s-q+1}}\,d\tau \le$$
$$\le \left(2s+2\nu q-\frac{q^2\mu^2}{s}\right)\int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|g'(\tau)|}{(b-\tau)^s}\,d\tau+\left(\frac{q^2\mu^2}{s\rho}-\frac{2q\mu}{\rho}\right)\int\limits_{(a+b)/2}^{b} |g'(\tau)|\,d\tau.$$

Суммируя два последних неравенства, получаем требуемое утверждение. Второе неравенство теоремы получаем аналогичным образом. Этим завершается доказательство теоремы. □

Следствие 1.2.5. *Предположим, что $s, q > 0, \nu \ge 0$ и y — абсолютно непрерывная функция на $[-1,1]$ такая, что $y(-1) = y(1) = 0$ и $y'(t)/(1-|t|)^s \in L^1[-1,1]$. Тогда*

$$\frac{s^2-\nu^2q^2}{s+2\nu q}\int\limits_{-1}^{1} \frac{|y(t)|}{(1-|t|)^{s+1}}\,dt+\frac{q^2{j_\nu'}^2}{s+2\nu q}\int\limits_{-1}^{1} \frac{|y(t)|}{(1-|t|)^{s-q+1}}\,dt \le \int\limits_{-1}^{1} \frac{|y'(t)|}{(1-|t|)^{s}}\,dt-\frac{s}{s+2\nu q}\int_{-1}^{1} |y'(t)|\,dt,$$

где j_ν' — первый положительный корень производной функции Бесселя порядка J_ν'.

Доказательство. Очевидно, что если $\mu = s/q$ и $r = 2s/q$, то уравнение $\frac{r}{2} + zJ'_\nu(z)/J_\nu(z) = \mu$ примет вид

$$zJ'_\nu(z)/J_\nu(z) = 0.$$

Следовательно, константа Лэмба в этом случае $\lambda_\nu(2s/q) = j'_\nu$, где j'_ν — первый положительный корень производной функции Бесселя порядка J'_ν. Таким образом, требуемое неравенство следует из утверждения теоремы 1.2.1 при $a = -1, b = 1$ и $\mu = s/q$. $\square$

Приведем несколько частных случаев неравенства из Теоремы 1.2.1 в виде примеров.

Пример 1.2.1. *Известно, что $j'_1 \approx 1.8412$. Если $a = -1$, $b = 1$, $s = 2$, $q = 2$, $\mu = 1$ и $\nu = 1$, то*

$$\frac{2}{3}{j'_1}^2 \int_{-1}^{1} \frac{|y(t)|}{1-|t|}dt \le \int_{-1}^{1} \frac{|y'(t)|}{(1-|t|)^2}\,dt - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} |y'(t)|\,dt.$$

Последнее неравенство сравнимо с точным неравенством из статьи [198], которое можно переписать в виде

$$2e\int_{-1}^{1} \frac{|y(t)|}{1-|t|}dt \le \int_{-1}^{1} \frac{|y'(t)|}{(1-|t|)^2}dt.$$

Пример 1.2.2. *Пусть $a = -1$, $b = 1$, $s = 1$, $q = 1$, $\mu = 1$ и $\nu > 0$. Тогда*

$$\left(1-\nu^2\right)\int_{-1}^{1} \frac{|y(t)|}{(1-|t|)^2}\,dt + {j'_\nu}^2 \int_{-1}^{1} \frac{|y(t)|}{(1-|t|)}\,dt \le (1+2\nu)\int_{-1}^{1} \frac{|y'(t)|}{(1-|t|)}\,dt - \int_{-1}^{1} |y'(t)|\,dt,$$

где j'_ν — первый положительный корень производной функции Бесселя порядка J'_ν.

Последнее неравенство при $\nu = 1$ сравнимо со следующим точным неравенством из статьи [198]

$$e\int_{-1}^{1} \frac{|y(t)|}{1-|t|}dt \le \int_{-1}^{1} \frac{|y'(t)|}{1-|t|}dt.$$

Пример 1.2.3. *Если $a = -1$, $b = 1$, $\nu = 0$, $s > 0$ и $\mu \to \frac{s+\nu q}{q}$, то из теоремы 1.2.1 следует, что*

$$s\int_{-1}^{1} \frac{|y(t)|}{(1-|t|)^{s+1}}dt \le \int_{-1}^{1} \frac{|y'(t)|}{(1-|t|)^{s}}dt - \int_{-1}^{1} |y'(t)|dt.$$

Последнее неравенство сравнимо с точным неравенством из статьи [60, формула 3], которое в одномерном случае можно переписать в следующем виде

$$s\int_{-1}^{1} \frac{|y(t)|}{(1-|t|)^{s+1}}dt + \int_{-1}^{1} |y(t)|dt \le \int_{-1}^{1} \frac{|y'(t)|}{(1-|t|)^{s}}dt - \int_{-1}^{1} |y'(t)|(1-|t|)dt.$$

1.2.4 Неравенства с функцией Бесселя в ядре

До этого мы рассматривали неравенства со степенными или логарифмическими особенностями. Теперь получим неравенства, весовые функции которых содержат функцию Бесселя. Подход к доказательству — такой же, что и в предыдущем пункте.

В следующей теореме мы полагаем, что

$$F_\nu(t) = \sqrt{t} J_\nu(j_{\nu-1} t^{1/(2\nu)}),$$

где $j_{\nu-1}$ — первый положительный корень функции Бесселя $J_{\nu-1}$.

Теорема 1.2.2. *Пусть s и ν — положительные числа, а функция $F_\nu(t) := \sqrt{t} J_\nu(j_{\nu-1} t^{1/(2\nu)})$. Для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0;1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $y(0) = 0$ и $t^{-s} y'(t) \in L^1(0,1)$, справедливо неравенство*

$$\frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2} \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-1/\nu}} \frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)} \le \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t} \frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)} - s \int_0^1 |y'(t)| R_{s,\nu}(t) dt,$$

где

$$R_{s,\nu}(t) = \int_t^1 F_\nu'^2(\tau)/F_\nu^{s+1}(\tau) d\tau.$$

Доказательство. Используя неравенство $|y(t)| \le \int_0^1 |y'(\tau)| d\tau$ и меняя порядок интегрирования в повторных интегралах, получим

$$\frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2} \int_0^1 \frac{y(t)}{t^{2-1/\nu} F_\nu^{s-1}(t)} dt \le \int_0^1 |y'(\tau)| T(\tau) d\tau,$$

где

$$T(\tau) = \frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2} \int_\tau^1 \frac{1}{t^{2-1/\nu} F_\nu^{s-1}(t)} dt.$$

Функция $F_\nu(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F_\nu''(t) + \frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2} F_\nu(t) t^{-2+\frac{1}{\nu}} = 0.$$

Поэтому

$$T(\tau) = -\int_\tau^1 \frac{F_\nu''(t)}{F_\nu^s(t)} dt.$$

Очевидно, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu^s(t)}\right)' = \frac{F_\nu''(t) F_\nu^s(t) - s F_\nu'(t) F_\nu^{s-1}(t) F_\nu'(t)}{F_\nu^{2s}(t)} = \frac{F_\nu''(t)}{F_\nu^s(t)} - s \frac{F_\nu'^2(t)}{F_\nu^{s+1}(t)}.$$

Следовательно,

$$T(\tau) = -\int_\tau^1 \frac{F_\nu''(t)}{F_\nu^s(t)} dt = -\int_\tau^1 \left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu^s(t)}\right)' + s \frac{F_\nu'^2(t)}{F_\nu^{s+1}(t)} dt = \frac{F_\nu'(\tau)}{F_\nu^s(\tau)} - \frac{F_\nu'(1)}{F_\nu^s(1)} - s \int_\tau^1 \frac{F_\nu'^2(t)}{F_\nu^{s+1}(t)} dt.$$

Так как $F'_\nu(1)=0$, функция $\tau F'_\nu(\tau)/F_\nu(\tau)$ является возрастающей и

$$\sup_{\tau\in[0,1]}\frac{\tau F'_\nu(\tau)}{F_\nu(\tau)}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\tau F'_\nu(\tau)}{F_\nu(\tau)}=1,$$

то мы получим

$$T(\tau)\le\frac{1}{\tau F_\nu^{s-1}(\tau)}-s\int_\tau^1\frac{F_\nu'^2(t)}{F_\nu^{s+1}(t)}dt,$$

что завершает доказательство теоремы 1.2.2. □

Известно, что

$$J_{1/2}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin t}{\sqrt{t}},\quad J_{-1/2}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\quad\text{и}\quad j_{-1/2}=\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому имеет место следующее следствие.

Следствие 1.2.6. *Пусть s — положительное число и $y:[0;1]\to\mathbb{R}$ абсолютно непрерывная функция такая, что $y(0)=0$. Тогда*

$$\frac{\pi^2}{4}\int_0^1|y(t)|\frac{dt}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\le\int_0^1\frac{|y'(t)|}{t}\frac{dt}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi}{2}t\right)}-\frac{s\pi^2}{4}\int_0^1|y'(t)|R_{s,1/2}(t)dt,$$

где

$$R_{s,1/2}(t)=\int_t^1\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)}{\sin^{s+1}\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)}d\tau.$$

Например, если $s=1$ и $s=3$, то соответственно получим

$$R_{1,1/2}(t)=-1+t+\frac{2}{\pi}\cot\left(\frac{\pi t}{2}\right)\quad\text{и}\quad R_{3,1/2}(t)=\frac{2}{3\pi}\cot^3\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Значит, имеет место

Следствие 1.2.7. *Для каждой непрерывно дифференцируемой функции $y:[0;1]\to\mathbb{R}$ такой, что $y(0)=0$, имеют место неравенства*

$$\int_0^1|y(t)|dt\le\frac{4}{\pi^2}\int_0^1\frac{|y'(t)|}{t}dt-\int_0^1|y'(t)|\left(t-1+\frac{2}{\pi}\cot\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)dt,$$

$$\int_0^1|y(t)|\frac{dt}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\le\frac{4}{\pi^2}\int_0^1\frac{|y'(t)|}{t}\frac{dt}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}-\frac{2}{\pi}\int_0^1|y'(t)|\cot^3\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt.$$

Теперь рассмотрим случай когда $\Phi_q(t)=F_{0,1,q}(t)$ и $K=2\mu\in[0,1)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.3. *Пусть $y : [0;1] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^{1/2+s/2} \in L^1[0,1]$. Предположим также, что s и q — положительные числа, $\mu \in [0,1/2)$ и*

$$\Phi_q(t) := \sqrt{t} J_0\left(\lambda_0\left(q\right) t^{q/2}\right).$$

Тогда если $s \in (0,1]$, то

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} + \frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} - s\mu^2\right)\int_0^1 \frac{|y'(t)|}{\Phi_q^{s-1}(t)}\frac{dt}{t} + s\mu^2\int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|}{\Phi_q^{s-1}(t)}dt - \frac{\mu}{J_0^{s-1}(\lambda_0(q))}\int\limits_0^1 |y'(t)|dt.$$

Если $s > 1$, то

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} + \frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4}\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t}\left(\frac{1}{2\Phi_q^{s-1}(t)} - \frac{s\mu^2}{J_0^{s-1}(\lambda_0(q))}\right)dt + \frac{s\mu^2-\mu}{J_0^{s-1}(\lambda_0(q))}\int\limits_0^1 |y'(t)|dt,$$

где $\lambda_0 = \lambda_0(q)$ — первый положительный корень уравнения

$$(1-2\mu)J_0\left(\lambda_0\right) + q\lambda_0 J_0'\left(\lambda_0\right) = 0, \quad \lambda_0 \in (0, j_0).$$

Доказательство. Используя неравенство $|y(t)| \leq \int_0^t |y'(\tau)|d\tau$ и меняя порядок интегрирования в повторных интегралах, получим

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} + \frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \leq \int\limits_0^1 |y'(\tau)|T(\tau)d\tau,$$

где

$$T(\tau) = \int\limits_\tau^1 \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4t^{2-q}}\right)\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}.$$

Известно, что функция Φ_q удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Phi_q''(t) + \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4t^{2-q}}\right)\Phi_q(t) = 0.$$

Следовательно,

$$T(\tau) = -\int\limits_\tau^1 \frac{\Phi_q''(t)}{\Phi_q^s(t)}dt = -\int\limits_\tau^1 \left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q^s(t)}\right)'dt - s\int\limits_\tau^1 \frac{\Phi_q'^2(t)}{\Phi_q^{s+1}(t)}dt = \frac{\Phi_q'(\tau)}{\Phi_q^s(\tau)} - \frac{\Phi_q'(1)}{\Phi_q^s(1)} - s\int\limits_\tau^1 \frac{\Phi_q'^2(t)}{\Phi_q^{s+1}(t)}dt.$$

Далее получим верхние оценки T. Так как функция $\tau\Phi_q'(\tau)/\Phi_q(\tau)$ возрастает на отрезке $[0,1]$ и

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\tau\Phi_q'(\tau)}{\Phi_q(\tau)}=\frac{1}{2},$$

получим

$$\frac{\Phi_q'(\tau)}{\Phi_q^s(\tau)}\leq\frac{1}{2\tau\Phi_q^{s-1}(\tau)}\quad\text{и}\quad\frac{\Phi_q'^2(\tau)}{\Phi_q^{s+1}(\tau)}\geq\frac{\Phi_q'^2(1)}{\Phi_q^2(1)}\frac{1}{\tau^2\Phi_q^{s-1}(\tau)}.$$

Таким образом, используя определение постоянной λ_0, имеем

$$T(\tau)\leq\frac{1}{2\tau\Phi_q^{s-1}(\tau)}-\frac{\mu}{\Phi_q^{s-1}(1)}-s\mu^2\int_\tau^1\frac{1}{t^2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $0<s\leq 1$. Так как $\Phi_q'(\tau)>0$ (см., например, [59]), в этом случае функция $\Phi_q^{1-s}(\tau)$ — убывающая. Следовательно,

$$T(\tau)\leq\frac{1}{2\tau\Phi_q^{s-1}(\tau)}-\frac{\mu}{\Phi_q^{s-1}(1)}+\frac{s\mu^2}{\Phi_q^{s-1}(\tau)}\left(1-\frac{1}{\tau}\right).$$

Таким образом,

$$T(\tau)\leq\frac{1}{\tau\Phi_q^{s-1}(\tau)}\left(\frac{1}{2}-s\mu^2\right)+\frac{s\mu^2}{\Phi_q^{s-1}(\tau)}-\frac{\mu}{\Phi_q^{s-1}(1)}.$$

Случай 2: $s>1$. В этом случае функция $\Phi_q^{1-s}(\tau)$ — возрастающая. Следовательно,

$$T(\tau)\leq\frac{1}{2\tau\Phi_q^{s-1}(\tau)}-\frac{\mu}{\Phi_q^{s-1}(1)}+\frac{s\mu^2}{\Phi_q^{s-1}(1)}\left(1-\frac{1}{\tau}\right).$$

Таким образом,

$$T(\tau)\leq\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{2\Phi_q^{s-1}(\tau)}-\frac{s\mu^2}{\Phi_q^{s-1}(1)}\right)+\frac{1}{\Phi_q^{s-1}(1)}\left(s\mu^2-\mu\right),$$

что завершает доказательство теоремы 1.2.3. □

Следствие 1.2.8. *Предположим, что q — положительное число, $\mu\in[0,1/2)$ и*

$$\Phi_q(t):=\sqrt{t}J_0(\lambda_0(q)t^{q/2}).$$

Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $y:[0;1]\to\mathbb{R}$ такой, что $y(0)=0$ и $y'(t)/t\in L^1(0,1)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{4}\int_0^1\frac{|y(t)|}{t^2}dt+\frac{q^2\lambda_0^2(q)}{4}\int_0^1\frac{|y(t)|}{t^{2-q}}dt\leq\left(\frac{1}{2}-\mu^2\right)\int_0^1\frac{|y'(t)|}{t}dt+(\mu^2-\mu)\int_0^1|y'(t)|dt,$$

где константа $\lambda_0=\lambda_0(q)$ — первое положительное решения уравнения

$$(1-2\mu)J_0(\lambda_0)+q\lambda_0J_0'(\lambda_0)=0\quad\text{и}\quad\lambda_0\in(0,j_0).$$

Теперь мы получим аналогичные утверждения для функции $\Phi_{\nu,q}(t)=F_{\nu,1,q}(t)$ при $K=2\mu$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.4. *Пусть* $y : [0;1] \to \mathbb{R}$ *— абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям* $y(0) = 0$ *и* $t^{\frac{1-s}{2}(q\nu+1)-1} y'(t) \in L^1(0,1)$, *и пусть также* s, ν *и* q *— положительные числа,* $\mu \in \left[0, \frac{1+\nu q}{2}\right]$, *и*

$$\Phi_{\nu,q}(t) := \sqrt{t} J_\nu(\lambda_\nu(q) t^{q/2}).$$

Тогда если $0 < s \le 1$, *то*

$$\frac{1-\nu^2 q^2}{4} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2} \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(q)}{4} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}} \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} \le$$
$$\le \left(\frac{1+\nu q}{2} - s\mu^2\right) \int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|}{t} \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} + s\mu^2 \int\limits_0^1 |y'(t)| \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} - \frac{\mu}{J_\nu^{s-1}(\lambda_\nu(2/q))} \int\limits_0^1 |y'(t)| dt.$$

Если $s > 1$, *то*

$$\frac{1-\nu^2 q^2}{4} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2} \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(q)}{4} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}} \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} \le$$
$$\le \int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|}{t} \left(\frac{1+\nu q}{2} - s\mu^2 \frac{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)}{J_\nu^{s-1}(\lambda_\nu)}\right) \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} + \frac{s\mu^2 - \mu}{J_\nu^{s-1}(\lambda_\nu)} \int\limits_0^1 |y'(t)| dt,$$

где $\lambda_\nu = \lambda_\nu(q)$ *— первый положительный корень уравнения*

$$(1-2\mu) J_\nu(\lambda_\nu) + q\lambda_\nu J_\nu'(\lambda_\nu) = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_\nu \in (0, j_\nu).$$

Доказательство. Используя неравенство $|y(t)| \le \int_0^t |y'(\tau)| d\tau$ и меняя порядок интегрирования в повторных интегралах, получим

$$\frac{1-\nu^2 q^2}{4} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2} \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} + \frac{q^2 \lambda_0^2(q)}{4} \int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}} \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} \le \int\limits_0^1 |y'(\tau)| T(\tau) d\tau,$$

где

$$T(\tau) = \int\limits_\tau^1 \left(\frac{1-\nu^2 q^2}{4t^2} + \frac{q^2 \lambda_0^2(q)}{4t^{2-q}}\right) \frac{dt}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)}.$$

Известно, что функция $\Phi_{\nu,q}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$t^2 \Phi_{\nu,q}''(t) + \left(\frac{1-\nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2 \lambda_0^2(q)}{4t^{-q}}\right) \Phi_{\nu,q}(t) = 0.$$

Следовательно,

$$T(\tau) = -\int\limits_\tau^1 \frac{\Phi_{\nu,q}''(t)}{\Phi_{\nu,q}^s(t)} dt = -\int\limits_\tau^1 \left(\frac{\Phi_{\nu,q}'(t)}{\Phi_{\nu,q}^s(t)}\right)' dt - s \int\limits_\tau^1 \frac{\Phi_{\nu,q}'^2(t)}{\Phi_{\nu,q}^{s+1}(t)} dt = \frac{\Phi_{\nu,q}'(\tau)}{\Phi_{\nu,q}^s(\tau)} - \frac{\Phi_{\nu,q}'(1)}{\Phi_{\nu,q}^s(1)} - s \int\limits_\tau^1 \frac{\Phi_{\nu,q}'^2(t)}{\Phi_{\nu,q}^{s+1}(t)} dt.$$

Оценим $T(\tau)$. Так как функция $\tau \Phi_{\nu,q}'(\tau) / \Phi_{\nu,q}^s(\tau)$ убывает на отрезке $[0,1]$ и

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\tau \Phi_{\nu,q}'(\tau)}{\Phi_{\nu,q}(\tau)} = \frac{1+\nu q}{2},$$

мы получим
$$\frac{\Phi'_{\nu,q}(\tau)}{\Phi^{s}_{\nu,q}(\tau)} \le \frac{1+\nu q}{2\tau\Phi^{s-1}_{\nu,q}(\tau)} \quad \text{и} \quad \frac{\Phi'^2_{\nu,q}(\tau)}{\Phi^{s+1}_{\nu,q}(\tau)} \ge \frac{\Phi'^2_{\nu,q}(1)}{\Phi^{2}_{\nu,q}(1)}\frac{\Phi^{1-s}_{\nu,q}(\tau)}{\tau^2}.$$
Используя определение константы λ_ν, имеем
$$T(\tau) \le \frac{1+\nu q}{2\tau\Phi^{s-1}_{\nu,q}(\tau)} - \frac{\mu}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(1)} - s\mu^2 \int\limits_{\tau}^{1} \frac{1}{t^2}\frac{dt}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(t)}.$$

По аналогии с доказательством предыдущей теоремы имеем два случая.

Случай 1: $0 < s \le 1$. В этом случае $\Phi^{s-1}_{\nu,q}(\tau)$ — убывающая функция. Следовательно,
$$T(\tau) \le \frac{1+\nu q}{2\tau\Phi^{s-1}_{\nu,q}(\tau)} - \frac{\mu}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(1)} + \frac{s\mu^2}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(\tau)}\left(1-\frac{1}{\tau}\right).$$
Таким образом,
$$T(\tau) \le \left(\frac{1+\nu q}{2} - s\mu^2\right)\frac{1}{\tau\Phi^{s-1}_{\nu,q}(\tau)} + \frac{s\mu^2}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(\tau)} - \frac{\mu}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(1)}.$$

Случай 2: $s > 1$. Имеем
$$T(\tau) \le \frac{1+\nu q}{2\tau\Phi^{s-1}_{\nu,q}(\tau)} - \frac{\mu}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(1)} + \frac{s\mu^2}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(1)}\left(1-\frac{1}{\tau}\right).$$
Следовательно,
$$T(\tau) \le \frac{1}{\tau}\left(\frac{1+\nu q}{2}\frac{1}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(\tau)} - \frac{s\mu^2}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(1)}\right) + \frac{1}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(1)}\left(s\mu^2-\mu\right),$$
что завершает доказательство теоремы 1.2.4. □

Следствие 1.2.9. *Пусть s, ν и q положительны, и $\Phi_{\nu,q}(t) := \sqrt{t}J_\nu(\lambda_\nu(q)t^{q/2})$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0;1] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $t^{\frac{1-s}{2}(q\nu+1)-1}y'(t) \in L^2[0,1]$ выполнено неравенство*
$$\frac{1-\nu^2q^2}{4}\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2}\frac{dt}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(t)} + \frac{q^2\lambda^2_\nu(q)}{4}\int_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}}\frac{dt}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(t)} \le \frac{1+\nu q}{2}\int_0^1 \frac{|y'(t)|}{t}\frac{dt}{\Phi^{s-1}_{\nu,q}(t)},$$
где константа $\lambda_\nu = \lambda_\nu(q)$ является первым положительным корнем уравнения
$$J_\nu(\lambda_\nu) + q\lambda_\nu J'_\nu(\lambda_\nu) = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_\nu \in (0, j_\nu).$$

Полагая в теореме 1.2.4 $\nu = 1/2$ получим следующее утверждение

Следствие 1.2.10. *Пусть s и q — положительные числа. Если y является абсолютно непрерывной на $[0,1]$ функцией такой, что $y(0) = 0$ и $t^{\frac{1-s}{4}(q+2)-1}y'(t) \in L^1(0,1)$, то*
$$\frac{4-q^2}{4}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^2}\left[t^{\frac{2-q}{4}}\sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s}dt + q^2c_q^2\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|}{t^{2-q}}\left[t^{\frac{2-q}{4}}\sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s}dt \le$$
$$\le (2+q)\int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|}{t}\left[t^{\frac{2-q}{4}}\sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s}dt,$$

где величина c_q — первый положительный корень уравнения

$$2qc_q\cos c_q-(q-2)\sin c_q=0 \quad \text{и} \quad c_q\in(0,\pi).$$

При $s=1$ и $\mu\to\frac{1+\nu q}{2}$ решение уравнение Лэмба $\lambda_\nu\to 0$. Поэтому получим следующее утверждение

Следствие 1.2.11. *Если y является абсолютно непрерывной на $[0,1]$ такой, что $y(0)=0$ и $y'/t\in L^1(0,1)$, то*

$$\int\limits_0^1\frac{|y(t)|}{t^2}dt\le\int\limits_0^1\frac{|y'(t)|}{t}dt-\int\limits_0^1|y'(t)|dt.$$

1.2.5 L_2-неравенства

В этом пункте мы получаем неравенство с точными константами, которые обобщают неравенства (0.0.7) и (0.0.9). Через $\lambda_\nu=\lambda_\nu(r)$ обозначим постоянную Лэмба, определяемую как первый положительный корень уравнения Лэмба

$$rJ_\nu\left(\lambda_\nu\right)+2\lambda_\nu J_\nu\left(\lambda_\nu\right)=0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.5. *Пусть λ_ν является константой Лэмба. Если s, q, r, m и ν положительны, y — абсолютно непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция такая, что $y(0)=0$ и $y'/t^{\frac{(q\nu+r)(s-1)}{4}+\frac{r-1}{2}}\in L^2[0,1]$, то*

$$\frac{r^2-\nu^2q^2}{4}\int\limits_0^1\frac{y^2(t)}{t^{r+1}}\frac{dt}{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)}+\frac{q^2\lambda^2_\nu(\frac{2r}{q})}{4}\int\limits_0^1\frac{y^2(t)}{t^{r-q+1}}\frac{dt}{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)}\le\frac{1}{s}\int\limits_0^1\frac{y'^2(t)}{t^{r-1}}\frac{dt}{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)}.$$

Если $y\not\equiv 0$ и $s\le\frac{r-\nu q}{r+\nu q}$, то неравенство является строгим. Если $s>\frac{r-\nu q}{r+\nu q}$, то равенство в неравенстве достигается на функции $y(t)=CF^m_{r,\nu,q}(t)$ с некоторой произвольной константой C.

Доказательство. Имеем

$$0\le P:=\int_0^1\frac{1}{t^{r-1}}\left(y'(t)-s\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}y(t)\right)^2\frac{1}{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)}dt=$$
$$=\int_0^1\frac{y'^2(t)}{t^{r-1}}\frac{dt}{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)}-s\int_0^1\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F^s_{\nu,r,q}(t)}\frac{dy^2(t)}{t^{r-1}}+s^2\int_0^1\frac{y^2(t)}{t^{r-1}}\frac{F'^2_{\nu,r,q}(t)}{F^{s+1}_{\nu,r,q}(t)}dt.$$

Интегрируя по частям и используя дифференциальное уравнение

$$t^2w''(t)+(1-r)tw'(t)+\left(\frac{r^2-\nu^2q^2}{4}+\frac{q^2\lambda^2_\nu(2r/q)}{t^{-q}}\right)w(t)=0,\quad t\in\mathbb{R},$$

решением которого является функция $F_{\nu,r,q}$, легко получим

$$P=\int_0^1 \frac{y'^2(t)}{t^{r-1}}\frac{dt}{F^{m-1}_{\nu,r,q}(t)}-s\frac{F'_{\nu,r,q}(t)y^2(t)}{t^{r-1}F^s_{\nu,r,q}(t)}\bigg|_0^1+s\int_0^1 y^2(t)\frac{t^2F''_{\nu,r,q}(t)+(1-r)xF'_{\nu,r,q}(t)}{F^s_{\nu,r,q}(t)}\frac{dt}{t^{r+1}}=$$

$$=\int_0^1 \frac{y'^2(t)}{t^{r-1}}\frac{dt}{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)}-s\frac{F'_{\nu,r,q}(t)y^2(t)}{t^{r-1}F^s_{\nu,r,q}(t)}\bigg|_0^1-s\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^{r+1}}\left(\frac{r^2-\nu^2q^2}{4}+\frac{q^2\lambda^2_\nu(2r/q)}{4t^{-q}}\right)\frac{dt}{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)}.$$

Известно, что $F'_{\nu,r,q}(1)=0$ (см. [59]).

Используя неравенство Коши-Шварца, для абсолютно непрерывной функции $y:[0,1]\to\mathbb{R}$, для которой $y(0)=0$, имеем

$$y^2(t)\le\left(\int_0^t |y'(\tau)|d\tau\right)^2=\frac{t^{\frac{(q\nu+r)(s-1)}{2}+r}}{\frac{(q\nu+r)(s-1)}{2}+r}\int_0^t \frac{|y'(\tau)|^2}{\tau^{\frac{(q\nu+r)(s-1)}{2}+r-1}}d\tau.$$

Это вместе с известными фактами

$$\lim_{t\to 0}\frac{tF'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}=\frac{r+\nu q}{2}\quad \text{и}\quad F_{\nu,r,q}(t)=\frac{\lambda^\nu_\nu(r,q)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}t^{\frac{\nu q+r}{2}}+o(t),\ \text{при } t\to 0^+.$$

дают

$$\lim_{t\to 0}\frac{F'_{\nu,r,q}(t)y^2(t)}{t^{r-1}F^s_{\nu,r,q}(t)}=0.$$

Таким образом,

$$P=\int_0^1 \frac{y'^2(t)}{t^{r-1}}\frac{dt}{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)}-s\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^{r+1}}\left(\frac{r^2-\nu^2q^2}{4}+\frac{q^2\lambda^2_\nu(2r/q)}{4t^{-q}}\right)\frac{dt}{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)}.$$

Ясно, что $P=0$ тогда и только тогда, когда $y(t)=CF^s_{\nu,r,q}(t)$ с некоторой константой C, в частности, $C=0$. Легко показать, что если

$$s>\frac{r-\nu q}{r+\nu q},$$

то

$$\frac{F^{s-1}_{\nu,r,q}(t)F'^2_{\nu,r,q}(t)}{t^{r-1}}\in L^1[0,1],$$

что завершает доказательство теоремы 1.2.5. □

§1.3 L_2-неравенства для веса Якоби

Данный параграф посвящен неравенствам для двух видов весовых функций — веса Якоби и веса, являющегося степенью функции $z(t)=t(2-t)$. Обратим внимание, что в оценках для веса Якоби стоит знак строго неравенства — это является существенным фактом при дальнейшем применении этих неравенств для расширения классов однолистных аналитических функций. В данном пункте мы также приведем наиболее интересные на наш взгляд следствия и рассмотрим некоторые частные случаи в виде примеров, сравним полученные оценки с известными неравенствами. В конце некоторых подпунктов в виде замечаний дадим возможное направление обобщения полученных результатов.

1.3.1 Неравенства на отрезке $[0,\rho]$

В этой части статьи мы рассмотрим неравенства с дополнительными слагаемыми для абсолютно непрерывной функции $y : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$. Полученные утверждения будем использовать для доказательства неравенств для веса Якоби.

Предположим, что $F(t) = z(t)^{p/2} J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3.1. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $p > 0, q > 0$ и $\nu \in [0, p/q]$, а y является абсолютно непрерывной функцией такой, что $y(0) = 0$ и $y(\cdot)z(\cdot)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{2}} \in L^1(0,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z^{p-1}(t)}dt \geq (p^2 - q^2\nu^2)\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1}(t)}dt + q^2\lambda_0^2 \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1-q}(t)}dt+$$
$$+\left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0 \frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^p(t)}dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ и константа $\lambda_0 = \sup\{\lambda : p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \geq 0\}$. Константа $p^2 - q^2\nu^2$ перед интегралом в первой строке неравенства является наилучшей из возможных.

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in (0, j_\nu)$, где j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν порядка ν. Используя метод интегрирование по частям, имеем

$$A := \int\limits_0^\rho \frac{1}{z(t)^{p-1}}\left(y'(t) - y(t)\frac{F'(t)}{F(t)}\right)^2 dt =$$

$$= \int\limits_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z(t)^{p-1}}dt - \int\limits_0^\rho \frac{F'(t)}{F(t)}\frac{dy^2(t)}{z(t)^{p-1}} + \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z(t)^{p-1}}\frac{F'^2(t)}{F^2(t)}dt =$$

$$= \int\limits_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z(t)^{p-1}}dt - \lim_{t\to\rho}\frac{F'(t)}{F(t)}\frac{y^2(t)}{z(t)^{p-1}} + \lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{F(t)}\frac{y^2(t)}{z(t)^{p-1}} + \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z(t)^{p-1}}\left(\frac{F''(t)}{F(t)} - (p-1)\frac{z'(t)}{z(t)}\frac{F'(t)}{F(t)}\right)dt.$$

Очевидно, что $A = 0$, если $y(t) = F(t) = z(t)^{p/2}J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})$.

Для функции Бесселя порядка ν и её производной J'_ν известны асимптотические поведения вблизи нуля

$$J_\nu(t) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^\nu \quad \text{при} \quad t \to 0$$

и

$$J'_\nu(t) \to \frac{1}{2\Gamma(\nu)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-1} \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

которые легко можно получить с использованием разложения функции Бесселя в ряд. Здесь через Γ обозначена гамма-функция Эйлера.

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0} z(t)\frac{F'(t)}{F(t)} = \lim_{t\to 0}(1-t)\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right) = p + \nu q.$$

Применяя неравенство Гёльдера и представление абсолютно непрерывной функции $y(t) = \int_0^t y'(\tau)d\tau$, имеем

$$y^2(t) \le \left(\int\limits_0^t |y'(\tau)|d\tau\right)^2 \le \int\limits_0^t z(\tau)^{p-1}d\tau \int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^2}{z(\tau)^{p-1}}d\tau \le \frac{z(t)^p}{p}\int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^2}{z(\tau)^{p-1}}d\tau.$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to 0}\frac{y^2(t)}{z(t)^{p-1}}\frac{F'(t)}{F(t)} = 0.$$

Используя положительность функции функции $z(t)F'(t)/F(t)$ при $t \in [0,\rho]$ (см. следствие 1.2.1), имеем

$$\lim_{t\to\rho}\frac{F'(t)}{F(t)}\frac{y^2(t)}{z(t)^{p-1}} \ge 0.$$

То есть при дальнейших оценках сверху мы можем пренебречь эти слагаемым.

Далее, используя лемму 1.2.1, получим

$$\frac{F''(t)}{F(t)} - (p-1)\frac{z'(t)}{z(t)}\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{z''(t)}{2z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right) - \frac{z'(t)^2}{4z(t)^2}\left(p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right) - \frac{1-z(t)}{z(t)^2}\left(p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{z(t)^2}\left(p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}}\right) - \frac{1}{z(t)}\left(-p^2 + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z(t)^{p-1}}dt \ge \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z(t)^{p+1}}\left(p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}}\right)dt +$$

$$+ \int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|^2}{z^p(t)}\left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q^2\lambda^2 z(t)^q + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}\right).$$

Пусть теперь

$$h_\lambda(t) := p - p^2 + q^2\nu^2 - q^2\lambda^2 z(t)^q + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(t)^{q/2}\right)}.$$

Используя следствие 1.2.1, получим, что функция $h_\lambda(t)$ является убывающей и при этом

$$\inf_{t\in[0,\rho]} h_\lambda(t) = h_\lambda(\rho) > h_\lambda(1) = \left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J'_\nu(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}\right).$$

Теперь константу λ_0 будем искать как $\sup\{\lambda : h_\lambda(1) \ge 0\}$, т.е. λ_0 — это наибольшее положительное число, для которого $h_\lambda(1)$ положителен.

Такой выбор λ_0 позволит считать, что второй интеграл является положительным, и кроме того, получим

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} = \frac{(1-\rho)}{z(\rho)}\left(p + q\lambda z(\rho)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu\left(\lambda z(\rho)^{q/2}\right)}{J_\nu\left(\lambda z(\rho)^{q/2}\right)}\right) \geq \frac{(1-\rho)}{z(\rho)}\left(h_\lambda(1) + p^2 - q^2\nu^2 + q^2\lambda^2\right) \geq 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z(t)^{p-1}}dt \geq \int_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1}(t)}\left(p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda_0^2}{z^{-q}(t)}\right)dt + h_\lambda(1)\int_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^p(t)}dt.$$

Используя известное (см. например, [26]) равенство для функции Бесселя

$$\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} = -\frac{\nu}{z} + \frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)},$$

получим константу из утверждения теоремы

$$h_\lambda(1) = \left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right).$$

При $p \in (0,1]$ и $q \in (0, p+1]$ точность константы $p + \nu q$ следует из сравнения неравенства теоремы 1.3.1 с неравенством Авхадиева-Виртса (0.0.8). Действительно, в этом случае из теоремы несложно получить следующую оценку

$$\int_0^\rho \frac{y'^2(t)}{t^{p-1}}dt \geq \frac{p^2 - q^2\nu^2}{4}\int_0^\rho \frac{y^2(t)}{t^{p+1}}dt + \frac{q^2\lambda_0^2}{2^{2-q}}\int_0^\rho \frac{y^2(t)}{t^{p+1-q}}dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_0^\rho \frac{y^2(t)}{t^p}dt$$

с константой $(p^2 - q^2\nu^2)/4$. То есть, если в нашем неравенстве константа будет больше чем $p^2 - q^2\nu^2$, то мы получим противоречие с неулучшаемым неравенством Авхадиева-Виртса (0.0.8). □

Замечание 1.3.1. Мы можем выбирать λ_0 как максимальное число, при котором $h_\lambda(\rho) \geq 0$. При этом константа перед интегралом в дополнительном слагаемом неравенства теоремы 1.3.1 уже будет зависеть от величины ρ, что характерно для неравенств Пуанкаре-Фридрихса.

При $h_\lambda(1) = 0$ из теоремы 1.3.1 получим следующее утверждение.

Следствие 1.3.1. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $p > 0, q > 0$ и $\nu \in [0, p/q]$, а функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0,\rho]$, такой что $y(0) = 0$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z^{p-1}(t)}dt \geq (p^2 - q^2\nu^2)\int_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1}(t)}dt + q^2\lambda_0^2\int_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1-q}(t)}dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ *и константа* λ_0 *находится как единственное решение следующего уравнения*

$$p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0.$$

Если в теореме 1.3.1 перейдем к пределу при $\lambda \to 0$, то получим

Следствие 1.3.2. *Пусть* $\rho \in (0,1)$, $p > 0, q > 0$ *и* $\nu \in [0, p/q]$, *а функция* $y : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ *является абсолютно непрерывной, такой, что* $f(0) = 0$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z^{p-1}(t)}dt \geq (p^2 - q^2\nu^2)\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{p+1}(t)}dt + (p - p^2 + q^2\nu^2 + q\nu)\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^p(t)}dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$.

При $h_\lambda(1) = 0$, $p = 1$, $q = \frac{1}{\nu}$ теорема 1.3.1 дает

Следствие 1.3.3. *Пусть* $\rho \in (0,1)$, $q > 0$ *и* $\nu = 1/q$, *а функция* y *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[0,\rho]$, *такой, что* $y(0) = 0$ *и* $y'(t) \in L^2(0,\rho)$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_0^\rho y'^2(t)dt \geq q^2\lambda_0^2\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^{2-q}(t)}dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ *и константа* λ_0 *находится как решение следующего уравнения*

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0.$$

Если $p = \nu$ и $q = 1$, то из следствия 1.3.1 имеем

Следствие 1.3.4. *Пусть* $\rho \in (0,1)$ *и* $\nu > 0$, *а функция* y *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[0,\rho]$, *такой, что* $y(0) = 0$ *и* $z^{(1-\nu)/2}(t)y'(t) \in L^2(0,\rho)$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z^{\nu-1}(t)}dt \geq \frac{\lambda_0 J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^\nu(t)}dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ *и константа* λ_0 *находится как решение следующего уравнения*

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0.$$

Из последнего следствия при $\lambda_0 \to 0$ получаем

Следствие 1.3.5. *Пусть* $\rho \in (0,1)$ *и* $\nu > 0$, *а функция* y *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[0,\rho]$, *такой, что* $y(0) = 0$ *и* $z^{(1-\nu)/2}y' \in L_2(0,\rho)$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{y'^2(t)}{z(t)^{\nu-1}}dt \geq 2\nu\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z(t)^\nu}dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$.

Далее рассмотрим некоторые конкретные примеры.

Пример 1.3.1. *Пусть* $p = 1$ *и* $\nu = 0$. *Тогда из следствия 1.3.1 при* $\rho \to 1$ *получим следующее известное неравенство (см. [30]) с точной константой*

$$\int\limits_0^1 y'^2(t)dt > \int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2(2-t)^2}dt.$$

Пример 1.3.2. *Пусть* $p = 1, \nu = 1$ *и* $q = 1$. *Тогда из следствия 1.3.1 при* $\rho \to 1$ *получим следующее известное неравенство (см. [30]) с точной константой*

$$\int\limits_0^1 y'^2(t)dt \geq 2\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t(2-t)}dt.$$

1.3.2 Неравенства для веса Якоби при $q \in [0, 1]$

Теперь получим неравенства для веса Якоби при $q \in [0, 1]$. Будем рассматривать случай $p = 1$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $\rho \in (0, 1)$, $q \in (0, 2]$ *и* $\nu \in [0, 1/q]$, *а функция* y *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[-\rho, \rho]$, *такой что* $y(-\rho) = y(\rho) = 0$ *и* $y'(t) \in L^2(-\rho, \rho)$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t)dt > (1-q^2\nu^2)\int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{|y(t)|^2}{(1-t^2)^2}dt + q^2\lambda_0^2\int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{|y(t)|^2}{(1-t^2)^{2-q}}dt +$$

$$+\left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{|y(t)|^2}{1-t^2}dt,$$

где $\lambda_0 = \sup\{\lambda : q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \geq 0\}$. *Постоянная* $(1 - q^2\nu^2)$ *является наилучшей из возможных.*

Доказательство. При $p = 1$ как следствие теоремы 1.3.1 имеем

$$\int\limits_0^{\rho} y'^2(t)dt \geq (1-q^2\nu^2)\int\limits_0^{\rho} \frac{y^2(t)}{z^2(t)}dt + q^2\lambda_0^2\int\limits_0^{\rho} \frac{y^2(t)}{z^{2-q}(t)}dt +$$

$$+\left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int\limits_0^{\rho} \frac{y^2(t)}{z(t)}dt.$$

Применяя это неравенство к двум функциям $y(t) = y(t - \rho)$ и $y(t) = y(\rho - t)$, соответственно

получим

$$\int\limits_{-\rho}^{0} y'^2(\tau)d\tau \geq (1-q^2\nu^2)\int\limits_{-\rho}^{0} \frac{y^2(\tau)}{z^2(\tau+\rho)}d\tau + q^2\lambda_0^2\int\limits_{-\rho}^{0} \frac{y^2(\tau)}{z^{2-q}(\tau+\rho)}d\tau+$$
$$+\left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int\limits_{-\rho}^{0} \frac{y^2(\tau)}{z(\tau+\rho)}d\tau,$$

и

$$\int\limits_{0}^{\rho} y'^2(\tau)d\tau \geq (1-q^2\nu^2)\int\limits_{0}^{\rho} \frac{y^2(\tau)}{z^2(\rho-\tau)}d\tau + q^2\lambda_0^2\int\limits_{0}^{\rho} \frac{y^2(\tau)}{z^{2-q}(\rho-\tau)}d\tau+$$
$$+\left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_{0}^{\rho} \frac{y^2(\tau)}{z(\rho-\tau)}d\tau.$$

Несложно показать, что если $\rho \in (0,1)$ и $\tau \in [-\rho, 0]$, то

$$z(\tau+\rho) = (\tau+\rho)(2-\rho-\tau) < 1-\tau^2$$

и что если $\rho \in (0,1)$ и $\tau \in [0,\rho]$, то

$$z(\rho-\tau) = (\rho-\tau)(2-\rho+\tau) < 1-\tau^2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\rho}^{0} y'^2(\tau)d\tau > (1-q^2\nu^2)\int\limits_{-\rho}^{0} \frac{y^2(\tau)}{(1-\tau^2)^2}dt + q^2\lambda_0^2\int\limits_{-\rho}^{0} \frac{y^2(\tau)}{(1-\tau^2)^{2-q}}d\tau+$$
$$+\left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int\limits_{-\rho}^{0} \frac{y^2(\tau)}{1-\tau^2}d\tau,$$

и

$$\int\limits_{0}^{\rho} y'^2(\tau)d\tau > (1-q^2\nu^2)\int\limits_{0}^{\rho} \frac{y^2(\tau)}{(1-\tau^2)^2}d\tau + q^2\lambda_0^2\int\limits_{0}^{\rho} \frac{y^2(\tau)}{(1-\tau^2)^{2-q}}d\tau+$$
$$+\left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_{0}^{\rho} \frac{y^2(\tau)}{1-\tau^2}d\tau.$$

Суммируя последние два неравенства, получим утверждения теоремы.

Точность константы $1-q^2\nu^2$ обосновывается точно так же как и в теореме 1.3.1. □

Замечание 1.3.2. Отметим, что теорему 1.3.2 можно обобщить на случай $p \in (0, 1]$.

Из теоремы 1.3.2 несложно получить следующие следствия.

Следствие 1.3.6. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $q > 0$ и $\nu \in [0, 1/q]$, а функция y является абсолютно непрерывной на $[-\rho, \rho]$ и такой, что $y(-\rho) = y(\rho) = 0$ и $y \in L^2(-\rho, \rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t)dt > (1 - \nu^2 q^2) \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^2} dt + q^2 \lambda_0^2 \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}} dt,$$

где константа λ_0 находится как решение следующего уравнения

$$q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu).$$

Здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν.

Следствие 1.3.7. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $q > 0$ и $\nu = 1/q$, а функция y является абсолютно непрерывной на $[-\rho, \rho]$ и такой, что $y(-\rho) = y(\rho) = 0$ и $y \in L^2(-\rho, \rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t)dt > \lambda_q \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}} dt,$$

где $\lambda_q = q^2\lambda_0^2$, а константа λ_0 находится как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu). \tag{1.3.1}$$

Здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν.

1.3.3 Неравенства для веса Якоби при $q \in [1, 2]$

Далее рассмотрим неравенства для веса Якоби при $q \in [1, 2]$. Следующие результаты мы будем использовать при доказательстве достаточных условий однолистности.

Справедливо утверждение.

Лемма 1.3.1. *Если $q \in [1, 2]$ и $\rho \in (0, 1]$, то для любой абсолютно непрерывной на $[0, \rho]$ функции y такой, что $y(0) = 0$, справедливо неравенство*

$$\int\limits_{0}^{\rho} \frac{y^2(t)}{t^{2-q}(2-t)^{2-q}} dt \le \kappa'(q, \rho) \int\limits_{0}^{\rho} y'^2(t) dt,$$

где постоянная

$$\kappa'(q, \rho) = \sqrt{2} \left(\int\limits_{0}^{\rho} \left(\int\limits_{t}^{\rho} \frac{d\tau}{\tau^{2-q}(2-\tau)^{2-q}} \right)^2 t dt \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Пользуясь неравенством $|y(t)| \leq \int_0^t |y'(\tau)|d\tau$ и изменением порядка интегрирования в повторных интегралах, имеем

$$\int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|}{t^{2-q}(2-t)^{2-q}}dt \leq \int\limits_0^\rho |y'(\tau)| \int\limits_\tau^\rho \frac{dt}{t^{2-q}(2-t)^{2-q}}d\tau.$$

Применим последнюю оценку к функции $y(t) = g^2(t)$. Получим

$$\int\limits_0^\rho \frac{g^2(t)}{t^{2-q}(2-t)^{2-q}}dt \leq 2\int\limits_0^\rho |g(\tau)||g'(\tau)| \int\limits_\tau^\rho \frac{dt}{t^{2-q}(2-t)^{2-q}}d\tau.$$

Теперь используя известное неравенство Опиала (см. [75], [78]),

$$\int\limits_a^b s(t)|g(t)||g'(t)|dt \leq \kappa \int\limits_a^b |g'(t)|^2 dt,$$

справедливое для любой абсолютно непрерывной функции g такой, что $g(0) = 0$, и неотрицательной измеримой на $(0, \rho)$ весовой функции s, для которой величина

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int\limits_a^b s^2(t)(t-a)dt \right)^{1/2} < \infty,$$

где

$$s(t) = \int\limits_t^\rho \frac{d\tau}{\tau^{2-q}(2-\tau)^{2-q}},$$

имеем

$$\int\limits_0^\rho \frac{g^2(t)}{t^{2-q}(2-t)^{2-q}}dt \leq \kappa'(q,\rho) \int\limits_0^\rho g'^2(t)dt.$$

Этим завершается доказательство леммы. $\square$

Также справедлива следующая теорема

Теорема 1.3.3. *Если $q \in [1,2]$ и $\rho \in (0,1)$, то для любой абсолютно непрерывной на отрезке $[-\rho, \rho]$ функции y такой, что $y(-\rho) = y(\rho) = 0$, справедливо неравенство*

$$\int\limits_{-\rho}^\rho \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}dt < \kappa' \int\limits_{-\rho}^\rho y'^2(t)dt,$$

где постоянная

$$\kappa' = \kappa'(q) = \frac{1}{2} \left(\int\limits_0^1 B_t^2(1/2, q-1) \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt \right)^{1/2},$$

а $B_t(x,y) = \int_0^t \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1}d\tau$ — неполная бета-функция.

Доказательство. Учитывая монотонное возрастание функции $\kappa'(q,\rho)$ по переменной ρ, заменами переменных можем показать, что

$$\kappa'(q,\rho) \le \kappa'(q) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t \tau^{-1/2}(1-\tau)^{q-2}d\tau\right)^2 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt\right)^{1/2}.$$

Действительно,

$$\kappa'(q,\rho) = \left(2\int\limits_0^\rho \left(\int\limits_t^\rho \frac{dx}{x^{2-q}(2-x)^{2-q}}\right)^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(2\int\limits_0^1 \left(\int\limits_t^1 \frac{dx}{x^{2-q}(2-x)^{2-q}}\right)^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замены переменных $x = 1-\tau$, а затем $\tau = \sqrt{y}$. Имеем

$$\kappa'(q,\rho) \le \left(2\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-t} \frac{d\tau}{(1-\tau^2)^{2-q}}\right)^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{(1-t)^2} \frac{dy}{\sqrt{y}(1-y)^{2-q}}\right)^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Заменой переменной $z = (1-t)^2$ во внешнем интеграле получим

$$\kappa'(q,\rho) \le \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^z \frac{dy}{\sqrt{y}(1-y)^{2-q}}\right)^2 \frac{1-\sqrt{z}}{\sqrt{z}}dz\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применим доказанное в лемме 1.3.1 неравенство для функции $y(t) = g(t-\rho)$ и $y(t) = g(\rho-t)$. Соответственно получим

$$\int\limits_{-\rho}^0 \frac{g^2(t)}{(2+t)^{2-q}(2-\rho-t)^{2-q}}dt < \kappa'(q)\int\limits_{-\rho}^0 g'^2(t)dt, \int\limits_0^\rho \frac{g^2(t)}{(\rho-t)^{2-q}(2-\rho+t)^{2-q}}dt < \kappa'(q)\int\limits_0^\rho g'^2(t)dt.$$

Очевидно, что если $\rho \in (0,1)$ и $t \in [-\rho, 0]$, то

$$(t+\rho)(2-\rho-t) < 1-t^2$$

и что если $\rho \in (0,1)$ и $t \in [0,\rho]$, то

$$(\rho-t)(2-\rho+t) < 1-t^2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\rho}^0 \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}dt \le \kappa'(q)\int\limits_{-\rho}^0 g'^2(t)dt, \quad \int\limits_0^\rho \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}dt \le \kappa'(q)\int\limits_0^\rho g'^2(t)dt.$$

Суммируя два последних неравенства, получим утверждение теоремы. $\square$

1.3.4 Сравнение констант

Ф.Г. Авхадиев в статье [21] доказал неравенство

$$C(q)\int\limits_{-\rho}^{\rho}\frac{|y(t)|^2}{(1-t^2)^{2-q}}dt<\int\limits_{-\rho}^{\rho}y'^2(t)dt,$$

где

$$C(q)=\begin{cases}2^{4-3q}\pi^{2(q-1)}, & q\in[1,2]\\ 2^q, & q\in[0,1].\end{cases}$$

Теперь мы покажем, что постоянная $\lambda_q > C(q)$ при $q\in(0,q_0]$, где q_0 — некоторое положительной число. Для этого в уравнении (1.3.1) мы положим, что $\lambda=\frac{2^{q/2}}{q}$. Мы можем взять такое значение, так как при $\nu=1/q$ имеет место двусторонняя оценка

$$\frac{2^{q/2}}{q}\le\sqrt{\nu(\nu+2)}<j_\nu,$$

в котором первое неравенство легко проверяется, а насчет второго неравенства см. [59].

При таком выборе λ мы получим, что уравнение

$$-2^q+2^{q/2}\frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}=0$$

имеет решение $q_0\approx 0.5487159937198\,(\approx\frac{\pi^2}{18})$. Следовательно, используя убывание функции $-q^2\lambda^2+q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}$, мы получим

$$-2^q+2^{q/2}\frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}>0$$

при $q\in(0,q_0)$. Отсюда делаем вывод, что константа $\lambda_q>2^q$ при $q\in(0,q_0)$ и $\lambda_{q_0}=2^{q_0}$. Известно, что постоянная $C(0)=1$ является точной, а мы получили, что

$$\lambda_q\ge C(q)$$

при любом $q\in(0,q_0]$. Следовательно, $\lambda_q\to 1$ при $q\to 0$.

Пусть теперь $q\in[q_0,1)$ и $\alpha\in(0,q_0)$. Тогда неравенство Гёльдера и известное неравенство

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho}\frac{y^2(t)}{1-t^2}dt<\frac{1}{2}\int\limits_{-\rho}^{\rho}y'^2(t)dt$$

дает

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho}\frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}dt\le\int\limits_{-\rho}^{\rho}\left(\frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-\alpha}}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}}\left(\frac{y^2(t)}{1-t^2}\right)^{\frac{q-\alpha}{1-\alpha}}dt<\lambda_\alpha^{-\frac{1-q}{1-\alpha}}2^{-\frac{q-\alpha}{1-\alpha}}\int\limits_{-\rho}^{\rho}y'^2(t)dt,$$

где λ_α — константа из следствия 1.3.7 при $\alpha \in (0, q_0)$. Ясно, что

$$\left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q > 2^q$$

при любом фиксированном $q \in [q_0, 1)$ и для любого $\alpha \in (0, q_0)$. Непонятно, как найти конкретное $\alpha_0 \in (0, q_0)$, для которого постоянная $\left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q$ будет наибольшей. Если $q \to 1$, то константа в нашем неравенстве будет равна 2.

Аналогичные рассуждения показывают, что $q^2\lambda_q^2$ больше постоянной $(1+q)/2$. А именно, если положим, что $\lambda_0 = \frac{1}{q}\sqrt{\frac{1+q}{2}}$, то получим, что при любом $q \in (0, 1]$ функция

$$-q^2\lambda_0^2 + q\lambda \frac{J_{1/q-1}\lambda_0}{J_{1/q}\lambda_0} > 0.$$

Этот факт мы будем использовать при сравнение классов однолистных функций, полученных нами в главе 4, с классом однолистных функций, полученным С. Ямашито в [172].

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3.4. *Пусть $\rho \in (0, 1)$, $q > 0$ и $\nu = 1/q$, а функция y является абсолютно непрерывной на $[-\rho, \rho]$ такой, что $y(-\rho) = y(\rho) = 0$ и $y \in L^2(-\rho, \rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$P_q \int_{-\rho}^{\rho} \frac{|y(t)|^2}{(1-t^2)^{2-q}} dt < \int_{-\rho}^{\rho} y'^2(t) dt,$$

где постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & , \quad \text{при} \quad q = 0, \\ \lambda_0^2 q^2 & , \quad \text{при} \quad q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_0^2\alpha^2}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & , \quad \text{при} \quad q \in (q_0, 1], \\ 2 & , \quad \text{при} \quad q = 1, \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа λ_0 определяется как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q + 2^{q/2} \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)} = 0.$$

Здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν.

Далее рассмотрим некоторые конкретные примеры.

Пример 1.3.3. *Пусть $p = 1, \nu = 3$ и $q = 1/3$. Тогда уравнение (1.3.1) примет вид*

$$-\frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda}{3}\frac{J_2(\lambda)}{J_3(\lambda)} = 0.$$

Численное решение дает $\lambda_0 = 3.51832$, то есть $\frac{\lambda_0^2}{9} = 1.3754$. Следовательно,

$$1.3754 \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y(t)^2}{(1-t^2)^{5/3}} dt \leq \int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t) dt.$$

В соответствующем неравенстве, доказанном Ф.Г. Авхадиевым [21], константа $C(1/3) =$ 1.2599.

Пример 1.3.4. *Пусть $p = 1, \nu = 4$ и $q = 1/4$. Тогда уравнение (1.3.1) примет вид*

$$-\frac{\lambda^2}{16} + \frac{\lambda}{4}\frac{J_3(\lambda)}{J_4(\lambda)} = 0.$$

Численное решение дает $\lambda_0 = 4.61256$, то есть $\frac{\lambda_0^2}{16} = 1.32973$. Следовательно,

$$1.32973 \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{7/4}} dt \leq \int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t) dt.$$

В соответствующем неравенстве, доказанном Ф.Г. Авхадиевым [21], константа $C(1/4) =$ 1.18921.

Теперь сравним $\kappa'(q)$ с $C^{-1}(q) = 2^{3q-4}\pi^{2(1-q)}$ при $q \in [1, 2]$. Преимущество константы $C^{-1}(q)$ в том, что в случае $q = 1$ и $q = 2$ они неулучшаемы (см. [30], [138]). Несмотря на это, существуют два значения q_0 и q_1 такие, что $\kappa'(q) \leq C^{-1}(q)$ для любого $q \in [q_0, q_1]$. Действительно, при $q = 3/2$ имеем

$$\kappa'(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi^2}{2} - 14} \approx 0.448444 < C^{-1}(3/2) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.450158,$$

а также

$$\kappa'(1.3) \approx 0.469203 < C^{-1}(1.3) \approx 0.469469,$$

$$\kappa'(1.4) \approx 0.458389 < C^{-1}(1.4) \approx 0.459712,$$

$$\kappa'(1.6) \approx 0.439246 < C^{-1}(1.6) \approx 0.440803,$$

$$\kappa'(1.7) \approx 0.430701 < C^{-1}(1.7) \approx 0.431641.$$

В силу непрерывности $\kappa'(q)$ по переменной q существуют некоторые окрестности $[q_0, q_1]$ этих точек такие, что

$$\kappa'(q) < C^{-1}(q), \quad \forall q \in [q_0, q_1].$$

Более того, численные вычисления показывают, что $\kappa'(q) < C^{-1}(q)$ для любого $q \in [1.2823044502226741, 1.7950834115169039]$. В концевых точках этого отрезка значение $\kappa'(q) - C^{-1}(q)$ близко к нулю.

На первый взгляд может показаться, что усиление константы $C(q)$ незначительное. Из сравнения нашего неравенства с одномерным неравенством Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса (0.0.24) при $\nu = 1/q$ (см. подробнее [59]), следует, что константа $k'(q)$ при любом $q \in [0, 2]$ не может быть меньше чем

$$\lambda(q) = \frac{2^q}{q^2 j^2_{1/q-1}}.$$

Например, $\lambda(3/2) \approx 0.360891$. Добавим, что оценка $\lambda(q) \leq k'(q)$ — достаточно "грубая".

§1.4 Точные одномерные L_2-неравенства

Здесь нам удалось получить более сильные версии неравенств чем в предыдущем параграфе с точными константами. Обратим внимание, что весовая функция в дополнительном слагаемом изменилась.

1.4.1 Усиленные весовые функции

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4.1. *Пусть $q \in (0, \infty)$, $\nu \in \left[0, \frac{1}{q}\right]$ и $\rho \in (0, 1]$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y' \in L^2(0, \rho)$, имеет место точное неравенство*

$$(1 - \nu^2 q^2) \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^2(t)} dt + q^2 C_\nu^2(q) \frac{(2-\rho)^q}{\rho^q} \int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} dt \leq \int\limits_0^\rho y'^2(t) dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$, $C_\nu(q)$ — первый положительный корень уравнения

$$1 - \rho + qz \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

При $\nu \in \left(0, \frac{1}{q}\right]$ равенство в неравенстве достигается только на функции

$$y_0(t) = C\sqrt{z(t)} J_\nu \left(\lambda_\nu(q) \frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}} \right),$$

с некоторой произвольной константой C.

Доказательство. При доказательстве этой теоремы мы будем использовать функцию

$$\varphi(t) = \sqrt{z(t)} J_\nu \left(\lambda_\nu(q) \frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}} \right), \quad t \in [0, 1],$$

Отметим, что ключевым и оригинальным моментом доказательства является именно выбор (подбор) вида функции $\varphi(t)$.

Используя вышеприведенные свойства а) и б), можно показать, что выполнены следующие равенства

$$-\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} = \frac{1-\nu^2q^2}{z^2(t)} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(q)}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}}$$

и

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1-t}{z(t)} + \frac{q\lambda_\nu(q)t^{\frac{q}{2}-1}}{(2-t)^{\frac{q}{2}+1}} \frac{J'_\nu\left(\lambda_\nu(q)\frac{t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}}\right)}{J_\nu\left(\lambda_\nu(q)\frac{t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}}\right)} = \frac{1+\nu q}{z(t)} + o(t) \text{ при } t\to 0.$$

Кроме того, используя разложение функции Бесселя в ряд и известное равенство [26]

$$J_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t}J_\nu(t),$$

имеем

$$\varphi'(t) = \frac{1-t-\nu q}{\sqrt{z(t)}} J_\nu\left(\frac{\lambda_\nu(q)t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}}\right) + \frac{q\lambda_\nu(q)t^{\frac{q}{2}}}{\sqrt{z(t)}(2-t)^{\frac{q}{2}}} J_{\nu-1}\left(\frac{\lambda_\nu(q)t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{1-t+\nu q}{\sqrt{z(t)}}\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q\nu}{2}} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{\lambda_\nu^\nu(q)}{2^\nu} + O\left(\lambda_\nu(q)\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right), \quad t\to 0^+.$$

Следовательно, $\varphi'(t)\in L^2(0,1)$ при $q>0$ и $\nu\neq 0$, и $\varphi'(t)\notin L^2(0,1)$, при $q>0$ и $\nu=0$.

Далее, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$0 \le P := \int\limits_0^\rho \left(y'(t) - y(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)^2 dt = \int\limits_0^\rho y'^2(t)dt - \int\limits_0^\rho \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dy^2(t) + \int\limits_0^\rho y^2(t)\frac{\varphi'^2(t)}{\varphi^2(t)}dt =$$

$$= \int\limits_0^\rho y'^2(t)dt - \lim_{t\to\rho} y^2(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + \lim_{t\to 0} y^2(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + \int\limits_0^\rho y^2(t)\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)}dt.$$

Для любой абсолютно непрерывной функции $y:[0,1]\to\mathbb{R}$ такой, что $y(0)=0$ и интеграл $\int_0^1 y'^2(\tau)d\tau$ сходится, имеем

$$y^2(t) \le \left(\int_0^t |y'(\tau)|d\tau\right)^2 \le t\int_0^t |y'(\tau)|^2 d\tau.$$

Поэтому

$$\lim_{t\to 0} y^2(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

Если $C_\nu(q) = \lambda_\nu(q)\frac{\rho^{q/2}}{(2-\rho)^{q/2}}$ — это первый положительный корень уравнения

$$1-\rho+qz\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} = 0, \quad z\in(0,j_\nu),$$

то, очевидно,

$$\lim_{t\to\rho} y^2(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

Таким образом, получим

$$(1-\nu^2q^2)\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{z^2(t)}dt + q^2C_\nu^2(q)\frac{(2-\rho)^q}{\rho^q}\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}}dt \le \int\limits_0^\rho y'^2(t)dt.$$

Равенство $P=0$ возможно тогда и только тогда, когда

$$y'(t) - y(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

Следовательно, равенство $P = 0$ достигается на функции $y_0(t) = C\varphi(t)$, производная которой, как мы показали выше, принадлежит классу $L^2(0,1)$ только при $\nu > 0$.

Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

Как следствие этой теоремы при $\nu > 0$ и $\rho = 1$, получим

Следствие 1.4.1. *Для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y' \in L^2(0,1)$, справедливо неравенство*

$$(1-\nu^2q^2)\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{z^2(t)}dt + q^2 j'^2_\nu\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}}dt \le \int\limits_0^1 y'^2(t)dt,$$

где j'_ν — первый положительный корень производной J'_ν функции Бесселя J_ν.

1.4.2 Недостижимость констант

Константы в неравенстве теоремы 1.4.1 также являются точными в случае $\nu = 0$. А именно, справедливо следующее предложение.

Предложение 1.4.1. *Если $\nu = 0$ и $\rho \in (0,1]$, то существуют функции f_ε и g_ε такие, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнены неравенства*

$$(1+\varepsilon)\int\limits_0^\rho \frac{f_\varepsilon^2(t)}{z^2(t)}dt + q^2C_0(q)^2\frac{(2-\rho)^q}{\rho^q}\int\limits_0^\rho \frac{f_\varepsilon^2(t)}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}}dt > \int\limits_0^\rho (f'_\varepsilon(t))^2dt$$

и

$$\int\limits_0^\rho \frac{g_\varepsilon^2(t)}{z^2(t)}dt + \left(q^2C^2\frac{(2-\rho)^q}{\rho^q} + \varepsilon\right)\int\limits_0^\rho \frac{g_\varepsilon^2(t)}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}}dt > \int\limits_0^\rho (g'_\varepsilon(t))^2dt.$$

Доказательство. Если $\rho = 1$, то $C_0(q) = 0$ и имеем известное неравенство (0.0.5) из статьи [30] с точной недостижимой константой.

Пусть теперь $\rho \in (0,1)$. Рассмотрим функцию $f_\varepsilon(t) = (t(2-t))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$. Ясно, что

$$\int\limits_0^\rho (f'_\varepsilon(t))^2dt = (1+\varepsilon)^2\int\limits_0^\rho (1-t)^2((2-t)t)^{\varepsilon-1}dt <$$

$$< (1+\varepsilon)^2 \int\limits_0^\rho ((2-t)t)^{\varepsilon-1} dt + q^2 C_0(q)^2 \frac{(2-\rho)^q}{\rho^q} \int\limits_0^\rho \frac{f_\varepsilon^2(t)}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} dt =$$

$$= (1+\varepsilon)^2 \int\limits_0^\rho \frac{f_\varepsilon^2(t)}{z^2(t)} dt + q^2 C_0(q)^2 \frac{(2-\rho)^q}{\rho^q} \int\limits_0^\rho \frac{f_\varepsilon^2(t)}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} dt.$$

Следовательно, первая константа точная.

Пусть $\alpha = \alpha(\varepsilon) \in (0, q)$ и функция

$$g_\varepsilon(t) = z(t)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(t) = (z(t))^{\frac{\alpha+1}{2}} J_0 \left(\lambda_\nu(q) \frac{t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}} \right).$$

Тогда

$$P_\varepsilon := \int\limits_0^\rho \frac{g_\varepsilon^2(t)}{z^2(t)} dt + \left(q^2 C^2 \frac{(2-\rho)^q}{\rho^q} + \varepsilon \right) \int\limits_0^\rho \frac{g_\varepsilon^2(t)}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} dt - \int\limits_0^\rho (g_\varepsilon'(t))^2 dt =$$

$$= \varepsilon \int\limits_0^\rho \frac{g_\varepsilon^2(t)}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} dt - \int\limits_0^\rho \left({g'}_\varepsilon - g_\varepsilon(t) \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right)^2 dt.$$

Можно показать, что

$${g'}_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(t) \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\alpha}{2} (z(t))^{\frac{\alpha-1}{2}} J_0 \left(\lambda_\nu(q) \frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}} \right)$$

и

$$P_\varepsilon = \varepsilon \int\limits_0^\rho \frac{(z(t))^{\alpha-1}}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} J_0^2 \left(\frac{\lambda_\nu(q) t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}} \right) dt - \frac{\alpha^2}{4} \int_0^\rho (z(t))^{\alpha-1} J_0^2 \left(\frac{\lambda_\nu(q) t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}} \right) dt \geq$$

$$\geq \varepsilon \int\limits_0^\rho \frac{(z(t))^{q-1}}{(2-t)^{2+q} t^{2-q}} J_0^2 \left(\frac{\lambda_\nu(q) t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}} \right) dt - \frac{\alpha}{4} \max_{t \in [0,\rho]} (2-t)^{\alpha-1} J_0^2 \left(\frac{\lambda_\nu(q) t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}} \right).$$

Следовательно, $P_\varepsilon > 0$ при достаточно малых α. Таким образом, мы показали, что обе константы в неравенстве теоремы 1.4.1 неулучшаемы также в случае $\nu = 0$, что завершает доказательство предложения. □

1.4.3 Неравенства с тремя дополнительными слагаемыми

Лемма 1.4.1. *Непрерывная функция $h(t) = \frac{J_1(t)}{t J_0(t)}$ является возрастающей при $t \in [0, 2]$ и* $\inf_{t \in [0,2]} h(t) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Покажем, что производная $h'(t) \geq 0$ при $t \in [0, 2]$. Используя следующие известные равенства для функции и производной функции Бесселя (см., например, [26])

$$J_0'(t) = -J_1(t), \quad J_1'(t) = \frac{1}{2} (J_0(t) - J_2(t)),$$

$$\frac{t^2}{4} \left(J_1^2(t) - J_0(t) J_2(t) \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (2+2j) J_{2+2j}^2(t) \geq 0,$$

получим

$$h'(t)=\frac{tJ_1'(t)J_0(t)-J_1(t)J_0(t)-tJ_0'(t)J_1(t)}{t^2J_0^2(t)}=$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2}t\right)J_0(t)J_1(t)+\frac{t}{2}\left(J_0(t)-J_1(t)\right)^2+\frac{t}{2}\left(J_1^2(t)-J_0(t)J_1(t)\right)}{t^2J_0^2(t)}\geq 0.$$

Следовательно, функция является возрастающей и $\inf_{t\in[0,2]}h(t)=\lim_{t\to 0}h(t)=\frac{1}{2}$ по свойству б) для функции Бесселя из пункта 1.2.1. □

Теорема 1.4.2. *Если $q\in(0,\infty)$ и $\rho\in(0,1]$, то для любой абсолютно непрерывной функции $y:[0,1]\to\mathbb{R}$ такой, что $y(0)=0$ и $y'\in L^2(0,\rho)$, справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^\rho y'^2(t)dt\geq\frac{1}{4}\int\limits_0^\rho\frac{y^2(t)}{t^2}dt+q^2C_0^2(q)\frac{(2-\rho)^q}{\rho^q}\int\limits_0^\rho\frac{y^2(t)}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}}dt+$$

$$+\frac{qC_0^2(q)}{2}\frac{(2-\rho)^q}{\rho^q}\int\limits_0^\rho\frac{y^2(t)}{t^{1-q}(2-t)^{2+q}}dt,$$

где $C_0(q)$ — первое положительное решение уравнения

$$\frac{2-\rho}{2}-qz\frac{J_1(z)}{J_0(z)}=0,\quad z\in(0,j_0).$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы будем использовать функцию

$$\psi(t)=\sqrt{t}J_0\left(\lambda_0(q)\frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}}\right),\quad t\in[0,1],$$

для которой справедливы получающиеся непосредственным вычислением равенства

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=\frac{1}{2t}-\frac{q\lambda_0(q)t^{\frac{q}{2}-1}}{(2-t)^{\frac{q}{2}+1}}\frac{J_1\left(\lambda_\nu(q)\frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}}\right)}{J_0\left(\lambda_\nu(q)\frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}}\right)}$$

и

$$-\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}=\frac{1}{4t^2}+\frac{q^2\lambda_0^2(q)}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}}+\frac{q\lambda_0(q)}{t^{1-q/2}(2-t)^{2+q/2}}\frac{J_1\left(\lambda_0(q)\frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}}\right)}{J_0\left(\lambda_0(q)\frac{t^{q/2}}{(2-t)^{q/2}}\right)}.$$

По аналогии с доказательством теоремы 1.4.1 получим

$$\int\limits_0^\rho y'^2(t)dt=\lim_{t\to\rho}y^2(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}-\lim_{t\to 0}y^2(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}-\int\limits_0^\rho y^2(t)\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)}dt,$$

где константу $\lambda_0(q)$ будем искать как корень уравнения

$$\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)}=\frac{1}{2\rho}-\frac{q\lambda_0(q)\rho^{\frac{q}{2}-1}}{(2-\rho)^{\frac{q}{2}+1}}\frac{J_1\left(\lambda_\nu(q)\frac{\rho^{q/2}}{(2-\rho)^{q/2}}\right)}{J_0\left(\lambda_\nu(q)\frac{\rho^{q/2}}{(2-\rho)^{q/2}}\right)}=0,\quad\lambda_0(q)\in(0,j_0).$$

Ясно, что $\lim_{t\to 0}y^2(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=0$.

Учитывая утверждение леммы 1.4.1, имеем

$$-\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} \geq \frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(q)}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}} + q\lambda_0^2(q)\frac{t^{-1+q}}{(2-t)^{2+q}} \min_{t\in[0,1]} \frac{J_1\left(\lambda_0(q)\frac{t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}}\right)}{\frac{\lambda_0(q)t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}} J_0\left(\frac{\lambda_0(q)t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(q)}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}} + \frac{q}{2}\frac{\lambda_0^2(q)}{t^{1-q}(2-t)^{2+q}}.$$

Откуда следует утверждение теоремы. □

Теорема 1.4.3. *Пусть $\nu \in (0,1]$, $\rho(t) = \min\{t, 2b-t\}$ и $\mu(t) = 2b - \rho(t)$. Тогда для любой функции $y \in C_0^1(0,2b)$ такой, что $y'(t) \in L^2(0,2b)$, справедливы неравенства*

$$\int_0^{2b} y'^2(t)dt \geq \frac{1-\nu^2}{4}\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + \frac{2-2\nu^2+j_\nu'^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt +$$
$$+ \frac{1-\nu^2+2j_\nu'^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2t)}{\mu^2(t)}dt + \frac{j_\nu'^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)\rho(t)}{\mu^3(t)}dt,$$

$$\int_0^{2b} y'^2(t)dt \geq \frac{1}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + \frac{C_0^2(1)}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt + \frac{3C_0^2(1)}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\mu^2(t)}dt + \frac{C_0^2(1)}{2}\int_0^{2b} y^2(t)\frac{\rho(t)}{\mu^3(t)}dt,$$

где j_ν' — первый положительный корень производной J_ν' функции Бесселя J_ν и $C_0(1) \approx$ 1.25578 — первое положительное решение уравнения

$$1 - z\frac{J_1(z)}{J_0(z)} = 0, \quad z \in (0, j_0).$$

Доказательство. Несложно заметить, что

$$\frac{1}{z^2(t)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t(2-t)} + \frac{1}{(2-t)^2}\right)$$

и

$$\frac{4}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}} = \frac{(2-t+t)^2}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}} = \frac{1}{(2-t)^q t^{2-q}} + \frac{2}{(2-t)^{1+q}t^{1-q}} + \frac{t^q}{(2-t)^{2+q}}.$$

Следовательно, используя следствие 1.4.1 при $q = 1$, имеем

$$\int_0^1 y'^2(t)dt \geq \frac{1-\nu^2}{4}\int_0^1\frac{y^2(t)}{t^2}dt + \frac{2-2\nu^2+j_\nu'^2}{4}\int_0^1\frac{y^2(t)}{(2-t)t}dt +$$
$$+ \frac{1-\nu^2+2j_\nu'^2}{4}\int_0^1\frac{y^2(t)}{(2-t)^2}dt + \frac{j_\nu'^2}{4}\int_0^1\frac{y^2(t)t}{(2-t)^3}dt$$

и применяя теорему 1.4.2 при $q = 1$ и $\rho = 1$, получим

$$\int_0^1 y'^2(t)dt \geq \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt + \frac{C_0^2(1)}{4}\int_0^1 \frac{y^2(t)}{(2-t)t}dt + \\ + \frac{C_0^2(1)}{2}\int_0^1 \frac{y^2(t)}{(2-t)^2}dt + \frac{C_0^2(1)}{4}\int_0^1 \frac{y^2(t)}{(2-t)^3}\,(2+t)\,dt.$$

С помощью замены переменной $t = \tau/b$ в первом и втором неравенствах получим

$$\int_0^b y'^2(\tau)d\tau \geq \frac{1-\nu^2}{4}\int_0^b \frac{y^2(\tau)}{\tau^2}d\tau + \frac{2-2\nu^2+j_\nu'^2}{4}\int_0^b \frac{y^2(\tau)}{(2b-\tau)\tau}d\tau + \\ + \frac{1-\nu^2+2j_\nu'^2}{4}\int_0^b \frac{y^2(\tau)}{(2b-\tau)^2}d\tau + \frac{j_\nu'^2}{4}\int_0^b \frac{y^2(\tau)\tau}{(2b-\tau)^3}d\tau$$

и

$$\int_0^b y'^2(\tau)d\tau \geq \frac{1}{4}\int_0^b \frac{y^2(\tau)}{\tau^2}d\tau + \frac{C_0^2(1)}{4}\int_0^b \frac{y^2(\tau)}{(2b-\tau)\tau}d\tau + \\ + \frac{C_0^2(1)}{2}\int_0^b \frac{y^2(\tau)}{(2b-\tau)^2}d\tau + \frac{C_0^2(1)}{4}\int_0^b \frac{y^2(\tau)}{(2b-\tau)^3}\,(2b+\tau)\,d\tau.$$

Объединяя два последних неравенства со следующими соответствующими неравенствами на интервале $[b, 2b]$

$$\int_b^{2b} y'^2(\tau)d\tau \geq \frac{1-\nu^2}{4}\int_b^{2b} \frac{y^2(\tau)}{(2b-\tau)^2}d\tau + \frac{2-2\nu^2+j_\nu'^2}{4}\int_b^{2b} \frac{y^2(\tau)}{(2b-\tau)\tau}d\tau + \\ + \frac{1-\nu^2+2j_\nu'^2}{4}\int_0^b \frac{y^2(\tau)}{\tau^2}d\tau + \frac{j_\nu'^2}{4}\int_b^{2b} \frac{y^2(\tau)(2b-\tau)}{\tau^3}dt$$

и

$$\int_b^{2b} y'^2(\tau)d\tau \geq \frac{1}{4}\int_b^{2b} \frac{y^2(\tau)}{(2b-\tau)^2}d\tau + \frac{C_0^2(1)}{4}\int_b^{2b} \frac{y^2(\tau)}{(2b-\tau)\tau}d\tau + \\ + \frac{C_0^2(1)}{2}\int_b^{2b} \frac{y^2(\tau)}{\tau^2}d\tau + \frac{C_0^2(1)}{4}\int_b^{2b} \frac{y^2(\tau)}{\tau^3}\,(4b-\tau)\,d\tau$$

для функции $y \in C^1(b, 2b)$ такой, что $y(2b) = 0$, получим утверждение теоремы. □

Глава 2. Одномерные неравенства в L_p-пространствах и подходы к их доказательству

В этой части диссертационной работы получены одномерные неравенства в L_p-случае. Известны различные подходы к доказательству L_p-неравенств, но ни один из них нельзя назвать универсальным способом. Каждое L_p-неравенство обосновывается по-своему. Например, методы доказательства L_2-неравенств Авхадиева-Виртса (0.0.7), (0.0.8) и (0.0.9) так тщательно "подточены" под этот случай, что напрямую практически невозможно распространить их для случая произвольного $p \geq 1$. Все же в статьях [176, 177, 180, 184, 186] мы делаем некоторые попытки систематического получения неравенств в этом случае. Мы используем слово "попытки", так как не во всех случаях получены точные константы и остается много нерешенных задач.

Будем условно выделять три подхода к доказательству: 1) способ, основанный на применении теоремы об обобщенном среднем арифметическом 2) метод, основанный на применении неравенства Опиала; 3) подход, основанный на применении леммы Шама. Три подхода дают различные результаты.

Дополнительной мотивацией к изучению L_p-неравенств типа Харди является тот факт, что с помощью точных констант в соответствующих неравенствах оцениваются снизу возможные собственные значения линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Более того, неравенство Харди может дать больше информации о спектре определенных дифференциальных операторов, а также операторов типа взвешенного p-лапласиана (см. например, [117]).

Для полноты картины отметим, что в L_p-пространствах при $p \in (0, 1)$ неравенства Харди не справедливы для произвольных неотрицательных измеримых функций. Несмотря на это, неравенства типа Харди при $p \in (0, 1)$ известны для неотрицательных невозрастающих функций (см. [35, 81–83]).

Отметим, что приведенные в этом пункте неравенства являются инструментом доказательства L_p-неравенств в пространственном случае.

§2.1 Способ, основанный на применении теоремы о среднем арифметическом

Первый метод сводится к доказательству вспомогательных неравенств с последующим применением теоремы об обобщенном среднем арифметическом, которая может быть записана в следующей форме (см. [109, стр. 37]):

$$a_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n} < \left(\frac{p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + \ldots + p_n} \right)^{p_1 + \ldots + p_n}. \tag{2.1.1}$$

2.1.1 Неравенства со степенными особенностями

Предположим, что $q \in (0, \infty)$, $s \in (0, \infty)$ и $\nu \geq 0$. Через J_ν обозначим функцию Бесселя порядка ν

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+1+\nu)}$$

и для всех $t \in [0, 1]$ полагаем $F_{\nu,s,q}(t) = t^{s/2} J_\nu \left(\lambda(2s/q) t^{q/2} \right)$.

Следуя статьям [58] и [59] мы будем называть константой Лэмба первый положительный корень $z = \lambda_\nu(s)$ следующего уравнения

$$s J_\nu(z) + 2z J_\nu'(z) = 0, \tag{2.1.2}$$

где $\nu \geq 0$ и s — фиксированные параметры.

Легко показать, что

$$F_{\nu,s,q}'(t) = \frac{s}{2} t^{\frac{s}{2}-1} J_\nu \left(\lambda(2s/q) t^{q/2} \right) + q t^{\frac{q}{2}+\frac{s}{2}-1} \lambda_\nu(2s/q) J_\nu'(\lambda_\nu(2s/q) t^{\frac{q}{2}}),$$

$$F_{\nu,s,q}'(1) = 0,\ F_{\nu,s,q}(t) > 0, t \in (0, 1] \quad \text{и} \quad F_{\nu,s,q}'(t) > 0,\ t \in (0, 1).$$

Более того, известно, что функция $y = F_{\nu,s,q}(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$t^2 y'' + (1 - s) t y' + \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{4t^{-q}} \right) y = 0 \tag{2.1.3}$$

и для нее справедливо равенство

$$\lim_{t \to 0} \frac{t F_{\nu,s,q}'(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} = \frac{s + \nu q}{2}. \tag{2.1.4}$$

См. [58, 59] для более подробной информации.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.1.1. *Пусть $\lambda_\nu(2s/q)$ — константа Лэмба. Предположим также, что $p \geq 2$, $s > 0$, $q \in (0, \infty)$ и $\nu \geq 0$, а функция y является неубывающей и абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$, для которой справедливы условия $y(0) = 0$ и*

$$\lim_{t \to 0} \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \frac{F_{\nu,s,q}'(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} = 0. \tag{2.1.5}$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t)y'^2(t)}{t^{s-1}}dt \geq \frac{s^2-\nu^2q^2}{p^2}\int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s+1}}dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{p^2}\int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-q+1}}dt. \tag{2.1.6}$$

Доказательство. Ясно, что

$$0 \leq P := \int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t)}{t^{s-1}}\left(y'(t) - \frac{2}{p}\frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)}y(t)\right)^2 dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t)y'^2(t)}{t^{s-1}}dt - \frac{4}{p^2}\int\limits_0^1 \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)t^{s-1}}dy^p(t) + \frac{4}{p^2}\int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}}\frac{F'^2_{\nu,s,q}(t)}{F^2_{\nu,s,q}(t)}dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$P = \int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t)y'^2(t)}{t^{s-1}}dt - \lim_{t\to 0}\frac{y^p(t)}{t^{s-1}}\frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} + \frac{4}{p^2}\int\limits_0^1 y^p(t)\frac{t^2F''_{\nu,s,q}(t) + (1-s)tF'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)t^{s+1}}dt.$$

Используя асимптотическое поведение (2.1.5) и дифференциальное уравнение (2.1.3), мы имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t)y'^2(t)}{t^{s-1}}dt \geq \frac{4}{p^2}\int\limits_0^1 y^p(t)\left(\frac{s^2-\nu^2q^2}{4t^{s+1}} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{4t^{s-q+1}}\right)dt,$$

что завершает доказательство леммы 2.1.1. □

Замечание 2.1.1. Если k — натуральное число и $p = 2k$, то в условии леммы 2.1.1 можно положить, что y является произвольной, необязательно неубывающей, абсолютно непрерывной функцией.

Далее введем следующие обозначения

$$c_s = \frac{|s^2-\nu^2q^2|^{p/2}}{p^p} \quad \text{и} \quad \mu_s = c_s\frac{p}{2}\frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{|s^2-\nu^2q^2|},$$

Справедливо следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1.2. *Пусть $\lambda_\nu(2s/q)$ — константа Лэмба. Предположим также, что $p \geq 2$, $s > 0$ и $q \in (0,\infty)$, а y — абсолютно непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция такая, что $y(0) = 0$ и $y'(t)t^{(p-s-1)/p} \in L^p[0,1]$. Если $\nu \in [0, s/q]$, то имеет место следующее неравенство*

$$\int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{s-p+1}}dt \geq c_s\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}}dt + \mu_s\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-q+1}}dt.$$

Если дополнительно $\nu \geq (s-1)/q$, k — положительное целое число и $p = 2k$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt + c_s(p-1)\int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s+1}}dt \geq \mu_s\int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-q+1}}dt.$$

Доказательство. Для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y'(t)t^{(p-s-1)/p} \in L^p[0,1]$ имеем

$$|y(t)|^p \le \left(\int\limits_0^t |y'(\tau)|d\tau\right)^p \le \left(\int\limits_0^t \tau^{\frac{s-p+1}{p-1}}d\tau\right)^{p-1} \int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-p+1}}d\tau = \left(\frac{p-1}{s}\right)^{p-1} t^s \int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-p+1}}d\tau.$$

Используя последнюю оценку и (2.1.4), получим

$$\lim_{t\to 0} \frac{|y(t)|^p}{t^{s-1}} \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} = 0.$$

Следовательно, мы можем использовать лемму 2.1.1.

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\nu \in [0, s/q]$. Без ограничения общности можно считать, что y является положительной и неубывающей функцией. Действительно, если

$$g(t) = \int_0^t |y'(\tau)|d\tau,$$

где $y(t) = \int_0^t y'(\tau)d\tau$ — произвольная функция, и справедливо следующее неравенство для неубывающей функции g

$$\int\limits_a^b g^p(t)w(t)dt \le C_1 \int\limits_a^b g'^p(t)v(t)dt, \qquad (2.1.7)$$

то так как

$$|y(t)| \le \int_0^t |y'(\tau)|d\tau = g(t), \quad g'(t) = |y'(t)|,$$

мы имеем

$$\int\limits_a^b |y(t)|^p w(t)dt \le \int\limits_a^b g^p(t)w(t)dt \le C_1 \int\limits_a^b g'^p(t)v(t)dt = C_1 \int\limits_a^b |y'(t)|^p v(t)dt.$$

То есть справедливо соответствующее неравенство уже для произвольной абсолютно непрерывной функции y.

Используя неравенство (2.1.6) и элементарное неравенство (2.1.1) для величин

$$a_1 = \frac{y^p(t)}{t^{s+1}}, \quad a_2 = \frac{p^p}{(s^2-\nu^2q^2)^{p/2}} \frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}}, \quad p_1 = 1 - \frac{2}{p} \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{2}{p},$$

получим

$$\frac{p^p}{(s^2-\nu^2q^2)^{p/2}} \int\limits_0^1 \frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt \ge \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s+1}}dt + \frac{p}{2} \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{s^2-\nu^2q^2} \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-q+1}}dt.$$

Случай 2: $\nu \ge s/q$. Применяя лемму 2.1.1 и замечание 2.1.1, будем иметь

$$\frac{p^2}{\nu^2q^2-s^2} \int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t)y'^2(t)}{t^{s-1}}dt + \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s+1}}dt \ge \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\nu^2q^2-s^2} \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-q+1}}dt.$$

Неравенство (2.1.6) и неравенство (2.1.1), примененное к величинам

$$a_1 = \frac{y^p(t)}{t^{s+1}}, \quad a_2 = \frac{p^p}{(\nu^2 q^2 - s^2)^{p/2}} \frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}}, \quad p_1 = 1 - \frac{2}{p} \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{2}{p},$$

дают

$$\frac{p^p}{(\nu^2 q^2 - s^2)^{p/2}} \int\limits_0^1 \frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}} dt + (p-1) \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s+1}} dt \geq \frac{p}{2} \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2s/q)}{\nu^2 q^2 - s^2} \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-q+1}} dt.$$

Это завершает доказательство леммы 2.1.2. □

Приведем аналоги неравенств леммы 2.1.2 в случае произвольных отрезков.

Теорема 2.1.1. *Предположим, что* $0 < b - a < \infty$, $\rho(t) = \max\{t-a, b-t\}$, $p \in [2, \infty)$, $s \in (0, \infty)$ *и* $q \in (0, \infty)$ *и* $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ *— произвольная абсолютно непрерывная функция такая, что* $y(a) = y(b) = 0$ *и* $y'(t)/\rho^{(s-p+1)/p}(t) \in L^p[a, b]$. *Если* $\nu \in [0, s/q]$ *и* $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$, *то выполнено следующее неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s-p+1}(t)} dt \geq c_s \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)} dt + \frac{\mu_s}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)} dt. \tag{2.1.8}$$

Если $\nu \geq s/q$, k *— положительное целое число и* $p = 2k$, *то*

$$\int\limits_a^b \frac{y'^p(t)}{\rho^{s-p+1}(t)} dt + c_s(p-1) \int\limits_a^b \frac{y^p(t)}{\rho^{s+1}(t)} dt \geq \frac{\mu_s}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{y^p(t)}{\rho^{s-q+1}(t)} dt. \tag{2.1.9}$$

Доказательство. Заменой переменной $t = \rho\tau$ для произвольного $\rho > 0$ в неравенстве леммы 2.1.2 получим

$$\int\limits_0^\rho \frac{|y'(t)|^p}{t^{s-p+1}} dt \geq c_s \int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}} dt + \frac{\mu_s}{\rho^q} \int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|^p}{t^{s-q+1}} dt.$$

Теперь применим последнее неравенство к функциям $u(t) = y(t+a)$ и $u(t) = y(b-t)$ при $\rho = \delta_0 = \frac{b-a}{2}$. Имеем

$$\int\limits_{\delta_0}^b \frac{|u'(\tau)|^p}{(b-\tau)^{s-p+1}} d\tau \geq c_s \int\limits_{\delta_0}^b \frac{|u(\tau)|^p}{(b-\tau)^{s+1}} d\tau + \frac{\mu_s}{\delta_0^q} \int\limits_{\delta_0}^b \frac{|u(\tau)|^p}{(b-\tau)^{s-q+1}} d\tau \tag{2.1.10}$$

и

$$\int\limits_a^{\delta_0} \frac{|u'(\tau)|^p}{(\tau-a)^{s-p+1}} d\tau \geq c_s \int\limits_a^{\delta_0} \frac{|u(\tau)|^p}{(\tau-a)^{s+1}} d\tau + \frac{\mu_s}{\delta_0^q} \int\limits_a^{\delta_0} \frac{|u(\tau)|^p}{(\tau-a)^{s-q+1}} d\tau. \tag{2.1.11}$$

Суммируя (2.1.10) и (2.1.11), получим неравенство (2.1.8). Второе неравенство (2.1.9) обосновывается аналогично, что завершает доказательство теоремы 2.1.1. □

2.1.2 Точность константы

Заметим, что обе константы в неравенстве леммы 2.1.2 точны, когда $\nu \geq 0$ и $p = 2$ (дополнительную информацию см. в [59]). Мы можем утверждать, что в случае $p > 2$ константа $((s-1)^2 - \nu^2 q^2)^{p/2}/p^p$ точна в случае $\nu = 0$.

Лемма 2.1.3. *Если $s > 0$, $p \geq 2$ и $q > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция y_ε, удовлетворяющая условию леммы 2.1.2 и для которой верно неравенство*

$$\int_0^1 \frac{|y_\varepsilon'(t)|^p}{t^{s-p+1}}dt \leq \frac{(s^2+4\varepsilon)^{p/2}}{p^p}\int_0^1 \frac{|y_\varepsilon(t)|^p}{t^{s+1}}dt + s^{p-2}\frac{q^2\lambda_0^2(2s/q)}{2p^{p-1}}\int_0^1 \frac{|y_\varepsilon(t)|^p}{t^{s-q+1}}dt.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $y_\varepsilon(t) = \tau^{(s-1+\varepsilon/(s-1))/p}$. Без ограничения общности полагаем, что $\varepsilon \geq 1$. Прямые вычисления дают, что

$$\int_0^1 \frac{|y_\varepsilon'(t)|^p}{t^{s-p}}dt = \left(s-1+\frac{\varepsilon}{s-1}\right)^p \frac{s-1}{p^p\varepsilon} < \left((s-1)^2+4\varepsilon\right)^{\frac{p}{2}}\frac{s-1}{p^p\varepsilon} = \frac{((s-1)^2+4\varepsilon)^{\frac{p}{2}}}{p^p}\int_0^1 \frac{|y_\varepsilon(t)|^p}{t^s}dt.$$

Откуда следует утверждение леммы 2.1.3. □

2.1.3 Замечание по расширению результатов

При доказательстве неравенств теоремы 2.1.1 мы не использовали ограничение $\nu > (s-1)/q$. В этом случае следуя доказательству теоремы 2.1.1, можем показать, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. *Пусть $\lambda_\nu(2(s-1)/q)$ — константа Лэмба. Предположим, что $0 < b - a < \infty$, $\rho(t) = \max\{t-a, b-t\}$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$, $s \in (1,\infty)$, $q \in (0,\infty)$ и $\nu > (s-1)/q$. Если $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной функцией такой, что $y(a) = y(b) = 0$ и $y'(t)/\rho(t)^{(s-p)/p} \in L^p[a,b]$, то для всех четных $p \geq 2$ выполняется следующее неравенство*

$$\frac{p}{2\delta_0^q}\frac{q^2\lambda_\nu^2(2(s-1)/q)}{\nu^2q^2-(s-1)^2}\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q}(t)}dt \leq \frac{p^p}{(\nu^2q^2-(s-1)^2)^{p/2}}\int_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s-p}(t)}dt + (p-1)\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^s(t)}dt.$$

Переходя к пределу в неравенстве теоремы 2.3.2 при $s \to 1$, получим

Следствие 2.1.1. *Предположим, что $0 < b-a < \infty$, $\rho(t) = \max\{t-a, b-t\}$, $q \in (0,\infty)$ и $\nu > 0$. Если $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной функцией такой, что $y(a) = y(b) = 0$ и $y'(t)/\rho(t)^{(1-p)/p} \in L^p[a,b]$, то для всех четных $p \geq 2$ выполняется следующее неравенство*

$$\frac{p}{2\delta_0^q}\frac{q^2{j'}_\nu^2}{\nu^2q^2}\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{1-q}(t)}dt \leq \frac{p^p}{\nu^pq^p}\int_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{1-p}(t)}dt + (p-1)\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho(t)}dt,$$

где j'_ν является первым положительным нулем производной J'_ν функции Бесселя J_ν.

2.1.4 Неравенства с синусами

Этот подход, основанный на применении теоремы об обобщенном среднем арифметическом, позволяет доказывать неравенства, весовые функции которых имеют не только степенные особенности.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1.3. *Предположим, что s и q — положительные числа, $p \geq 1$, $l \in [1, p]$. Если y абсолютно непрерывна в $[0,1]$ и такая, что $y(0) = 0$, то*

$$p^l (2+q)^l \int_0^1 \frac{|y(t)|^{p-l}|y'(t)|^l}{t^{2-l}} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt \geq$$
$$\geq \left(1 - \frac{lq^2}{4}\right) \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^2} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt + lq^2 c_q^2 \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{2-q}} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt,$$

где константа c_q — число, удовлетворяющее условиям

$$2qc_q \cos c_q - (q-2)\sin c_q = 0 \quad \text{и} \quad c_q \in (0, \pi).$$

Доказательство. Применяя следствие 1.2.10 из первой главы к функции $y(t) = |g(t)|^p \in C^1[0,1]$, имеем

$$p(2+q) \int_0^1 \frac{|g'(t)||g(t)|^{p-1}}{t} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt \geq$$
$$\geq \frac{4-q^2}{4} \int_0^1 \frac{|g(t)|^p}{t^2} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt + q^2 c_q^2 \int_0^1 \frac{|g(t)|^p}{t^{2-q}} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt.$$

Используя неравенство (2.1.1) для величин

$$p_1 = 1 - \frac{1}{l}, \quad p_2 = \frac{1}{l}, \quad a_1 = \frac{|g(t)|^p}{t^2} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s},$$
$$a_2 = p^l (2+q)^l \frac{|g(t)|^{p-l}|g'(t)|^l}{t^{2-l}} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s},$$

получим

$$\left(1 - \frac{1}{l}\right) \int_0^1 \frac{|g(t)|^p}{t^2} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt +$$
$$+ \frac{p^l (2+q)^l}{l} \int_0^1 \frac{|g(t)|^{p-l}|g'(t)|^l}{t^{2-l}} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt \geq$$
$$\geq \frac{4-q^2}{4} \int_0^1 \frac{|g(t)|^p}{t^2} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt + q^2 c_q^2 \int_0^1 \frac{|g(t)|^p}{t^{2-q}} \left[t^{\frac{2-q}{4}} \sin\left(c_q t^{\frac{q}{2}}\right)\right]^{1-s} dt.$$

Это завершает доказательство теоремы 1.1.1. □

Перейдем к L_p-аналогам неравенства (0.0.12). Из соответствующего результата Ф.Г. Авхадиева из [11] следует, что неравенство из следующего утверждения при $m = p = 2$ является неулучшаемым. Забегая вперед, также скажем, что доказываемые далее неравенства и неравенство (0.0.12) используются при обосновании соответственно L_p- и L_2-конформно инвариантных неравенств в плоских областях.

Лемма 2.1.4. *Пусть $p \geq 2$, $s \in [2-\frac{1}{m}, 2.5]$ и $m \in [2, p]$. Тогда для любой функции $y \in C_0^1[0,\pi]$ справедливо неравенство*

$$\frac{m}{p^m}\left(s-2+\frac{1}{m}\right)\int\limits_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^s t}dt + \frac{m(5-2s)}{2p^m}\int\limits_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^{s-2} t}dt \leq \int\limits_0^\pi \frac{|y(t)|^{p-m}|y'(t)|^m}{\sin^{s-m} t}dt.$$

Доказательство. Пусть $v_0(t) := \sqrt{\sin t}$. Рассмотрим величину $I(y)$, определенную как

$$I(y) := \int\limits_0^\pi \frac{|y(t)|^{p-2}}{v_0(t)^{2(s-2)}}\left(y'(t) - \frac{2}{p}\frac{y(t)v_0'(t)}{v_0(t)}\right)^2 dt.$$

Очевидно, что

$$0 \leq I(y) = \int\limits_0^\pi \Big(\frac{|y(t)|^{p-2}y'(t)^2}{v_0(t)^{2(s-2)}} + \frac{4}{p^2}\frac{|y(t)|^p v_0'(t)^2}{v_0(t)^{2s-2}} - \frac{4}{p}\frac{|y(t)|^{p-1}\mathrm{sign} y(t) y'(t) v_0'(t)}{v_0(t)^{2s-3}}\Big)dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(\frac{|y(t)|^{p-2}v'(t)^2}{v_0(t)^{2(s-2)}} + \frac{4}{p^2}\frac{|y(t)|^p v_0'(t)^2}{v_0(t)^{2s-2}}\right)dt - \frac{4}{p^2}\int\limits_0^\pi \frac{v_0'(t)}{v_0(t)^{2s-3}}d|v(t)|^p.$$

Интегрируя по частям второй интеграл, получаем

$$I(y) = \int\limits_0^\pi \frac{|y(t)|^{p-2}y'(t)^2}{v_0(t)^{2(s-2)}}dt + \frac{4}{p^2}\int\limits_0^\pi |y(t)|^p\left(\frac{v_0''(t)}{v_0(t)^{2s-3}} + (4-2s)\frac{v_0'(t)^2}{v_0(t)^{2s-2}}\right)dt -$$

$$-\frac{4}{p^2}\left(\lim_{t\to\pi^-}|y(t)|^p\frac{v_0'(t)}{v_0(t)^{2s-3}} - \lim_{t\to 0^+}|y(t)|^p\frac{v_0'(t)}{v_0(t)^{2s-3}}\right).$$

Если $t \in (0, \varepsilon_1)$, то используя неравенство Гёльдера, мы получим

$$|y(t)|^p \leq \left(\int\limits_0^t |y'(\tau)|d\tau\right)^p = \left(\int\limits_0^t \left(\sin^{\frac{s-p}{p-1}}\tau\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{|y'(\tau)|^p}{\sin^{s-p}\tau}\right)^{1/p}d\tau\right)^p \leq$$

$$\leq \left(\frac{p-1}{s-1}\right)^{p-1}\frac{\sin^{s-1} t}{\cos^{p-1} t}\int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\sin^{s-p}\tau}d\tau,$$

а если $t \in (\pi-\varepsilon_2, \pi)$, то имеем

$$y(t)^p \leq \left(\int\limits_t^\pi |y'(\tau)|d\tau\right)^p \leq \left(\int\limits_t^\pi \sin^{\frac{s-p}{p-1}}\tau d\tau\right)^{p-1}\int\limits_t^\pi \frac{|y'(\tau)|^p}{\sin^{s-p}\tau}d\tau \leq \left(\frac{p-1}{s-1}\right)^{p-1}\frac{\sin^{s-1} t}{\cos^{p-1} t}\int\limits_t^\pi \frac{|y'(\tau)|^p}{\sin^{s-p}\tau}d\tau,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ являются сколь угодно малыми числами.

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0^+}|y(t)|^p\frac{v_0'(t)}{v_0(t)^{2s-3}} = \lim_{t\to 0^+}|y(t)|^p\frac{\cos t}{\sin^{s-1} t} = 0$$

и

$$\lim_{t\to\pi^-}|y(t)|^p\frac{v_0'(t)}{v_0(t)^{2s-3}} = \lim_{t\to\pi^-}|y(t)|^p\frac{\cos t}{\sin^{s-1} t} = 0.$$

Таким образом,

$$p^2 \int_0^\pi \frac{|y(t)|^{p-2} y'(t)^2}{v_0(t)^{2(s-2)}} dt \geq \int_0^\pi |y(t)|^p \left(\frac{2s-3}{\sin^s t} + \frac{5-2s}{\sin^{s-2} t} \right) dt. \tag{2.1.12}$$

Используя неравенство (2.1.1) для величин

$$a_1 = \frac{|y(t)|^p}{\sin^s t}, \quad a_2 = p^m \frac{|y(t)|^{p-m} |y'(t)|^m}{\sin^{s-m} t}, \quad p_1 = 1 - \frac{2}{m} \text{ и } \quad p_2 = \frac{2}{m},$$

получим

$$\int_0^\pi \frac{|y(t)|^{p-2} y'(t)^2}{v_0(t)^{2(s-2)}} dt \leq \left(1 - \frac{2}{m}\right) \int_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^s t} dt + \frac{2p^m}{m} \int_0^\pi \frac{|y(t)|^{p-m} |y'(t)|^m}{\sin^{s-m}} dt. \tag{2.1.13}$$

Комбинируя неравенства (2.1.12) и (2.1.13), имеем

$$\frac{2p^m}{m} \int_0^\pi \frac{|y(t)|^{p-m} |y'(t)|^m}{\sin^{s-m} t} dt \geq \left(2s - 4 + \frac{2}{m}\right) \int_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^s t} dt + (5-2s) \int_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^{s-2} t} dt.$$

Это завершает доказательство леммы 2.1.4. □

Следствие 2.1.2. *Пусть $p \geq 2$ и $2 - \frac{1}{p} \leq s \leq 2.5$. Тогда для любой функции $y \in C_0^1[0,\pi]$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\pi \frac{|y'(t)|^p}{\sin^{s-p} t} dt \geq \frac{1}{p^{p-1}} \left(s - 2 + \frac{1}{p}\right) \int_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^s t} dt + \frac{5-2s}{2p^{p-1}} \int_0^\pi \frac{|y(t)|^p}{\sin^{s-2} t} dt.$$

Замена переменной $t = \frac{\pi}{\ln 1/q} \ln r$ в интегралах неравенства последнего следствия, где $0 < q \leq r < 1$, дает

Следствие 2.1.3. *Пусть $q \in (0,1)$, $0 < q \leq r \leq 1$, $p \geq 2$ и $s \in [2 - \frac{1}{p}, 2.5]$. Для любой абсолютно непрерывной функции y такой, что $y(q) = y(1)$ и $y \not\equiv 0$, выполнено следующее неравенство*

$$\int_q^1 \frac{|y'(r)|^p}{\tau^{s-p}(r)} r^{s-1} dr \geq \frac{2^p}{p^{p-1}} \left(s - 2 + \frac{1}{p}\right) \int_q^1 \frac{|y(r)|^p}{\tau^s(r)} r^{s-1} dr + \frac{2^{p-3}\pi^2(5-2s)}{p^{p-1} \ln^2 q} \int_q^1 \frac{|y(r)|^p}{\tau^{s-2}(r)} r^{s-3} dr,$$

где функция τ определена следующим образом

$$\tau(r) = \frac{2r \ln q}{\pi} \sin \frac{\pi \ln r}{\ln q}.$$

2.1.5 Неравенства Харди и уравнения типа Лэмба

В данном параграфе мы получаем одномерные L_p-неравенства. При доказательстве этих неравенств будем использовать L_1-неравенства, полученные в **Главе 1**. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1.4. *Предположим, что* $p \geq 1$, $r \in [1,p]$ *и* y — *абсолютно непрерывная на* $[a,b]$ *функция такая, что* $y(a) = y(b) = 0$. *Пусть* $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ *и* $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$. *Тогда*

$$p^r s^{2(1-r)} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right)^r \int_a^b \frac{|y(t)|^{p-r} \cdot |y'(t)|^r}{\rho^{s-r+1}(t)}\,dt \geq$$
$$\geq \left(s^2 - r\nu^2 q^2\right) \int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)}\,dt + \frac{qr}{\delta_0^q}\left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s)\left(2 - \frac{q\mu}{s}\right)\right) \int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)}\,dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$ *и* $z = \lambda_\nu(r)$ — *константа, являющаяся первым положительным решением уравнения*

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Доказательство. Пусть функция $g \in C^1[0,1]$. Тогда $y(t) = |g(t)|^p$ принадлежит $C^1[0,1]$, так как

$$\frac{d}{dt}|g(t)|^p = p|g(t)|^{p-1}g'(t) \cdot \mathrm{sign}g(t)$$

и функция $|g(t)|^{p-1} \cdot \mathrm{sign}g(t)$ непрерывна для $p > 1$.

Применяя следствие 1.2.4 из §1.2 для функции $y(t) = |g(t)|^p \in C^1[0,1]$, получим

$$\left(q^2\lambda_\nu^2\left(\frac{2s}{q}\right) + q\mu(q-s)\left(2 - \frac{q\mu}{s}\right)\right) \int_0^1 \frac{|g(t)|^p}{t^{s-q+1}}dt + \left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_0^1 \frac{|g(t)|^p}{t^{s+1}}dt \leq$$
$$\leq p\left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right) \int_0^1 \frac{|g'(t)| \cdot |g(t)|^{p-1}}{t^s}\,dt.$$

Используя неравенство (2.1.1) для величин

$$a = s^2\frac{|g(t)|^p}{t^{s+1}}, \quad b = p^r s^{2-2r}\left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right)^r \frac{|g(t)|^{p-r}|g'(t)|^r}{t^{s+1-r}},$$

$$p_1 = 1 - \frac{1}{r}, \quad p_2 = \frac{1}{r},$$

имеем

$$qr\left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s)\left(2 - \frac{q\mu}{s}\right)\right) \int_0^1 \frac{|g(t)|^p}{t^{s-q+1}}\,dt + \left(s^2 - r\nu^2 q^2\right) \int_0^1 \frac{|g(t)|^p}{t^{s+1}}\,dt \leq$$
$$\leq p^r s^{2(1-r)}\left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right)^r \int_0^1 \frac{|g(t)|^{p-r} \cdot |g'(t)|^r}{t^{s-r+1}}\,dt. \quad (2.1.14)$$

Мы получили неравенства на $[0,1]$. Далее применяем аналогичный переход что и в теореме 2.1.1 к отрезку $[a,b]$. Таким образом, получаем требуемое утверждение. □

Также имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1.5. *Предположим, что* $p \geq 1, r \in [1,p]$ *и* y *— абсолютно непрерывная на* $[a,b]$ *функция такая, что* $y(a) = y(b) = 0$*. Пусть* $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ *и* $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$*. Тогда*

$$\frac{p^r}{s^r}\left(\frac{2s}{s-\nu q} - \frac{q^2\mu^2}{s^2-\nu^2 q^2}\right)^r \int_a^b \frac{|y(t)|^{p-r}\cdot|y'(t)|^r}{\rho^{s-r+1}(t)}\,dt \geq$$
$$\geq \int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)}\,dt + \frac{qr}{\delta_0^q}\left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s)\left(2-\frac{q\mu}{s}\right)\right)\int_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)}\,dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$ *и* $z = \lambda_\nu(r)$ *— константа, являющаяся первым положительным решением уравнения*

$$(r-2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Доказательство. Применим аналогичные рассуждения что и в теореме 2.1.5. Подставляя в неравенство (2.1.1) следующие величины

$$a = \frac{|g(t)|^p}{t^{s+1}}, \quad b = p^r\left(\frac{2}{s-\nu q} - \frac{q^2\mu^2}{s^3 - s\nu^2 q^2}\right)^r \frac{|g(t)|^{p-r}|g'(t)|^r}{t^{s+1-r}},$$
$$p_1 = 1 - \frac{1}{r}, \quad p_2 = \frac{1}{r},$$

получим требуемое неравенство из условия теоремы. □

§2.2 Подход, основанный на применении неравенства Опиала

В этой части диссертации мы рассмотрим неравенства, доказанные способом 2). Этот способ основан на доказательстве вспомогательных неравенств с последующим применением соответствующего неравенства типа Опиала. Неравенства Опиала содержат степени производной функции как с правой, так и с левой стороны неравенства (см., например, [75, 78, 79]).

2.2.1 L_p-аналоги неравенства Авхадиева-Виртса (0.0.8)

Положим, что

$$a_{s,\nu} = \frac{|(s-1)^2 - \nu^2 q^2|\,(s-1)^{p-2}}{2^{3-p}p^{p-1}} \quad \text{и} \quad b_{s,\nu} = \frac{(s-1)^{p-2}q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{2^{3-p}p^{p-1}},$$

где $\lambda_\nu(2s/q)$ — постоянная Лэмба, определяемая как первый положительный корень уравнения (2.1.2).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2.1. *Предположим, что* $p \geq 2$, $s > 0$, $q \in (0, \infty)$ *и* y *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[0,1]$ *функцией такой, что* $y(0) = 0$ *и* $y'(t)t^{(1-2s/p)(1-1/p)} \in L^p[0,1]$. *Если* $\nu \in [0, s/q]$, *то*

$$a_{s,\nu} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}} dt + b_{s,\nu} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-q+1}} dt \leq \int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{(1-2s/p)(1-p)}} dt,$$

а если к тому же $\nu \geq s/q$, k — *целое положительное число и* $p = 2k$, *то*

$$b_{s,\nu} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-q+1}} dt \leq \int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{(1-2s/p)(1-p)}} dt + a_{s,\nu} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}} dt.$$

Доказательство. Заметим, что для любой абсолютно непрерывной функции $y =: [0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y'(t)t^{(1-2s/p)(1-1/p)} \in L^p[0,1]$ справедливы неравенства

$$|y(t)|^p \leq \left(\int_0^t |y'(\tau)| d\tau \right)^p \leq \left(\int_0^t \tau^{2s/p-1} d\tau \right)^{p-1} \int_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{(1-2s/p)(1-p)}} d\tau =$$

$$= \left(\frac{p}{2s} \right)^{p-1} t^{2s(p-1)/p} \int_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{(1-2s/p)(1-p)}} d\tau.$$

Следовательно, выполняется условие леммы (2.1.1). Объединяя следующее неравенство типа Опиала (см, например, [158], стр. 312)

$$\int_0^1 \frac{|y(t)|^{p-2}|y'(t)|^2}{t^{s-1}} dt \leq \frac{p^{p-3}}{2^{p-3}(s-1)^{p-2}} \int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{(1-2s/p)(1-p)}} dt$$

и неравенство (2.1.6), получим

$$\frac{p^{p-3}}{2^{p-3}s^{p-2}} \int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{(p-2s)(1/p-1)}} dt \geq \frac{s^2 - \nu^2 q^2}{p^2} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}} dt + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{p^2} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-q+1}} dt.$$

Если $\nu \in [0, s/q]$, то для каждой абсолютно непрерывной функции имеет место неравенство

$$\frac{p^{p-3}}{2^{p-3}s^{p-2}} \int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{(p-2s)(1/p-1)}} dt \geq \frac{s^2 - \nu^2 q^2}{p^2} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}} dt + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{p^2} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-q+1}} dt,$$

а если $\nu \geq s/q$, k является целым положительным числом и $p = 2k$, то

$$\frac{p^{p-3}}{2^{p-3}s^{p-2}} \int_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{(p-2s)(1/p-1)}} dt + \frac{\nu^2 q^2 - s^2}{p^2} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}} dt \geq \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{p^2} \int_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-q+1}} dt.$$

Это завершает доказательство леммы 2.2.1. □

Применяя лемму 2.2.1, получим неравенства на произвольном отрезке. Справедлива теорема

Теорема 2.2.1. *Предположим, что* $0 < b-a < \infty$, $\rho(t) = \max\{t-a, b-t\}$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$, $p \in [2,\infty)$, $s \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty)$ *и* $\nu \in [0, s/q]$. *Если* $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ *является абсолютно непрерывной функцией такой, что* $y(a) = y(b) = 0$ *и* $y'(t)/\rho(t)^{(1-2s/p)(1/p-1)} \in L^p[a,b]$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\delta_0^{s(1-2/p)} \int\limits_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{(1-2s/p)(1-p)}(t)}dt \geq a_{s,q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)}dt + \frac{b_{s,\nu}}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)}dt, \tag{2.2.1}$$

а если дополнительно $\nu \geq (s-1)/q$, k *— целое положительное число и* $p = 2k$, *то*

$$\delta_0^{s(1-2/p)} \int\limits_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{(1-2s/p)(1-p)}(t)}dt + a_{s,\nu} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)}dt \geq \frac{b_{s,\nu}}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-q+1}(t)}dt.$$

Теперь положим

$$d_{s,\nu} = \left(\frac{p-2}{p}\right)^{p-2} \frac{|(p-2)^2 - \nu^2 q^2|}{p^2} \quad \text{и} \quad h_{s,\nu} = \left(\frac{p-2}{p}\right)^{p-2} \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2(p-2)/q)}{p^2},$$

где $\lambda_\nu\left(\frac{2(p-2)}{q}\right)$ является константой Лэмба, т.е. первым положительным корнем уравнения (2.1.2).

Лемма 2.2.2. *Пусть* $p > 2$, $q > 0$ *и* y *является абсолютно непрерывной функцией на* $[0,1]$ *такой, что* $y(0) = 0$ *и* $y'(t)t^{1/p} \in L^p[0,1]$. *Если* $\nu \in [0, (p-2)/q]$, *то имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^1 |y'(t)|^p t dt \geq d_{s,\nu} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{p-1}}dt + h_{s,\nu} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{p-1-q}}dt,$$

а если $\nu \geq (s-1)/q$, k *— целое положительное число и* $p = 2k$, *то*

$$\int\limits_0^1 |y'(t)|^p t dt + d_{s,\nu} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{p-1}}dt \geq h_{s,\nu} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{p-1-q}}dt.$$

Доказательство. Так как

$$|y(t)|^p = \left(\int\limits_0^t |y'(\tau)|d\tau\right)^p \leq \left(\int\limits_0^t \tau^{-1/(p-1)}d\tau\right)^{p-1} \int\limits_0^t |y'(\tau)|^p \tau d\tau = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} t^p \int\limits_0^t |y'(\tau)|^p \tau d\tau$$

и

$$\lim_{t\to 0} \frac{tF'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} = \frac{s+\nu}{2},$$

то выполнено условие леммы 2.2.1. Следовательно, используя следующее неравенство Опиала (см., [158], стр. 313)

$$\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^{p-2}|y'(t)|^2}{t^{p-3}}dt \leq \left(\frac{p}{p-2}\right)^{p-2} \int\limits_0^1 |y'(t)|^p t dt,$$

получим

$$\left(\frac{p}{p-2}\right)^{p-2}\int\limits_0^1 |y'(t)|^p t dt \geq \frac{(p-2)^2-\nu^2q^2}{p^2}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{p-1}}dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2(p-2)/q)}{p^2}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{p-1-q}}dt.$$

Это завершает доказательство леммы 2.2.2. □

С использованием леммы 2.2.2 несложно получить следующую теорему.

Теорема 2.2.2. *Предположим, что* $0 < b-a < \infty$, $\rho(t) = \max\{t-a, b-t\}$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$ *и* $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ *является абсолютно непрерывной функцией такой, что* $y(a) = y(b) = 0$ *и* $y'(t)\rho(t)^{1/p} \in L^p[a,b]$. *Если* $p > 2$, $q > 0$ *и* $\nu \in [0,(p-2)/q]$, *то*

$$d_{s,\nu}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{p-1}(t)}dt + \frac{h_{s,\nu}}{\delta_0^q}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{p-1-q}(t)}dt \leq \int\limits_a^b |y'(t)|^p\rho(t)dt,$$

а если $k > 1$ *— целое положительное число и* $p = 2k$ *и* $\nu \geq (p-2)/q$, *то*

$$\frac{h_{s,\nu}}{\delta_0^q}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{p-1-q}(t)}dt \leq \int\limits_a^b |y'(t)|^p\rho(t)dt + d_{s,\nu}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{p-1}(t)}dt.$$

2.2.2 Неравенства Харди и уравнения типа Лэмба

В этом пункте используя L_1-неравенства, доказанные в §1.2, мы получим их L_p-аналоги.

Имеет место утверждение.

Теорема 2.2.3. *Предположим, что* $s, q > 0$, $\nu \geq 0$ *и* y *— абсолютно непрерывная функция на* $[a,b]$ *такая, что* $y(a) = y(b) = 0$. *Если* $\mu \in \left[0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, *то*

$$\frac{(s+1)^{s+1}}{s^s}\left(2s+2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right)\int\limits_a^b |y'(t)|^{s+1}\,dt + \frac{(s+1)}{\delta_0^s}\left(\frac{q^2\mu^2}{s} - 2q\mu\right)\int\limits_a^b |y'(t)|\cdot|y(t)|^s\,dt \geq$$

$$\geq \left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s+1}(t)}\,dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s-q+1}(t)}\,dt,$$

и если $\mu \leq 0$, *то*

$$2\frac{(s+1)^{s+1}}{s^s}(s+\nu q)\int\limits_a^b |y'(t)|^{s+1}\,dt - 2\frac{(s+1)q\mu}{\delta_0^s}\int\limits_a^b |y'(t)|\cdot|y(t)|^s\,dt \geq$$

$$\geq \left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s+1}(t)}\,dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^{s+1}}{\rho^{s-q+1}(t)}\,dt,$$

где $\rho(t) = \min\{b-t, t-a\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}$, $z = \lambda_\nu(r)$ *— константа, являющаяся первым положительным решением уравнения:*

$$(r-2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Доказательство. Применяя лемму 1.2.3 из §1.2 для функции $y(t) = g^{s+1}(t) \in C^1[0,1]$, получим

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_0^1 \frac{|g(t)|^{s+1}}{t^{s+1}}\,dt + q^2\lambda_\nu^2(2s/q)\int\limits_0^1 \frac{|g(t)|^{s+1}}{t^{s-q+1}}\,dt \le$$

$$\le (s+1)\left(2s+2\nu q-\frac{q^2\mu^2}{s}\right)\int\limits_0^1 \frac{|g'(t)|\cdot|g(t)|^s}{t^s}\,dt + (s+1)\left(\frac{q^2\mu^2}{s}-2q\mu\right)\int\limits_0^1 |g'(t)|\cdot|g(t)|^s\,dt,$$

Используя неравенство Опиала (см. [158, с. 313]) следующего вида

$$\int\limits_a^b \frac{|u(t)|^p\cdot|u'(t)|}{(t-a)^p}\,dt \le \left(\frac{p}{p+1}\right)^{-p}\int\limits_a^b |u'(t)|^{p+1}\,dt,\ p>0,$$

имеем

$$\frac{(s+1)^{s+1}}{s^s}\left(2s+2\nu q-\frac{q^2\mu^2}{s}\right)\int\limits_0^1 |g'(t)|^{s+1}dt + (s+1)\left(\frac{q^2\mu^2}{s}-2q\mu\right)\int\limits_0^1 |g'(t)|\cdot|g(t)|^s dt \ge$$

$$\ge \left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_0^1 \frac{|g(t)|^{s+1}}{t^{s+1}}\,dt + q^2\lambda_\nu^2(2s/q)\int\limits_0^1 \frac{|g(t)|^{s+1}}{t^{s-q+1}}\,dt. \quad (2.2.2)$$

Проделывая аналогичные действия для случая $\mu < 0$, получаем

$$\left(s^2-\nu^2q^2\right)\int\limits_0^1 \frac{|g(t)|^{s+1}}{t^{s+1}}\,dt + q^2\lambda_\nu^2(2s/q)\int\limits_0^1 \frac{|g(t)|^{s+1}}{t^{s-q+1}}\,dt \le$$

$$\le \frac{(s+1)^{s+1}}{s^s}\,(2s+2\nu q)\int\limits_0^1 |g'(t)|^{s+1}\,dt - 2(s+1)q\mu\int\limits_0^1 |g'(t)|\cdot|g(t)|^s\,dt. \quad (2.2.3)$$

Если в последних двух утверждениях осуществить переход от отрезка $[0,1]$ к произвольному интервалу $[a,b]$, то получим требуемое утверждение. □

Теперь покажем неравенства в L_2-случае. Верно следующее утверждение.

Теорема 2.2.4. *Предположим, что y — абсолютно непрерывная функция на $[a,b]$ такая, что $y(a) = y(b) = 0$. Если $q > 0, \nu \ge 0$ и $\mu \in \left[0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, то*

$$\left(1-\nu^2q^2\right)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{\rho^2(t)}\,dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2/q)}{\delta_0^q}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{\rho^{2-q}(t)}\,dt \le \left(8+8\nu q-3q^2\mu^2-2q\mu\right)\int\limits_0^1 |y'(t)|^2\,dt,$$

если $q > 0, \nu \ge 0$ и $\mu \le 0$, то

$$\left(1-\nu^2q^2\right)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{\rho^2(t)}\,dt + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2/q)}{\delta_0^q}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{\rho^{2-q}(t)}\,dt \le (8+8\nu q-2q\mu)\int\limits_0^1 |y'(t)|^2\,dt,$$

если $q > 1$, $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$ *и* $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$, *то*

$$\frac{1-\nu^2q^2}{q}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^2}{\rho^2(t)}dt + \frac{q\lambda_\nu^2(2/q)+\mu(q-1)\,(2-q\mu)}{\delta_0^q}\int\limits_a^b \frac{|y(t)|^2}{\rho^{2-q}(t)}dt \le \frac{8+8\nu q-4q^2\mu^2}{q}\int\limits_a^b |y'(t)|^2dt.$$

Доказательство. Для получения результата при $\mu \in \left[0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$ в (2.2.2) положим $s = 1$. Тогда

$$\left(1-\nu^2q^2\right)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^2}\,dt + q^2\lambda_\nu^2(2/q)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^{2-q}}\,dt \le$$

$$\le \left(8+8\nu q-4q^2\mu^2\right)\int\limits_0^1 |y'(t)|^2\,dt + \left(2q^2\mu^2-4q\mu\right)\int\limits_0^1 |y'(t)|\cdot|y(t)|\,dt.$$

Далее используем неравенство Опиала вида (см. [79, 158])

$$\int\limits_0^\rho |y(t)|\cdot|y'(t)|\,dt \le \frac{\rho}{2}\int\limits_0^\rho |y'(t)|^2\,dt.$$

Откуда получаем

$$\left(1-\nu^2q^2\right)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^2}\,dt + q^2\lambda_\nu^2(2/q)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^{2-q}}\,dt \le \left(8+8\nu q-3q^2\mu^2-2q\mu\right)\int\limits_0^1 |y'(t)|^2\,dt.$$

Для доказательства случая $\mu < 0$, в (2.2.3) подставляем $s = 1$ и применяем вышеприведенное неравенство Опиала. Имеем

$$\left(1-\nu^2q^2\right)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^2}\,dt + q^2\lambda_\nu^2(2/q)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^{2-q}}\,dt \le (8+8\nu q-2q\mu)\int\limits_0^1 |y'(t)|^2\,dt.$$

В (2.1.14) положим $s = 1, r = 1, p = 2$. Получим

$$\frac{4+4\nu q-2q^2\mu^2}{q}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)||y'(t)|}{t}dt \ge$$

$$\ge \frac{1-\nu^2q^2}{q}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^2}dt + \left(q\lambda_\nu^2\,(2/q)+\mu(q-1)\,(2-q\mu)\right)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^{2-q}}dt.$$

Используя теперь следующее неравенство Опиала (см. [79])

$$\int\limits_0^\rho \frac{|y(t)|\cdot|y'(t)|}{t}\,dt \le 2\int\limits_0^\rho |y'(t)|^2\,dt,$$

получаем

$$\frac{8+8\nu q-4q^2\mu^2}{q}\int\limits_0^1 |y'(t)|^2\,dt \ge \frac{1-\nu^2q^2}{q}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^2}dt + \left(q\lambda_\nu^2(2/q)+\mu(q-1)\,(2-q\mu)\right)\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t^{2-q}}dt.$$

Осталось только перейти к отрезку $[a, b]$ в трех получившихся случаях для получения требуемого результата. $\square$

§2.3 Метод, основанный на применении леммы Шама

Далее рассмотрим неравенства, доказанные способом 3). Одномерные L_p-неравенства получаются как следствия леммы Д.Т. Шама из статьи [158], которая формулируется следующим образом:

Лемма B. *Пусть $y(t)$ — абсолютно непрерывная на $[a,b]$ функция такая, что $y'(t) \geq 0$ почти всюду. Также, будем полагать, что $Q(t)$ — положительная и непрерывная на (a,b), и $G(y,t)$ — непрерывно дифференцируемая по t в $[a,b]$ и по y в пределах области значения функции $y(t)$, $G_y(y,t){>}0$. Тогда, если интеграл ниже существует, то*

$$\int_a^b \left(Qy'^p + \left(\frac{c}{p}\right)^{p/(p-1)} (p-1) G_y^{p/(p-1)} Q^{-1/(p-1)} + cG_t \right) dt \geq c\{G(y(b),b) - G(y(a),a)\},$$

где c — произвольное положительное число, $p > 1$ и

$$G_y = \frac{\partial G(y,t)}{\partial y}, G_t = \frac{\partial G(y,t)}{\partial t}.$$

Равенство в неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда

$$y' = \left(\frac{c}{p}\right)^{1/(p-1)} \left(\frac{G_y}{Q}\right)^{1/(p-1)}$$

почти всюду на (a,b).

Замечание 2.3.1. Стоит отметить, что утверждение леммы B напрямую даст неравенства лишь для монотонных функций. Следующие рассуждения показывают, что из соответствующего неравенства Харди для монотонных функций, следует результат для произвольных функций.

Пусть для монотонной положительно функции g и положительных весовых функций w и v выполнено следующее неравенство с некоторой константой C_1:

$$\int_a^b g^p(t) w(t) dt \leq C_1 \int_a^b g'^p(t) v(t) dt.$$

Положим, что

$$g(t) = \int_0^t |y'(\tau)| d\tau \quad \text{и} \quad y(t) = \int_0^t y'(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$|y(t)| \leq \int_0^t |y'(\tau)| d\tau = g(t), \quad g'(t) = |y'(t)|.$$

Откуда следует, что

$$\int_a^b |y(t)|^p w(t) dt \leq \int_a^b g^p(t) w(t) dt \leq C_1 \int_a^b g'^p(t) v(t) dt = C_1 \int_a^b |y'(t)|^p v(t) dt.$$

Таким образом, получается требуемое неравенство для произвольной абсолютно непрерывной функции.

2.3.1 Вспомогательные утверждения

Нам потребуются некоторые свойства функции Бесселя. В статье Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса [59] введена функция

$$F_{\nu,r,q}(t) = t^{r/2} J_\nu \left(\lambda_\nu(2r/q) t^{q/2}\right), \qquad t \in [0,1],$$

где через J_ν обозначена функция Бесселя.

Известно (см. [58, 59]), что константа Лэмба λ_ν связана с первым положительным корнем j_ν функции Бесселя J_ν порядка ν следующим образом

$$\lambda_\nu(2\nu) = j_{\nu-1}. \tag{2.3.1}$$

Отметим, что функция $F_{\nu,r,q}$ является решением следующего дифференциального уравнения:

$$t^2 F''_{\nu,r,q}(t) + (1-r)tF'_{\nu,r,q}(t) + \left(\frac{r^2 - \nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2r/q)}{4t^{-q}}\right) F_{\nu,r,q}(t) = 0. \tag{2.3.2}$$

Пусть теперь

$$F_\nu(t) := F_{\nu,1,q}(t) \quad \text{при} \quad \nu = 1/q.$$

Используя связь (2.3.1) и поведение функции Бесселя вблизи нуля, а именно,

$$J_\nu(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu + o(t) \text{ при } t \to 0,$$

легко получаем

$$F_\nu(t) = \sqrt{t} J_\nu \left(j_{\nu-1} t^{1/(2\nu)}\right) = \frac{j_{\nu-1}^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} t + o(t), \quad t \to 0+\,. \tag{2.3.3}$$

В статье [59] также приведены следующие свойства функции F_ν:

$$F'_\nu(1) = 0, F_\nu(t) > 0, t \in (0,1] \text{ и } F'_\nu(t) > 0, t \in (0,1).$$

Для абсолютно непрерывной на $[0,1]$ функции y такой, что $y(0) = 0$ и $t^{(1-s)/p} y'(t) \in L^p(0,1)$, пользуясь соотношением $|y(t)| \le \int\limits_0^t |y(\tau)| d\tau$ и неравенством Гёльдера, имеем

$$|y(t)|^p \le \left(\int\limits_0^t |y'(\tau)| d\tau\right)^p = \left(\int\limits_0^t \tau^{\frac{s-1}{p-1}} d\tau\right)^{p-1} \int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-1}} d\tau = \left(\frac{p-1}{s+p-2}\right)^{p-1} t^{s+p-2} \int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-1}} d\tau.$$

Легко показать, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{y^p(t) {F'}_\nu^{p-1}(t)}{F_\nu^{s+p-2}(t)} = 0 = \frac{y^p(1) {F'}_\nu^{p-1}(1)}{F_\nu^{s+p-2}(1)}.$$

2.3.2 Точные интегральные неравенства с весами, зависящими от функции Бесселя

Заметим, что если в неравенстве (2.1.7) достигается равенство на некоторой функции g_0, то в классе произвольных абсолютно непрерывных функций константа в неравенстве является неулучшаемой. Нам удалось найти такие частные случаи функций G и Q, при которых с использованием свойств функции Бесселя из **леммы B** можно получить следующее утверждение.

Теорема 2.3.1. *Пусть $s \in (0, +\infty)$, $\nu \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$ и $F_\nu(t) = \sqrt{t} J_\nu(j_{\nu-1} t^{1/(2\nu)})$. Если функция $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^{(s-1)/p} \in L^p(0, 1)$, то*

$$\frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2} \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{2-\frac{1}{\nu}}} \left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2} \frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)} \le \int\limits_0^1 |y'(t)|^p \frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)}. \tag{2.3.4}$$

Равенство в неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда функция

$$y(t) = C F_\nu^{\frac{p+s-2}{p-1}}(t),$$

где C — некоторая произвольная константа.

Доказательство. Не ограничивая общности, нам достаточно доказать утверждения для положительных и монотонных функций, так как для произвольных функций наши неравенства получаются как следствия.

Пусть в **лемме B** величина $a = \varepsilon$, $b = 1$ и

$$c = \left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}, G(y,t) = \frac{y^p(t)}{F_\nu^{s-1}(t)} \left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-1}, \; Q(t) = \frac{1}{F_\nu^{s-1}(t)}.$$

Элементарными выкладками несложно получить, что

$$\left(\frac{c}{p}\right)^{p/(p-1)} (p-1) G_y^{p/(p-1)} Q^{-1/(p-1)} = c^{p/(p-1)} (p-1) \frac{y^p(t)}{F_\nu^{s-1}(t)} \left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^p$$

и

$$cG_t = cy^p(t) \left(\frac{p-s}{F_\nu^{s-1}(t)} \left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^p + \frac{(p-1)F_\nu''(t)}{F_\nu^s(t)} \left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}\right).$$

Имеем

$$\left(\frac{c}{p}\right)^{p/(p-1)} (p-1) G_u^{p/(p-1)} Q^{-1/(p-1)} + cG =$$

$$= \frac{y^p(t)}{F_\nu^{s-1}(t)} \left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^p \big((p-1)c^{p/(p-1)} + c(2-p-s)\big) + c(p-1) y^p(t) \frac{F_\nu''(t)}{F_\nu^s(t)} \left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2} =$$

$$= \left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1} (p-1) y^p(t) \frac{F_\nu''(t)}{F_\nu^s(t)} \left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}.$$

Таким образом, из **леммы B** следует

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{y'^p(t)}{F_\nu^{s-1}(t)}+\left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}(p-1)y^p(t)\frac{F_\nu''(t)}{F_\nu^s(t)}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}\right)dt\geq$$

$$\geq\left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}\left\{\frac{y^p(1)}{F_\nu^{s-1}(1)}\left(\frac{F_\nu'(1)}{F_\nu(1)}\right)^{p-1}-\frac{y^p(\varepsilon)}{F_\nu^{s-1}(\varepsilon)}\left(\frac{F_\nu'(\varepsilon)}{F_\nu(\varepsilon)}\right)^{p-1}\right\}.$$

В последнем неравенстве воспользуемся уравнением

$$F_\nu''(t)+\frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2}F_\nu(t)t^{-2+\frac{1}{\nu}}=0 \tag{2.3.5}$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Получим

$$\int\limits_0^1 y'^p(t)\frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)}\geq\frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2}\int\limits_0^1\frac{y^p(t)}{t^{2-\frac{1}{\nu}}}\left(\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}\right)^{p-2}\frac{dt}{F_\nu^{s-1}(t)}.$$

Уравнение (2.5.7) является частным случаем (2.3.2) при $\nu=r/q$.

Из **леммы B** также следует, что константы будут точными, если

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{p+s-2}{p-1}\frac{F_\nu'(t)}{F_\nu(t)}.$$

То есть при $y(t)=CF_\nu^{\frac{p+s-2}{p-1}}(t)$ неравенство превращается в равенство. Легко проверить, что функция $CF_\nu^{\frac{p+s-2}{p-1}}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. □

Далее приведем два следствия теоремы 2.3.1. Используя, что имеют место равенства

$$J_{1/2}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin t}{\sqrt{t}},\quad J_{-1/2}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos t}{\sqrt{t}},$$

и, как следствие, $j_{-1/2}=\pi/2$, $j_{1/2}=\pi$ (см. подробнее [58]), получим

Следствие 2.3.1. *Пусть $s\in(0,+\infty)$, $p\in[2,+\infty)$ и абсолютно непрерывная функция y на $[0,1]$ такая, что $y(0)=0$ и $|y'(t)|^p\sin^{1-s}(\pi t/2)$ интегрируемая на $[0,1]$. Тогда*

$$\int\limits_0^1\frac{|y'(t)|^p}{\sin^{s-1}(\pi t/2)}dt\geq\frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^p\int\limits_0^1|y(t)|^p\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}\right)^{p-2}\frac{dt}{\sin^{s-1}(\pi t/2)}.$$

Равенство в неравенстве достигается при $y(t)=C\sin^{\frac{p+s-2}{p-1}}(\pi t/2)$, где C — некоторая произвольная константа.

При $s=1$ и $p=2$ имеем результат из [58].

Следствие 2.3.2. *Пусть $\nu\in(0,+\infty)$ и y — абсолютно непрерывная на $[0,1]$ функция такая, что $y(0)=0$ и $y'^2(t)$ интегрируемая на $[0,1]$. Тогда*

$$\int\limits_0^1|y'(t)|^2dt\geq\frac{j_{\nu-1}^2}{4\nu^2}\int\limits_0^1\frac{|y(t)|^2}{t^{2-\frac{1}{\nu}}}dt.$$

Равенство в неравенстве достигается при $y(t) = C\sqrt{t}J_\nu(j_{\nu-1}t^{\frac{1}{2\nu}})$, *где* C — *некоторая произвольная константа.*

Второй результат также связан с частным случаем функции $F_{\nu,r,q}$. Положим, что $\Phi_q(t) = F_{0,1,q}(t)$, т.е.

$$\Phi_q(t) = \sqrt{t}J_0(\lambda_0(2/q)t^{q/2}).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $s \in (0,+\infty)$, $\nu \in (0,+\infty)$, $p \in [2,+\infty)$ *и абсолютно непрерывная на* $[0,1]$ *функция* y *такая, что* $y(0) = 0$ *и* $y'/t^{(s-1)/(2p)} \in L^p[0,1]$. *Тогда*

$$\frac{(p-1)^{p-2}}{(p+s-2)^{p-1}}\int\limits_0^1 |y'(t)|^p \frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \geq \int\limits_0^1 |y(t)|^p \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(2/q)}{4t^{2-q}}\right)\left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)}\right)^{p-2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}. \quad (2.3.6)$$

Равенство при $s > p-1$ *достигается тогда и только тогда, когда функция* $y(t) = C(\Phi_q(t))^{\frac{p+s-2}{p-1}}$, *где* C — *некоторая константа.*

Доказательство. Положим, что в **лемме B** величина $a = \varepsilon, b = 1$ и

$$c = \left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}, G(y,t) = \frac{y^p(t)}{\Phi_q^{s-1}(t)}\left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)}\right)^{p-1}, \ Q(t) = \frac{1}{\Phi_q^{s-1}(t)}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2.3.1 получим:

$$\int\limits_\varepsilon^1 \left(\frac{y'^p(t)}{\Phi_q^{s-1}(t)} + \left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}(p-1)y^p(t)\frac{\Phi_q''(t)}{\Phi_q^s(t)}\left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)}\right)^{p-2}\right)dt \geq$$

$$\geq c\left(\frac{y^p(1)}{\Phi_q^{s-1}(1)}\left(\frac{\Phi_q'(1)}{\Phi_q(1)}\right)^{p-1} - \frac{y^p(\varepsilon)}{\Phi_q^{s-1}(\varepsilon)}\left(\frac{\Phi_q'(\varepsilon)}{\Phi_q(\varepsilon)}\right)^{p-1}\right).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и используя уравнение (2.1.3) при $\nu = 0$, а именно,

$$\Phi_q''(t) + \left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(2/q)}{4t^{2-q}}\right)\Phi_q(t) = 0,$$

имеем

$$\frac{(p-1)^{p-2}}{(p+s-2)^{p-1}}\int\limits_0^1 y'^p(t)\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)} \geq \int\limits_0^1 y^p(t)\left(\frac{1}{4t^2} + \frac{q^2\lambda_0^2(2/q)}{4t^{2-q}}\right)\left(\frac{\Phi_q'(t)}{\Phi_q(t)}\right)^{p-2}\frac{dt}{\Phi_q^{s-1}(t)}.$$

Выше мы воспользовались тем, что

$$|y(t)|^p \leq \left(\frac{s+2p-3}{2(p-1)}\right)^{p-1} t^{(s+2p-3)/2}\int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{(s-1)/2}}d\tau$$

и, что при малых t функция $\Phi_q(t) = O(\sqrt{t})$.

Из **леммы B** также следует, что константы будут точными, если

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p+s-2}{p-1}\frac{\Phi_q(t)}{\Phi_q'(t)}.$$

То есть при $y(t) = C\Phi_q^{\frac{p+s-2}{p-1}}(t)$ вместо неравенства будет равенство. Легко проверить, что при $s > p-1$ функция Φ_q удовлетворяет условиям теоремы. В данный момент вопрос о точности константы в случае $s < p-1$ остается открытым. □

Последний результат связан также с частным случаем функции $F_{\nu,r,q}$. Пусть $\Phi_{\nu,q}(t) = F_{\nu,1,q}(t)$. Тогда для функции

$$\Phi_{\nu,q}(t) = \sqrt{t}J_\nu(\lambda_\nu(2/q)t^{q/2})$$

выполнено следующее дифференциальное уравнение:

$$t^2y'' + \left(\frac{1-\nu^2q^2}{4} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2/q)}{4t^{-q}}\right)y = 0. \tag{2.3.7}$$

Используя рассуждения при доказательстве теоремы 2.3.1, имеем

$$\int\limits_\varepsilon^1 \left(\frac{y'^p(t)}{\Phi_{\nu,q}^{s-1}(t)} + \left(\frac{p+s-2}{p-1}\right)^{p-1}(p-1)y^p(t)\frac{\Phi_{\nu,q}''(t)}{\Phi_{\nu,q}^s(t)}\left(\frac{\Phi_{\nu,q}'(t)}{\Phi_{\nu,q}(t)}\right)^{p-2}\right)dt \geq$$

$$\geq c\left(\frac{y^p(1)}{\Phi_q^{s-1}(1)}\left(\frac{\Phi_{\nu,q}'(1)}{\Phi_q(1)}\right)^{p-1} - \frac{y^p(\varepsilon)}{\Phi_{q,\nu}^{s-1}(\varepsilon)}\left(\frac{\Phi_{\nu,q}'(\varepsilon)}{\Phi_{\nu,q}(\varepsilon)}\right)^{p-1}\right).$$

Переход к пределу и уравнение (2.3.7) приведут к следующей теореме.

Теорема 2.3.3. *Пусть $s \in (0,+\infty)$, $\nu \in (0,+\infty)$, $p \in [2,+\infty)$ и абсолютно непрерывная на $[0,1]$ функция y такая, что $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^{(s-1)(1+q\nu)/(2p)} \in L^p[0,1]$. Тогда*

$$\frac{(p-1)^{p-2}}{(p+s-2)^{p-1}}\int\limits_0^1 |y'(t)|^p\frac{dt}{\Phi_{q,\nu}^{s-1}(t)} \geq \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^2}\left(\frac{1-\nu^2q^2}{4} + \frac{q^2\lambda_\nu^2(2/q)}{4t^{-q}}\right)\left(\frac{\Phi_{q,\nu}'(t)}{\Phi_{q,\nu}(t)}\right)^{p-2}\frac{dt}{\Phi_{q,\nu}^{s-1}(t)}.$$

Равенство при $s > (p-1)\left(\frac{2(p-1)}{1+\nu} - p\right)+1$ достигается тогда и только тогда, когда функция $y(t) = C(\Phi_{q,\nu}(t))^{\frac{p+s-2}{p-1}}$, где C — некоторая константа.

2.3.3 L_p-аналоги неравенств Авхадиева-Виртса (0.0.9)

В этом параграфе мы также будем использовать функцию

$$F_{\nu,r,q}(t) = t^{r/2}J_\nu\left(\lambda(2r/q)t^{q/2}\right),\ t \in [0,1],\ \nu \geq 0.$$

Кроме тех свойств которые приводились в предыдущем параграфе мы будем использовать, что

$$\lim_{t\to 0+}\frac{tF_{\nu,r,q}'(t)}{F_{\nu,r,q}(t)} = c_1,\ \frac{F'^p_{\nu,r,q}(t)}{t^{s-p+1}} = c_2t^{\frac{qp\nu}{2}+\frac{s(2-p)}{2(p-1)}-1}(1+O(t^q)),\quad t\to 0+, \tag{2.3.8}$$

где
$$c_1 = \frac{r+\nu q}{2} > 0, \quad c_2 = \frac{\lambda_\nu^{p\nu}(2r/q)(r+\nu q)^p}{2^{p(\nu+1)}\Gamma^p(1+\nu)} > 0.$$

Замечание. Из второго равенства в (2.3.8) следует, что для любого s и $p \geq 2$
$$\frac{F'(t)_{\nu,r,q}}{t^{(s-p+1)/p}} \notin L^p[0,1], \quad \text{если} \quad \nu \in \left[0, \frac{s(p-2)}{(p-1)pq}\right],$$
и
$$\frac{F'(t)_{\nu,r,q}}{t^{(s-p+1)/p}} \in L^p[0,1], \quad \text{если} \quad \nu \in \left(\frac{s(p-2)}{(p-1)pq}, \frac{s}{(p-1)q}\right].$$
Для абсолютно непрерывной функции $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y'(t)/(t^{(s-p+1)/p}) \in L^2[0,1]$ имеем
$$y^p(t) \leq \left(\int_0^t |y'(\tau)|d\tau\right)^p \leq \left(\int_0^t \tau^{\frac{s-p+1}{p-1}}d\tau\right)^{p-1}\int_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-p+1}}d\tau = \left(\frac{p-1}{s}\right)^{p-1} t^s \int_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-p+1}}d\tau.$$
Используя последнюю оценку и первое равенство в (2.1.4), получим
$$\lim_{t\to 0+}\frac{y^p(t)}{t^{s-1+p}}\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-1} = 0.$$
Теперь докажем одномерный результат. Используя свойства функцию Бесселя и частные случаи функций G и Q из **леммы B** Д.Т. Шама, получаем следующее утверждение.

Лемма 2.3.1. *Пусть $s \in (0,+\infty)$, $q \in (0,+\infty)$, $p \in [2,+\infty)$ и $\nu \in [0, r/q]$, y является абсолютно непрерывной неубывающей на отрезке $[0,1]$ функцией такой, что $y(0) = 0$ и $y'(t)/t^{(s-p+1)/p} \in L^p[0,1]$. Тогда*
$$h\int_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-p+3}}\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2}dt + \lambda^2\int_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-p+3-q}}\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2}dt \leq \int_0^1 \frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt, \tag{2.3.9}$$
где
$$r = \frac{s}{p-1}, \; h = (p-1)\frac{r^2-\nu^2q^2}{4}, \; \lambda = \frac{q\sqrt{p-1}}{2}\lambda_\nu(2s/q(p-1)).$$
Если $\nu \in \left[0, \frac{s(p-2)}{(p-1)pq}\right]$, то нет допустимой функции $y \not\equiv 0$ для которого равенство в (2.3.9) фактически достигается. Если $\nu \in \left(\frac{s(p-2)}{(p-1)pq}, \frac{s}{(p-1)q}\right]$, то равенство в (2.3.9) достигается тогда и только тогда, когда $y(t) = CF_{\nu,r,q}(t)$, где C — некоторая произвольная константа.

Доказательство. Пусть $a = \varepsilon$, $b = 1$, $c = 1$ и
$$G(y,t) = \frac{y^p(t)}{t^{s+1-p}}\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-1}, \quad Q(t) = \frac{1}{t^{s+1-p}}.$$
Элементарные вычисления дают, что
$$\left(\frac{1}{p}\right)^{p/(p-1)}(p-1)G_u^{p/(p-1)}Q^{-1/(p-1)} = (p-1)\frac{y^p(t)}{t^{s+1-p}}\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^p$$

и

$$G_t=(p-1)\frac{y^p(t)}{t^{s-p+3}}\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2}\left(\frac{t^2F''_{\nu,r,q}(t)+F'_{\nu,r,q}(t)\left(1-\frac{s}{p-1}\right)t}{F_{\nu,r,q}(t)}-\left(\frac{tF'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^2\right).$$

Используя уравнение (2.3.2), получаем

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{p/(p-1)}(p-1)G_u^{p/(p-1)}Q^{-1/(p-1)}+G_t=$$

$$=-\frac{y^p(t)}{t^{s-p+3}}(p-1)\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2}\left(\frac{r^2-\nu^2q^2}{4}+\frac{q^2\lambda_\nu^2(2r/q)}{4t^{-q}}\right).$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_\varepsilon^1\frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt-\int\limits_\varepsilon^1\left((p-1)y^p(t)\left(\frac{F'_{\nu,r,q}}{F_{\nu,r,q}}\right)^{p-2}\left(\frac{r^2-\nu^2q^2}{4t^{s-p+3}}+\frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q(p-1))}{4t^{s-p+3-q}}\right)\right)dt\geq$$

$$\geq y^p(1)\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(1)}{F_{\nu,r,q}(1)}\right)^{p-1}-\frac{y^p(\varepsilon)}{\varepsilon^{s+1-p}}\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(\varepsilon)}{F_{\nu,r,q}(\varepsilon)}\right)^{p-1}.$$

Очевидно, переходя к пределу $\varepsilon\to 0$, получим (2.3.9).

Из **леммы B** также следует, что константы в неравенстве (2.3.9) точны, если

$$y(t)=CF_{\nu,r,q}(t),$$

где C — некоторая константа, в частности, $C=0$. Заметим, что функция

$$\frac{F'(t)_{\nu,r,q}}{t^{(s-p+1)/p}}\in L^p[0,1]$$

только при $\nu\in\left(\frac{s(p-2)}{(p-1)pq},\frac{s}{(p-1)q}\right]$. Следовательно, при $\nu\in\left[0,\frac{s(p-2)}{(p-1)pq}\right]$ мы должны положить, что $C=0$, а при $\nu\in\left(\frac{s(p-2)}{(p-1)pq},\frac{s}{(p-1)q}\right]$, любая константа C допустима.

Это завершает доказательство леммы 2.3.1. □

Следствие 2.3.3. *Пусть $s\in(0,+\infty)$, $q\in(0,+\infty)$, $p\in[2,+\infty)$, $r=\frac{s}{p-1}$, y — абсолютно непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция такая,что $y(0)=0$ и $y'(t)/t^{(s-p+1)/p}\in L^p[0,1]$. Тогда*

$$\int\limits_0^1\frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt\geq(p-1)\frac{r^p}{2^p}\int\limits_0^1\frac{y^p(t)}{t^{s+1}}dt+(p-1)\frac{q^2r^{p-2}\lambda_0^2(2r/q)}{2^p}\int\limits_0^1\frac{y^p(t)}{t^{s+1-q}}dt.\qquad(2.3.10)$$

Доказательство. Следствие 2.3.3 получается из равенства

$$\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}=\frac{1}{t}\left(\frac{r}{2}+qx^{\frac{q}{2}}\lambda_\nu(2r/q)\frac{J'_\nu(\lambda_\nu(2r/q)t^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda_\nu(2r/q)t^{\frac{q}{2}})}\right)$$

и неравенства

$$\frac{F'_{0,r,q}(t)}{F_{0,r,q}(t)}\geq\frac{r}{2t},\quad t\in(0,1).$$

□

В следующей лемме мы докажем, что константы в (2.3.9) точны в случае $\nu \in \left[0, \frac{s(p-2)}{(p-1)pq}\right]$. Обратим внимание, что константа h точна при $p = 2$ (подробности см. в [59]).

Лемма 2.3.2. *Пусть $s \in (0, +\infty)$, $q \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$ и $\nu \in \left[0, \frac{r(p-2)}{pq}\right]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция g_ε удовлетворяющие условиям леммы 2.3.1 и следующему неравенству*

$$\int_0^1 \frac{g_\varepsilon'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt \le h \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^p(t)}{t^{s-p+3}} \left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2} dt + \left(\lambda^2 + \varepsilon\right) \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^p(t)}{t^{s-p+3-q}} \left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2} dt,$$

где

$$r = \frac{s}{p-1}, \ h = (p-1)\frac{r^2 - \nu^2 q^2}{4}, \ \lambda = \frac{q\sqrt{p-1}}{2}\lambda_\nu(2r/q).$$

Доказательство. Пусть

$$P_\varepsilon := h \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^p(t)}{t^{s-p+3}} \left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2} dt + \left(\lambda^2 + \varepsilon\right) \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^p(t)}{t^{s-p+3-q}} \left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2} dt - \int_0^1 \frac{g_\varepsilon'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt.$$

Используя равенства из доказательства леммы 2.3.1, имеем

$$\int_0^1 \frac{g_\varepsilon'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt - h \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^p(t)}{t^{s-p+3}} \left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2} dt - \lambda^2 \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^p(t)}{t^{s-p+3-q}} \left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{g_\varepsilon'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt + (p-1) \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^p(t)}{t^{s-p+3}} \left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2} \left(\frac{t^2 F''_{\nu,r,q}(t) + (1-r)\, F'_{\nu,r,q}(t)t}{F_{\nu,r,q}(t)}\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{g_\varepsilon'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt + (p-1) \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^p(t)}{t^{s-p+1}} \left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p} dt - p \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^{p-1}(t) g_\varepsilon'(t)}{t^{s-p+1}} \left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-1} dt = \int_0^1 \frac{g_\varepsilon^p(t)}{t^{s-p+1}} L(t)dt,$$

где

$$L(t) = \left(\frac{g_\varepsilon'(t)}{g_\varepsilon(t)}\right)^p + (p-1)\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^p - p\frac{g_\varepsilon'(t)}{g_\varepsilon(t)}\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-1} =$$

$$= p^{p/(p-1)}\left(\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^p \left(\left(\frac{g_\varepsilon'(t) F_{\nu,r,q}(t)}{p^{1/(p-1)} g_\varepsilon(t) F'_{\nu,r,q}(t)}\right)^p - \frac{1}{p^{1/(p-1)}}\frac{g_\varepsilon'(t) F_{\nu,r,q}(t)}{g_\varepsilon(t) F'_{\nu,r,q}(t)} + \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}\right) \ge 0.$$

Рассмотрим функцию

$$g_\varepsilon(t) = t^{\frac{s+\alpha}{p}}, \quad t \in [0,1].$$

Прямые вычисления дают

$$z(t) = \frac{g_\varepsilon'(t) F_{\nu,r,q}(t)}{p^{1/(p-1)} g_\varepsilon(t) F'_{\nu,r,q}(t)} = \frac{1}{p^{1/(p-1)}}\left(\frac{s+\alpha}{p}\frac{F_{\nu,r,q}(t)}{tF'_{\nu,r,q}(t)}\right).$$

Используя тот факт, что

$$v(y) = \begin{cases} y^p - y + \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}} > 0, & \text{если} \quad y \ge 0, \ y \ne \dfrac{1}{p^{1/(p-1)}}, \\ 0, & \text{если} \quad y = \dfrac{1}{p^{1/(p-1)}}, \end{cases}$$

где $y = z(t)$, мы получим $0 < L(t) < \infty$.

Таким образом, мы можем выбрать достаточно малое $\alpha > 0$, для которого

$$P_\varepsilon := \varepsilon \int\limits_0^1 t^{q+\alpha-1} \left(\frac{tF'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2} dt - \int\limits_0^1 t^{\alpha-1} \left(\frac{tF'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p} \left(z^p(t) - z(t) + \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}\right) dt =$$

$$= \varepsilon \int\limits_0^1 t^{2q-1} \left(\frac{tF'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p-2} dt - \alpha \max_{0\le t\le 1} \left(\frac{tF'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)}\right)^{p} \left(z^p(t) - z(t) + \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}\right) dt > 0.$$

Это завершает доказательство леммы 2.3.2. $\square$

Так как справедливо равенство

$$J'_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t} J_\nu(t),$$

мы получим

$$\frac{F'_{\nu,r,q}(t)}{F_{\nu,r,q}(t)} = \left(\frac{r}{2} - \frac{q\nu}{2} + \frac{q\lambda_\nu(2r/q)t^{q/2}}{2} \frac{J_{\nu-1}(\lambda_\nu(2r/q)t^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda_\nu(2r/q)t^{\frac{q}{2}})}\right) \frac{1}{t}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.3.3. *Пусть* $s \in (0, +\infty)$, $q \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$ *и* $\nu \in [0, r/q]$, y *— абсолютно непрерывная неубывающая на отрезке* $[0, 1]$ *функция такая, что* $y(0) = 0$ *и* $y'(t)/t^{(s-p+1)/p} \in L^p[0, 1]$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^1 \frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}} dt \ge h \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s+1}} \mathfrak{J}_\nu(t) dt + \lambda^2 \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s+1-q}} \mathfrak{J}_\nu(t) dt, \tag{2.3.11}$$

где

$$\mathfrak{J}_\nu(t) = \left(\frac{r}{2} - \frac{q\nu}{2} + \frac{q\lambda_\nu(2r/q)t^{q/2}}{2} \frac{J_{\nu-1}(\lambda_\nu(2r/q)t^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda_\nu(2r/q)t^{\frac{q}{2}})}\right)^{p-2},$$

$$r = \frac{s}{p-1}, \quad h = (p-1)\frac{r^2 - \nu^2 q^2}{4}, \quad \lambda = \frac{q\sqrt{p-1}}{2} \lambda_\nu(2s/q(p-1)).$$

Далее получим неравенства на произвольном конечном отрезке $[a, b]$. Справедлива теорема

Теорема 2.3.4. *Пусть функция* $y \in C_0^1(a, b)$ *такая, что* $y(a) = y(b) = 0$. *Тогда при* $s \in (0, +\infty)$, $q \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$ *и* $\nu \in [0, r/q]$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s-p+1}(t)} dt \ge h \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1}(t)} \mathfrak{J}_\nu\left(\frac{\rho(t)}{\delta_0}\right) dt + \frac{\lambda^2}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s+1-q}(t)} \mathfrak{J}_\nu\left(\frac{\rho(t)}{\delta_0}\right) dt,$$

где

$$\rho(t) = \min\{t - a, b - t\}, \quad \delta_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Доказательство. Следует отметить, что для произвольной функции неравенство (2.3.9) слабее, чем для монотонной функции. Этот факт и замена переменной $\tau = \rho t$ в (2.3.9) на произвольное $\rho > 0$ приводит к следующему соотношению

$$\int_0^\rho \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-p+1}}d\tau \geq h\int_0^\rho \frac{|y(\tau)|^p}{\tau^{s+1}}\mathfrak{J}_\nu\left(\tau/\rho\right)d\tau + \frac{\lambda^2}{\rho}\int_0^1 \frac{|y(\tau)|^p}{\tau^{s+1-q}}\mathfrak{J}_\nu\left(\tau/\rho\right)d\tau.$$

Теперь применим это неравенство к функциям $y(\tau) = g(\tau + a)$ и $y(\tau) = g(b-\tau)$ где $\rho = \delta_0 = \frac{b-a}{2}$. Имеем

$$\int_a^{a+\delta_0} \frac{|g'(t)|^p}{(t-a)^{s-p+1}}dt \geq h\int_0^{a+\delta_0} \frac{|g(t)|^p}{(t-a)^{s+1}}\mathfrak{J}_\nu\left(\frac{t-a}{\delta_0}\right)dt + \frac{\lambda^2}{\delta_0}\int_0^{a+\delta_0} \frac{|g(t)|^p}{(t-a)^{s+1-q}}\mathfrak{J}_\nu\left(\frac{t-a}{\delta_0}\right)dt,$$

$$\int_{b-\delta_0}^{\delta_0} \frac{|g'(t)|^p}{(b-t)^{s-p+1}}dt \geq h\int_{b-\delta_0}^{\delta_0} \frac{|g(t)|^p}{(b-t)^{s+1}}\mathfrak{J}_\nu\left(\frac{b-t}{\delta_0}\right)dt + \frac{\lambda^2}{\delta_0}\int_{b-\delta_0}^{\delta_0} \frac{|g(t)|^p}{(b-t)^{s+1-q}}\mathfrak{J}_\nu\left(\frac{b-t}{\delta_0}\right)dt.$$

Суммируя эти два неравенства, получаем требуемый результат. □

§2.4 Неравенства для одной специальной весовой функции

2.4.1 Уравнение и постоянная Лэмба

В данном разделе мы приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные сведения. В основном они будут касаться свойств двух введенных специальных функций.

2.4.2 Первая введенная специальная функция

Предположим, что $q \in (0,\infty)$, $s \in (0,\infty)$ и $\nu \geq 0$. Рассмотрим функцию $F_{\nu,s,q}$, определенную следующим образом

$$F_{\nu,s,q}(t) = t^{\frac{s}{2}}\sqrt{(2-t)}J_\nu\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right), \quad t \in [0,1],$$

где через J_ν обозначена функция Бесселя порядка ν и константа λ является первым положительным решением уравнения типа Лэмба

$$(s-1)J_\nu\left(\lambda\right) + 2q\lambda J'_\nu\left(\lambda\right) = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu). \tag{2.4.1}$$

Здесь и далее через j_ν будем обозначать первый положительный корень функции Бесселя J_ν. Подробную информацию о свойствах функции Бесселя и её нулях можно найти в монографии Дж.Н. Ватсона [26].

Приведем лишь некоторые свойства этой функции, которые в дальнейшем мы будем использовать. Известно, что:

а) $u(t) = J_\nu(t)$ является решением дифференциального уравнения Бесселя:

$$t^2u''(t) + tu'(t) + \left(t^2 - \nu^2\right) u(t) = 0;$$

б) справедлива следующая асимптотическая формула

$$J_\nu(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu, t \to 0.$$

Перейдем к некоторым свойствам ранее введенной функции $F_{\nu,s,q}$. Так как, исходя из определения $F_{\nu,s,q}(t) > 0$, при достаточно малых t и при $t \in (0,1]$ имеем

$$\lambda \left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}} \in (0, j_\nu),$$

то функция $F_{\nu,s,q}(t)$ является строго положительной также при $t \in (0,1]$.

Непосредственные выкладки дают следующее выражение для производной этой функции

$$t^{1-\frac{s}{2}} F'_{\nu,s,q}(t) = \frac{s(2-t)-t}{2\sqrt{2-t}} J_\nu \left(\lambda \left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right) + q\lambda \frac{t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{1}{2}+\frac{q}{2}}} J'_\nu \left(\lambda \left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right).$$

Для удобства перепишем это равенство в более компактном виде

$$v(t) F'_{\nu,s,q}(t) = w(t) J_\nu\left(z(t)\right) + 2z(t) J'_\nu\left(z(t)\right),$$

где

$$v(t) = \frac{2t^{1-\frac{s}{2}}\sqrt{2-t}}{q}, \quad w(t) = -\frac{s+1}{q}t + \frac{2s}{q} \quad \text{и} \quad z(t) = \lambda \left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}.$$

При каждом фиксированном $t \in (0,1]$ рассмотрим уравнение типа Лэмба

$$w(t) J_\nu\left(z(t)\right) + 2z(t) J'_\nu\left(z(t)\right) = 0.$$

В статье [59] Ф.Г. Авхадиевым и К.-Й. Виртсом показано, что решение этого уравнения $z(t)$ монотонно возрастает при увеличении $w(t)$ и при этом $z(t) < j_\nu$. Поэтому так как функция $w(t)$ — убывающая, то при $t = 1$, мы получим, что решение $z(1) = \lambda$ уравнения

$$w(1) J_\nu\left(z(1)\right) + 2z(1) J'_\nu\left(z(1)\right) = 0$$

является наименьшим на интервале $(0, j_\nu)$. Этот факт существенно будет использоваться далее. Например, отсюда следует, что $F'_{\nu,s,q}(t) > 0$ при $t \in (0,1)$ и $F'_{\nu,s,q}(1) = 0$.

Действительно, имеем $F'_{\nu,s,q}(t) > 0$ при достаточно малых t. Если положить противное, т.е. что $F'_{\nu,s,q}(t) \le 0$ для некоторых t, то найдется точка $t_0 \in (0,1)$, для которой $F'_{\nu,s,q}(t_0) = 0$, т.е. найдется найдется решение $z(t_0)$ уравнения

$$w(t_0) J_\nu\left(z(t_0)\right) + 2z(t_0) J'_\nu\left(z(t_0)\right) = 0$$

такое, что $z(t_0) < z(1) = \lambda$. Это противоречит минимальности λ.

Так как справедлива следующая формула, связывающая функцию Бесселя и её производную (см., например, [26]),

$$J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z),$$

то

$$\frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} = \frac{s(2-t)-t}{2t(2-t)} + q\lambda \frac{t^{\frac{q}{2}-1}}{(2-t)^{1+\frac{q}{2}}} \frac{J'_\nu\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)} =$$
$$= \frac{s(2-t)-t}{2t(2-t)} - q\nu\frac{2-t}{t} + q\lambda \frac{t^{\frac{q}{2}-1}}{(2-t)^{1+\frac{q}{2}}} \frac{J_{\nu-1}\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_\nu\left(\lambda\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}$$

и уравнение Лэмба (2.4.1) можно переписать следующим образом:

$$(s - 2\nu q - 1)J_\nu(\lambda) + 2q\lambda J_{\nu-1}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu).$$

Также стоит отметить, что используя свойство а) функции Бесселя, мы можем получить следующее равенство для второй производной функции $F_{\nu,s,q}$:

$$\frac{F''_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} + (1-s)\frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{tF_{\nu,s,q}(t)} = -\frac{s^2-\nu^2q^2}{t^2} - (1-\nu^2q^2)\frac{4-t}{t(2-t)^2} - \frac{4\lambda^2q^2}{(2-t)^{2+q}}. \tag{2.4.2}$$

Наконец, используя разложение в ряд функции Бесселя, имеем

$$\lim_{t\to 0} \frac{tF'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} = \frac{s+\nu q}{2} \tag{2.4.3}$$

(см. также [58, 59] для большей информации).

2.4.3 Вторая введенная специальная функция

Теперь предположим, что $q \in (0,\infty)$ и $s \in (0,\infty)$. Далее мы также будем использовать функцию $\Phi_{s,q}$ определенную следующим образом:

$$\Phi_{s,q}(t) = t^{\frac{s}{2}} J_0\left(\lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right), \quad t \in [0,1],$$

где константа λ_1 является первым положительным решением уравнения

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Непосредственные выкладки дают

$$2(2-t)t^{1-\frac{s}{2}}\Phi'_{s,q}(t) = s(2-t)J_0\left(\lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right) - 2q\lambda_1\frac{t^{\frac{q}{2}}}{(2-t)^{\frac{q}{2}}} J_1\left(\lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right).$$

Выше мы воспользовались тем, что $J_0'(z) = -J_1(z)$. Последнее равенство перепишем следующим образом

$$v(t)\Phi_{s,q}'(t) = w(t)J_0\left(z(t)\right) - 2z(t)J_1\left(z(t)\right),$$

где

$$v(t) = \frac{2}{q}(2-t)t^{1-\frac{s}{2}}, \quad w(t) = -\frac{s}{q}t + \frac{2s}{q}, \quad z(t) = \lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}.$$

При каждом фиксированном $t \in (0,1]$ рассмотрим уравнение

$$w(t)J_0\left(z(t)\right) - 2z(t)J_1\left(z(t)\right) = 0.$$

По аналогии с функцией $F_{\nu,s,q}$, так как функция $w(t)$ — убывающая, то при $t = 1$, мы получим, что решение $\lambda_1 = z(1)$ уравнения

$$w(1)J_0\left(z(1)\right) - 2z(1)J_1\left(z(1)\right) = 0$$

является наименьшим.

Ясно, что $\Phi_{s,q}(0) = 0$, $\Phi_{s,q}(t) > 0$ и $\Phi_{s,q}'(t) > 0$ для достаточно малых t. Используя определение постоянной Лэмба λ_1, получим

$$\Phi_{s,q}'(1) = 0, \quad \Phi_{s,q}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0,1], \quad \Phi_{s,q}'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0,1).$$

Также стоит отметить, что применяя свойство а) функции Бесселя можем получить следующее равенство

$$\frac{\Phi_{s,q}''(t)}{\Phi_{s,q}(t)} + (1-s)\frac{\Phi_{s,q}'(t)}{t\Phi_{s,q}(t)} = -\frac{s^2}{4t^2} - \frac{\lambda_1^2 q^2}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}} - \lambda_1 q \frac{t^{-1+q/2}}{(2-t)^{2+q/2}} \frac{J_1\left(\lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}{J_0\left(\lambda_1\left(\frac{t}{2-t}\right)^{\frac{q}{2}}\right)},$$

в котором участвует, как мы покажем ниже, возрастающая при $z \in [0,2]$ функция $J_1(z)/(zJ_0(z))$.

Действительно, справедливо утверждение

Лемма 2.4.1. *Непрерывная функция* $h(t) = \frac{J_1(t)}{tJ_0(t)}$ *является возрастающей при* $t \in [0,2]$ *и* $\inf_{t\in[0,2]} h(t) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Покажем, что производная $h'(t) \geq 0$ при $t \in [0,2]$. Используя следующие известные равенства для функции и производной функции Бесселя (см., например, [26, с. 45 и 152])

$$J_0'(t) = -J_1(t), \quad tJ_1'(t) - J_1(t) = -tJ_2(t),$$

$$J_1^2(t) - J_0(t)J_2(t) = \frac{4}{t^2}\sum_{j=0}^{\infty}(2+2j)J_{2+2j}^2(t),$$

получим

$$h'(t)=\frac{tJ_1'(t)J_0(t)-J_1(t)J_0(t)-tJ_0'(t)J_1(t)}{t^2J_0^2(t)}=\frac{J_0(t)\left(tJ_1'(t)-J_1(t)\right)+tJ_1^2(t)}{t^2J_0^2(t)}=$$

$$=\frac{J_1^2(t)-J_0(t)J_2(t)}{tJ_0^2(t)}=\frac{4}{t^3}\sum_{j=0}^{\infty}(2+2j)J_{2+2j}^2(t)\geq 0.$$

Следовательно, функция является возрастающей и по свойству б) имеем

$$\inf_{t\in[0,2]}h(t)=\lim_{t\to 0}h(t)=\frac{1}{2}.$$

$\square$

Используя эту лемму, получим

$$\frac{\Phi_{s,q}''(t)}{\Phi_{s,q}(t)}+(1-s)\frac{\Phi_{s,q}'(t)}{t\Phi_{s,q}(t)}\leq -\frac{s^2}{4t^2}-\frac{\lambda_1^2q^2}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}}-\frac{\lambda_1^2 q}{2}\frac{t^{q-1}}{(2-t)^{2+q}}.$$

Также используя разложение в ряд функции Бесселя, имеем

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\Phi_{s,q}'(t)}{\Phi_{s,q}(t)}=\frac{s}{2}.$$

2.4.4 Одномерные неравенства, родственные результатам Тидблума

В данном разделе мы получим одномерные неравенства на единичном отрезке $[0,1]$ и на отрезке вида $[0,2b]$. Мы будем существенно использовать свойства функций, введенных в предыдущем пункте.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.4.2. *Пусть $p\geq 2$, $s>0$, $q\in(0,+\infty)$, $\nu\in[0,s/q]$ и функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0,1]$ и такой, что $y(0)=0$, $|y'(t)|t^{(p+1-s)/p}\in L^p[0,1]$. Тогда имеет место неравенство*

$$c_{p,s}\int_0^1\frac{|y'(t)|^p}{t^{s-p+1}}dt\geq\int_0^1\frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}}\left(1+\frac{1-\nu^2q^2}{s^2-\nu^2q^2}\frac{p}{2}\frac{(4-t)t}{(2-t)^2}+\frac{2p\lambda^2q^2}{s^2-\nu^2q^2}\frac{t^q}{(2-t)^{2+q}}\right)dt,$$

где λ — первый положительный корень уравнения

$$-1-2\nu q+s+2qz\frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)}=0,$$

а постоянная

$$c_{p,s}=\frac{p^p}{(s^2-\nu^2q^2)^{p/2}}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что функция y является положительной и неубывающей функцией.

Несложно показать, что

$$0 \le P := \int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t)}{t^{s-1}} \left(y'(x) - \frac{2}{p} \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} y(t) \right)^2 dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t) y'^2(t)}{y^{s-1}(t)} dt - \frac{4}{p^2} \int\limits_0^1 \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t) t^{s-1}} dy^p(t) + \frac{4}{p^2} \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \frac{F'^2_{\nu,s,q}(t)}{F^2_{\nu,s,q}(t)} dt.$$

Интегрированием по частям получим

$$P = \int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t) y'^2(t)}{t^{s-1}} dt - y^p(1) \frac{F'_{\nu,s,q}(1)}{F_{\nu,s,q}(1)} + \lim_{t\to 0} \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} +$$

$$+ \frac{4}{p^2} \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \left(\frac{F''_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} + (1-s) \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{t F_{\nu,s,q}(t)} \right) dt.$$

Используя определение постоянной λ, имеем

$$y^p(1) \frac{F'_{\nu,s,q}(1)}{F_{\nu,s,q}(1)} = \frac{y^p(1)}{2} \left(-1 - 2\nu q + s + 2q\lambda \frac{J_{n-1}(\lambda)}{J_n(\lambda)} \right) = 0.$$

Для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $|y'(t)| t^{(p-s-1)/p} \in L^p[0,1]$, получим

$$|y(t)|^p \le \left(\int\limits_0^t |y'(\tau)| d\tau \right)^p \le \left(\int\limits_0^t \tau^{\frac{s-p+1}{p-1}} d\tau \right)^{p-1} \int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-p+1}} d\tau = \left(\frac{p-1}{s} \right)^{p-1} t^s \int\limits_0^t \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s-p+1}} d\tau.$$

Следовательно, принимая во внимание (2.4.3), имеем

$$\lim_{t\to 0} \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \frac{F'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} = 0.$$

Используя равенство (2.4.2), получим

$$p^2 \int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t) y'^2(t)}{t^{s-1}} dt \ge \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{t^2} + (1 - \nu^2 q^2) \frac{4-t}{t(2-t)^2} + \frac{4\lambda^2 q^2}{t^{2-q}(2-t)^{2+q}} \right) dt.$$

Таким образом,

$$\frac{p^2}{s^2 - \nu^2 q^2} \int\limits_0^1 \frac{y^{p-2}(t) y'^2(t)}{t^{s-2}} dt \ge \int\limits_0^1 \frac{y^p(t)}{t^{s-1}} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1 - \nu^2 q^2}{s^2 - \nu^2 q^2} \frac{4-t}{t(2-t)^2} + \frac{4\lambda^2 q^2}{(s^2 - \nu^2 q^2) t^{2-q} (2-t)^{2+q}} \right) dt.$$

Применяя теорему о обобщенном среднем арифметическом, записанную в следующей форме (см. [109])

$$a^{p_1} b^{p_2} \le \left(\frac{p_1 a + p_2 b}{p_1 + p_2} \right)^{p_1 + p_2}$$

для величин

$$a=\frac{y^p(t)}{t^s},\quad b=\frac{p^p}{(s^2-\nu^2q^2)^{p/2}}\frac{y'^p(t)}{t^{s+1-p}},\quad p_1=1-\frac{2}{p}\quad \text{и}\quad p_2=\frac{2}{p},$$

имеем

$$\frac{p^p}{(s^2-\nu^2q^2)^{p/2}}\int\limits_0^1\frac{y'^p(t)}{t^{s-p+1}}dt\geq\int\limits_0^1\frac{y^p(t)}{t^{s-1}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1-\nu^2q^2}{s^2-\nu^2q^2}\frac{p}{2}\frac{4-t}{t(2-t)^2}+\frac{2p\lambda^2q^2}{(s^2-\nu^2q^2)t^{2-q}(2-t)^{2+q}}\right)dt.$$

Это завершает доказательство леммы 2.4.2. $\square$

При $s=p-1$ и $q=1$ из леммы 2.4.2 несложно получить следующее утверждение.

Следствие 2.4.1. *Пусть $p\geq 2$, $\nu\in[0,p-1]$ и функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0,1]$ и такой, что $y(0)=0$, $|y'(t)|\in L^p[0,1]$. Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{p^p}{((p-1)^2-\nu^2)^{\frac{p}{2}}}\int\limits_0^1|y'(t)|^pdt\geq$$

$$\geq\int\limits_0^1\frac{|y(t)|^p}{t^{p-2}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{p(1-\nu^2)}{2((p-1)^2-\nu^2)}\frac{4-t}{t(2-t)^2}+\frac{2p\lambda^2}{((p-1)^2-\nu^2)t(2-t)^3}\right)dt,$$

где λ — первый положительный корень уравнения

$$-1-2\nu+s+2z\frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)}=0.$$

Перейдем к неравенствам на отрезке $[0,2b]$ в терминах функций

$$\rho(t)=\min\{t,2b-t\}\quad \text{и}\quad \mu(t)=2b-\rho(t).$$

Имеет место теорема.

Теорема 2.4.1. *Предположим, что $0<b<\infty$, $p\in[2,\infty)$ и $\nu\in[0,p-1]$. Если $y:[0,2b]\to\mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной функцией такой, что $y(0)=y(2b)=0$ и $|y'(t)|\in L^p[0,2b]$, то имеет место следующее неравенство*

$$\frac{p^p}{((p-1)^2-\nu^2)^{\frac{p}{2}}}\int\limits_0^{2b}|y'(t)|^pdt\geq\int\limits_0^{2b}\frac{|y(t)|^p}{\rho^{p-2}(t)}\left(\frac{1}{\rho^2(t)}+\frac{c_1}{\rho(t)\mu(t)}+\frac{c_2}{\mu^2(t)}+\frac{p\lambda^2}{2((p-1)^2-\nu^2)}\frac{\rho(t)}{\mu^3(t)}\right)dt,$$

где

$$c_1=\frac{p(2+\lambda^2)-2\nu^2}{2(p-1)^2-\nu^2},\quad c_2=\frac{p(1+2\lambda^2)-2\nu^2}{2((p-1)^2-\nu^2)}$$

и λ — первый положительный корень уравнения

$$-1-2\nu+s+2z\frac{J_{\nu-1}(z)}{J_\nu(z)}=0.$$

Доказательство. Неравенство следствия 2.4.1 можно записать в виде

$$\frac{p^p}{((p-1)^2-\nu^2)^{\frac{p}{2}}}\int\limits_0^1 |y'(t)|^p dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{p-2}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{c_1}{t(2-t)}+\frac{c_2}{(2-t)^2}+\frac{p\lambda^2}{2((p-1)^2-\nu^2)}\frac{t}{(2-t)^3}\right)dt.$$

С помощью замены переменной $t=\tau/b$ в последнем неравенстве получим

$$\frac{p^p}{((p-1)^2-\nu^2)^{\frac{p}{2}}}\int\limits_0^b |y'(\tau)|^p d\tau \geq$$

$$\geq \int\limits_0^b \frac{|y(\tau)|^p}{\tau^{p-2}}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{c_1}{\tau(2b-\tau)}+\frac{c_2}{(2b-\tau)^2}+\frac{p\lambda^2}{2((p-1)^2-\nu^2)}\frac{t}{(2b-\tau)^3}\right)d\tau.$$

Объединяя последнее неравенство со следующим неравенством на интервале $[b,2b]$

$$\frac{p^p}{((p-1)^2-\nu^2)^{\frac{p}{2}}}\int\limits_b^{2b} |y'(\tau)|^p d\tau \geq$$

$$\geq \int\limits_b^{2b} \frac{|y(\tau)|^p}{(2b-\tau)^{p-2}}\left(\frac{1}{(2b-\tau)^2}+\frac{c_1}{\tau(2b-\tau)}+\frac{c_2}{\tau^2}+\frac{p\lambda^2}{2((p-1)^2-\nu^2q^2)}\frac{2b-\tau}{\tau^3}\right)d\tau,$$

для функции $y\in C^1(b,2b)$ такой, что $y(2b)=0$, получим утверждение теоремы. □

Далее мы будем применять свойства второй введенной выше функции для обоснования новых неравенств. Имеет место следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.4.3. *Пусть $p\geq 2$, $s>0$, $q\in(0,+\infty)$ и функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0,1]$ и такой, что $y(0)=0$,*

$$|y'(t)|t^{(p+1-s)/p}\in L^p[0,1].$$

Тогда имеет место неравенство

$$\int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{s-p+1}}dt \geq \frac{s^p}{p^p}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s+1}}\left(1+\frac{2\lambda_1^2q^2p}{s^2}\frac{t^q}{(2-t)^{2+q}}+\frac{p\lambda_1^2q}{s^2}\frac{t^{q+1}}{(2-t)^{2+q}}\right)dt,$$

где λ_1 — первый положительный корень уравнения

$$sJ_0(\lambda_1)-2q\lambda_1J_1(\lambda_1)=0,\quad \lambda_1\in(0,j_0).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.4.2. □

При $q=1$ имеем

Следствие 2.4.2. *Пусть $s>0$, $p\geq 2$ и функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0,1]$ и такой, что $y(0)=0$, $|y'(t)|\in L^p[0,1]$. Тогда имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^1 \frac{|y'(t)|^p}{t^{s+1-p}}dt \geq \frac{s^p}{p^p}\int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-1}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2\lambda_1^2 p}{s^2}\frac{1}{t(2-t)^3}+\frac{p\lambda_1^2}{s^2}\frac{1}{(2-t)^3}\right)dt,$$

где λ — первый положительный корень уравнения

$$sJ_0(\lambda_1)-2\lambda_1 J_1(\lambda_1)=0, \quad \lambda_1\in(0,j_0).$$

Теорема 2.4.2. *Предположим, что $0<b<\infty$, $p\in[2,\infty)$ и $\nu\in[0,p-1]$. Если $y:[0,2b]\to\mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной функцией такой, что $y(0)=y(2b)=0$ и $|y'(t)|\rho^{-(s+1-p)/p}\in L^p[0,2b]$, то имеет место следующее неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p\int\limits_0^{2b} \frac{|y'(t)|^p}{\rho^{s+1-p}(t)}dt \geq \int\limits_0^{2b} \frac{|y(t)|^p}{\rho^{s-1}(t)}\left(\frac{1}{\rho^2(t)}+\frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\left[\frac{1}{\rho(t)\mu(t)}+\frac{3}{\mu^2(t)}+\frac{2\rho(t)}{\mu^3(t)}\right]\right)dt,$$

где λ_1 — первый положительный корень уравнения

$$sJ_0(\lambda_1)-2\lambda_1 J_1(\lambda_1)=0, \quad \lambda_1\in(0,j_0).$$

Доказательство. Неравенство следствия 2.4.2 можно преобразовать следующим образом:

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p\int\limits_0^1 |y'(t)|^p dt \geq \int\limits_0^1 \frac{|y(t)|^p}{t^{s-1}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\left[\frac{1}{t(2-t)}+\frac{3}{(2-t)^2}+\frac{2t}{(2-t)^3}\right]\right)dt.$$

С помощью замены переменной $t=\tau/b$ в последнем неравенстве получим

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p\int\limits_0^b \frac{|y'(\tau)|^p}{\tau^{s+1-p}}d\tau \geq \int\limits_0^b \frac{|y(\tau)|^p}{\tau^{s-1}}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\left[\frac{1}{\tau(2b-\tau)}+\frac{3}{(2b-\tau)^2}+\frac{2\tau}{(2b-\tau)^3}\right]\right)d\tau.$$

Объединяя последнее неравенство со следующим неравенством на интервале $[b,2b]$

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p\int\limits_b^{2b} \frac{|y'(\tau)|^p}{(2b-\tau)^{s+1-p}}d\tau \geq \int\limits_b^{2b} \frac{|y(\tau)|^p}{(2b-\tau)^{s-1}}\left(\frac{1}{(2b-\tau)^2}+\frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\left[\frac{1}{\tau(2b-\tau)}+\frac{3}{\tau^2}+\frac{2(2b-\tau)}{\tau^3}\right]\right)d\tau,$$

для функции $y\in C^1(b,2b)$ такой, что $y(2b)=0$, получим утверждение теоремы. □

§2.5 Об одном дискретном неравенстве типа Харди с логарифмическим весом

2.5.1 Введение

В 1920 году при попытке упростить неравенства Гильберта (см. [109, 119, 120]), Г.Х. Харди в статье [110] получил неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \tag{2.5.1}$$

где $p>1, a_n>0$ и $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Следующее утверждение является аналогом дискретного неравенства (2.5.1) в интегральном случае (см. [109]):

$$\int\limits_0^\infty \frac{F^p(x)}{x^p}dx \le \left(\frac{p}{|p-1|}\right)^p \int\limits_0^\infty f^p(x)dx,\ p>1,\ p\ne 1, \tag{2.5.2}$$

где $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция на $[0,\infty)$, а

$$F(x)=\begin{cases} \int\limits_0^x f(t)dt, & p>1,\\ \int\limits_x^\infty f(t)dt, & p<1.\end{cases}$$

Константа $(p/|p-1|)^p$ в общем случае не может быть заменена меньшей постоянной. Несмотря на то, что константа неулучшаема, не существует функции, на которой эта константа достигается.

В статьях [86–88, 103, 127, 134, 140] авторы получили дискретные неравенства Харди. Например, в [127] было доказано следующее обобщение неравенства типа Харди:

$$\sum_{n=1}^\infty n^\alpha \left(\frac{\sum\limits_{n=1}^{n} a_n^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p \sum_{n=1}^\infty \left(n-\frac{1}{2}\right)^\alpha a_n, \tag{2.5.3}$$

где $a_n\ge 0$ $(n\in\mathbb{N})$, $p>1$ и $-1<\alpha<p-1$.

Ясно, что дискретные неравенства (2.5.1) и (2.5.3) при $p=1$ и интегральное неравенство (2.5.2) при $p=1$ теряют смысл. В интегральном неравенстве логарифмический вес помогает устранить эту особенность и позволяет получить аналог неравенства (2.5.2) при исключительном случае параметра. Примеры использования логарифмов в неравенствах типа Харди можно увидеть в [27, 84, 114, 143, 197, 200, 201]. Приведем лишь результат Ю.А. Дубинского из статьи [27]:

Теорема А. *Пусть $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^1$ — локально интегрируемая функция такая, что интеграл*

$$\int\limits_0^\infty |f(r)|^p r^{p-1}dr,\quad p>1,$$

сходится. Тогда для любого $R>0$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{r\left|\ln\frac{r}{R}\right|^p}\left|\int\limits_R^r f(t)dt\right|^p dr \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^\infty |f(r)|^p r^{p-1}dr. \tag{2.5.4}$$

Обратим внимание, что в (2.5.4) логарифмический вес находится под знаком модуля (см. также [84,143,197]). Будут ли верны дискретные аналоги неравенства (2.5.4)? В этой части диссертации мы попытаемся ответить на это вопрос.

2.5.2 Основные результаты

Верна следующая теорема.

Теорема 2.5.1. *Пусть $p > 1$, $l \in [1, p]$, $a_i \geq 0$ и при целом $n \geq 1$*

$$A_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{[R]-1} a_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i, & 1 \leq n \leq [R], \\ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i - \sum\limits_{i=0}^{[R]+1} a_i, & n \geq [R]+1, \end{cases}$$

где $[R]$ — целая часть от нецелого числа $R > 1$. Тогда верно следующее неравенство типа Харди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log \frac{n}{R}\right|^p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{p-l} a_n^l}{(n+1)^{1-l}} \left|\log \frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.5.1. *Пусть $p \geq 1, n \in N$ и пусть R — произвольное нецелое положительное число. Если $R > n+1$, то*

$$p - (p-1)\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)} + \frac{\log \frac{R}{n+1}}{\log \frac{R}{n}}\right) \geq 1, \tag{2.5.5}$$

и если $R < n-1$, то

$$p - (p-1)\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{n}{R}\right)} + \frac{\log \frac{n-1}{R}}{\log \frac{n}{R}}\right) \geq 1. \tag{2.5.6}$$

Доказательство. Преобразуем неравенство (2.5.5). Имеем следующие эквивалентные переходы

$$p - 1 \geq (p-1)\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)} + \frac{\log \frac{R}{n+1}}{\log \frac{R}{n}}\right) \Longleftrightarrow 1 \geq \frac{1 + (n+1)\log \frac{R}{n+1}}{(n+1)\log \frac{R}{n}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (n+1)\log \frac{R}{n} \geq 1 + (n+1)\log \frac{R}{n+1} \Longleftrightarrow (n+1)\log \frac{n+1}{n} \geq 1.$$

Последнее неравенство легко устанавливается.

Теперь перепишем (2.5.6). Имеем

$$1 \geq \frac{1}{(n+1)\log \frac{n}{R}} + \frac{\log \frac{n-1}{R}}{\log \frac{R}{n}}.$$

После элементарных вычислений можем получить, что

$$(n+1)\log \frac{n}{R} \geq 1 + (n+1)\log \frac{n-1}{R} \Longleftrightarrow (n+1)\log \frac{n}{n-1} \geq 1.$$

Последнее утверждение также можно легко показать. □

Доказательство теоремы. Пусть $1 \le n \le [R]-2$. Определим функцию X следующим образом

$$X(n) = \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)^p} - \frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}a_n.$$

Из определения A_n следует, что

$$X(n) = \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)^p} - \frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}(A_n - A_{n+1}) =$$

$$= \frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{R}{n}} - \frac{p}{p-1}\right) + \frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}A_{n+1} =$$

$$= \frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{R}{n}} - \frac{p}{p-1}\right) + \frac{p}{p-1}\left(\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{\frac{(p-1)p}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}\log\frac{R}{n+1}.$$

Используя неравенство Гёльдера при соответствующих значениях параметров, имеем

$$X(n) \le \frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{R}{n}} - \frac{p}{p-1}\right) + \frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{\frac{(p-1)p}{p-1}}\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{-1}} + \frac{1}{p-1}\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{p-1}} =$$

$$= \frac{1}{p-1}\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{p-1}} - \frac{1}{p-1}\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\left(p - \frac{p-1}{(n+1)\log\frac{R}{n}} - (p-1)\frac{\log\frac{R}{n+1}}{\log\frac{R}{n}}\right).$$

Далее воспользуемся леммой 2.5.1. Получим

$$X(n) \le \frac{1}{p-1}\left(\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{p-1}} - \frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\right), \quad 1 \le n \le [R]-2.$$

Очевидно, что $X([R]) = 0$. Осталось оценить $X([R]-1)$. С использованием вышеприведенных рассуждений и неравенства

$$1 \le [R]\log\frac{[R]}{[R]-1},$$

несложно показать, что

$$X([R]-1) \le -\frac{1}{p-1}\frac{A_{[R]-1}^p}{\left(\log\frac{R}{[R]-1}\right)^{p-1}}.$$

Далее оценим $\sum\limits_{n=1}^{[R]} X(n)$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{[R]} X(n) = \sum_{n=1}^{[R]}\left(\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)^p} - \frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}a_n\right) \le$$

$$\le \frac{1}{p-1}\sum_{n=1}^{[R]-2}\left(\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{p-1}} - \frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\right) - \frac{1}{p-1}\frac{A_{[R]-1}^p}{\left(\log\frac{R}{[R]-1}\right)^{p-1}} = -\frac{1}{p-1}\frac{A_1^p}{(\log R)^{p-1}} \le 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{[R]} X(n) \leq 0.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{[R]} \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)^p} \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{[R]} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} a_n. \tag{2.5.7}$$

Пусть теперь $n \geq [R]+3$. Определим функцию Y следующим образом:

$$Y(n) = \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log \frac{n}{R}\right)^p} - \frac{p}{p-1} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{p-1}} a_n.$$

Используя определение A_n, легко показать, что

$$Y(n) = \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)^p} - \frac{p}{p-1} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{p-1}} (A_n - A_{n-1}) =$$

$$= \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{p-1}} \left(\frac{1}{(n+1)\log \frac{n}{R}} - \frac{p}{p-1} \right) + \frac{p}{p-1} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{p-1}} A_{n-1} =$$

$$= \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{p-1}} \left(\frac{1}{(n+1)\log \frac{n}{R}} - \frac{p}{p-1} \right) + \frac{p}{p-1} \left(\frac{A_n^p}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{\frac{p(p-1)}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log \frac{n-1}{R}\right)^p} \right)^{\frac{1}{p}} \log \frac{n-1}{R}.$$

В силу неравенства Гёльдера, получим

$$Y(n) \leq \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{p-1}} \left(\frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{n}{R}\right)} - \frac{p}{p-1} \right) +$$

$$+ \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{\frac{p(p-1)}{p-1}} \left(\log \frac{n-1}{R}\right)^{\frac{1-p}{p-1}}} + \frac{1}{p-1} \frac{A_{n-1}^p}{\left(\log \frac{n-1}{R}\right)^{p-1}} =$$

$$= \frac{1}{p-1} \frac{A_{n-1}^p}{\left(\log \frac{n-1}{R}\right)^{p-1}} - \frac{1}{p-1} \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{p-1}} \left(p - \frac{p-1}{(n+1)\log \frac{n}{R}} - (p-1) \frac{\log \frac{n-1}{R}}{\log \frac{n}{R}} \right).$$

В последнем утверждении мы использовали факт, что $p \in (1, p]$ и $\log \frac{n-1}{R} / \log \frac{n}{R} < 1$.

Из леммы 2.5.1 следует оценка

$$Y(n) \leq \frac{1}{p-1} \left(\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log \frac{n-1}{R}\right)^{p-1}} - \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{p-1}} \right), \quad n \geq [R]+3.$$

Теперь оценим $Y([R]+1)$ и $Y([R]+2)$. Очевидно, что $Y([R]+1) = 0$. Используя неравенство

$$1 \leq ([R]+3) \log \frac{[R]+2}{[R]+1},$$

имеем

$$Y([R]+2) \leq -\frac{1}{p-1} \frac{A_{[R]+2}^p}{\left(\log \frac{[R]+2}{R}\right)^{p-1}}.$$

Следовательно, для фиксированного целого $N > [R]+1$, получим

$$\sum_{n=[R]+1}^{N} Y(n) \le -\frac{1}{p-1}\frac{A^p_{[R]+2}}{\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{p-1}}+$$
$$+\sum_{n=[R]+3}^{N}\frac{1}{p-1}\left(\frac{A^p_{n-1}}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{p-1}}-\frac{A^p_{n}}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\right) = -\frac{1}{p-1}\frac{A^p_{N}}{\left(\log\frac{N}{R}\right)^{p-1}} \le 0,$$

то есть

$$\sum_{n=[R]+1}^{N} Y(n) \le 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{A^p_n}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^p} \le \frac{p}{p-1}\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{A^{p-1}_n}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}a_n. \tag{2.5.8}$$

В итоге из (2.5.7) и (2.5.8), имеем

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{A^p_n}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p} \le \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\frac{A^{p-1}_n}{\left|\log\frac{n}{R}\right|^{p-1}}a_n.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{A^p_n}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p} \le \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A^p_n}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\right)^{1-\frac{1}{l}}\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^l\frac{A^{p-l}_n a^l_n}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}\right)^{\frac{1}{l}} \le$$
$$\le \left(1-\frac{1}{l}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{A^p_n}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{p}{p-1}\right)^l\frac{A^{p-l}_n a^l_n}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{A^p_n}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p} \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^l\sum_{n=1}^{N}\frac{A^{p-l}_n a^l_n}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Устремляя $N \to \infty$, получаем утверждение теоремы.

Следствие 2.5.1. *Пусть $a_n \ge 0$ при каждом целом $n \ge 1$, $p > 1$ и*

$$A_n = \begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{[R]-1} a_i - \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i, & 1 \le n \le [R],\\ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i - \sum\limits_{i=0}^{[R]+1} a_i, & n \ge [R]+1,\end{cases}$$

где $[R]$ — целая часть любого неотрицательного $R > 1$. Тогда верно следующее неравенство типа Харди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^p_n}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p} \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^p_n}{(n+1)^{1-p}}.$$

2.5.3 Точность константы

В этой части мы покажем, что константа в неравенстве теоремы 2.5.1 неулучшаема при $l = p$.

Пусть

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \le n \le [R], \\ \dfrac{1}{(n+1)\left(\log \frac{n}{R}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{p}}}, & \text{если } n \ge [R]+1, \end{cases}$$

причём $p - 1 - \varepsilon > 0$.

Определим Y как

$$Y = \sum_{n=[R]+1}^{\infty} \frac{a_n^p}{(n+1)^{1-p}}.$$

Прямые вычисления дают

$$Y = \sum_{n=[R]+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{n}{R}\right)^{1+\varepsilon}} \ge \sum_{n=[R]+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}} >$$

$$> \int\limits_{[R]+1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)\left(\log \frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}} dr = \int\limits_{[R]+1}^{\infty} \frac{d \log \frac{r+1}{R}}{\left(\log \frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\log \frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon}.$$

Верно следующее соотношение

$$Y < \frac{1}{([R]+2)\left(\log \frac{[R]+1}{R}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{p}}} + \int\limits_{[R]+1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)\left(\log \frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}} dr.$$

Таким образом,

$$Y = \frac{1}{\varepsilon}\left(\log \frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon} + O(1).$$

Также имеем неравенство

$$A_n = \sum_{i=[R]+2}^{n} a_i = \sum_{i=[R]+2}^{n} \frac{1}{(i+1)\left(\log \frac{i}{R}\right)^{(1+\varepsilon)/p}} > \int\limits_{[R]+2}^{n} \frac{dr}{(r+1)\left(\log \frac{r}{R}\right)^{(1+\varepsilon)/p}} \ge$$

$$\ge \int\limits_{[R]+2}^{n} \frac{dr}{(r+1)\left(\log \frac{r+1}{R}\right)^{(1+\varepsilon)/p}} =$$

$$= \frac{p}{p-1-\varepsilon}\left(\left(\log \frac{n+1}{R}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p}} - \left(\log \frac{[R]+3}{R}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p}}\right) = \frac{p}{p-1-\varepsilon} H(n).$$

Следовательно,

$$\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log \frac{n}{R}\right)^p} \ge \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \frac{H^p(n)}{(n+1)\left(\log \frac{n+1}{R}\right)^p} =$$

$$= \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \left(1 - \left(\frac{\log \frac{[R]+3}{R}}{\log \frac{n+1}{R}}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p}}\right)^p \frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}} \ge$$

$$\geq \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \frac{1-K_n}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}},$$

где $K_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом,

$$X = \sum_{n=[R]+1}^{\infty} \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^p} \geq \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \sum_{n=[R]+1}^{N} \frac{1-K_n}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}} >$$

$$> \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \int\limits_{[R]+1}^{N} \frac{dr}{(r+1)\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}} - \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \sum_{n=[R]+1}^{N} \frac{K_n}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}} =$$

$$= \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \frac{1}{\varepsilon}\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon} + O(1).$$

Ясно, что

$$\frac{X}{Y} > \frac{\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon} + \varepsilon O(1)}{\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon} + \varepsilon O(1)}.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{X}{Y} \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p.$$

Таким образом, при любом $\varepsilon_0 > 0$ существует $a_n = a_n(\varepsilon)$, такое что выполнено неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p} \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (1-\varepsilon_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^p}{(n+1)^{1-p}}.$$

Это показывает, что константа неравенства теоремы 2.5.1 при $l = p$ и является точной.

Глава 3. Пространственные неравенства для функций с финитным носителем

Данная глава посвящена новым пространственным неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми, относящимся к различным типам вариационных задач. В отличие от одномерного случая, интегрирование в многомерных неравенствах ведется по пространственной области. Мы будем рассматривать непрерывно дифференцируемые или гладкие функции с компактным носителем. Как известно, замыканием этих пространств функций по соответствующей норме можно получить неравенства в более общих функциональных пространствах типа Соболева.

Отметим, что мы будем использовать полученные в первой и второй главе одномерные неравенства, которые совместно с методом перехода к многомерному случаю дают их пространственные аналоги. Рассматриваются различные классы вариационных задач такие, как многомерные неравенства Харди в терминах функции расстояния до границы области с фиксированным объёмом, диаметром или внутренним радиусом, а также приводящих к конформно инвариантным неравенствам с весами, зависящими от конформного радиуса.

§3.1 Геометрические версии L_2-неравенств типа Харди

В этом параграфе мы получим многомерные неравенства типа Харди в произвольных областях, в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым и выпуклых областях. Будем рассматривать области с конечным объёмом или диаметром.

Прежде введем основные обозначения, используемые на протяжении всего этого параграфа. Пусть Ω — открытое связное собственное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ — элемент площади поверхности единичной сферы и $d\omega(\nu) = \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{|\mathbb{S}^{n-1}|}$ — нормированная мера на единичной сфере. Для любой точки $x \in \Omega$, $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ полагаем

$$\tau_\nu(x) := \min\{s > 0 : x + s\nu \notin \Omega\}$$

— расстояние от точки x до границы области Ω по направлению вектора ν,

$$\delta(x) = \inf_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \tau_\nu(x),$$

— расстояние от точки x до границы области Ω,

$$\rho_\nu(x) := \min\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\}, \quad \mu_\nu(x) := \max\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\},$$

$$D_\nu(x) := \tau_\nu(x) + \tau_{-\nu}(x), \quad D(\Omega) = \sup_{x\in\Omega, \nu\in\mathbb{S}^{n-1}} D_\nu(x),$$

и расстояние в среднем

$$\delta_M^{-2} = n \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_\nu^{-2}(x) d\omega(\nu).$$

Через $|\Omega|$ обозначим объём области Ω и через Ω_x — элементы множества Ω, которые “видны” из точки x, т.е.

$$\Omega_x = \{y \in \Omega : x + t(y-x) \in \Omega \qquad \forall t \in [0,1]\}.$$

Напомним, что постоянная

$$K(n) = n\left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right]^{2/n}.$$

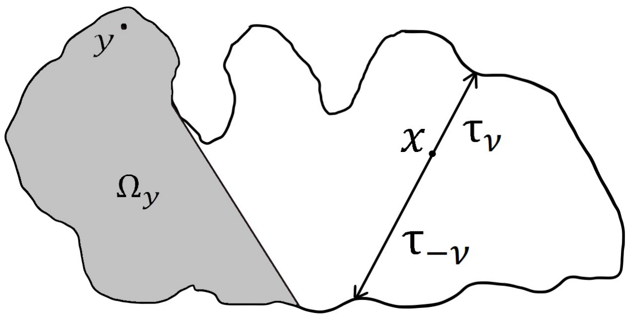

Рисунок 3.1.1: Расстояние по направлению и область Ω_y.

3.1.1 Неравенства в произвольных областях в терминах расстояния в среднем

При доказательстве пространственных неравенств мы будем использовать соответствующие одномерные неравенства из **главы 1** и подход к доказательству таких неравенств из статьи [114] (см. также [66, 98, 165]). Полученные в этом параграфе результаты являются обобщением и развитием неравенств вида (0.0.22) и (0.0.23).

Для начала получим L_2- и L_p-неравенства в произвольных областях в терминах расстояния в среднем. Расстояние в среднем также иногда также называют расстоянием по Дэвису.

Справедлива теорема.

Теорема 3.1.1. *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $\nu \in (0,1]$.*

Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1-\nu^2}{4} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx +$$

$$+ K(n) \frac{5 - 5\nu^2 + 4{j'}_\nu^2}{8} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{|\Omega_x|^{\frac{2}{n}}} dx + \frac{{j'}_\nu^2 K(n) n}{32|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)\delta(x)}{|\Omega_x|^{\frac{3}{n}}} dx,$$

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx + \frac{5}{8} C_0^2(1) K(n) \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{|\Omega_x|^{2/n}} dx + \frac{C_0^2(1) K(n) n}{16|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_\Omega g^2(x) \frac{\delta(x)}{|\Omega_x|^{3/n}} dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$ — первое положительное решение уравнения

$$1 - z \frac{J_1(z)}{J_0(z)} = 0, \quad z \in (0, j_0).$$

Доказательство. Так как оба неравенства этой теоремы имеют одинаковый вид и отличаются только константами, далее доказательство обоих неравенств мы будем проводить без уточнение констант.

Через ∂_ν обозначим производную по направлению ν. Используя одномерные неравенства из теоремы 1.4.3, получим

$$\int\limits_\Omega |\partial_\nu g(x)|^2 dx \geq C_1 \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\rho_\nu(x)^2} dx + C_2 \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)} dx + C_3 \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\mu_\nu(x)^2} dx + C_4 \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)\rho_\nu(x)}{\mu_\nu(x)^3} dx.$$

Если проинтегрируем это неравенство по нормированной мере $d\omega(\nu)$ и воспользуемся определением производной по направлению

$$|\partial_\nu g| = |\nu \cdot \nabla g| = |\nabla g| |\cos(\nu, \nabla g)|,$$

то получим

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} |\cos(\nu, \nabla g)|^2 d\omega(\nu) dx \geq C_1 \int\limits_\Omega g^2(x) \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)^2} d\omega(\nu) dx +$$

$$+ C_2 \int\limits_\Omega g^2(x) \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)} d\omega(\nu) dx + C_3 \int\limits_\Omega g^2(x) \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\mu_\nu(x)^2} d\omega(\nu) dx +$$

$$+ C_4 \int\limits_\Omega g^2(x) \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\rho_\nu(x)}{D_\nu(x)^3} d\omega(\nu) dx.$$

В [165] показано, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)} d\omega(\nu) \geq \left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} |\Omega_x|\right]^{-2/n},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\mu_\nu(x)^2} d\omega(\nu) \geq \frac{1}{2} \left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} |\Omega_x|\right]^{-2/n},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \cos(\nu,\nabla g)|^2 d\omega(\nu) = \frac{1}{n}, \quad \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^3 d\omega(\nu) \geq \left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-3/n}.$$

Поэтому

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq C_1 \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx + \left(C_2 + \frac{C_3}{2}\right) K(n) \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{|\Omega_x|^{2/n}} dx + \frac{C_4 K(n) n}{8|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_\Omega g^2(x) \frac{\delta(x)}{|\Omega_x|^{3/n}} dx.$$

Откуда следуют утверждения теоремы. □

Из доказательства теоремы 3.1.1, в силу очевидных неравенств

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)} d\omega(\nu) \geq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{4}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2} d\omega(\nu) \geq \frac{4}{D^2(\Omega)}$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\mu_\nu(x)^2} d\omega(\nu) \geq \frac{1}{D^2(\Omega)},$$

получим

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq C_1 \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx + \frac{n\,(4C_2 + C_3)}{D^2(\Omega)} \int\limits_\Omega g^2(x) dx + \frac{nC_4}{D^3(\Omega)} \int\limits_\Omega g^2(x)\delta(x) dx.$$

Таким образом, справедливо утверждение.

Теорема 3.1.2. *Пусть Ω — произвольная ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $\nu \in (0,1]$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1-\nu^2}{4} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx + n\frac{9 - 9\nu^2 + 6{j'}_\nu^2}{4D^2(\Omega)} \int\limits_\Omega g^2(x) dx + \frac{n{j'}_\nu^2}{4D^3(\Omega)} \int\limits_\Omega g^2(x)\delta(x) dx,$$

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta_M^2(x)} dx + n\frac{7C_0^2(1)}{4D^2(\Omega)} \int\limits_\Omega g^2(x) dx + \frac{nC_0^2(1)}{2D^3(\Omega)} \int\limits_\Omega g^2(x)\delta(x) dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$.

Как мы видим, константа в неравенстве теоремы 3.1.2 содержит уже диаметр области. Следовательно, используя одно и то же одномерное неравенство, мы получили пространственные неравенства, относящиеся к двум различным классам вариационных задач.

3.1.2 Случай областей, регулярных по Дэвису

Следуя Е.Б. Дэвису [91] (см. также [43,200]), будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ регулярная, если существует конечная константа $m(\Omega)$ такая, что

$$\delta(x) \leq m(x) \leq m(\Omega)\delta(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

где $m(x)$ определяется следующим образом:

$$m^{-2}(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)}.$$

Можно показать, что

$$\delta_M^{-2}(x) = \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} = \frac{2n}{m^2(x)} \geq \frac{2n}{m^2(\Omega)\delta^2(x)}.$$

Поэтому, в терминах расстояния в среднем, мы можем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ регулярная, если существует константа $m(\Omega) > 0$ такая, что

$$\frac{\delta(x)}{\sqrt{2n}} \leq \delta_M(x) \leq \frac{m(\Omega)}{\sqrt{2n}}\delta(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Постоянную $m(\Omega)$ будем называть константой регулярности области Ω (см. подробнее [91], [43]).

В статье [43] ослаблены и обобщены на случай многомерных областей достаточные условия регулярности Дэвиса. Например, Э.Б. Дэвис [91] получил следующее достаточное условие: *Область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ является регулярной, если для всех $a \in \partial\Omega$ и для любого $r > 0$ существует константа $m'(\Omega)$ такая, что*

$$|\{y \in \Omega : |y - a| < r\}| \geq 2m'(\Omega)r^2.$$

В [43] А.М. Тухватуллина также доказала достаточное условие регулярности многомерных областей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Некоторые примеры простых областей были рассмотрены в [43]. В частности, кольца с радиусами R_1 и R_2, когда $R_2 \geq R_1/5$, и шары с удаленным сферическим сектором являются примерами регулярных областей.

Напомним, что $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $|\Omega|$ — объём множества Ω, $D(\Omega)$ — диаметр Ω,

$$\Omega_x = \{y \in \Omega : x + t(y - x) \in \Omega, \forall t \in [0, 1]\},$$

$$B(n, s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)},$$

$$c_s = \frac{((s-1)^2 - \nu^2 q^2)^{p/2}}{p^p} \quad \text{и} \quad \mu_s = \frac{p}{2}\frac{q^2\lambda_\nu^2(2(s-1)/q)}{(s-1)^2 - \nu^2 q^2}.$$

Поэтому из теоремы 3.1.1 получим

Теорема 3.1.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является регулярной областью, $m(\Omega)$ — константа регулярности Ω и $\nu \in (0, 1]$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{(1-\nu^2)n}{2m^2(\Omega)} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx +$$
$$+ K(n)\frac{5 - 5\nu^2 + 4j_\nu'^2}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}} \int\limits_\Omega g^2(x)dx + \frac{j_\nu'^2 K(n)n}{32|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{\frac{3}{n}}} \int\limits_\Omega g^2(x)\delta(x)dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{n}{2m^2(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx + \frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{C_0^2(1)K(n)n}{16|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{3/n}} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — *первый положительный корень производной* $J'_{\nu-1}$ *функции Бесселя и* $C_0(1) \approx 1.25578$.

3.1.3 Области, удовлетворяющие условию конуса

Мы будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условию внешнего* θ*-конуса*, если каждая точка $x \in \partial\Omega$ является вершиной кругового конуса C_x с углом 2θ, лежащего полностью в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Если Ω удовлетворяет условию θ-конуса, то

$$\delta_M(x) \leq 2\delta(x) \left[\frac{1}{ns(\frac{1}{2}\sin\theta)} \right]^{1/2},$$

где $s(\alpha) = \int\limits_0^{\arcsin\alpha} \sin^{n-2} t dt / \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2} t dt$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1.4. *Пусть* $\nu \in (0,1]$ *и* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию внешнего* θ*-конуса. Тогда для любой функции* $g \in C_0^1(\Omega)$ *справедливы неравенства*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq (1-\nu^2) \frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right) n}{16} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx +$$
$$+ K(n) \frac{5 - 5\nu^2 + 4j'^2_\nu}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{j'^2_\nu K(n) n}{32|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{\frac{3}{n}}} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right) n}{16} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx + \frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{C_0^2(1)K(n)n}{16|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{3/n}} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — *первый положительный корень производной* $J'_{\nu-1}$ *функции Бесселя и* $C_0(1) \approx 1.25578$.

3.1.4 Области, λ-близкие к выпуклым

Следуя статье [7], будем говорить, что область Ω является λ-близкой к выпуклой, если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ и для любой граничной точки $y \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ существует такая точка $a_y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, что $|y - a_y| = \lambda$ и

$$B_y = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a_y| < \lambda\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega},$$

т.е. точку y можно коснуться шаром, лежащим вне области Ω.

Справедливо утверждение.

Лемма 3.1.1. *Если Ω является λ-близкой к выпуклой, то в каждой точке $x \in \Omega$ справедливы неравенства*

$$\delta_M(x) \le \frac{\delta(x)}{\sqrt{v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta(x)}\right)}} \le \frac{\delta(x)}{\sqrt{v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)}},$$

где $v(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \sin^{n-2}\theta\cos^2\theta d\theta / \int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\theta\cos^2\theta d\theta.$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega$ и $y \in \partial\Omega$ такая, что $\delta(x) = |x-y|$. Тогда существует шар B_y радиуса λ с центром в точке a_y, который касается области Ω в точке y и $B_y = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a_y| < \lambda\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Рассмотрим телесный угол $\Lambda_x = \Lambda_x(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$, образованный шаром радиуса λ с центром на расстоянии $\delta(x) + \lambda$ от точки x, где $\varphi_1 \in [0, 2\pi), \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2} \in [0, \pi]$ и $\varphi_{n-1} \in \left[0, \arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta(x)}\right]$.

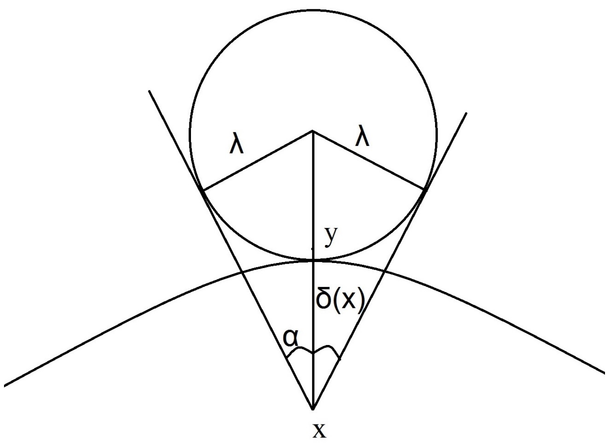

Рисунок 3.1.1: Пояснение к доказательству леммы 3.1.1.

Через $\mathbf{e}$ обозначим единичный вектор такой, что $\rho_{\mathbf{e}}(x) = \delta(x)$. Следовательно,

$$\frac{1}{\delta_M^2(x)} = \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} \ge \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int\limits_{\Lambda_x} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} \ge$$

$$\ge \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|\delta^2(x)}\int\limits_{\Lambda_x} \cos^2(\mathbf{e}, \nu) d\mathbb{S}^{n-1}(\nu) =$$

$$= \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|\delta^2(x)}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \int\limits_0^\pi d\varphi_2 \dots \int\limits_0^\pi d\varphi_{n-2} \int\limits_0^\alpha \sin^{n-2}\varphi_{n-1}\sin^{n-3}\varphi_{n-2}\dots\sin\varphi_2\cos^2\varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\delta^2(x)} \frac{\int\limits_0^\alpha \sin^{n-2}\theta\cos^2\theta d\theta}{\int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\theta\cos^2\theta d\theta},$$

где $\alpha = \arcsin \frac{\lambda}{\lambda+\delta(x)}$.

Выше мы воспользовались тем, что справедливо равенство (см. [165])

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \cos^2(\mathbf{e}, \nu) d\mathbb{S}^{n-1}(\nu) = \frac{1}{n}.$$

□

Имеют место утверждения, которые соответственно следуют из теорем 3.1.1 и 3.1.2.

Теорема 3.1.5. *Пусть $\nu \in (0,1]$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является λ-близкой к выпуклой. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq v\left(\arcsin \frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right) \frac{1-\nu^2}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx +$$
$$+ K(n) \frac{5 - 5\nu^2 + 4{j'}_{\nu}^2}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{{j'}_{\nu}^2 K(n) n}{32|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{\frac{3}{n}}} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{v\left(\arcsin \frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx +$$
$$+ \frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{C_0^2(1)K(n)n}{16|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{3/n}} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$.

Теорема 3.1.6. *Пусть $\nu \in (0,1]$ и Ω является λ-близкой к выпуклой. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq v\left(\arcsin \frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right) \frac{1-\nu^2}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx +$$
$$+ n \frac{9 - 9\nu^2 + 6{j'}_{\nu}^2}{4D^2(\Omega)} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{n{j'}_{\nu}^2}{4D^3(\Omega)} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{v\left(\arcsin \frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx +$$
$$+ n \frac{7C_0^2(1)}{4D^2(\Omega)} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{nC_0^2(1)}{2D^3(\Omega)} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$.

3.1.5 Случай выпуклых областей

В случае выпуклых областей формулы упрощаются. Известно, что если Ω — выпуклая область, то

$$|\Omega_x| = |\Omega|, \qquad \delta_M(x) \geq \delta(x).$$

и

$$\frac{1}{\delta^s_{M,s}(x)} = \frac{1}{B(n,s)} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho^s_\nu(x)} \geq \frac{1}{\delta^s(x)},$$

где

$$B(n,s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}.$$

Как следствие теоремы 3.1.3 получим следующее утверждение.

Теорема 3.1.7. *Пусть $\nu \in (0,1]$ и Ω — открытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с конечным объёмом. Тогда для любой функции $g \in C^1_0(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1-\nu^2}{4} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx + K(n) \frac{5 - 5\nu^2 + 4{j'}^2_\nu}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}} \int\limits_\Omega g^2(x) dx + \frac{{j'}^2_\nu K(n) n}{32|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{\frac{3}{n}}} \int\limits_\Omega g^2(x)\delta(x) dx,$$

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx + \frac{5C^2_0(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}} \int\limits_\Omega g^2(x) dx + \frac{C^2_0(1)K(n)n}{16|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{3/n}} \int\limits_\Omega g^2(x)\delta(x) dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$.

§3.2 Геометрические версии L_p-неравенств типа Харди

3.2.1 Неравенства в произвольных областях в терминах расстояния в среднем

В этом параграфе мы получим многомерные L_p-неравенства типа Харди в произвольных областях в терминах расстояния в среднем (см. [66, с. 83]), [98], [165])

$$\delta_{M,s}(x)^{-s} := \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu(x)^s} = \frac{1}{B(n,s)} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu(x)^s},$$

где $s \in (1, \infty)$.

Ясно, что $\delta_{M,2} = \delta_M$. Как и выше, получаемые неравенства принимают более упрощенный вид выпуклых областях.

Предположим, что действительнозначная функция $g \in C^1_0(\Omega)$. Через ∂_ν обозначим производную по направлению ν. Аргументы Е.Б. Дэвиса (см. [89]) вместе с одномерным неравенством теоремы 2.4.2 дают

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_\Omega \frac{|\partial_\nu g(x)|^p}{\rho_\nu^{s+1-p}(x)}dx - \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx \ge \frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\rho_\nu^{s-1}(x)}\left(\frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)} + \frac{3}{\mu_\nu^2(x)} + \frac{2\rho_\nu(x)}{\mu_\nu^3(x)}\right)dx.$$

Если проинтегрируем это неравенство по нормированной мере $d\omega(\nu)$ и воспользуемся определением производной по направлению

$$|\partial_\nu g| = |\nu\cdot\nabla g| = |\nabla g||\cos(\nu,\nabla g)|,$$

то получим

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu,\nabla g)|^p|}{\rho_\nu^{s+1-p}(x)}d\omega(\nu)dx - \int\limits_\Omega |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx \ge$$
$$\ge \frac{p\lambda_1^2}{2s^2}\int\limits_\Omega |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu^{s-1}(x)}\left(\frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)} + \frac{3}{\mu_\nu^2(x)} + \frac{2\rho_\nu(x)}{\mu_\nu^3(x)}\right)d\omega(\nu)dx. \quad (3.2.1)$$

В [165] Дж. Тидбломом показано, что при $p>1$ справедливы соотношения

$$B(n,p) := \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} |\cos(\nu,\nabla g)|^p d\omega(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^p d\omega(\nu) \ge \left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-p/n},$$

а А.А. Балинский, В.Д. Эванс, Р.Т. Льюис в [66] установили следующие оценки:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)}d\omega(\nu) \ge \left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-2/n},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\mu_\nu(x)^2}d\omega(\nu) \ge \frac{1}{2}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-2/n}.$$

Далее при $p\ge s+1$ рассмотрим четыре случая.

Случай 1: $s\in(0,1]$. Используя определения функций ρ_ν, μ_ν и предыдущие четыре формулы, получим

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)\mu_\nu(x)} \ge \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\rho_\nu^{1-s}(x)}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)}d\omega(\nu) \ge \delta^{1-s}(x)\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-2/n},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-1}(x)\mu_\nu^2(x)} \ge \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\rho_\nu^{1-s}(x)}{\mu_\nu^2(x)}d\omega(\nu) \ge \frac{\delta^{1-s}(x)}{2}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-2/n},$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\rho_\nu^{2-s}(x)}{\mu_\nu^3(x)}d\omega(\nu) \ge \frac{\delta^{2-s}(x)}{8}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^3 d\omega(\nu) \ge \frac{\delta^{2-s}(x)}{8}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-\frac{3}{n}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx-\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx\geq$$

$$\geq\frac{5p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p\delta^{1-s}(x)}{|\Omega_x|^{2/n}}dx+\frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Случай 2: $s\in(1,2]$. Аналогично случаю 1 имеем

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)\mu_\nu(x)}\geq\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{4\rho_\nu^{1-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2}d\omega(\nu)\geq\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu),$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-1}(x)\mu_\nu^2(x)}\geq\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu),$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-2}(x)\mu_\nu^3(x)}\geq\frac{\delta^{2-s}(x)}{8}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-\frac{3}{n}}.$$

Поэтому получим

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx-\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx\geq$$

$$\geq\frac{7p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx+\frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Случай 3: $s\in(2,3)$. Так как справедливы оценки

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)\mu_\nu(x)}\geq\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{4\rho_\nu^{1-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2}d\omega(\nu)\geq\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu),$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-1}(x)\mu_\nu^2(x)}\geq\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu),$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-2}(x)\mu_\nu^3(x)}\geq\frac{1}{8}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-\frac{s+1}{n}},$$

то в этом случае имеем следующее неравенство:

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx-\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)}dx\geq\frac{p\lambda_1^2}{s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx.$$

Случай 4: $s\in[3,+\infty)$. По аналогии с предыдущими случаями, получим

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)\mu_\nu(x)}\geq\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{4\rho_\nu^{1-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2}d\omega(\nu)\geq\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1}d\omega(\nu),$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-1}(x)\mu_\nu^2}(x) \geq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{16\rho_\nu^{3-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^4} d\omega(\nu) \geq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(\Omega)}\right)^{s+1} d\omega(\nu),$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s-2}(x)\mu_\nu^3(x)} \geq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{4\rho_\nu^{3-s}(x)}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2\mu_\nu^2(x)} d\omega(\nu) \geq \frac{1}{4}\left[\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}|\Omega_x|\right]^{-\frac{s+1}{n}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - \int\limits_\Omega |g(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^{s+1}(x)} dx \geq \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.2.1. *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geq 2$ и $p \geq s+1$. Если $s \in (0,1]$, то имеет место неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s+1}(x)} dx \geq$$

$$\geq \frac{5p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{2}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p\delta^{1-s}(x)}{|\Omega_x|^{2/n}} dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p \frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}} dx.$$

Если $s \in (1,2]$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s+1}(x)} dx \geq$$

$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p \frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}} dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \geq B(n,s+1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s+1}(x)} dx + \frac{p\lambda_1^2}{s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega)B(n,p)\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \geq B(n,s+1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s+1}(x)} dx + \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}} dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Если положим, что $p \leq s+1$, то по аналогии с доказательством теоремы 3.2.1 будем иметь следующее утверждение.

Теорема 3.2.2. *Пусть Ω — произвольная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geq 2$ и $p \leq s+1$. Если $s \in (1,2]$, то справедливо неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p)\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)}dx - B(n,s+1)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s+1}(x)}dx \geq$$

$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\int\limits_{\Omega} |g(x)|^p \frac{\delta^{2-s}(x)}{|\Omega_x|^{3/n}}dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p)\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)}dx \geq B(n,s+1)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s+1}(x)}dx + \frac{p\lambda_1^2}{s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p)\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)}dx \geq B(n,s+1)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s+1}(x)}dx + \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s+1}{n}}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s+1}{n}}}dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Далее получим пространственные случаи неравенств из §2.1. Справедлива теорема.

Теорема 3.2.3. *Пусть Ω — произвольная ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $\lambda_\nu(2(s-1)/q)$ — константа Лэмба. Предположим также, что $s \in (1,\infty)$, $q \in (0,\infty)$, $p \in [2,\infty)$ и $\nu \in \left[0, \frac{s-1}{q}\right]$.*

Если $s-p \geq 0$ и $s-q \leq 0$, тогда для любого $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}dx \geq B(n,s)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s}(x)}dx + \mu_s\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)|\Omega_x|^{\frac{q}{n}}}dx.$$

Если $s-p \geq 0$ и $s-q > 0$, то для любых функций $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}dx \geq B(s,p)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s}(x)}dx + \frac{2^{s-q}\mu_s}{D^{s-q}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{q}{n}}}dx.$$

Если $s-p < 0$ и $s-q \leq 0$, то для любых функций $g \in C_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\frac{D^{p-s}(\Omega)}{2^{p-s}}\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx \geq B(n,s)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s}(x)}dx + \mu_s\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)|\Omega_x|^{\frac{q}{n}}}dx.$$

Если $s-p < 0$ и $s-q > 0$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\frac{D^{p-s}(\Omega)}{2^{p-s}}\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^p dx \geq B(n,s)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}^{s}(x)}dx + \frac{2^{s-q}\mu_s}{D^{s-q}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{q}{n}}}dx,$$

где

$$c_s = \frac{|s^2 - \nu^2 q^2|^{p/2}}{p^p} \quad \text{и} \quad \mu_s = c_s \frac{p}{2}\frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{|s^2-\nu^2 q^2|},$$

Доказательство. Используя теорему 2.1.1, имеем

$$\int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{|\partial_\nu g(x)|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)}dx \geq c_s \left(\int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{|g(x)|^p}{\rho_\nu^s(x)}dx + \frac{p}{2\delta_0^q}\frac{q^2\lambda_\nu^2(2(s-1)/q)}{(s-1)^2-\nu^2q^2}\int\limits_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{|g(x)|^p}{\rho_\nu^{s-q}(x)}dx \right),$$

где через $\partial_\nu g$, $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$, обозначена производная функции g по направлению ν и (a_ν, b_ν) — отрезок, получающийся пересечением лучей, выпущенных из точки x по направлению ν и $-\nu$, и области Ω.

Интегрируя обе части последнего неравенства по нормированной поверхностной мере $d\omega(\nu)$ на $\mathbb{S}^{n-1}$, получаем

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\partial_\nu g(x)|^p}{\rho_\nu(x)^{s-p}}d\omega(\nu)dx \geq c_s \left(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{1}{\rho_\nu(x)^s} + \left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^q \frac{\mu_s}{\rho_\nu(x)^{s-q}} \right) d\omega(\nu)|g(x)|^p dx \right),$$

$$c_s = \frac{((s-1)^2-\nu^2q^2)^{p/2}}{p^p} \quad \text{и} \quad \mu_s = \frac{p}{2}\frac{q^2\lambda_\nu^2(2(s-1)/q)}{(s-1)^2-\nu^2q^2}.$$

Напомним, что (см. подробнее [98], [165])

$$|\partial_\nu g(x)| = |\nu \cdot \nabla g(x)| = |\nabla g(x)||\cos(\nu, \nabla g)| \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} |\partial_\nu g(x)|^p d\omega(\nu) = B(n,p)|\nabla g(x)|^p,$$

где

$$B(n,p) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}.$$

В своей статье [165] Дж. Тидблум показал, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^q \geq \left(\frac{n|\Omega_x|}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\right)^{-\frac{q}{n}}. \tag{3.2.2}$$

Рассмотрим четыре случая.

Случай 1: $s-p \geq 0$ и $s-q \leq 0$. В этом случае, используя неравенство (3.2.2) и следующие оценки

$$\frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-p}} \leq \frac{1}{\delta(x)^{s-p}}, \qquad \frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-q}} \geq \frac{1}{\delta(x)^{s-q}}$$

справедливые в любой точке x и при любом $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$, мы имеем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta(x)^{s-p}}dx \geq \frac{c_s}{B(n,p)} \left(B(n,s)\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}(x)^s}dx + \mu_s\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^{s-q}|\Omega_x|^{\frac{q}{n}}}dx \right).$$

Случай 2: $s-p \geq 0$ и $s-q > 0$. Так как

$$\frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-p}} \leq \frac{1}{\delta^{s-p}}, \qquad \frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-p}} \geq \frac{2^{s-q}}{D(\Omega)^{s-q}}$$

и (3.2.2), мы получим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta(x)^{s-p}}dx \geq \frac{c_s}{B(n,p)} \left(B(n,s)\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}(x)^s}dx + \frac{2^{s-q}\mu_s}{D(\Omega)^{s-q}}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{q}{n}}}dx \right).$$

Случай 3: $s - p < 0$ и $s - q \leq 0$. Комбинируя неравенство (3.2.2) и следующие соотношения

$$\frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-p}} \leq \frac{D(\Omega)^{p-s}}{2^{p-s}}, \quad \frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-q}} \geq \frac{1}{\delta^{s-q}}$$

справедливые для любого $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$, имеем

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \geq \frac{2^{p-s} c_s}{D(\Omega)^{p-s}} \left(B(n,s) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}(x)^s} dx + \mu_s \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right)^{\frac{q}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^{s-q} |\Omega_x|^{\frac{q}{n}}} dx \right).$$

Случай 4: $s - p < 0$ и $s - q > 0$. В этом последнем случаем, так как

$$\frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-p}} \leq \frac{D(\Omega)^{p-s}}{2^{p-s}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-p}} \geq \frac{2^{s-q}}{D(\Omega)^{s-q}},$$

то немедленно следует

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \geq \frac{2^{p-s} c_s}{D(\Omega)^{p-s}} \left(B(n,s) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta_{M,s}(x)^s} dx + \frac{2^{s-q} \mu_s}{D(\Omega)^{s-q}} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right)^{\frac{q}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{q}{n}}} dx \right).$$

Это доказывает доказательство теоремы 3.1.3. □

3.2.2 Случай областей, регулярных по Дэвису

Следуя Е.Б. Дэвису [91] (см. также [43,200]), будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ регулярная, если существует конечная константа $m(\Omega)$ такая, что

$$\delta(x) \leq m(x) \leq m(\Omega)\delta(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

где $m(x)$ определяется следующим образом

$$m^{-2}(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)}.$$

Поэтому, в терминах расстояния в среднем, мы можем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ регулярная, если существует константа $m(\Omega) > 0$ такая, что

$$\frac{\delta(x)}{\sqrt{2n}} \leq \delta_M(x) \leq \frac{m(\Omega)}{\sqrt{2n}} \delta(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Постоянную $m(\Omega)$ по прежнему будем называть константой регулярности области Ω (см. подробнее [91], [43]).

Напомним, что $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $|\Omega|$ — объём множества Ω, $D(\Omega)$ — диаметр Ω,

$$\Omega_x = \{y \in \Omega : x + t(y - x) \in \Omega, \forall t \in [0,1]\},$$

$$B(n,s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}, \quad c_s = \frac{((s-1)^2 - \nu^2 q^2)^{p/2}}{p^p} \quad \text{и} \quad \mu_s = \frac{p}{2} \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2(s-1)/q)}{(s-1)^2 - \nu^2 q^2}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2.4. *Пусть Ω — регулярная область в $\mathbb{R}^n$, $m(\Omega)$ — константа регулярности для области Ω и пусть $\lambda_\nu(2(s-1)/q)$ — постоянная Лэмба. Предположим, что $s \geq 2$, $q > 0$, $p \geq 2$ и $\nu \in \left[0, \frac{s-1}{q}\right]$. Если $s-p \geq 0$ и $s-q \leq 0$, то для всех $g \in C_0^1(\Omega)$*

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}dx \geq \frac{2n}{m^s(\Omega)}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \mu_s\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx.$$

Если $s-p \geq 0$ и $s-q > 0$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}dx \geq \frac{2n}{m(\Omega)^s}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \frac{2^{s-q}\mu_s}{D(\Omega)^{s-q}}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Если $s-p < 0$ и $s-q \leq 0$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\frac{D^{p-s}(\Omega)}{2^{p-s}}\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \geq \frac{2n}{m^s(\Omega)}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \mu_s\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx.$$

Если $s-p < 0$ и $s-q > 0$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\frac{D^{p-s}(\Omega)}{2^{p-s}}\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx \geq \frac{2n}{m^s(\Omega)}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s}dx + \frac{2^{s-q}\mu_s}{D^{s-q}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Доказательство. Поскольку функция $y(t) = t^{s/2}$ выпукла при $s \geq 2$ и $t > 0$, мы можем использовать неравенство Йенсена, чтобы получить

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)^s}d\omega(\nu) \geq \left(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)^2}d\omega(\nu)\right)^{s/2}.$$

Следовательно, для регулярных областей имеем

$$\frac{1}{\delta^s_{M,s}(x)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu(x)^s} \geq \frac{2nB(n,s)^{-1}}{m(\Omega)^s\delta(x)^s}.$$

Очевидно, что $|\Omega_x| \leq |\Omega|$. Следовательно, неравенства в формулировке теоремы следуют из теоремы 3.3.3. $\square$

Пример 3.2.1. *Пусть Ω_0 — концентрические окружности с радиусами R_1 и R_2, когда $R_2 \geq R_1/5$. В [43] доказано, что $m(\Omega_0) = 2\sqrt{12}$. Следовательно, если $s-p \geq 0$ и $s-q \leq 0$, то для всех $g \in C_0^1(\Omega_0)$*

$$\int\limits_{\Omega_0} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta(x)^{s-p}}dx \geq \frac{c_s}{B(2,p)}\left(\frac{4}{48^{s/2}}\int\limits_{\Omega_0} \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s}dx + \mu_s\left(\frac{1}{R_1^2-R_2^2}\right)^{\frac{q}{2}}\int\limits_{\Omega_0} \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^{s-q}}dx\right).$$

Пример 3.2.2. *Пусть Ω_1 — шар с удаленным из него сферическим сектором. Пусть R — радиус шара. Рассмотрим конус, соответствующий удаленному сферическому сектору. Через α обозначим плоский угол между образующими конуса, который получается при рассмотрении центрального сечения конуса, $0 < \alpha < \pi$. В [43] показано, что для такой области*

$$m(\Omega_1) = \frac{2\sqrt{7}}{\sin\frac{\alpha}{4}}.$$

Следовательно, если $s - p \geq 0$ и $s - q \leq 0$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega_1)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta(x)^{s-p}} dx \geq \frac{c_s}{B(3,p)} \left(8 \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{2\sqrt{7}} \right)^s \int\limits_{\Omega_1} \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s} dx + \mu_s \left(\frac{1}{R^3 \cos^2\frac{\alpha}{4}} \right)^{\frac{q}{3}} \int\limits_{\Omega_1} \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^{s-q}} dx \right).$$

Выше мы воспользовались тем, что $|\mathbb{S}^2| = 4\pi$ и $|\Omega_1| = \frac{4}{3}\pi R^3 \cos\frac{\alpha}{4}$.

3.2.3 Области, удовлетворяющие условию конуса

Мы будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условию внешнего θ-конуса*, если каждая точка $x \in \Omega$ является вершиной кругового конуса C_x с углом 2θ, лежащего полностью в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Если Ω удовлетворяет условию θ-конуса, то

$$\delta_M(x) \leq 2\delta(x) \left[\frac{1}{ns(\frac{1}{2}\sin\theta)} \right]^{1/2},$$

где $s(\alpha) = \int\limits_0^{\arcsin\alpha} \sin^{n-2} t dt / \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2} t dt$.

Предположим, что $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $|\Omega|$ — объём множества Ω, $D(\Omega)$ — диаметр Ω, $h = h\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)$,

$$B(n,s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)},$$

$$c_s = \frac{((s-1)^2 - \nu^2 q^2)^{p/2}}{p^p} \quad \text{и } \mu_s = \frac{p}{2} \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2(s-1)/q)}{(s-1)^2 - \nu^2 q^2}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2.5. *Пусть Ω удовлетворяет условию θ-конуса, а $\lambda_\nu(2(s-1)/q)$ — постоянная Лэмба. Предположим, что $s \in (1, \infty)$, $q \in (0, \infty)$, $p \in [2, \infty)$ и $\nu \in \left[0, \frac{s-1}{q}\right]$.*

Если $s - p \geq 0$ и $s - q \leq 0$, то для всех $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)} dx \geq \frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^s} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)} dx + \mu_s \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|} \right)^{\frac{q}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)} dx.$$

Если $s-p\geq 0$ и $s-q>0$, то имеет место неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}dx \geq \frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^s}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \frac{2^{s-q}\mu_s}{D^{s-q}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p dx.$$

Если $s-p<0$ и $s-q\leq 0$, то для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\frac{D^{p-s}(\Omega)}{2^{p-s}}\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx \geq \frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^s}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \mu_s\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx.$$

Если $s-p<0$ и $s-q>0$, то для любого $g\in C_0^1(\Omega)$

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\frac{D^{p-s}(\Omega)}{2^{p-s}}\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^p dx \geq \frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^s}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \frac{2^{s-q}\mu_s}{D^{s-q}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^p dx.$$

Доказательство. Через $h(\alpha)$ обозначим телесный угол, стягиваемый в начале координат шаром радиуса $\alpha<1$, центр которого находится на расстоянии 1 от начала координат. Если Ω удовлетворяет условию θ-конуса, то для всех $x\in\Omega$

$$\frac{B(n,s)}{\delta_{M,s}(x)^s}\geq\frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^s\delta(x)^s}.$$

За более подробной информацией мы рекомендуем обратимся к книге [66, стр. 86]. Используя последнюю оценку и теорему 3.1.3, получаем неравенства из формулировки теоремы. □

3.2.4 Случай выпуклых областей

В случае выпуклых областей формулы упрощаются. Известно, что если Ω — выпуклая область, то $|\Omega_x|=|\Omega|$ и как показано в [165] справедливы неравенства

$$\delta_M(x)\geq\delta(x)\quad\text{и}\quad\frac{1}{\delta_{M,s}^s(x)}=\frac{1}{B(n,s)}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu(x)^s}\geq\frac{1}{\delta(x)^s},$$

где

$$B(n,s)=\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}.$$

Принимая во внимание теорему 3.3.3, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2.6. *Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и $\lambda_\nu(2(s-1)/q)$ — константа Лэмба. Предположим также, что $s\in(1,\infty)$, $q\in(0,\infty)$, $p\in[2,\infty)$ и $\nu\in\left[0,\frac{s-1}{q}\right]$. Если $s-p\geq 0$ и $s-q\leq 0$, то для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}dx \geq B(n,s)\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + \mu_s\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx.$$

Если $s-p\geq 0$ и $s-q>0$, то для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{B(n,p)}{c_s}\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}dx\geq B(n,s)\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s}dx+\frac{2^{s-q}\mu_s}{D^{s-q}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^pdx.$$

Если $s-p<0$ и $s-q\leq 0$, то для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ имеем

$$\frac{D^{p-s}(\Omega)}{2^{p-s}}\frac{B(n,p)}{c_s}\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^pdx\geq B(n,s)\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx+\mu_s\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx.$$

Если $s-p<0$ и $s-q>0$, то для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ выполнена оценка

$$\frac{D(\Omega)^{p-s}}{2^{p-s}}\frac{B(n,p)}{c_s}\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^pdx\geq B(n,s)\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s}dx+\frac{2^{s-q}\mu_s}{D(\Omega)^{s-q}}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^pdx.$$

Полагая $s=q=p$ и $\nu=0$ в теореме 3.2.6 получим следующее утверждение.

Следствие 3.2.1. *Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и $\lambda_\nu(2(p-1)/p)$ — константа Лэмба. Если $p\in[2,\infty)$, то для всех функций $g\in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство*

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^pdx\geq c_p\left(\int\limits_{\Omega}\frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx+\frac{p^3\lambda_0^2(2(p-1)/p)}{2B(n,p)(p-1)^2}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\int\limits_{\Omega}|g(x)|^pdx\right),$$

где $c_p=\left(\frac{p-1}{p}\right)^p$.

Теперь сравним константу в последнем неравенстве с константой в неравенства Тидблума (0.0.25). Точнее, покажем, что

$$\frac{p^3\lambda_0^2(2(p-1)/p)}{2(p-1)^2B(n,p)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\geq\frac{(p-1)}{B(n,p)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}.$$

В [59] Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Виртс доказали, что константа Лэмба $z=\lambda(s)$ является положительной и монотонно возрастающей функцией переменной $s>0$. Более того, для любого $s\in(0,\infty)$ известно, что

$$\lim_{s\to 0}\lambda_0(s)=0<\lambda_0(s)<j_0=\lim_{s\to\infty}\lambda_0(s)\quad\text{и}\quad\lambda_0(2)\geq\lambda_0(1)=0.94\ldots.$$

Очевидно, если $p\geq 2$, то

$$1<4\lambda_0(1)\leq\frac{p^3\lambda_0^2(2(p-1)/p)}{2(p-1)^3}.$$

Следовательно, константа в неравенстве следствия 3.2.1 больше константы в (0.0.25).

Как следствия теорем 3.2.1 и 3.2.2 соответственно получим следующие утверждения.

Теорема 3.2.7. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geq 2$ и $p \geq s+1$. Если $s \in (0,1]$, то справедливо неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geq$$

$$\geq \frac{5p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{2}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-1}(x)} dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-2}(x)} dx.$$

Если $s \in (1,2]$, то имеет место неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geq$$

$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-2}(x)} dx,$$

Если $s \in (2,3)$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geq \frac{p\lambda_1^2}{s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p D^{s+1-p}(\Omega) B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geq \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2q\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Теорема 3.2.8. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geq 2$ и $p \leq s+1$. Если $s \in (1,2]$, то имеет место неравенство*

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geq$$

$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{8s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-2}(x)} dx.$$

Если $s \in (2,3)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geq \frac{p\lambda_1^2}{s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Если $s \in [3,+\infty)$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{s}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s+1-p}(x)} dx - B(n,s+1) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx \geq \frac{9p\lambda_1^2}{4s^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s+1}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$sJ_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Для сравнения наших с известными результатами рассмотрим случай $s = p - 1$. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.2.2. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$, $p \geq 2$. Если $p \in (2, 3]$, то имеет место неравенство*

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)} dx \geq$$

$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{8(p-1)^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{3}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{p-3}(x)} dx.$$

Если $p \in (3, 4)$, то справедливо неравенство

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)} dx \geq \frac{p\lambda_1^2}{(p-1)^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Если $p \in [4, +\infty)$, то выполнено неравенство

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p B(n,p) \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)} dx \geq \frac{9p\lambda_1^2}{4(p-1)^2} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}} \int\limits_\Omega |g(x)|^p dx.$$

Замечание 3.2.1. Численные расчеты показывают, что

$$\frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2} \geq p - 1$$

при $p \in [2, p_0]$, где $p_0 \approx 2.314$.

Если в теореме 3.2.7 положим $s = 1$ и $p = 2$, то имеем результат, усиливающий неравенство М. Хоффманн-Остенхофа, Т. Хоффманн-Остенхофа и А. Лаптева (0.0.23). Справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.2.3. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $g \in C_0^1(\Omega)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx + \frac{5\lambda_1^2 K(n)}{8|\Omega|^{2/n}} \int\limits_\Omega g^2(x) dx + \frac{\lambda_1^2(1) K(n) n}{16|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{3/n}} \int\limits_\Omega g^2(x)\delta(x) dx,$$

где $\lambda_1 \approx 1.25578$.

Следствие 3.2.4. *В выпуклых областях Ω с фиксированным объёмом*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{5\lambda_1^2 K(n)}{8|\Omega|^{2/n}},$$

где $\lambda_1 \approx 1.25578$.

Также имеет место неравенство с дополнительными слагаемыми, зависящими только от диаметра области. Справедлива теорема.

Теорема 3.2.9. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и $p \geq 2$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство*

$$B(n,p)\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx \geq$$
$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{2(p-1)^2 D^p(\Omega)}\int\limits_\Omega |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{(p-1)^2 D^p(\Omega)}\int\limits_\Omega |g(x)|^p \delta(x) dx.$$

Здесь λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$(p-1)J_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Доказательство. Используя неравенство (3.2.1) и определение диаметра области $D(\Omega)$, при $s = p-1$ в силу очевидных неравенств

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\rho_\nu(x)\mu_\nu(x)}d\omega(\nu) \geq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{4}{(\rho_\nu(x)+\mu_\nu(x))^2}d\omega(\nu) \geq \frac{4}{D^2(\Omega)},$$
$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\mu_\nu(x)^2}d\omega(\nu) \geq \frac{1}{D^2(\Omega)},$$

получим

$$B(n,p)\left(\frac{p}{s}\right)^p \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^p dx - B(n,p)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^p(x)}dx \geq$$
$$\geq \frac{7p\lambda_1^2}{2(p-1)^2 D^p(\Omega)}\int\limits_\Omega |g(x)|^p dx + \frac{p\lambda_1^2}{(p-1)^2 D^p(\Omega)}\int\limits_\Omega |g(x)|^p \delta(x) dx.$$

Откуда следует утверждение теоремы. □

Аналогичные результатам этого параграфа неравенства можем получить, также используя теорему 2.4.1. Выкладки и обоснования будут практически такими же, но будут отличаться константы в неравенствах. Эти результаты иногда будут иметь некоторые преимущества. Например, в выпуклых областях Ω с фиксированным объёмом можно получить оценку

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{{j'}_1^2}{2}\frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}},$$

где ${j'}_1 \approx 1.84118$ — первый положительный корень производной J_1' функции Бесселя J_1.

§3.3 Неравенства в областях с конечным внутренним радиусом

Этот раздел посвящен неравенствам типа Харди в пространственных множествах. Оказывается, можно получать пространственные неравенства в произвольных областях не только в терминах расстояния в среднем, но и в терминах расстояния до границы области δ. Мы рассматриваем неравенства в произвольных открытых и в открытых выпуклых областях $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

3.3.1 Неравенства в произвольных областях

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n\, (\Omega \neq \mathbb{R}^n)$, и пусть $C_0^1(\Omega)$ — семейство непрерывно дифференцируемых функций $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ с компактными носителями, лежащими в области Ω. Напомним, что через $\delta(x)$ мы обозначают функцию расстояния, определенную как

$$\delta(x) = \delta(x, \Omega) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \Omega.$$

а через $\delta_0(\Omega)$ обозначаем внутренний радиус области

$$\delta_0(\Omega) := \sup\{\delta(x, \partial\Omega) : x \in \Omega\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Предположим, что Ω является произвольной открытой областью $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $s > n$, $q > 0$ и внутренний радиус $\delta_0(\Omega) < \infty$. Тогда*

$$(s-n)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \frac{q}{\delta_0(\Omega)^q}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)}dx \leq 2\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}dx \tag{3.3.1}$$

для произвольной функции $g \in C_0^1(\Omega)$. Более того, если $s - q < 1$, то для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$(s-n)\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx + \frac{q-s+1}{\delta_0^q(\Omega)}\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)}dx \leq \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}\left(1 - \left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)dx. \tag{3.3.2}$$

Доказательство. Для начала рассмотрим случай $n = 1$. Поскольку открытое множество Ω является объединением интервалов, достаточно доказать неравенства для интервала (a, b) и функций $g \in C_0^1(a, by)$. Очевидно, этот случай следует из теоремы 1.1.1 и её следствия 1.1.1.

Для доказательства утверждений теоремы 3.3.1 при $n \geq 1$ воспользуемся методом Ф.Г. Авхадиева, который позволяет из соответствующих одномерных неравенств получить неравенства в произвольных, даже невыпуклых областях (см., например, [16, 60, 198]). Приведем краткое описание этого метода. Пусть Λ — произвольная открытая область, в которой требуется доказать неравенство типа Харди. Аппроксимируя область Λ кубами, Ф.Г. Авхадиев показал, что неравенство достаточно показать на множествах специального вида:

$$K(S) = \{x \in \Lambda_1 : \text{ существует точка } y \in S \text{ такая, что } \delta(x; \Lambda) = |x - y|\}$$

где Λ_1 — некоторое разбиения области Λ и для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, S является $(n-k)$-мерной гранью куба.

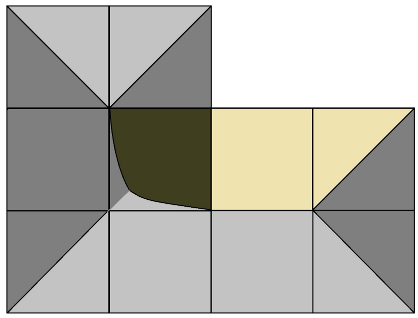

Рисунок 3.3.1: Пример разбиения невыпуклой области на квадратики. Цветами показаны реализации функции расстояния.

При вычислении интегралов по множеству $K(S)$ приходится пользоваться либо сферическими, либо цилиндрическими, либо декартовыми координатами, что позволяет перейти к соответствующим повторным интегралам и доказывать лишь одномерные неравенства.

Из результатов Х. Хадвигера [108] следует, что для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует аппроксимирующая последовательность $\Omega_m \subset \Omega$, где Ω_m — выпуклые многогранники. Поэтому, если следовать схеме рассуждений метода Ф.Г. Авхадиева, но в качестве Ω_m взять выпуклые многогранники, то множества $K(S)$ будут иметь ненулевую (n-мерную) меру только для $n-1$-мерных граней $S \subset \Omega_m$. Т.е. в случае выпуклых областей ситуация упрощается и одномерные неравенства напрямую переносятся на пространственный случай.

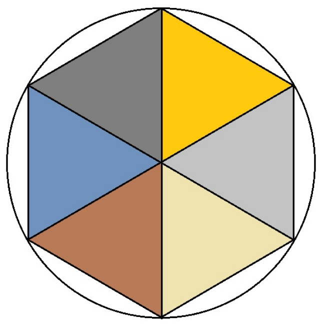

Рисунок 3.3.2: Пример аппроксимации выпуклой области многогранником. Цветами показаны реализации функции расстояния.

Из этого метода следует, что достаточно доказать неравенства для множеств типа

$$\Omega_1 = \operatorname{int} \bigcup_{j=1}^{m} ([0,1]^n + z_j), \quad z_j \in \mathbb{Z}^n.$$

В нашем случае необходимо доказать неравенство вида

$$(s-n) \int\limits_{\Omega_1} \frac{|g(x)|}{\delta(x)^s} dx + \frac{h(s,q)}{\delta_0(\Omega_1)^q} \int\limits_{\Omega_1} \frac{|g(x)|}{\delta(x)^{s-q}} dx \le c(s,q) \int\limits_{\Omega_1} \frac{|\nabla g(x)|}{\delta(x)^{s-1}} dx$$

для произвольной функции $g \in C_0^1(\Omega_1)$, где δ — функции расстояния от точки $x \in \Omega_1$ до границы области Ω_1 и $c(s,q)$, $h(s,q)$ — некоторые константы.

Так как $\overline{\Omega_1} = \bigcup K(S)$, где объединение берется по всем граням $(n-k)$-мерного куба $S \subset \overline{\Omega_1}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то последнее неравенство эквивалентно следующей оценке

$$(s-n) \sum_{S\subset\partial\Omega_1} \int\limits_{K(S)} \frac{|g(x)|}{\delta(x)^s} dx + \frac{h(s,q)}{\delta_0(\Omega_1)^q} \sum_{S\subset\partial\Omega_1} \int\limits_{K(S)} \frac{|g(x)|}{\delta(x)^{s-q}} dx \le c(s,q) \sum_{S\subset\partial\Omega_1} \int\limits_{K(S)} \frac{|\nabla g(x)|}{\delta(x)^{s-1}} dx.$$

Поэтому достаточно доказать неравенства для $\Omega = K(S)$ и $g \in C^1(\Omega)$ такой, что $g(x) = 0$ для любого $x \in S$.

Как показано в [60], [16] и [198] для вычисления интегралов по множеству $K(S)$ с $r = \delta(x, \Omega_1)$ можно использовать либо сферические, либо цилиндрические, либо декартовы координаты, что позволяет перейти к соответствующему повторным интегралам:

(i) если $\dim S = n-1$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)dx = \int\limits_{S} d\omega \int_0^{\varphi_{n-1}(y+\omega_0)} g(y + r\omega_0)dr,$$

(ii) если $\dim S = n-k$ и $2 \le k \le n-1$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)dx = \int\limits_{S_+^k} d\omega \int_0^{\varphi_{n-k}(y,\omega)} g(y + r\omega) r^{k-1} dr,$$

(iii) если $\dim S = 0$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)dx = \int\limits_{S_+^n} d\omega \int_0^{\varphi_0(x_0,\omega)} g(x_0 + r\omega) r^{n-1} dr,$$

где функция $\varphi_{n-k}(y,\omega) = \varphi_{n-k}(y, \omega, S, \Omega_1) \in [0, \delta_0(\Omega_1)]$.

Заметим, что для выпуклой области (**пункт (i)**) ситуация проста и одномерные неравенства непосредственно переносятся на пространственный случай.

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $s > n$ и $s-q < 1$. Применим следствие 1.1.1 при $\mu = s-k+1$ и $\sigma = s-q-k+1$ для любого $k = \overline{1,n}$. Имеем

$$(s-k) \int\limits_0^{\varphi_{n-k}} \frac{|g(y+r\omega)|}{r^{s-k+1}} dr + \frac{(k+q-s)}{\delta_0(\Omega)^q} \int\limits_0^{\varphi_{n-k}} \frac{|g(r)|}{x^{s-q-k+1}} dr \le$$

$$\le \int\limits_0^{\varphi_{n-k}} \left| \frac{\partial g(y+r\omega)}{\partial r} \right| \left(1 - \left(\frac{r}{\delta_0(\Omega)} \right)^q \right) r^{k-s} dr, \quad k = \overline{1,n}. \quad (3.3.3)$$

Так как $s > n$, $s-q < 1$ и

$$\left| \frac{\partial g(y+r\omega)}{\partial r} \right| \le |\nabla g(y + r\omega)|,$$

то получим

$$(s-n)\int\limits_{K(S)}\frac{|g(x)|}{\delta^s}dx+\frac{(1+q-s)}{\delta_0^q}\int\limits_{K(S)}\frac{|g(x)|}{\delta(x)^{s-q}}dx\le\int\limits_{K(S)}\frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}}\left(1-\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)dx.$$

Таким образом, мы имеем неравенство (3.3.2).

Случай 2: $s>n$ и $s-q=k$. Используя лемму 1.1.1 при $\mu=s-k+1$ и $\sigma=s-q-k+1$, $k=\overline{1,n}$, получим

$$(s-k)\int\limits_0^{\varphi_{n-k}}\frac{|g(y+r\omega)|}{r^{s-k+1}}dr+\frac{e(s-k)}{\delta_0^q}\int\limits_0^{\varphi_{n-k}}\frac{|g(y+r\omega)|}{r^{s-q-k+1}}dr\le$$

$$\le(1+e^{-1/e})\int\limits_0^{\varphi_{n-k}}\left|\frac{\partial g(y+r\omega)}{\partial r}\right|r^{k-s}dr \quad (3.3.4)$$

для любого $k=\overline{1,n}$.

Случай 3: $s>n$ и $s-q\neq k$. Мы применяем лемму 1.1.1 при $\mu=s-k+1$ и $\sigma=s-q-k+1$ для каждого $k=\overline{1,n}$. Имеем

$$(s-k)\int\limits_0^{\varphi_{n-k}}\frac{|g(y+r\omega)|}{r^{s-k+1}}dr+\frac{q}{\delta_0^q}\left(1-\frac{s-k-q}{s-k}\right)^{-\frac{s-k}{s-k-q}}\int\limits_0^{\varphi_{n-k}}\frac{|g(y+r\omega)|}{r^{s-q-k+1}}dr\le$$

$$\le\left(1+\left(\frac{s-k}{q}\right)^{\frac{q}{k+q-s}}\frac{s-q-k}{s-k}\right)^{\frac{q}{k+q-s}}\int\limits_0^{\varphi_{n-k}}\left|\frac{\partial g(y+r\omega)}{\partial r}\right|r^{k-s}dr. \quad (3.3.5)$$

Комбинируя два последних неравенства, получаем

$$(s-n)\int\limits_{K(S)}\frac{|g(x)|}{\delta^s}dx+\frac{q}{\delta_0^q}\int\limits_{K(S)}\frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}}dx\le 2\int\limits_{K(S)}\frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}}dx,$$

где $s>n$ и $q>0$. Следовательно, получили неравенство (3.3.1). Это завершает доказательство теоремы 3.3.1. □

В следующей теореме мы устанавливаем L_p-аналоги неравенств (3.3.1) и (3.3.2).

Теорема 3.3.2. *Предположим, что Ω — произвольная открытая область в $\mathbb{R}^n$, $n\ge1$, $s>n$, $q>0$, $p\ge1$, $r\in[1,p]$ и внутренний радиус $\delta_0(\Omega)<\infty$. Тогда для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство*

$$\int\limits_\Omega\frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx+\frac{rq}{(s-n)\delta_0^q(\Omega)}\int\limits_\Omega\frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx\le\left(\frac{2p}{s-n}\right)^r\int\limits_\Omega\frac{|\nabla g(x)|^r|g(x)|^{p-r}}{\delta^{s-r}(x)}dx.$$

Более того, если $s-q<1$, для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_\Omega\frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx+\frac{r(1+q-s)}{(s-n)\delta_0^q(\Omega)}\int\limits_\Omega\frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx\le$$

$$\le\left(\frac{p}{s-n}\right)^r\int\limits_\Omega\frac{|\nabla g(x)|^r|g(x)|^{p-r}}{\delta^{s-r}(x)}\left(1-\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)^r dx. \quad (3.3.6)$$

Доказательство. Пусть $g \in C_0^1(\Omega)$ и $p > 1$. Так как $\nabla |g|^p = p|g|^{p-1}(\nabla g)\mathrm{sign} g$ и $|g|^{p-1}\mathrm{sign} g$ — непрерывная функция, то мы получим, что функция u, определенная в виде $u = |g|^p$, также принадлежит $C_0^1(\Omega)$. Используя неравенство (3.3.1) для функции $u = |g|^p$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s} dx + \frac{q}{(s-n)\delta_0(\Omega)^q} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^{s-q}} dx \leq \frac{2p}{s-n} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^{p-1}|\nabla g(x)|}{\delta(x)^{s-1}} dx.$$

Используя элементарное неравенство

$$a^{p_1} b^{p_2} \leq \left(\frac{p_1 a + p_2 b}{p_1 + p_2}\right)^{p_1+p_2} \tag{3.3.7}$$

для величин

$$p_1 = 1 - \frac{1}{r}, p_2 = \frac{1}{r}, a = \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s}, b = \left(\frac{2p}{s-n}\right)^r \frac{|\nabla g(x)|^r |g(x)|^{p-r}}{\delta(x)^{s-r}},$$

получим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s} dx + \frac{q}{(s-n)\delta_0(\Omega)^q} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^{s-q}} dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{r}\left(\frac{2p}{s-n}\right)^r \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^r |g(x)|^{p-r}}{\delta(x)^{s-r}} dx + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s} dx.$$

С учетом неравенства (3.3.2) и неравенства (3.3.7) для величин

$$p_1 = 1 - \frac{1}{r}, p_2 = \frac{1}{r}, a = \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s},$$
$$b = \left(\frac{p}{s-1}\right)^r \frac{|\nabla g(x)|^r |g(x)|^{p-r}}{\delta(x)^{s-r}} \left(1 - \left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)^r$$

установим (3.3.6). Это завершает доказательство теоремы 3.3.2. □

3.3.2 Случай выпуклых областей

Этот раздел посвящен неравенствам типа Харди в открытых выпуклых областях. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$.

В дальнейшем нам нужны будут следующие константы

$$M(s,q) := \begin{cases} q - s + 1, & \text{если } \ s - q < 1 < s, \\ e(\mu - 1), & \text{если } \ s - q = 1, \ s > 1, \\ (s-1)\left(\frac{q}{s-q-1}\right)^{\frac{q}{s-q+1}}, & \text{если } \ s - 1 \neq 1 < s, \end{cases}$$

и

$$N(s,q) := \begin{cases} 1, & \text{если } \ s - q < 1 < s, \\ 1 + e^{-1/e}, & \text{если } \ s - q = 1, \ s > 1, \\ 1 + \left(1 + \left(\frac{s-q-1}{q}\right)^{\frac{q}{1-s+q}} \frac{s-q-1}{s-1}\right)^{\frac{q}{1-s+q}}, & \text{если } \ s - q \neq 1 < s. \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3.3. *Если $s>1$, $q>0$ и Ω — выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, то для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$(s-1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx+\frac{M(s,s-q)}{\delta_0^q(\Omega)}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)}dx\le N(s,s-q)\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}dx \tag{3.3.8}$$

Более того, если $s-q<1$, то

$$(s-1)\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^s(x)}dx+\frac{q-s+1}{\delta_0(\Omega)^q}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q}(x)}dx\le\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^{s-1}(x)}\left(1-\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)dx.$$

Доказательство. Как и прежде, для доказательства этой теоремы воспользуемся методом Ф.Г. Авхадиева. Для выпуклой области (**случай (i)**, т. е. $k=1$) ситуация проста, и одномерные неравенства непосредственно переносятся на пространственный случай.

Используя неравенства (3.3.3), (3.3.4) и (3.3.5) при $k=1$, имеем следующие неравенства

$$(s-1)\int\limits_0^{\varphi_{n-1}}\frac{|g(y+r\omega)|}{r^s}dr+\frac{(1+q-s)}{\delta_0(\Omega)^q}\int\limits_0^{\varphi_{n-1}}\frac{|g(r)|}{x^{s-q}}dr\le\int\limits_0^{\varphi_{n-1}}\left|\frac{\partial g(y+r\omega)}{\partial r}\right|\left(1-\left(\frac{r}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)r^{1-s}dr,$$

$$(s-1)\int\limits_0^{\varphi_{n-1}}\frac{|g(y+r\omega)|}{r^s}dr+\frac{e(s-1)}{\delta_0(\Omega)^q}\int\limits_0^{\varphi_n}\frac{|g(y+r\omega)|}{r^{s-q}}dr\le(1+e^{-1/e})\int\limits_0^{\varphi_{n-1}}\left|\frac{\partial g(y+r\omega)}{\partial r}\right|r^{1-s}dr,$$

$$(s-1)\int\limits_0^{\varphi_{n-1}}\frac{|g(y+r\omega)|}{r^s}dr+\frac{q}{\delta_0(\Omega)^q}\left(1-\frac{s-1-q}{s-1}\right)^{-\frac{s-1}{s-1-q}}\int\limits_0^{\varphi_{n-1}}\frac{|g(y+r\omega)|}{r^{s-q}}dr$$

$$\le\left(1+\left(\frac{s-1}{q}\right)^{\frac{q}{1+q-s}}\frac{s-q-1}{s-1}\right)^{\frac{q}{k+q-s}}\int\limits_0^{\varphi_{n-1}}\left|\frac{\partial g(y+r\omega)}{\partial r}\right|r^{1-s}dr.$$

Следовательно, если $s>0$ и $q>0$, то получим

$$(s-1)\int\limits_{K(S)}\frac{|g(x)|}{\delta(x)^s}dx+\frac{M(s,s-q)}{\delta_0(\Omega)^q}\int\limits_{K(S)}\frac{|g(x)|}{\delta(x)^{s-q}}dx\le N(s,s-q)\int\limits_{K(S)}\frac{|\nabla g(x)|}{\delta(x)^{s-1}}dx,$$

а если $s-q<1$, то имеем

$$(s-1)\int\limits_{K(S)}\frac{|g(x)|}{\delta(x)^s}dx+\frac{q-s+1}{\delta_0(\Omega)^q}\int\limits_{K(S)}\frac{|g(x)|}{\delta(x)^{s-q}}dx\le\int\limits_{K(S)}\frac{|\nabla g(x)|}{\delta(x)^{s-1}}\left(1-\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)dx.$$

Это завершает доказательство теоремы 3.3.3. □

Теорема 3.3.4. *Если $s>1$, $q>0$, $p\ge1$ и Ω — выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, то для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ выполнено следующее неравенство*

$$\int\limits_\Omega\frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx+\frac{rM(s,s-q)}{\delta_0(\Omega)^q(s-1)}\int\limits_\Omega\frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx\le\left(\frac{pN(s,s-q)}{s-1}\right)^r\int\limits_\Omega\frac{|\nabla g(x)|^r|g(x)|^{p-r}}{\delta^{s-r}(x)}dx.$$

Если дополнительно наложить условие $s-q<1$, то справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega\frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}dx+\frac{r(q-s+1)}{\delta_0^q(\Omega)(s-1)}\int\limits_\Omega\frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q}(x)}dx\le\left(\frac{p}{s-1}\right)^r\int\limits_\Omega\frac{|\nabla g(x)|^r|g(x)|^{p-r}}{\delta^{s-r}(x)}\left(1-\left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)^r dx.$$

Доказательство. Применяя теорему 3.3.3 к функции $u = |g(x)|^p \in C_0^1(\Omega)$ и используя неравенство (3.3.7) для величин

$$p_1 = 1 - \frac{1}{r}, \quad p_2 = \frac{1}{r}, \quad a = \frac{|g(x)|^p}{\delta^s}, \quad b = \left(\frac{pN(s,s-q)}{s-1}\right)^r \frac{|\nabla g(x)|^r |g(x)|^{p-r}}{\delta(x)^{s-r}}$$

и

$$a = \frac{|g(x)|^p}{\delta(x)^s}, \quad b = \left(\frac{p}{s-1}\right)^r \frac{|\nabla g(x)|^r |g(x)|^{p-r}}{\delta(x)^{s-r}} \left(1 - \left(\frac{\delta(x)}{\delta_0(\Omega)}\right)^q\right)^r$$

получим утверждение доказываемой теоремы 3.4.4. □

§3.4 Пространственные неравенства и уравнения типа Лэмба

В этом разделе приведены многомерные аналоги неравенств, представленных выше в главе 1. Мы считаем, что Ω — выпуклая область с конечным радиусом. Для доказательства неравенств мы используем также метод Ф.Г. Авхадиева из [60] (см. также [16]). Этот метод, напомним, основан на специальной аппроксимации области Ω кубами. В случае с выпуклыми множествами доказательство многомерных неравенств сводится к применению одномерных неравенств.

Пусть Ω — открытое, выпуклое множество на $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом

$$\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{z\in\Omega} \delta(x),$$

где $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим известное семейство непрерывно дифференцируемых функций $g : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактным носителем лежащим в Ω.

Как мы упоминали выше, для выпуклой области ситуация проста и одномерные неравенства напрямую распространяются на пространственный случай. А именно, метод Ф.Г. Авхадиева сводится к следующему утверждению.

Теорема А. *Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Если для любого $\alpha \in (0, \delta_0]$ и неотрицательных величин b, c справедливо неравенство*

$$\int_0^\alpha \frac{|y'(t)|^p}{t^{s-p}}\, dt \geq b^2 \int_0^\alpha \frac{|y(t)|^p}{t^s}\, dt + \frac{c^2}{\delta_0^m} \int_0^\alpha \frac{|y(t)|^p}{t^{s-m}}\, dt, \; y \in C_0^1(0, 2\alpha),$$

то

$$\int_\Omega \frac{\nabla |g(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}\, dx \geq b^2 \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^s(x)}\, dx + \frac{c^2}{\delta_0^m} \int_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-m}(x)}\, dx, \; g \in C_0^1(\Omega).$$

3.4.1 L_1-неравенства

Объединяя теорему А и теорему 1.2.1, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.4.1. *Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $s, q > 0, \nu \geq 0$ и $g \in C_0^1(\Omega)$ и $g'(x)/\delta^s(x) \in L^1(\Omega)$. Если $\mu \in \left(0; \frac{s+\nu q}{q}\right)$, то*

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s+1}(x)}\, dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q+1}(x)}\, dx \leq$$
$$\leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right) \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^s(x)}\, dx + \left(\frac{q^2\mu^2}{s\delta_0^s} - \frac{2q\mu}{\delta_0^s}\right) \int_\Omega |\nabla g(x)|\, dx,$$

и если $\mu \leq 0$, то

$$\left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s+1}(x)}\, dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q+1}(x)}\, dx \leq$$
$$\leq 2\left(s + \nu q\right) \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^s(x)}\, dx - \frac{q\mu}{\delta_0^s} \int_\Omega |\nabla g(x)|\, dx,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu) J_\nu(z) + 2z J_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Объединяя теорему A и следствие 1.2.4, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.4.2. *Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $s > 0$, $q > s$ и $g \in C_0^1(\Omega)$ такая, что $|\nabla g(x)|/\delta^s(x) \in L^1(\Omega)$. Если $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ и $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$, то*

$$\frac{q}{\delta_0^q} \left(q\lambda_\nu^2\left(\frac{2s}{q}\right) + \mu(q - s)\left(2 - \frac{q\mu}{s}\right)\right) \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s-q+1}(x)}\, dx \leq$$
$$\leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right) \int_\Omega \frac{|\nabla g(x)|}{\delta^s(x)}\, dx - \left(s^2 - \nu^2 q^2\right) \int_\Omega \frac{|g(x)|}{\delta^{s+1}(x)}\, dx,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, удовлетворяющая следующему условию

$$(r - 2\mu) J_\nu(z) + 2z J_\nu'(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

3.4.2 L_p-неравенства

Объединяя теорему A, теорему 2.1.4 и теорему 2.1.5, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.4.3. *Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $p \geq 1$, $r \in [1, p]$ и $g \in C_0^1(\Omega)$. Если $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ и $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$, то*

$$\left(s^2 - r\nu^2 q^2\right) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)} dx + \frac{qr}{\delta_0^q} \left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu\frac{(q-s)(2s - q\mu)}{s}\right) \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q+1}(x)} dx \leq$$
$$\leq p^r s^{2(1-r)} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2\mu^2}{s}\right)^r \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^{p-r} \cdot |\nabla g(x)|^r}{\delta^{s-r+1}(x)} dx,$$

если $s > 0$, $q > s$, $\mu \in \left(0; \frac{2s}{q}\right]$ и $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$, то

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}(x)}\, dx + \frac{qr}{\delta_0^q} \left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s)\left(2 - \frac{q\mu}{s}\right)\right) \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s-q+1}(x)}\, dx \le$$

$$\le \frac{p^r}{s^r}\left(\frac{2s}{s-\nu q} - \frac{q^2\mu^2}{s^2-\nu^2q^2}\right)^r \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^{p-r}\cdot|\nabla g(x)|^r}{\delta^{s-r+1}(x)}\, dx,$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r-2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Для доказательства неравенств в пространствах L_p можно также использовать L_p-лемму из статьи [16] (см. также [201])

3.4.3 Функции Бесселя в ядре

Теорема 3.4.4. *Пусть Ω — n-мерная выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $\delta_0 = \delta_0(\Omega) < \infty$. Если $s \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$, то для произвольной функции $g \in C_0^1(\Omega)$ выполнено следующее неравенство типа Харди:*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} dx \ge \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^2}{(2\delta_0)^p} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\sin^{s-1}(\frac{\pi\delta}{2\delta_0})} \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)^{p-2} dx.$$

Частные случаи этого результата связаны с неравенствами Пуанкаре, доказанных Дж. Херчом в [113] и Л. Пейном и И. Стакгольдом в [142].

Перейдем к обоснованию неравенства теоремы 3.4.4. Рассмотрим два случая изменения параметра n: $n = 1$ и $n \ge 2$. При $n = 1$, т.е. при $\Omega = (a, b)$, для любой непрерывно-дифференцируемой функции такой, что $g(a) = g(b) = 0$ нам требуется доказать неравенство вида:

$$\int\limits_a^b \frac{|g'(x)|^p}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)} dx \ge \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^p}{(2\delta_0)^p} \int\limits_a^b |g(x)|^p \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)^{p-2} \frac{dx}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi\delta}{2\delta_0}\right)},$$

где

$$\delta = \delta(x) = \min\{x-a, b-x\}, \delta_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Замена переменной $\tau = \rho t$ в неравенстве следствия (2.3.1), при произвольном $\rho > 0$, приведет к следующему соотношению

$$\int\limits_0^\rho \frac{|u'(\tau)|^p}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi\tau}{2\rho}\right)} d\tau \ge \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^p}{(2\rho)^p} \int\limits_0^\rho |u(\tau)|^p \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi\tau}{2\rho}\right)^{p-2} \frac{d\tau}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi\tau}{2\rho}\right)}.$$

Теперь применяем последнее неравенство к функциям $u(\tau) = g(\tau + a)$ и $u(\tau) = g(b - \tau)$ с $\rho = \delta_0 = \frac{b-a}{2}$. Имеем

$$\int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|g'(x)|^p}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi(x-a)}{2\rho}\right)} dx \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^p}{(2\delta_0)^p} \int\limits_a^{(a+b)/2} |g(x)|^p \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-a)}{2\delta_0}\right)^{p-2} \frac{dx}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi(x-a)}{2\rho}\right)}$$

и

$$\int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|g'(x)|^p}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi(b-x)}{2\rho}\right)} dx \geq \frac{(p+s-2)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\pi^p}{(2\delta_0)^p} \int\limits_{(a+b)/2}^{b} |g(x)|^p \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi(b-x)}{2\delta_0}\right)^{p-2} \frac{dx}{\sin^{s-1}\left(\frac{\pi(b-x)}{2\rho}\right)}.$$

Суммирование этих двух неравенств дает требуемое утверждение. Описанный выше подход Авхадиева Ф.Г. доказывает случай $n \geq 2$. Этим заканчивается доказательство теоремы 3.4.4.

Аналогично, используя теорему 2.3.4, получим следующий результат.

Теорема 3.4.5. *Пусть Ω является n-мерной выпуклой областью с конечным внутренним радиусом δ_0, $s \in (0, +\infty)$, $q \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$ и $\nu \in [0, r/q]$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p+1}} dx \geq h \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1}} \mathfrak{J}_\nu\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) dx + \frac{\lambda^2}{\delta_0^q} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1-q}} \mathfrak{J}_\nu\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) dx,$$

где

$$\mathfrak{J}_\nu(x) = \left(\frac{r}{2} - \frac{q\nu}{2} + \frac{q\lambda_\nu(2r/q)x^{q/2}}{2} \frac{J_{\nu-1}(\lambda_\nu(2r/q)x^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda_\nu(2r/q)x^{\frac{q}{2}})}\right)^{p-2},$$

$$r = \frac{s}{p-1}, \; h = (p-1)\frac{r^2 - \nu^2 q^2}{4}, \; \lambda = \frac{q\sqrt{p-1}}{2}\lambda_\nu(2r/q).$$

В работе [59] была установлена связь между константой Лэмба $\lambda_\nu(2r/q)$ и первым положительным нулем j_ν функции Бесселя J_ν порядка ν. А именно,

$$\lambda_\nu(2\nu) = j_{\nu-1}.$$

Используя эту связь и предыдущую теорему при $h = 0$, получим

Теорема 3.4.6. *Пусть Ω является n-мерной выпуклой областью с конечным внутренним радиусом δ_0, $s \in (0, +\infty)$, $q \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$, $r = s/(p-1)$. Тогда для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p+1}} dx \geq \frac{(p-1)q^2 j_{r/q-1}^2}{4\delta_0^q} \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^p}{\delta^{s+1-q}} \mathfrak{J}_{r/q}\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) dx,$$

где

$$\mathfrak{J}_{r/q}(x) = \left(\frac{q j_{r/q-1} x^{q/2}}{2} \frac{J_{r/q-1}(j_{r/q-1}x^{\frac{q}{2}})}{J_{r/q}(j_{r/q-1}x^{\frac{q}{2}})}\right)^{p-2}.$$

Рассмотрим два частных случая параметров r и q: $r/q = 3/2, \quad r/q = 1/2$.

Известно, что

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}, J_{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x - x\cos x}{x^{3/2}}$$

и $j_{-1/2} = \pi/2,\ j_{1/2} = \pi$ (см, например, [58]).

Имеют место два следствия из теоремы 3.4.6.

Следствие 3.4.1. *Пусть Ω является n-мерной выпуклой областью с конечным внутренним радиусом δ_0 и $g \in C_0^1(\Omega)$. Если $s \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$, $r = s/(p-1)$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p+1}} dx \geq \frac{r^p(p-1)\pi^{2p-2}}{3^p \delta_0^{\frac{2r(p-1)}{3}}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{\frac{s}{3}+1}} \left(\frac{1}{1 - \pi(\frac{\delta}{\delta_0})^{\frac{r}{3}} \cot \pi(\frac{\delta}{\delta_0})^{\frac{r}{3}}} \right)^{p-2} dx.$$

Следствие 3.4.2. *Пусть Ω является n-мерной выпуклой областью с конечным внутренним радиусом δ_0 и $g \in C_0^1(\Omega)$. Если $s \in (0, +\infty)$, $p \in [2, +\infty)$, $r = s/(p-1)$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g(x)|^p}{\delta^{s-p+1}} dx \geq \frac{(p-1) r^p \pi^p}{2^p \delta_0^{2r}} \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^p}{\delta^{1-r}} \ \cot^{p-2}\left(\frac{\pi\delta^r}{2\delta_0^r}\right) dx.$$

§3.5 Конформно инвариантные неравенства и конформные инварианты

Результаты этого пункта можно рассматривать с двух точек зрения: как усиление классического неравенства (0.0.20) с помощью замены функции расстояния на конформный радиус области и как аналоги неравенства Пуанкаре в спектральной теории оператора Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны.

В первой части мы получим L_p-аналоги результатов Фернандеса-Родригеса. Отметим, что эти результаты получены в совместной работе Ф.Г. Авхадиева, Р.Г. Насибуллина и И.К. Шафигуллина [187, 188]. Вторая часть посвящена неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми. Эти неравенства являются L_p-аналогами неравенств Ф.Г. Авхадиева из статьи [11].

3.5.1 Введение

Пусть Ω — область, содержащая не менее трех граничных точек на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Такие области будем называть *областями гиперболического типа* (см. подробнее [4]). Как обычно через $C_0^1(\Omega)$ обозначим семейство непрерывно дифференцируемых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями в Ω. Отметим, что если $\infty \in \Omega$, то гладкость $u(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ понимается как гладкость $u(1/z)$ в точке $z = 0$.

В каждой точке $z = x + iy \in \Omega$ определим гиперболический радиус формулой

$$R(z,\Omega) = 1/\lambda_\Omega(z),$$

где λ_Ω — коэффициент метрики Пуанкаре области Ω с гауссовой кривизной $k = -4$ (см., например, [52, 63]).

Далее также нам понадобится модуль двусвязной области Ω', для определения которой берется конформно эквивалентное области Ω' круговое кольцо A, определяемое неравенствами $r(A) < |z| < R(A)$. По определению, число

$$M(\Omega') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R(A)}{r(A)}$$

называется модулем двусвязной области Ω'. Мы говорим, что двусвязная область Ω' разделяет границу области Ω, если $\Omega' \subset \Omega$ и в каждой компоненте множества $\mathbb{C} \setminus \Omega'$ имеются точки $\partial\Omega$.

Следуя Х. Поммеренке [146], будем говорить, что область гиперболического типа $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет равномерно совершенную границу, если $M(\Omega) < \infty$, где $M(\Omega)$ — точная верхняя граница модулей двусвязных областей, лежащих в области Ω и разделяющих её границу.

Введем также следующую известную числовую характеристику области Ω гиперболического типа:

$$h(\Omega) = \sup_G \iint\limits_G \frac{1}{R^2(z,\Omega)} dxdy \left(\int\limits_{\partial G} \frac{1}{R(z,\Omega)} |dz| \right)^{-1},$$

где точная верхняя грань берется по всем областям G, ограниченным кусочно гладкими кривыми, и таким, что $\overline{G} \subset \Omega$. Отметим, что гиперболическая площадь $\iint\limits_G R^{-2}(z,\Omega)dxdy$ и гиперболическая длина $\int\limits_{\partial G} R^{-1}(z,\Omega)|dz|$ являются безразмерными величинами. Очевидно, условие $h(\Omega) < \infty$ означает, что в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет место линейное гиперболическое изопериметрическое неравенство.

Рассмотрим конформно инвариантный функционал области $c_{p,q}(\Omega)$, который определяется как максимальная из возможных постоянных в следующем вариационном неравенстве типа Харди

$$\left(\iint\limits_\Omega \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(z,\Omega)} \right)^{1/p} \geq c_{p,q}(\Omega) \left(\iint\limits_\Omega \frac{|u|^q dxdy}{R^2(z,\Omega)} \right)^{1/q}, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.5.1}$$

где $1 < p \leq q < \infty$, $z = x + iy$, ∇u – градиент функции u. Таким образом, рассматриваемый нами функционал $c_{p,q}(\Omega)$ определяется формулой

$$c_{p,q}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^1(\Omega), u \not\equiv 0} \left(\iint\limits_\Omega \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(z,\Omega)} \right)^{1/p} \left(\iint\limits_\Omega \frac{|u|^q dxdy}{R^2(z,\Omega)} \right)^{-1/q}. \tag{3.5.2}$$

Конформная инвариантность функционала, определяемого формулой (3.5.2), легко проверяется. Действительно, пусть $F : \Omega \to \Omega_\zeta$ — однолистное конформное отображение области Ω на некоторую другую область $\Omega_\zeta \subset \overline{\mathbb{C}}$. Обозначим

$$\zeta = F(z) = \xi + i\eta \in \Omega_\zeta, U := u \circ F^{-1},$$

где $z = x + iy \in \Omega$ и функция $u \in C_0^1(\Omega)$. Тогда $U := u \circ F^{-1} \in C_0^1(\Omega_\zeta)$ и имеют место формулы

$$\lambda_\Omega(z)|dz| \equiv \lambda_{\Omega_\zeta}(z)|d\zeta|, \quad \lambda_\Omega^2(z)dxdy = \lambda_{\Omega_\zeta}^2(z)d\xi d\eta,$$
$$|F'(z)|^2 dxdy = d\xi d\eta, \quad \nabla U = 2\frac{\partial U\zeta}{\partial \overline{\zeta}} = 2\frac{\partial u(z)}{\partial \overline{z}}\overline{F'(z)} = (\nabla u)\overline{F'(z)}.$$

Определяя $c_{p,q}(\Omega_\zeta)$ формулой (3.5.2) с заменой области Ω на область Ω_ζ и функции u на функцию U, соответственно, получаем, что

$$c_{p,q}(\Omega) = c_{p,q}(\Omega_\zeta).$$

В статьях Д. Салливана [163], Х.Л. Фернандеса [100], Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса [101] рассматривается частный случай неравенства (3.5.1), соответствующий случаю $p = q = 2$, а именно, неравенство

$$\iint\limits_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \geq c_2(\Omega) \iint\limits_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.5.3}$$

где

$$c_2(\Omega) = \inf_{u \in C_0^1(\Omega), u \not\equiv 0} \iint\limits_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \left(\iint\limits_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy \right)^{-1}. \tag{3.5.4}$$

Очевидно, $c_2(\Omega) = c_{2,2}^2(\Omega)$. Константа $c_2(\Omega)$ хорошо известна в спектральной теории оператора Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны. Например, известно (см. [163] и [100]), что $c_2(\Omega) = 1$ для любой односвязной или двусвязной области гиперболического типа, а также $c_2(\Omega) \in [0, 1]$ для любой области гиперболического типа. Существуют области, для которых неравенство (3.5.1) не является содержательным, т.е. $c_2(\Omega) = 0$. Эти утверждения являются следствиями известных фактов гиперболической геометрии и формулы Элстродта-Паттерсона-Сулливана ([163], с. 333):

$$c_2(\Omega) = \left\{1 \text{ для } 0 \leq \beta \leq 1/2; \;\; 4\beta\,(1-\beta) \text{ для } 1/2 \leq \beta \leq 1\right\},$$

где $\beta = \beta(\Omega)$ — критический показатель сходимости рядов Пуанкаре-Дирихле для фундаментальной группы преобразований Ω.

В [100] Х.Л. Фернандес доказал, что условие $M(\Omega) < \infty$ влечет положительность величины $c_2(\Omega)$. Ключевым результатом статьи Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса [101] являются оценки

$$1/\left(2h(\Omega)\right)^2 \leq c_2(\Omega) \leq 3/h(\Omega).$$

Ф.Г. Авхадиев [11] исследовал следующее обобщение (3.5.3):

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \geq c_p(\Omega) \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.5.5}$$

где $p \in [1,\infty)$ — фиксированное число и

$$c_p(\Omega) = \inf_{u\in C_0^1(\Omega), u\not\equiv 0} \iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \Big/ \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy. \tag{3.5.6}$$

В [11, 16, 60] доказано, что условие $M(\Omega) < \infty$ влечет положительность величины $c_p(\Omega)$ при любом значении $p \in [1,\infty)$ и установлено равенство $c_p(\Omega) = 2^p/p^p$ для любой односвязной или двусвязной области гиперболического типа при любом $p \in [1,\infty)$. Кроме того, в [11] доказаны оценки для константы $c_p(\Omega)$, зависящие от евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ и показателя $p \in [1,\infty)$. Отметим, что

$$M_0(\Omega) \leq M(\Omega) \leq M_0(\Omega) + 1/2$$

для областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ (см. подробнее [63]) и

$$M_0(\Omega) \leq M(\Omega) \leq 2M_0(\Omega) + 1$$

для областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in \Omega$, где $M(\Omega)$ — максимальный модуль, определенный выше.

В данном параграфе мы получаем несколько новых оценок для константы $c_p(\Omega)$ и их обобщения для $c_{p,q}(\Omega)$ при $1 \leq p \leq q < \infty$.

Для удобства в следующем пункте приведем известные результаты, которые существенно используются нами в доказательствах.

3.5.2 Вспомогательные утверждения и определения

Существенную роль в доказательствах играет подход В.М. Миклюкова и М. Вуоринена [135], связанный с изопериметрическим профилем области.

Пусть Ω — область гиперболического типа на расширенной плоскости, и пусть $\alpha, \beta : \Omega \to (0,\infty)$ — некоторые непрерывные функции. Рассмотрим фиксированные параметры p и q, удовлетворяющие условию $1 < p \leq q < \infty$. На множестве областей $G \subset \Omega$, таких, что граница ∂G состоит из кусочно-гладких кривых и $\overline{G} \subset \Omega$, определим взвешенную площадь

$$V(G) = \iint\limits_{G} \alpha(z)^q dxdy$$

и взвешенную длину

$$A(G) = \int\limits_{\partial G} \beta(z)\alpha(z)^{(p-1)q/p}|dz|.$$

Изопериметрический профиль плоской области Ω является наилучшей (максимальной) функцией

$$\theta : [0, V(\Omega)) \to [0, \infty), \quad \theta(0) = 0,$$

удовлетворяющей следующему соотношению

$$\theta(V(G)) \leq A(G)$$

для любой допустимой области G, т.е. для любой области с кусочно-гладкой границей и такой, что $\overline{G} \subset \Omega$.

Приведем формулировку основного утверждения из статьи В.М. Миклюкова и М. Вуоринена [135] (с. 2746) в той общности, которая необходима для нас. Необходимо отметить, что в статье [135] указаны более специальные условия на функции α и β, которые не используются в доказательстве этой теоремы, но упрощают описание различных приложений.

Теорема A. *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, и пусть Ω — область гиперболического типа на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Если для области Ω существует изопериметрический профиль, удовлетворяющий соотношению*

$$B := \sup_{r \in (0, V(\Omega))} r^{1/q} \left(\int\limits_{r}^{V(\Omega)} \theta(t)^{-p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} < \infty,$$

то для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство

$$\left(\iint\limits_{\Omega} |\alpha(z) u(z)|^q dx dy \right)^{1/q} \leq \lambda \left(\iint\limits_{\Omega} (\beta(z) |\nabla u(z)|)^p dx dy \right)^{1/p},$$

где $z = x + iy$, λ—положительная постоянная, для которой справедливы оценки:

$$B \leq \lambda \leq B q^{1/q} \left(q/(q-1) \right)^{(p-1)/p}.$$

Нам необходимы также три следующих теоремы Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса.

Теорема B. (Х.Л. Фернандес, Х.М. Родригес [101], с. 166) *Пусть Ω — область гиперболического типа. Константа $h(\Omega) < \infty$ тогда и только тогда, когда $c_2(\Omega) > 0$, более того,*

$$1/\left(2h(\Omega)\right)^2 \leq c_2(\Omega) \leq 3/h(\Omega).$$

В следующей теореме речь идет об областях с равномерно совершенными границами.

Теорема C. (Х.Л. Фернандес, Х.М. Родригес [101], с. 167) *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа такая, что $M(\Omega) < \infty$. Пусть $A \subset \Omega$ — множество, состоящее из конечного или счетного множества точек таких, что*

$$\inf_{z \in A, w \in A \setminus \{z\}} d_\Omega(z, w) > 0,$$

где $d_\Omega(z,w)$ — гиперболическое расстояние между точками $z, w \in \Omega$. Тогда

$$c_2(\Omega \setminus A) > 0.$$

Как указано в статье [53], в этой теореме в качестве множества A можно взять произвольное множество $A \subset \Omega$, состоящее их конечного числа точек.

Теорема D. (Х.Л. Фернандес, Х.М. Родригес [101], с. 167) *Пусть Ω плоская область, $\infty \in \Omega$ такая, что $c_2(\Omega) > 0$ и I — множество изолированных точек $\partial\Omega$. Тогда точки I равномерно отдалены друг от друга.*

В статье [53], В. Альварес, Д. Пестана и Х.М. Родригес получили утверждения, обобщающие соответствующие результаты Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса из [101]. Отметим, что они распространили результаты из [101] на случай гиперболических римановых поверхностей, причём некоторые из этих результатов являются новыми для областей на плоскости. Приведем одно из таких утверждений.

Теорема E. (В. Алварес, Д. Пестана, Х.М. Родригес [53], стр. 362). *Пусть Ω — область гиперболического типа, I – замкнутое и счетное подмножество Ω и $R = \Omega \setminus I$. Неравенство $h(R) < \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $h(\Omega) < \infty$ и для некоторого фиксированного числа $r_0 > 0$ в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$ с центром в t и радиусом r_0. Более того, имеют место оценка*

$$h(R) \le \frac{h(\Omega)}{\operatorname{th}^2\left(\frac{r_0}{4}\right)} + \frac{2\pi}{r_0 \ln\left(\frac{\operatorname{th}(r_0)}{\operatorname{th}\left(\frac{r_0}{4}\right)}\right)}.$$

Прежде чем сформулировать следующий результат Ф.Г. Авхадиева из [11] введем некоторые обозначения. Евклидов максимальный модуль определяется равенством

$$M_0(\Omega) := \sup \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R(A)}{r(A)},$$

где супремум берется по всем кольцам A таким, что A разделяет границу Ω,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\} \subset \Omega \quad \text{и} \quad z_0 \in \partial\Omega.$$

Мы полагаем $M_0(\Omega) = 0$, если множество таких колец является пустым множеством.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема F. (Ф.Г. Авхадиев [11], с. 16) *Пусть $1 \le p < \infty$. Если $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой имеет не менее трех компонент и является равномерно совершенной, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(x+iy,\Omega)} \ge \frac{1}{p^p \mu^p(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p dxdy}{R^2(x+iy,\Omega)},$$

где

$$\mu(\Omega) = \begin{cases} \pi M_0(\Omega) + \Gamma^4(1/4)/(4\pi^2), & \text{если } \infty \notin \Omega, \\ 2\pi M_0(\Omega) + \pi + \Gamma^4(1/4)/(4\pi^2), & \text{если } \infty \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь Γ *— гамма-функция Эйлера.*

3.5.3 Основные результаты

Докажем сначала теорему сравнения для констант $c_r(\Omega)$ для различных r. Близкие результаты, относящиеся к неравенствам Харди другого типа, имеются в статьях [16] и [198].

Теорема 3.5.1. *Пусть* $1 \le p \le r < \infty$, *и пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— область гиперболического типа. Тогда*

$$c_r(\Omega) \ge p^r \left[c_p(\Omega)\right]^{r/p} / r^r. \tag{3.5.7}$$

Доказательства теоремы 3.5.1. При $p = r$ соотношение (3.5.7) является тождеством. Поэтому рассмотрим лишь случай, когда $p < r$.

Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, и пусть $1 \le p < r < \infty$. Определим новую функцию $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ равенством $\varphi(z) \equiv |u(z)|^{r/p}$, $z = x + iy \in \Omega$. Очевидно, $\varphi \in C_0(\Omega)$.

Имеем

$$\nabla\varphi(z) = (r/p)|u(z)|^{r/p-1}(\operatorname{sign} u(z))\nabla u(x).$$

Так как $r/p - 1 > 0$ и функция $u \in C_0^1(\Omega)$, то функция φ является непрерывно дифференцируемой в тех точках $z \in \Omega$, где $u(z) \neq 0$. Если же $u(z_0) = 0$ в некоторой точке $z_0 \in \Omega$, то ясно, что $\nabla\varphi(z_0) = 0$ и $\lim_{z\to z_0} \nabla\varphi(z) = 0$ с учетом соотношений $r/p - 1 > 0$ и $u \in C_0^1(\Omega)$. Поэтому имеем: $\varphi = |u|^{r/p} \in C_0^1(\Omega)$.

Применяя к функции φ неравенство (3.5.5), получаем

$$\frac{r^p}{p^p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^{r-p}|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \ge c_p(\Omega) \iint_{\Omega} \frac{|u|^r}{R^2(z,\Omega)} dxdy, \quad u \in C_0^1(\Omega).$$

Оценим сверху интеграл из левой части этого неравенства, полагая

$$p_1 = \frac{r}{r-p},\ p_2 = \frac{r}{p},\ f_1 = \frac{|u|^{r-p}}{R^{2-2p/r}},\ f_2 = \frac{|\nabla u|^p}{R^{2p/r-p}},$$

и применяя неравенство Гёльдера

$$\iint_{\Omega} f_1 f_2 dxdy \le \left(\iint_{\Omega} f_1^{p_1} dxdy\right)^{1/p_1} \left(\iint\limits_{\Omega} f_2^{p_2} dxdy\right)^{1/p_2}.$$

В результате будем иметь неравенство

$$\frac{r^p}{p^p} \left(\iint_{\Omega} \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^{1-p/r} \left(\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^r dxdy}{R^{2-r}(z,\Omega)}\right)^{p/r} \ge c_p(\Omega) \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)}.$$

Так как $u \in C_0^1(\Omega)$ и $u \not\equiv 0$, то это неравенство равносильно следующему

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^r dxdy}{R^{2-r}(z,\Omega)} \geq \frac{p^r [c_p(\Omega)]^{r/p}}{r^r} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),\ u \not\equiv 0.$$

Отсюда и следует неравенство (3.5.7), так как с учетом определения (3.5.6) при $r = p$ постоянная $c_r(\Omega)$ является максимально возможной постоянной в неравенстве

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^r dxdy}{R^{2-r}(z,\Omega)} \geq c_r(\Omega) \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Этим и завершается доказательство теоремы 3.5.1.

Следующие два утверждение являются обобщениями теоремы B Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса. Мы получаем оценки конформно инвариантных величин $c_p(\Omega)$ и $c_{p,q}(\Omega)$ при некоторых ограничениях на параметры p и q. Напомним, что величины $c_p(\Omega)$ и $c_{p,q}(\Omega)$ сравнимы с константой $c_2(\Omega)$ при условии $p = q = 2$. В частности, при $p = 2$ следующая теорема 3.5.2 совпадает с теоремой B.

Теорема 3.5.2. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа с коэффициентом линейного изопериметрического неравенства, определенным равенством*

$$h(\Omega) = \sup_G \iint\limits_G R^{-2}(z,\Omega) dxdy \left(\int\limits_{\partial G} R^{-1}(z,\Omega)|dz| \right)^{-1},$$

где точная верхняя граница берется по всем областям G, компактно вложенным в область Ω и ограниченным кусочно-гладкими кривыми.

Справедливы следующие утверждения.

1) Если $h(\Omega) < \infty$, то постоянная $c_p(\Omega)$ является положительным числом для любого $p \in [1,\infty)$ и имеет место оценка $c_p(\Omega) \geq 1/\left(ph(\Omega)\right)^p$.

2) При любом $p \in [1,2]$ постоянная $c_p(\Omega)$ является положительным числом тогда и только тогда, когда $h(\Omega) < \infty$. Кроме того, справедливы оценки

$$\frac{1}{h^p(\Omega)} \leq p^p c_p(\Omega) \leq \frac{12^{p/2}}{h^{p/2}(\Omega)}.$$

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Предположим, что $p \in (1,\infty)$ и $h(\Omega) < \infty$. В силу определения конформно инвариантной константы $h(\Omega)$ для любой области G, компактно вложенной в Ω и ограниченной кусочно гладкими кривыми, будем иметь

$$V(G) := \iint\limits_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leq h(\Omega) \int\limits_{\partial G} \frac{ds}{R(z,\Omega)}. \tag{3.5.8}$$

Далее мы применяем теорему В.М. Миклюкова и М. Вуоринена в приведенной выше форме (см. теорему A), полагая $q = p \in (1, \infty)$,

$$\alpha(z) = R^{-2/p}(z, \Omega), \quad \beta(z) = R^{-2/p+1}(z, \Omega).$$

Из определения изопериметрического профиля области Ω следует, что профиль удовлетворяет неравенству

$$\theta(t) \geq t/h(\Omega)$$

для любого $t \in (0, I_p)$, где $I_p = \sup_G V(G)$. Поэтому

$$B := \sup_{r \in (0, I_p)} r^{1/p} \left(\int\limits_r^{I_p} \theta(t)^{-p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} \leq$$

$$\leq h(\Omega) \sup_{r \in (0, \infty)} r^{1/p} \left(\int\limits_r^{\infty} t^{-p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} = h(\Omega)\,(p-1)^{1-1/p}.$$

Последнее равенство получено с помощью непосредственных вычислений.

В силу теоремы A, применяемой для параметров $q = p \in (1, \infty)$, имеем неравенство

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z, \Omega)} dxdy \geq \lambda^{-p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2(z, \Omega)} dxdy, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.5.9}$$

где постоянная λ удовлетворяет неравенству

$$\lambda \leq B\, p^{1/p}\,(p/(p-1))^{(p-1)/p} \leq p h(\Omega). \tag{3.5.10}$$

Заметим теперь, что постоянная $c_p(\Omega)$ определена как максимальная постоянная в неравенстве вида (3.5.9). Следовательно,

$$c_p(\Omega) \geq \lambda^{-p}.$$

Эта оценка вместе с оценкой (3.5.10) приводит к неравенствам

$$c_p(\Omega) \geq 1/\,(p h(\Omega))^p > 0.$$

Тем самым первое утверждение теоремы доказано для любого $p \in (1, \infty)$.

Остается рассмотреть случай, когда $p = 1$. Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$ — фиксированная функция. Для этой функции при любом $p \in (1, \infty)$ будет справедливо неравенство (3.5.9) с постоянной λ, удовлетворяющей оценке (3.5.10). Поскольку интегралы в неравенствах (3.5.9) непрерывно зависят от параметра $p \in (1, \infty)$ для фиксированной функции $u \in C_0^1(\Omega)$, то мы можем перейти к пределу при $p \to 1$. Очевидно, предельный переход в (3.5.9) и (3.5.10) при $p \to 1$ приводит к оценке

$$c_1(\Omega) \geq 1/h(\Omega) > 0$$

с учетом определения $c_1(\Omega)$ как максимальной постоянной в соответствующем неравенстве.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Предположим, что $p \in [1,2]$. Если $h(\Omega) < \infty$, то положительность $c_p(\Omega)$ и нижняя оценка для этой величины вытекают из первого утверждения теоремы.

Предположим теперь, что $c_p(\Omega) > 0$ для фиксированного $p \in [1,2]$. Если $p = 2$, то неравенство $h(\Omega) < \infty$ и верхняя оценка

$$c_2(\Omega) \leq 3/h(\Omega)$$

доказаны Х.Л. Фернандесом и Х.М. Родригесом (см. выше теорему B). Пусть теперь $p \in [1,2)$ и $c_p(\Omega) > 0$. Применяя оценку (3.5.7) теоремы 3.5.1 при $r = 2$, имеем:

$$c_2(\Omega) \geq p^2 \left[c_p(\Omega)\right]^{2/p}/4 > 0.$$

Применяя эту оценку и теорему B, получаем, что $h(\Omega) < \infty$ и

$$c_p(\Omega) \leq \left(4c_2(\Omega)/p^2\right)^{p/2} \leq \left(12/(h(\Omega)p^2)\right)^{p/2}.$$

Таким образом, теорема 3.5.2 доказана полностью. □

Приведем несколько утверждений, получаемых как следствия теоремы 3.5.2 и указанных выше теорем Х.Л. Фернандеса, Х.М. Родригеса и Ф.Г. Авхадиева.

Следствие 3.5.1. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой является равномерно совершенной. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\sqrt{h(\Omega)} < 2\sqrt{3}\mu(\Omega),$$

где

$$\mu(\Omega) = \begin{cases} \pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}, & \text{если } \infty \notin \Omega, \\ 2\pi M_0(\Omega) + \pi + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}, & \text{если } \infty \in \Omega, \end{cases}$$

Γ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. По теореме Ф.Г. Авхадиева (теореме F) для гиперболической области с равномерно совершенной границей получаем, что

$$c_p(\Omega) \geq \frac{1}{p^p \mu(\Omega)}.$$

По теореме 3.5.2 при $p \in [1,2)$ имеем

$$\left(\frac{12}{p^2 h(\Omega)}\right)^{p/2} > c_p(\Omega) \geq \frac{1}{p^p \mu^p(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{h(\Omega)} < \sqrt{12}\mu(\Omega),$$

что и требовалось доказать. □

В следующем утверждении величина $d_\Omega(z,w)$ обозначает гиперболическое расстояние между точками $z, w \in \Omega$.

Следствие 3.5.2. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, такая, что $M(\Omega) < \infty$, т.е. граница области Ω является равномерно совершенным множеством. Пусть $A \subset \Omega$ — множество, состоящее из конечного или счетного множества точек и $R = \Omega \setminus A$. Если A является счетным множеством, то предполагаем, что*

$$\inf_{z \in A, w \in A \setminus \{z\}} d_\Omega(z,w) > 0.$$

Тогда $c_p(R) > 0$ при $1 \le p < \infty$.

Доказательство. Из теоремы Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса (см. [101]) следует, что константа $c_2(R) > 0$. Поэтому изопериметрическая постоянная $h(R) < \infty$ по теореме B.

Применяя теперь теорему 3.5.2, имеем

$$c_p(R) \ge \frac{1}{h^p(R)p^p} > 0,$$

для любого $1 \le p < \infty$, что и требовалось показать. □

Следствие 3.5.3. *Пусть $p \in [1,2)$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, $\infty \in \Omega$, и через I обозначим множество изолированных точек границы $\partial\Omega$. Предположим, что $c_p(\Omega) > 0$. Тогда точки множества I равномерно отдалены в гиперболической метрике области $G = \Omega \cup I$.*

Доказательство. По условию $c_p(\Omega) > 0$ при $p \in [1,2)$. Применяя неравенство (3.5.7) получим, что также $c_2(\Omega) > 0$. Утверждение следствия следует из теоремы D Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса. □

Приведем утверждение, получаемое как следствия теоремы 3.5.2 и сформулированной выше теоремы В. Альвареса, Д. Пестаны и Х.М. Родригеса из [53].

Следствие 3.5.4. *Пусть $p \in [1,2)$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, $\infty \in \Omega$, I замкнутое счетное подмножество Ω и $R = \Omega \setminus I$. Тогда справедливы следующие утверждения*

1. *если $c_p(R) > 0$, то $h(\Omega) < \infty$, $c_p(\Omega) > 0$ и для некоторого фиксированного числа $r_0 > 0$ в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$ с центром в t и радиусом r_0;*

2. *если $c_p(\Omega) > 0$ и для некоторого фиксированного числа $r_0 > 0$ в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$*

с центром в t и радиусом r_0, то $h(R) < \infty$ и $c_p(R) > 0$. Более того, имеют место оценка

$$c_p(R) \geq \left[\frac{\sqrt[p]{c_p(\Omega)}}{th^2\left(\frac{r_0}{4}\right)} + \frac{2p\pi}{r_0 \ln \frac{\tan(r_0)}{th\left(\frac{r_0}{4}\right)}}\right]^{-p}.$$

Доказательство. Пусть $c_p(R) > 0$. Применяя теорему 3.5.2 при $p \in [1,2)$, имеем $h(R) < \infty$. Далее, используя теорему В. Альвареса, Д. Пестаны и Х.М. Родригеса (т.е. теорему E), получим, что $h(\Omega) < \infty$, и что в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$ с центром в t и фиксированным радиусом r_0. Остается ещё раз применить теорему 3.5.2, чтобы получить неравенство $c_p(\Omega) > 0$.

Пусть теперь $c_p(\Omega) > 0$. Следовательно, по теореме 3.5.2 имеем неравенство $h(\Omega) < \infty$ и оценку

$$ph(\Omega) \geq [c_p(\Omega)]^{1/p}. \tag{3.5.11}$$

Так как в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$ с центром в t и фиксированным радиусом $r_0 > 0$, то по теореме E получаем, что $h(R) < \infty$ и, кроме того, справедливы соотношения

$$h(R) \leq \frac{h(\Omega)}{\operatorname{th}^2\left(\frac{r_0}{4}\right)} + \frac{2\pi}{r_0 \ln \frac{\tan r_0}{\operatorname{th}\left(\frac{r_0}{4}\right)}}, \tag{3.5.12}$$

$$c_p(R) \geq \frac{1}{h^p(R)p^p} > 0. \tag{3.5.13}$$

Комбинируя неравенства (3.5.11), (3.5.12) и (3.5.13), получаем требуемое утверждение. □

Замечание. Согласно теореме 3.5.2, если $p \in [1,2]$ и $c_p(\Omega) > 0$, то коэффициент $h(\Omega)$ является конечной величиной. Остается открытым вопрос: гарантирует ли конечность коэффициента $h(\Omega)$ условие, что константа $c_p(\Omega)$ является положительным числом для некоторого $p \in (2, \infty)$. По-другому, эту проблему можно сформулировать следующим образом: существует ли такая область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа, что константа $c_2(\Omega) = 0$, но константа $c_p(\Omega)$ является положительным числом для некоторого $p \in (2, \infty)$.

Следующая теорема обобщает первое утверждение теоремы 3.5.2.

Теорема 3.5.3. *Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, числа $p \in [1, \infty)$ и $q \in [1, \infty)$ фиксированы и удовлетворяют неравенствам $1/p - 1/2 \leq 1/q \leq 1/p$, величина $h_{p,q}(\Omega)$ определена равенством:*

$$h_{p,q}(\Omega) = \sup_G \left(\iint_G R^{-2}(z,\Omega)dxdy\right)^{1/q-1/p+1} \left(\int_{\partial G} R^{-1}(z,\Omega)|dz|\right)^{-1},$$

где точная верхняя граница берется по всем областям G, компактно вложенным в область Ω и ограниченным кусочно-гладкими кривыми.

Если $h_{p,q}(\Omega) < \infty$, то константа $c_{p,q}(\Omega)$ является положительным числом. Кроме того, имеют место оценки:

$$c_{p,q}(\Omega) \geq \frac{q^{1/p-1/q-1}}{h_{p,q}(\Omega)} \left(\frac{p(q-1)}{q(p-1)}\right)^{(p-1)/p} \quad \text{\textit{для случая}} \quad p > 1,$$

$$c_{1,q}(\Omega) \geq \frac{1}{q^{1/q} h_{1,q}(\Omega)} \quad \text{\textit{для случая}} \quad p = 1.$$

Доказательство. Мы применяем тот же метод, который был использован при доказательстве первого утверждения предыдущей теоремы.

Определим непрерывные функции $\alpha : \Omega \to (0, \infty)$ и $\beta : \Omega \to (0, \infty)$ равенствами $\alpha(z) = R^{-2/q}(z, \Omega)$ и $\beta(z) = R^{-2/p+1}(z, \Omega)$, где $z = x + iy \in \Omega$.

Пусть G — область, ограниченная кусочно-гладкой кривой и удовлетворяющая условию $\overline{G} \subset \Omega$. Пользуясь определениями В.М. Миклюкова и М. Вуоринена для выбранных нами функций α и β, получаем следующие формулы для взвешенной площади области

$$V(G) = \iint\limits_G \alpha(z)^q dxdy = \iint_G \frac{dxdy}{R^2(z, \Omega)}$$

и взвешенной длины границы

$$A(G) = \int\limits_{\partial G} \beta(z)\alpha(z)^{(p-1)q/p} |dz| = \int\limits_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z, \Omega)}.$$

В силу условий теоремы для любой допустимой области имеем неравенство

$$V^\beta(G) \leq h_{p,q}(\Omega) A(G),$$

где величина $h_{p,q}(\Omega) < \infty$, а число $\beta := 1/q - 1/p + 1 \in [1/2, 1]$. С другой стороны, изопериметрический профиль

$$\theta : [0, V(\Omega)) \to [0, \infty), \quad \theta(0) = 0,$$

области Ω является максимальной функцией, удовлетворяющей неравенству

$$\theta(V(G)) \leq A(G)$$

на множестве всех допустимых областей G. Следовательно,

$$\theta(t) \geq t^\beta / h_{p,q}(\Omega).$$

Предположим, что

$$p \in (1, \infty), I_p = \sup_G V(G),$$

и применим теорему Миклюкова-Вуоринена. Так как

$$\beta p/(p-1) = 1 + p/(q(p-1)),$$

то для любого положительного числа r

$$\left(\int\limits_r^\infty t^{-\beta p/(p-1)}dt\right)^{(p-1)/p} = (q(1-1/p))^{(p-1)/p}\,\frac{1}{r^{1/q}}.$$

Характеристика Миклюкова-Вуоринена B допускает оценку

$$B \le \sup_{r\in(0,I_p)} r^{1/q}\left(\int\limits_r^{I_p} \theta(t)^{-p/(p-1)}dt\right)^{(p-1)/p} \le$$

$$\le h_{p,q}(\Omega)\sup_{r\in(0,\infty)} r^{1/q}\left(\int\limits_r^\infty t^{-\beta p/(p-1)}dt\right)^{(p-1)/p} = h_{p,q}(\Omega)\left(\frac{q(p-1)}{p}\right)^{(p-1)/p}.$$

Следовательно, по теореме A имеет место следующее неравенство

$$\left(\iint\limits_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)dxdy}\right)^{1/p} \ge \frac{1}{\lambda}\left(\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy\right)^{1/q} \quad \forall u\in C_0^1(\Omega). \tag{3.5.14}$$

Константа в последнем неравенстве удовлетворяет соотношению

$$\lambda \le Bq^{1/q}\left(\frac{q}{q-1}\right)^{(p-1)/p} \le h_{p,q}(\Omega)q^{1/q-1/p+1}\left(\frac{q(p-1)}{p(q-1)}\right)^{(p-1)/p}. \tag{3.5.15}$$

Поскольку постоянная $c_{p,q}(\Omega)$ определена как максимальная в неравенстве вида (3.5.14), то имеет место оценка $c_{p,q}(\Omega) \ge \lambda^{-1}$. Привлекая оценку (3.5.15) получаем доказываемое неравенство для $c_{p,q}(\Omega)$ в случае $p > 1$.

Случай $p = 1$ получается предельным переходом так же, как и при доказательстве первого утверждения предыдущей теоремы, так как в неравенствах (3.5.14) и (3.5.15) можно перейти к пределу при $p \to 1$ для фиксированной функции $u \in C_0^1(\Omega)$. Таким образом, теорема 3.5.3 доказана полностью. $\square$

Приведем одно следствие теоремы 3.5.3, соответствующее случаю $p = 1$.

Следствие 3.5.5. *Предположим, что* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— область гиперболического типа. Если* $1 \le q \le 2$ *и* $h_{1,q}(\Omega) < \infty$*, то*

$$h_{1,q}(\Omega)q^{1/q}\iint\limits_\Omega \frac{|\nabla u|}{R(z,\Omega)}dxdy \ge \left(\iint\limits_\Omega \frac{|u|^q}{R^2(z,\Omega)}dxdy\right)^{1/q} \quad \forall u\in C_0^1(\Omega).$$

3.5.4 О некоторых приложениях

Кроме коэффициента $h(\Omega)$ и евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ в дальнейшем нам потребуются некоторые другие числовые характеристики области гиперболического типа, а именно, величины $\alpha(\Omega)$, $\gamma(\Omega)$ и $C(\Omega)$, определения которых приведем ниже.

Эти характеристики взаимосвязаны между собой. Известно (см., например, [11,16,60,63, 146]), что область $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа имеет равномерно совершенную границу тогда и только тогда, когда

$$M_0(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow \alpha(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow \gamma(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow C(\Omega) > 0,$$

где

$$\alpha(\Omega) := \inf_{z\in\Omega} \frac{\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)}{R(z,\Omega)}, \qquad \gamma(\Omega) := \sup_{z\in\Omega} |\nabla R(z,\Omega)|,$$

$$C(\Omega) := \inf \left\{ \frac{\mathrm{cap}(\{|z-z_0| \le r\}) \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)}{r} : z_0 \in \partial\Omega, 0 < r < \infty \right\}.$$

Через cap E обозначена логарифмическую емкость множества E (см., например, [146]).

Теорема 3.5.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, граница которой является равномерно совершенной. Тогда*

$$\sqrt{h(\Omega)} \le \sqrt{3} \left(\ln \frac{1}{C(\Omega)} + \frac{\Gamma^4(1/4)}{2\pi^2} \right),$$

$$\sqrt{h(\Omega)} \le \frac{\sqrt{3}\gamma(\Omega)}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{h(\Omega)} < \frac{\sqrt{3}}{\alpha(\Omega)}.$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. В наших обозначениях для $C(\Omega)$ справедливо неравенство

$$M_0(\Omega) \le \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{C(\Omega)} \le 2M_0(\Omega) + \frac{4\ln 2}{\pi}.$$

(см. подробнее [146], [60]).

Используя последнее соотношение и следствие 3.5.1, получаем, что

$$\sqrt{h(\Omega)} \le 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{C(\Omega)} + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2} \right).$$

Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, граница которой является равномерно совершенной, то

$$\gamma(\Omega) := \sup_{z\in\Omega} |\nabla R(z,\Omega)| < \infty$$

и для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство (см. [11], Следствие 4.1.)

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(x+iy,\Omega)} \ge \frac{4^p}{p^p \gamma^p(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p dxdy}{R^2(x+iy,\Omega)}.$$

Следовательно, используя теорему 3.5.2 и определение константы $c_p(\Omega)$ как максимальной постоянной в соответствующем неравенстве, получим

$$\left(\frac{12}{p^2 h(\Omega)}\right)^{p/2} \geq c_p(\Omega) \geq \frac{4^p}{p^p \gamma^p(\Omega)}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{3}\gamma(\Omega)/2 \geq \sqrt{h(\Omega)}.$$

Комбинируя это неравенство с неравенством Осгуда (см., [63], гл. 3 и [11])

$$\gamma(\Omega) \leq 2/\alpha(\Omega),$$

получаем последнее из требуемых неравенств

$$\sqrt{3}/\alpha(\Omega) \geq \sqrt{h(\Omega)}.$$

Этим и завершается доказательство теоремы. □

3.5.5 Некоторые примеры

В теореме 3.5.3 предполагается, что параметры $p \in [1, \infty)$ и $q \in [1, \infty)$ фиксированы и удовлетворяют неравенствам

$$1/p - 1/2 \leq 1/q \leq 1/p.$$

Как следствие получаем, что

$$\beta := 1/q - 1/p + 1 \in [1/2,\, 1].$$

Такой выбор ограничений на параметры p и q обусловлен тем, что для заданной области неравенство $h_{p,q}(\Omega) < \infty$ может выполняться не для всех значений параметров, удовлетворяющих условию $1 \leq p \leq q < \infty$.

Покажем, что $h_{p,q}(\Omega) = \infty$ для любой односвязной области Ω гиперболического типа при условии $\beta \notin [1/2,\, 1]$. В силу конформной инвариантности $h_{p,q}(\Omega)$ достаточно рассмотреть случай, когда Ω — некоторый круг.

Пример 3.5.1. *Пусть* $\Omega = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. *Рассмотрим круги*

$$\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

радиуса $r \in (0, 1)$. *Поскольку*

$$R(z, D) = 1 - |z|^2,$$

то гиперболическая площадь $V(\mathbb{D}_r)$ круга $\mathbb{D}_r$ и гиперболическая длина $A(\mathbb{D}_r)$ окружности $|z| = r$ вычисляются явно. Имеем:

$$V(\mathbb{D}_r) = 4\pi r^2 (1 - r^2)^{-1}$$

и

$$A(\mathbb{D}_r) = 4\pi r (1 - r^2)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{V^\beta(\mathbb{D}_r)}{A(\mathbb{D}_r)} = (4\pi)^{\beta-1} r^{2\beta-1} (1 - r^2)^{1-\beta}.$$

Если $\beta \notin [1/2,\, 1]$, то изучаемое отношение

$$V^\beta(\mathbb{D}_r)/A(\mathbb{D}_r) \quad (0 < r < 1)$$

не ограничено сверху либо в окрестности точки $r = 0$, либо в окрестности точки $r = 1$. Таким образом,

$$sup_{r \in (0,1)} V^\beta(\mathbb{D}_r)/A(\mathbb{D}_r) = \infty$$

при условии $\beta \notin [1/2,\, 1]$.

Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, граница которой является равномерно совершенной, то $c_p(\Omega) > 0$ для любого $p \in [1, \infty)$. Как было указано выше, при $p = 2$ этот факт впервые доказан Фернандесом [100], а в общем случае Ф.Г. Авхадиевым (см. [11, 16, 60]). Если граница области не является равномерно совершенной, то вопрос о положительности константы $c_p(\Omega)$ оказывается сложным. А именно, существуют области Ω_0 и Ω_1, границы которых не являются равномерно совершенными и обладающими свойствами: $c_p(\Omega_0) > 0$ и $c_p(\Omega_1) = 0$. Подходящие для нас примеры областей Ω_0 и Ω_1 имеются в [101]. Для полноты картины опишем кратко эти примеры.

Пример 3.5.2. *Пусть*

$$\Omega_0 = \mathbb{D} \setminus \{1 - 1/2^n\}_{n=1}^{\infty},$$

где $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (см. [101]). Известно, что в единичном круге гиперболическое расстояние $d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n)$ между точками $z_m, z_n \in \mathbb{D}$ определяется формулой

$$d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}, \quad t = \left| \frac{z_n - z_m}{1 - \overline{z}_n z_m} \right|.$$

Поэтому расстояние $d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n)$ между точками $z_m = 1 - 1/2^m$ и $z_n = 1 - 1/2^n$ при $n \geq m+1$ дается формулой

$$d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - z_n z_m + z_n - z_m}{1 - z_n z_m - z_n + z_m} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - (1 - 1/2^m)(1 - 1/2^n) - 1/2^n + 1/2^m}{1 - (1 - 1/2^m)(1 - 1/2^n) + 1/2^n - 1/2^m} = \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n+1} - 1}{2^{m+1} - 1}.$$

Следовательно, имеем
$$\inf_{n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N},n\neq m} d_{\mathbb{D}}(z_m,z_n)\geq \frac{1}{2}\ln 2>0.$$
На основании следствия 3.5.2 мы можем утверждать, что при любом $p\in[1,\infty)$ *константа* $c_p(\Omega_0)$ *является положительным числом.*

Этот пример интересен в сравнении со следующим примером, рассмотренным также в статье [101].

Пример 3.5.3. *Пусть*
$$\Omega_1=\mathbb{D}\setminus\{0\}\setminus\{1/2^n\}_{n=1}^{\infty},$$
где $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$.

Гиперболическое расстояние $d_{\mathbb{D}}(z_m,z_n)$ *между точками* $z_m=1/2^m$ *и* $z_n=1/2^n$ *при* $m\geq n+1$ *вычисляется явно по формуле*
$$d_{\mathbb{D}}(z_m,z_n)=\frac{1}{2}\ln\frac{1-z_nz_m+z_n-z_m}{1-z_nz_m-z_n+z_m}=\frac{1}{2}\ln\frac{2^{m+m}+2^m-2^n+1}{2^{m+n}-2^m+2^n+1},\quad n<m.$$
Как и в предыдущем случае, имеем
$$\inf_{n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N},n\neq m} d_{\mathbb{D}}(z_m,z_n)\geq \frac{1}{2}\ln 2>0.$$
Имеется и отличие от предыдущего случая, связанное с особой точкой $0\in A$. *Поскольку расстояние между точками* 0 *и* z_n *дано формулой*
$$d_{\mathbb{D}}(0,z_n)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z_n}{1-z_n},$$
то, очевидно, будем иметь: $d_{\mathbb{D}}(0,z_n)\to 0$ *при* $n\to\infty$, *т.е. точка* $0\in\mathbb{D}$ *является точкой сгущения последовательности. Следовательно,*
$$\inf_{z\in A,w\in A\setminus\{z\}} d_{\Omega}(z,w)=0,\quad A=\{0\}\cup\{1/2^n\}_{n=1}^{\infty}.$$

В отличии от предыдущего случая мы не можем применить следствие 3.5.2 и получить неравенство $c_p(\Omega_1)>0$. *Напротив, как показано в статье [101], имеет место равенство* $c_2(\Omega_1)=0$. *Используя теорему 3.5.1, получаем, что* $c_p(\Omega_1)=0$ *и при любом* $p\in[1,2)$.

3.5.6 Неравенства с дополнительными слагаемыми

Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 3.5.5. *1) Предположим, что* Ω *является односвязной гиперболической областью в* $\mathbb{C}$, f *— любое однолистное конформное отображение* Ω *на верхнюю полуплоскость*
$$H_+=\{\zeta=\xi+i\eta\in\mathbb{C}:\eta>0\}.$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ и $p \geq 2$ справедливо следующее неравенство типа Авхадиева-Харди

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \geq \frac{2^p}{p^p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy + \frac{2^{p-3}}{p^{p-1}} \iint\limits_{\Omega} |u|^p \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right|^2 dxdy$$

с точной константой $2^p/p^p$, где $z = x + iy$.

2) Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ является двусвязной областью и f — любое однолистное конформное отображение Ω на кольцо

$$A_q = \{\eta \in \mathbb{C} : q < |\eta| < 1\},$$

$q = \exp(-2\pi M(\Omega_2))$. *Тогда для любой вещественнозначной функции $g \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство типа*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \geq \frac{2^p}{p^p} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy + \frac{1}{16M^2(\Omega)} \frac{2^{p-1}}{p^{p-1}} \iint\limits_{\Omega} |u|^p \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right|^2 dxdy,$$

где $z = x+iy$ и $M(\Omega)$ — геометрический параметр, определяемый как верхняя грань модулей двусвязных областей, лежащих в области Ω и разделяющих его границу $\partial\Omega$.

Для доказательства этой теоремы нам будет необходимо

Предложение 3.5.1. *Пусть $H_+ = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}$ — верхняя полуплоскость, $p \geq 2$ и $2 - \frac{1}{p} \leq s \leq 2.5$. Тогда для любой функции $u \in C_0^1(H_+)$ выполнено следующее неравенство*

$$\iint\limits_{H+} \frac{|\nabla u|^p}{R^{s-p}(\zeta,Q)} d\xi d\eta \geq \frac{2^p}{p^{p-1}} \left(s - 2 + \frac{1}{p}\right) \iint\limits_{H+} \frac{|u(\zeta)|^p}{R^s(\zeta,Q)} d\xi d\eta +$$
$$+ \frac{2^{p-3}(5-2s)}{p^{p-1}} \iint\limits_{H+} \frac{|u(\zeta)|^p}{|\zeta|^2 R^{s-2}(\zeta,Q)^{s-2}} d\xi d\eta.$$

Доказательство. Предположим, что $\eta = \rho e^{i\varphi}$, $\rho = |\eta| > 0$, $\varphi \in (0,\pi)$, $u \in C_0^1(H_+)$ — действительнозначная функция. С использованием следствия 2.1.2, получим

$$\int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \right)^{p/2} \frac{\rho d\theta}{(2\rho \sin\theta)^{s-p}} \geq \frac{2^p}{p^{p-1}} \left(s - 2 + \frac{1}{p}\right) \int\limits_0^\pi \frac{|u(\theta)|^p}{(2\rho\sin\theta)^s} \rho d\theta +$$
$$+ \frac{2^{p-3}(5-2s)}{p^{p-1}} \int\limits_0^\pi \frac{|u(\theta)|^p}{\rho^2 (2\rho\sin\theta)^{s-2}} \rho d\theta.$$

Интегрируя последнее неравенство по переменной ρ, имеем

$$\iint\limits_{H+} \left(\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \right)^{p/2} \frac{d\xi d\eta}{(2\rho \sin\theta)^{s-p}} \geq \frac{2^p}{p^{p-1}} \left(s - 2 + \frac{1}{p}\right) \iint\limits_{H+} \frac{|u(\theta)|^p}{(2\rho\sin\theta)^s} d\xi d\eta +$$
$$+ \frac{2^{p-3}(5-2s)}{p^{p-1}} \iint\limits_{H+} \frac{|u(\theta)|^p}{\rho^2 (2\rho\sin\theta)^{s-2}} d\xi d\eta.$$

Используя также, что $R(\rho e^{i\varphi}, H_+) = 2\eta = 2\rho\sin\varphi$ и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2,$$

получим

$$\iint\limits_{H+} \frac{|\nabla u|^p}{R(\zeta, Q)^{s-p}} d\xi d\eta \geq \frac{2^p}{p^{p-1}}\left(s - 2 + \frac{1}{p}\right) \iint\limits_{H+} \frac{|u(\zeta)|^p}{R(\zeta, Q)^s} d\xi d\eta +$$
$$+ \frac{2^{p-3}(5-2s)}{p^{p-1}} \iint\limits_{H+} \frac{|u(\zeta)|^p}{|\zeta|^2 R(\zeta, Q)^{s-2}} d\xi d\eta.$$

Это завершает доказательство предложения 3.5.1. □

Теорема 3.5.6. *Пусть* $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_n > 0\}$, $p \geq 2$ *и* $2 - \frac{1}{p} \leq s \leq 2.5$. *Тогда для любой функции* $g \in C^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|\nabla g(x)|^p}{t_n^{s-p}} dx \geq \frac{1}{p^{p-1}}\left(s - 2 + \frac{1}{p}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^s} dx + \frac{(5-2s)}{2p^{p-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|g(x)|^p}{t_n^{s-2}|t_{n-1}^2 + t_n^2|} dx.$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы, применим предложение 3.5.1 к функции u, определенной следующим образом $u(t_{n-1}, t_n) := f(t_1, \dots, t_n)$ и проинтегрируем полученное неравенство по переменным $(t_1, \dots, t_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$. □

Также нам пригодится следующее утверждение.

Предложение 3.5.2. *Пусть* $A_q = \{\zeta = \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\}$, $p \geq 2$ *и* $2 - \frac{1}{p} \leq s \leq 2.5$. *Тогда для любой функции* $u \in C^1_0(A_q)$ *выполнено следующее неравенство*

$$\iint\limits_{A_q} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(\zeta, A_q)} d\xi d\eta \geq \frac{2^p}{p^p} \iint\limits_{A_q} \frac{|u|^p}{R^2(\zeta, A_q)} d\xi d\eta + \left(\frac{1}{4M(A_q)}\right)^2 \frac{2^{p-1}}{p^{p-1}} \iint\limits_{A_q} \frac{|u|^p}{|\zeta|^2} d\xi d\eta$$

где $\eta = \xi + i\eta$.

Доказательство. Предположим, что $\eta = \xi + i\eta = re^{i\theta}$ и $u \in C^1_0(A_q)$, где $A_q = \{\zeta = \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\}$. С использованием следствия 2.1.3, мы легко можем получить следующую оценку

$$\int\limits_q^1 \frac{|u'(r)|^p}{\rho(r)^{2-p}} r dr \geq \frac{2^p}{p^p} \int\limits_q^1 \frac{|u(r)|^p}{\rho(r)^2} r dr + \left(\frac{\pi}{2\ln q}\right)^2 \frac{2^{p-1}}{p^{p-1}} \int\limits_q^1 \frac{|u(r)|^p}{r^2} r dr.$$

Интегрируя последнее неравенство по переменной $\theta \in [0, 2\pi]$, имеем

$$\iint\limits_{A_q} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p \frac{1}{\rho(r)^{2-p}} r dr d\theta \geq \frac{2^p}{p^p} \iint\limits_{A_q} \frac{|u|^p}{\rho(r)^2} r dr d\theta + \left(\frac{\pi}{\ln q}\right)^2 \frac{2^{p-3}}{p^{p-1}} \iint\limits_{A_q} \frac{|u|^p}{r^2} r dr d\theta.$$

Так как $R(\zeta, A_q) = -\rho(|\zeta|)$, $M(A_q) = (2\pi)^{-1}\ln(1/q)$ и $|\partial u/\partial r| \leq |\nabla u|$, мы немедленно получаем

$$\iint\limits_{A_q} \frac{|\nabla u|^p}{R(\zeta, A_q)^{2-p}} d\xi d\eta \geq \frac{2^p}{p^p} \iint\limits_{A_q} \frac{|u|^p}{R(\zeta, A_q)^2} d\xi d\eta + \left(\frac{1}{4M(A_q)}\right)^2 \frac{2^{p-1}}{p^{p-1}} \iint\limits_{A_q} \frac{|u|^p}{|\zeta|^2} d\xi d\eta,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$.

Это завершает доказательство предложения 3.5.2. $\square$

Доказательство теоремы 3.5.5. Пусть $F : \Omega \to \Omega_\zeta \subset \overline{\mathbb{C}}$ — конформное отображение области Ω в z-плоскости на область Ω_ζ в ζ-плоскости. Известно, что (см., например, [63])

$$\lambda_\Omega(z)|dz| \equiv \lambda_{\Omega_\zeta}(z)|d\zeta|, \quad \lambda^2_\Omega(z)dxdy = \lambda^2_{\Omega_\zeta}(z)d\xi d\eta,$$

где $z = x + iy \in \Omega$ и $\zeta = F(z) = \xi + i\eta \in \Omega_\zeta$.

Используя неравенство $|F'(z)|^2 dxdy = d\xi d\eta$ и

$$\nabla U = 2\frac{\partial U\zeta}{\partial\overline{\zeta}} = 2\frac{\partial u(z)}{\partial\overline{z}}\overline{F'(z)} = (\nabla u)\overline{F'(z)},$$

легко показать, что

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R(z, \Omega)^{2-p}} dxdy = \iint\limits_{\Omega_\zeta} \frac{|\nabla U|^p}{R(\zeta, \Omega)^{2-p}} d\xi d\eta$$

и

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p}{R(z, \Omega)^2} dxdy = \iint\limits_{\Omega_\zeta} \frac{|U|^p}{R(\zeta, \Omega_\zeta)^2} d\xi d\eta,$$

где $u \in C^1_0(\Omega)$ и $U := u \circ F^{-1} \in C^1_0(\Omega_\zeta)$.

Следовательно, два интеграла

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R(z, \Omega)^{2-p}} dxdy \text{ и } \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p}{R(z, \Omega)^2} dxdy$$

являются конформно-инвариантными. То есть для доказательства теоремы 3.5.6 в случае односвязных областей можно считать Ω полупространством, а в случае двусвязных областей можно считать Ω кольцом. Применение предложений 3.5.1 и 3.5.2 дает теорему 3.5.6. Заметим, что точность константы $2^p/p^p$ следует из [11]. Этим завершается доказательство теоремы 3.5.5.

Теперь применяем теорему 3.5.6 к функции u, определенной следующим образом $u(t_{n-1}, t_n) := g(t_1, \ldots, t_n)$, и интегрируем полученное неравенство относительно $(t_1, \ldots, t_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$. Имеем

Теорема 3.5.7. 1) *Предположим, что Ω_1 является односвязной гиперболической областью в $\mathbb{C}$, g — любое однолистное конформное отображение Ω_1 на верхнюю полуплоскость $H_+ =$*

$\{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}$ *и* $\Omega = \mathbb{R}^{n-2} \times \Omega_1$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $f \in C_0^1(\Omega)$ *при* $p \geq 2$ *справедливо следующее неравенства типа Авхадиева-Харди:*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dx \geq \frac{2^p}{p^p} \int\limits_{\Omega} \frac{|g|^p}{R^2(z,\Omega)} dx + \frac{2^{p-3}}{p^{p-1}} \int\limits_{\Omega} |g|^p \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right|^2 dx,$$

где $z = x_{n-1} + ix_n$.

2) *Предположим, что* $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ *является двусвязной областью и* g *любое однолистное конформное отображение* Ω_2 *на кольцо* $A_q = \{\eta \in \mathbb{C} : q < |\eta| < 1\}$, $q = \exp(-2\pi M(\Omega_2))$ *и* $\Omega = \mathbb{R}^{n-2} \times \Omega_2$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $f \in C_0^1(\Omega)$ *имеет место следующее неравенство типа Авхадиева-Харди*

$$\frac{p^p}{2^p} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla g|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dx \geq \int\limits_{\Omega} \frac{|g|^p}{R^2(z,\Omega)} dx + \frac{1}{16M^2(\Omega_2)} \frac{p}{2} \int\limits_{\Omega} |g|^p \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right|^2 dx,$$

где $z = x_{n-1} + ix_n$ *и* $M(\Omega_2)$ — *геометрический параметр, определяемый как верхняя грань модулей двусвязных областей, лежащих в области* Ω_2 *и разделяющих его границу* $\partial\Omega_2$.

Глава 4. Приложения полученных неравенств типа Харди

В данной главе диссертации рассматриваются применения некоторых полученных одномерных и пространственных неравенств. Одномерные неравенства мы используем для обоснования достаточных условий однолистности мероморфных в круге, во внешности единичного круга и в правой полуплоскости функций, и для доказательства неравенств типа Реллиха, а пространственные неравенства – при оценке первого собственного значения p-Лапласиана при граничном условии Дирихле. Неравенства типа Реллиха устанавливаются в различных классах областей: области регулярные в смысле Дэвиса, области, удовлетворяющие условию θ-конуса и выпуклые области.

Также получены новые классы однолистных в односвязных областях, отличных от круга, аналитических функций в терминах оценки производной Шварца. Наши результаты усиливают соответствующие результаты Ф.Г. Авхадиева и являются усилением-обобщением соответствующих результатов З. Нехари [138] и В.В. Покорного [34]. В основе доказательства этих достаточных условий лежат новые одномерные неравенство типа Харди для веса Якоби. Подробнее о достаточных условиях различных отображений и методах их доказательства можно познакомиться в работах [18, 19, 22, 23, 71–73, 85, 104, 112] и литературе в них.

Отметим, что в статье [97] Я. Эфрамидис получил родственные достаточные условия типа Нехари уже для гармонических функций. Поэтому в этой главе также рассматриваются другого вида достаточные условия Авхадиева-Беккера уже для бигармонических отображений (см. также [46–50]). Эти утверждения доказываются методом продолжений (см., подробнее, [22]). Такого рода исследования могут прояснить взаимосвязь различных типов достаточных условий однолистности и многолистности [156].

§4.1 Условия однолистности Нехари-Покорного

Данный параграф посвящен достаточным условиям однолистности в терминах оценки модуля производной Шварца функции f мероморфной в единичном круге

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Здесь мы также получим достаточные условия однолистности в односвязных областях отличных от круга.

Напомним, что производная Шварца или Шварциан функции $f(z)$ определяется следующим образом:

$$S_f(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

Мы будем использовать связь однолистности функции f с неколеблемостью решения следующего дифференциального уравнения

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

где $P(z)$ — некоторая аналитическая функция, а $Q(z)$ находится из соотношения

$$2Q(z) - P'(z) - P^2(z)/2 = S_f(z).$$

4.1.1 Связь неколеблемости решений дифференциального уравнения с однолистностью

Пусть далее $f(z)$ является мероморфной в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцией. Функция f является однолистной, если два образа $f(z_1) = f(z_2)$, то и прообразы $z_1 = z_2$. Как уже говорили выше, мы будем использовать подход доказательства однолистности функции f, связанный с неколеблемостью решения уравнения вида

$$w'' + \frac{1}{2}S_f(z)w = 0,$$

т.е. рассмотрим случай $P(z) = 0$. Например, следующая теорема Нехари, получена с использованием такого подхода.

Теорема N [Нехари З., [138]]. *Мероморфная в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если*

$$|S_f(z)| < 2S(|z|), \quad |z| < 1,$$

причём мажоранта $S(r)$ является непрерывной неотрицательной функцией и удовлетворяет условиям:

1. *$S(r)(1 - r^2)^2$ не возрастает по r при $0 < r < 1$,*
2. *дифференциальное уравнение $y'' + S(|t|)y = 0$ при $-1 < t < 1$ имеет решение $y_0(t) > 0$.*

Доказательство этой теоремы содержит ряд идей и полезных формул. Приведем с пояснениями отдельные фрагменты доказательства (ср. с [21] и [138]), которые необходимы для понимания наших дальнейших выкладок и рассуждений.

Фрагменты доказательства теоремы N. Доказательство будем вести от противного. Пусть $a \in (0, 1)$ и $\rho \in (0, 1)$ и предположим, что $f(z)$ однолистна в круге $|z| < a$, но

$$f(z_1) = f(z_2), \quad |z_1| = |z_2| = a, \quad z_1 \neq z_2.$$

Тогда преобразование

$$z = z(t) = e^{i\gamma}\frac{t + ir_0}{1 - ir_0 t}, \quad |t| < 1,$$

переводит единичный круг на себя, а точки z_1 и z_2 в точки $t_1 = -\rho$ и $t_2 = \rho$, лежащие на вещественном диаметре, где

$$z_0 = r_0 e^{i(\gamma+\pi/2)}, \quad 0 < r_0 < a,$$

является средней точкой дуги окружности, проходящей через z_1, z_2 и ортогональной к окружности $\mathbb{D}$.

Рассмотрим функцию $g(t) = f[z(t)]$, $|t| < 1$. Ясно, что

$$g(-\rho) = g(\rho),$$

и при этом

$$|S_g(t)| = |S_f(z)z'^2(t)| \le 2\frac{S(|z|)(1-|z|^2)^2}{(1-t^2)^2} \le 2S(|t|), \quad -\rho \le t \le \rho.$$

Существует функция w_0, удовлетворяющая дифференциальному уравнению второго порядка

$$w_0'' + \frac{1}{2}S_g(t)w_0 = 0,$$

и равенствам $w_0(\rho) = w_0(\rho) = 0$. Можно показать, что для такой функции w_0 также справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} |w_0'(t)|^2 dt \le \int\limits_{-\rho}^{\rho} S(|t|)w_0(t)|^2 dt, \quad w_0(-\rho) = w_0(\rho) = 0. \tag{4.1.1}$$

С другой стороны, в силу условия 2) для любой вещественной непрерывно дифференцируемой функции $u(t) \not\equiv 0, t \in [-\rho, \rho]$, такой, что

$$u(-\rho) = u(\rho) = 0$$

будем иметь

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} \left(u'(t) - \frac{y_0'(t)}{y_0(t)}\right)^2 dt > 0.$$

Откуда следует

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} u'^2(t)dt > \int\limits_{-\rho}^{\rho} -\frac{y_0''(t)}{y_0(t)}u^2(t)dt \ge \int\limits_{-\rho}^{\rho} S(|t|)u^2(t)dt.$$

Это противоречит неравенству (4.1.1).

Условие 2) будет выполнено, если для любой непрерывно дифференцируемой функции такой, что $u(-\rho) = u(\rho) = 0$, справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} u'^2(t)dt > \int\limits_{-\rho}^{\rho} S(|t|)u^2(t)dt, \quad 0 < \rho < 1.$$

Ф.Г. Авхадиев обобщил предыдущий результат З. Нехари. А именно, он показал (см., например, [21]), что имеет место следующая теорема.

Теорема А. *Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $q_k, k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство*

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k A(q_k)}{(1-|z|^2)^{2-q_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n \leq 2$, постоянные В.В. Покорного имеют вид

$$A(\mu) = \begin{cases} 2^{q+1}, & 0 \leq q \leq 1, \\ 2^{4-3q}\pi^{2(q-1)}, & 1 \leq q \leq 2. \end{cases}$$

При $n = 0$ и $q = 0$ или $q = 2$ это утверждение было доказано З. Нехари в статье [138], случай $n = 1$ установлен В.В. Покорным в [34]. Более позднее С. Ямашита [172] показал, что если $n = 1$ и $q \in [0, 1]$, то $A(q) = 2(1 + q)$, т.е. достаточное условие было ослаблено.

4.1.2 Расширение известных классов при $q \in [0, 1]$

В этой части статьи мы приведем примеры приложений неравенств из пункта 1.2 для расширения известных классов однолистных мероморфных функций. Для этого рассмотрим функцию

$$S(r) = \frac{1}{(1-r^2)^2}\left(1 - \nu^2 q^2 + q^2\lambda_0^2(1-r^2)^q\right),$$

где константа λ_0 определяется как корень уравнения (1.3.1).

Ясно, что функция $(1 - r^2)S(r)$ является невозрастающей функцией при $r \in (0, 1)$. Поэтому, используя Следствие 1.3.6 и **теорему N**, получим класс однолистных функций, условие вхождение в который, приведен в следующей теореме.

Теорема 4.1.1. *Пусть $q \in (0, 2]$ и $\nu \in [0, 1/q]$. Тогда мероморфная в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если*

$$|S_f(z)| < \frac{2(1-\nu^2 q^2)}{(1-|z|^2)^2} + \frac{2q^2\lambda_0^2}{(1-|z|^2)^{2-q}}, \quad |z| < 1,$$

где постоянная λ_0 является решением уравнения

$$q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu).$$

Аналогичным образом, используя Следствие 1.3.7, имеем следующее утверждение

Теорема 4.1.2. *Если $q \in (0, 2]$ и f мероморфная в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция и*

$$|S_f(z)| \leq \frac{2q^2\lambda_0^2}{(1-|z|^2)^{2-q}}, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

то функция f является однолистной в круге $\mathbb{D}$. Здесь константа λ_0 находится как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0 \quad \lambda \in (0, j_\nu).$$

При $q \to 0$, получим известное достаточное условие (см. [21, 23]).

Следствие 4.1.1. *Если функция f мероморфна в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и*

$$|S_f(z)| \le \frac{2}{(1 - |z|^2)^2}, \quad \forall z \in D,$$

то функция f является однолистной в круге $\mathbb{D}$.

Далее мы получим аналог **теоремы A**. Для этого будем использовать неравенство теоремы 1.3.4

$$P_q \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{|g(t)|^2}{(1-t^2)^{2-q}} dt < \int\limits_{-\rho}^{\rho} g'^2(t) dt.$$

Умножая обе стороны этого неравенства при $q = 2 - \mu_k$ на положительные числа a_k, $k = \overline{1, n}$, такие что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le 1$, имеем

$$a_k P_{2-\mu_k} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{|g(t)|^2}{(1-t^2)^{\mu_k}} dt < a_k \int\limits_{-\rho}^{\rho} g'^2(t) dt.$$

Теперь суммируя их, получим

$$\sum_{k=1}^{n} P_{2-\mu_k} a_k \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{|g(t)|^2}{(1-t^2)^{\mu_k}} dt < \int\limits_{-\rho}^{\rho} g'^2(t) dt.$$

Таким образом, используя предыдущие рассуждения для мажоранты

$$S(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{2-\mu_k} a_k}{(1-r^2)^{\mu_k}},$$

имеем следующее утверждение

Теорема 4.1.3. *Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $\mu_k, k = \overline{1, n}$ выполняется неравенство*

$$|S_f(z)| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k A(\mu_k)}{(1 - |z|^2)^{\mu_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причём $b_k = \frac{2P_{2-\mu_k}}{A(\mu_k)} a_k$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le 1$, $0 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \ldots \le \mu_n \le 2$, постоянные В.В. Покорного имеют вид

$$A(\mu) = \begin{cases} 2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)}, & 0 \le \mu \le 1, \\ 2^{3-\mu}, & 1 \le \mu \le 2; \end{cases}$$

и постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & , \quad \textit{при} \quad q = 0, \\ \lambda_q & , \quad \textit{при} \quad q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & , \quad \textit{при} \quad q \in (q_0, 1], \\ 2 & , \quad \textit{при} \quad q = 1, \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа $\sqrt{\lambda_q}/q$ определяется как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q + 2^{q/2} \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)} = 0.$$

Здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν.

Обратим внимание на то, что в отличии от **теоремы A**, коэффициенты b_k, стоящие перед постоянными Покорного, могут быть больше 1.

4.1.3 Случай других односвязных областей при $q \in [0, 1]$

На основании предыдущих теорем можно получить достаточные условия однолистности также для односвязных областей отличных от круга. Пусть $F(\zeta)$ — мероморфная в односвязной области $\mathfrak{D}$ функция и $\varphi(\zeta)$ — функция, однолистно отображающая область $\mathfrak{D}$ на единичный круг $\mathbb{D}$. Тогда функции F и $f(z) = F^{-1}(\varphi(x))$ будут однолистными и неоднолистными одновременно.

Известно следующее равенство

$$S_f(z) = (\varphi'(\zeta))^{-2} \left(S_F(\zeta) - S_\varphi(\zeta)\right), \quad \zeta \in \mathfrak{D}, \tag{4.1.2}$$

которое принимает более простой вид в случае, когда φ является дробно-линейным отображением, т.е. $S_\varphi(\zeta) \equiv 0$.

Следовательно, достаточное условие теоремы 4.1.1 перепишется в виде

$$|S_F(\zeta) - S_\varphi(\zeta)| \le \sum_{k=1}^{n} b_k A(\mu_k) \frac{|\varphi'(\zeta)|^2}{(1 - |\varphi(\zeta)|^2)^{\mu_k}}, \quad \forall z \in \mathfrak{D},$$

Если $\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ и $\varphi(\zeta) = \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$, то получим следующие утверждения.

Теорема 4.1.4. *Пусть $q \in (0, 2]$ и $\nu \in [0, 1/q]$. Тогда мероморфная во внешности единичного круга $\mathbb{D}^- = \{z \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$ функция $F(\zeta)$ будет однолистной в $\mathbb{D}^-$, если*

$$|S_f(z)| < 2(1 - \nu^2 q^2) \frac{|\zeta|^{-4}}{(1 - |\zeta|^{-2})^2} + 2q^2\lambda_0^2 \frac{|\zeta|^{-4}}{(1 - |\zeta|^{-2})^{2-q}}, \quad |z| < 1,$$

где постоянная λ_0 является решением уравнения

$$q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0.$$

Теорема 4.1.5. *Пусть $q \in (0,2]$ и $\nu \in [0,1/q]$. Тогда мероморфная в правой полуплоскости $H_+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : Re\zeta = \xi > 0\}$ функция $F(\zeta)$ будет однолистной в H_+, если*

$$|S_F(\zeta)| < \frac{1-\nu^2q^2}{4\xi^2} + 2^{2(q-1)}q^2\lambda_0^2\frac{|\zeta+1|^{2q}}{\xi^{2-q}}, \quad \zeta \in H_+,$$

где постоянная λ_0 является решением уравнения

$$q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0.$$

4.1.4 Достаточные условия однолистности типа Нехари-Покорного при $q \in [1,2]$

В данном разделе мы получим достаточные условия однолистности типа Нехари-Покорного. Рассмотрим достаточные условия для аналитических функций в круге, во внешности единичного круга и в правой полуплоскости. В данном параграфе будем полагать,

$$\kappa'(q) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 B_t^2(1/2, q-1)\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt\right)^{1/2},$$

где $B_t(x,y) = \int_0^t \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1}d\tau$ — неполная бета-функция. Предположим также, что

$$R(q) = \begin{cases} 2^{1+q}, & 0 \le q \le 1, \\ 2^{5-2q}\pi^{2(q-1)}, & 1 \le q \le q_0, \\ \frac{2}{\kappa'(q)}, & q_0 \le q \le q_1, \\ 2^{5-2q}\pi^{2(q-1)}, & q_1 \le q \le 2. \end{cases}$$

где $q_0 = 1.2823044502226741$, а $q_1 = 1.7950834115169039$.

В пункте 1.3.3 диссертации мы установили неравенство, применяя которое по вышеприведенному алгоритму, получим следующий результат.

Теорема 4.1.6. *Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $q_k, k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство*

$$|S_f(z)| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{a_kR(q_k)}{(1-|z|^2)^{2-q_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le 1$, $0 \le q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_n \le 2$.

4.1.5 Достаточные условия в односвязных областях отличных от круга при $q \in [1,2]$

Пусть опять $F(\zeta)$ — мероморфная в односвязной области $\mathfrak{D}$ функция и $\varphi(\zeta)$ — функция, однолистно отображающая область $\mathfrak{D}$ на единичный круг $\mathbb{D}$. Тогда функции F и $f(z) = F^{-1}(\varphi(\zeta))$ будут однолистными и неоднолистными одновременно.

В силу равенства 4.1.2 достаточное условие теоремы 4.1.6 можно переписать в виде

$$|S_F(\zeta) - S_\varphi(\zeta)| \le \sum_{k=1}^{n} a_k R(q_k) \frac{|\varphi'(\zeta)|^2}{(1-|\varphi(\zeta)|^2)^{2-q_k}}, \quad \forall \zeta \in \mathfrak{D},$$

Если, например, $\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ и $\varphi(\zeta) = \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$, то соответственно получим

Теорема 4.1.7. *Мероморфная во внешности единичного круга $\mathbb{D}^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ функция $F(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}^-$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $q_k, k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство*

$$|S_F(\zeta)| \le \sum_{k=1}^{n} a_k R(q_k) \frac{\zeta^{-4}}{(1-|\zeta|^{-2})^{2-q_k}}, \quad \zeta \in \mathbb{D}^-,$$

причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le 1$, $0 \le q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_n \le 2$.

Теорема 4.1.8. *Мероморфная в правой полуплоскости $H_+ = \{z \in \mathbb{C} : Re\, \zeta = \xi > 0\}$ функция $F(\zeta)$ будет однолистной в H_+, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $q_k, k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство*

$$|S_F(\zeta)| \le \sum_{k=1}^{n} 4^{q-1} a_k R(q_k) \frac{|\zeta+1|^{2q}}{\xi^{2-q_k}}, \quad \zeta \in H_+,$$

причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le 1$, $0 \le q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_n \le 2$.

Хотим подчеркнуть, что новым результатом является только случай $q \in [q_0, q_1]$.

§4.2 Достаточные условия однолистности Беккера для бигармонических отображений

Данный параграф посвящен достаточным условиям однолистности типа Беккера и многолистности типа Авхадиева-Беккера для бигармонических отображений. Основные результаты этого параграфа опубликованы с статье [179]

4.2.1 Введение

Пусть f — комплекснозначная бигармоническая функция в односвязной области Ω. Более точно, мы предполагаем, что $f \in C^4(\Omega)$ и что f удовлетворяет уравнению $\triangle^2 f = 0$ на Ω, где

$$\triangle = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (z = x + iy)$$

— оператор Лапласа.

Бигармонические отображения возникают и широко используются во многих физических задачах, особенно в задачах гидродинамики и упругости, в прикладной математике. Наиболее важные приложения теории функций комплексного переменного были получены в плоской теории упругости, т.е. в случаях, когда решениями являются бигармонические функции или ассоциированные с ними функции. Кроме того, бигармонические отображения тесно связаны с теорией минимальных поверхностей.

Известно [47–50], что каждую бигармоническую функцию f в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ можно записать как

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2 \left(h_1(z) + \overline{g_1(z)} \right),$$

где h, g, h_1, g_1 — аналитические в Ω функции.

В этой части диссертации мы рассматриваем локально однолистные комплекснозначные бигармонические отображения единичного круга и внешности единичного круга. Рассмотрены подклассы бигармонических многолистных функций и получены некоторые достаточные условия принадлежности функций к этому классу.

Напомним, что бигармоническая функция f локально однолистна и сохраняет ориентацию в Ω, если якобиан $J_f(z)$ положителен, т.е.

$$J_f(z) := |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 > 0, \quad \forall z \in \Omega,$$

где, как обычно,

$$f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Работы [85,112,194] посвящены условиям однолистности гармонических функций. Известно, что гармоническое отображение f односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ имеет каноническое разложение

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)},$$

где h и g голоморфны в Ω (см. [94]). Ясно, что всякая гармоническая функция является бигармонической. Заметим, что в [126] Х. Леви показал, что комплекснозначная гармоническая функция $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ локально однолистна в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда

$$|h'(z)| > |g'(z)| \quad \forall z \in \Omega.$$

Следовательно, два условия $h'(z) \neq 0$ и $|\omega(z)| := |g'(z)/h'(z)| < 1$ эквивалентны локальной однолистности в гармоническом случае.

В [194] Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин и И.К. Шафигуллин, используя методы Л. Альфорса и Г. Вейля [51], получили условия однолистности типа Беккера для гармонических отображений. Например, в [194] доказано, что имеет место следующая теорема

Теорема A.[*Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин и И.К. Шафигуллин*] *Пусть h и g — функции, гармонические в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, и пусть функция $f = h + \overline{g}$ является локально однолистной. Если имеет место неравенство*

$$|\omega(z)| + (1 - |z|^2) \left| z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

то f однолистна в $\mathbb{D}$.

Из вышеприведенной **теоремы A** вытекает следующая теорема Дж. Беккера для аналитических функций. Для получения дополнительной информации о теореме Беккера для аналитических функций рекомендуем работы [22, 23, 71–73, 95, 155].

Теорема B. *[Дж. Беккер] Пусть h — аналитическая в единичном круге $\mathbb{D}$ функция такая, что $h'(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Если*

$$(1 - |z|^2) \left| z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

то h — однолистна в $\mathbb{D}$.

В [49, 50, 189] установлены условия однолистности бигармонических функций. Например, З. Абдулхади и Л. Эль Хадж [50] рассмотрели бигармонические отображения вида

$$F(z) = |z|^2 G(z) + K(z),$$

где G и K гармоничны в односвязной области Ω. Они исследовали связь между однолистностью F и K, используя понятие линейно-связных областей.

Ю. Абу Муханна, С.В. Бхаранехар и С. Поннусами в [49] получили достаточные условия для построения сохраняющих ориентацию однолистных бигармонических отображений, возникающих из аналитических функций, не обязательно однолистных в единичном круге.

Условия многолистности для аналитических и гармонических функций также хорошо известны (см., например, [18, 156, 182, 191]). Эти условия имеют широкое применение (см. [19, 104]).

Мы будем говорить, что функция f является p-листной в области Ω, где $p \geq 1$ — натуральное число, если

a) для любого $w \in \mathbb{C}$ уравнение $f(z) = w$ имеет m корней, где $0 \le m \le p$;

b) существует $w_0 \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение $f(z) = w_0$ имеет ровно p корней.

В [18] Ф.Г. Авхадиев доказал следующее утверждение.

Теорема A2. *Пусть h аналитическая функция в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, $n \neq 0$ — целое число и*

$$\lim_{z \to 0} z^{-n} h(z) = a_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Пусть также для любого $z \in \mathbb{D}$, $|z| < 1$,

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left| \left(1 - |z|^{2n}\right) \left(n - 1 - z \frac{h''(z)}{h'(z)}\right) \right| \le |n|.$$

Тогда h является $|n|$-листной в $\mathbb{D}$.

В данном параграфе мы устанавливаем условия однолистности и p-листности бигармонических отображений единичного круга

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

и внешности единичного круга

$$\mathbb{D}^- = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\}.$$

Заметим, что мы получаем условия, аналогичные условиям типа Авхадиева-Беккера для аналитических функций.

4.2.2 Основные результаты по достаточным условиям для бигармонических функций

В этом пункте мы рассматриваем подкласс бигармонических многолистных функций и получаем некоторые достаточные условия принадлежности функций к этому классу. Мы рассматриваем достаточные условия в единичном круге и во внешности единичного круга отдельно, вместо того чтобы применить преобразование

$$\mathbb{D}^- \to \mathbb{D} \setminus \{0\}, \quad z \to \frac{1}{z},$$

так как при таком преобразовании получаемый нами подкласс бигармонических многолистных функций в единичном круге не отображается в подкласс бигармонических многолистных функций во внешности единичного круга.

Далее мы приведем краткое описание алгоритма доказательства. Предположим, что бигармоническая функция f_1 локально однолистна в односвязной области D_1. Доказательство состоит из трех шагов.

Шаг 1. Мы строим локально однолистное и непрерывное продолжение f_2 этой функции f_1, заданное на $\mathbb{C} \setminus D_1$. Как мы уже упоминали, бигармоническая функция f_1 локально однолистна и сохраняет ориентацию, если якобиан $J_f(z)$ положителен, т.е.

$$J_f(z) := |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 > 0, \quad \forall z \in D_1.$$

Используя каноническое разложение бигармонических функций, получаем, что якобиан $J_f(z) > 0$, если

$$f_z(z) = h'(z) + \overline{z}\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right) + z\overline{z}h_1'(z) \neq 0$$

и

$$\frac{|f_{\overline{z}}|}{|f_z|} = \frac{\left|\overline{g'(z)} + z\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right) + z\overline{z}\overline{g_1'(z)}\right|}{\left|h'(z) + \overline{z}\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right) + z\overline{z}h_1'(z)\right|} < 1, \quad \forall z \in D_1.$$

Шаг 2. Воспользуемся следующей леммой из [22], чтобы доказать, что

$$\widehat{f} = \begin{cases} f_1, & z \in D_1, \\ f_2, & z \in \mathbb{C} \setminus D_1, \end{cases}$$

является внутренним отображением в смысле Стоилова, и как следствие, локально однолистно на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Добавим, что внутреннее отображение w — это функция, которую можно представить в виде $w = f(T(z))$, где f — аналитическая функция T — гомеоморфизм (подробнее см. [20] и [42]).

Лемма A. *Пусть непересекающиеся области области D_1 и D_2 имеют общую границу, включающую открытую жорданову дугу L, причём $D_1 \cup D_2 \cup L$ — это область. Если $f_i(z), i = 1, 2,$ — одинаково ориентированные внутренние в смысле Стоилова отображения D_i, непрерывны, за исключением конечного числа полюсов и локально однолистны на $D_i \cup L, (i = 1, 2)$, $f_1(z) = f_2(z)$ для всех $z \in L$, то функция $f(z) = \{f_1(z), z \in D_1 \cup L; f_2(z), z \in D_2 \cup L\}$ также является внутренним локально однолистным отображением $D = D_1 \cup D_2 \cup L$.*

Шаг 3. Используя теоремы Адамара и Стоилова, покажем, что функция $\widehat{f}$, а следовательно и f_1, являются однолистной или p-листной.

4.2.3 Достаточные условия на единичном круге

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема, являющаяся достаточным условием p-листности бигармонических отображений единичного круга $\mathbb{D}$.

Теорема 4.2.1. *Предположим, что n — целое число, $n \neq 0$, и бигармоническое отображение $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right)$ локально однолистно и сохраняет* *ориентацию в $\mathbb{D}\setminus\{0\}$, где h, g, h_1 и g_1 — голоморфные в $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ функции такие, что*

$$h(z) = z^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = b_{n+1} z^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} b_k z^k,$$

$$h_1(z) = c_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k, \quad g_1(z) = d_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} d_k z^k$$

и

$$\lim_{z\to 0} z^{-n} f(z) = 1.$$

Также предположим

$$f_z(z) \neq \frac{\overline{z}}{n} f_{z\overline{z}} \quad \forall z \in \mathbb{D}\setminus\{0\} \quad \text{и} \quad |\omega(z)| := \left| \frac{f_{\overline{z}} - \frac{z}{n} f_{z\overline{z}}}{f_z - \frac{\overline{z}}{n} f_{z\overline{z}}} \right| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Если имеет место следующее неравенство

$$|\omega(z)| \left| n - \overline{z} \frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \right| + \left(1 - |z|^{2|n|}\right) \left| n - 1 - z \frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)} \right| \leq \left| n - \overline{z} \frac{f_{z\overline{z}}(z)}{f_z(z)} \right|$$

для любых $z \in \mathbb{D}$, то бигармоническая функция $f(z)$ является $|n|$-листной в $\mathbb{D}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $r \in (0,1)$. Пусть отображение $\widehat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ задано в следующем виде

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} f(z), & |z| \leq r, \\ f\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right) + \frac{\overline{z}^{n-1}}{nr^{2(n-1)}} \left(z^n - \frac{r^{2n}}{\overline{z}^n}\right) \varphi\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right), & |z| \geq r, \end{cases}$$

где

$$\varphi(z) = f_z(z) = h'(z) + \overline{z}\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right) + |z|^2 h_1'(z).$$

Очевидно, что, если $|n| \geq 1$, то функция $\widehat{f}$ непрерывна на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и

$$\lim_{z\to 0} z^{-n} \widehat{f}(z) = 1. \tag{4.2.1}$$

Для начала покажем, что $\widehat{f}(z) \to \infty$ при $z \to \infty$. Пусть n является целым числом неравным 0. Очевидно,

$$f\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right) + \frac{\overline{z}^{n-1}}{nr^{2(n-1)}} \left(z^n - \frac{r^{2n}}{\overline{z}^n}\right) \varphi\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right) = h\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right) + \overline{g\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)} + \frac{\overline{z}^{n-1} z^n}{nr^{2(n-1)}} h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right) - \frac{r^2}{n\overline{z}} h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\overline{z}^{n-1} z^{n-1}}{nr^{2n-4}} + \frac{n-1}{n} \frac{r^4}{z\overline{z}}\right) \left(h_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right) + \overline{g_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}\right) + \frac{\overline{z}^{n-2} z^{n-1}}{nr^{2n-6}} h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right) - \frac{r^6}{n\overline{z}^2 z} h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right).$$

Используя представления

$$h(z) = z^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad \text{и} \quad h_1(z) = c_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k,$$

где a_k, c_k — комплексные числа, мы получим

$$h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=n\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)^{n-1}+\sum_{k=n+1}^{\infty}ka_k\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)^{k-1},$$

$$h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=c_{n-1}(n-1)\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)^{n-2}+\sum_{k=n}^{\infty}kc_k\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)^{k-1}.$$

Следовательно, если $n>0$, то мы имеем

$$\frac{z^n\overline{z}^{n-1}}{nr^{2(n-1)}}h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=z^n\left(1+\sum_{k=n+1}^{\infty}ka_k\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)^{k-n}\right)=O(z^n), z\to\infty,$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{r^2}{n\overline{z}}h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=\frac{r^{2n}}{\overline{z}^n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}ka_k\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)^{k}=0,$$

$$\frac{\overline{z}^{n-1}z^{n-1}}{nr^{2n-4}}\left(h_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\overline{g_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}\right)=O(z^{n-1})+O(\overline{z}^{n-1}), z\to\infty,$$

$$\frac{\overline{z}^{n-2}z^{n-1}}{nr^{2n-6}}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=O(z^{n-1}), z\to\infty,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{r^6}{n\overline{z}^2z}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=0$$

а если $n<0$, то получим

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^n\overline{z}^{n-1}}{nr^{2(n-1)}}h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=0,$$

$$\frac{r^2}{n\overline{z}}h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=\frac{r^{2n}}{\overline{z}^n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}ka_k\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)^{k}=O(z^{|n|}), z\to\infty,$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\overline{z}^{n-1}z^{n-1}}{nr^{2n-4}}\left(h_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\overline{g_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}\right)=0,$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\overline{z}^{n-2}z^{n-1}}{nr^{2n-6}}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=0,\quad \frac{r^6}{n\overline{z}^2z}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)=O(z^{|n|-1}), z\to\infty.$$

Таким образом, $\lim_{z\to\infty}\widehat{f}(z)=\infty$, где n — это целое число, $n\neq 0$. Более того, отображение $\widehat{f}$ сохраняет ориентацию и локально однолистно в $0<|z|\le r$.

Теперь покажем, что $\widehat{f}$ сохраняет ориентацию и локально однолистно в $|z|\ge r$, т.е. мы покажем, что якобиан отображения $J_{\widehat{f}}$ является положительной при $|z|\ge r$.

Прямыми вычислениями получаем

$$\widehat{f}_z(z)=-\frac{r^2}{z^2}\overline{g'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}-\frac{r^4}{z^2\overline{z}}\left(h_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\overline{g_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}\right)-\frac{r^6}{\overline{z}z^3}\overline{g_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}+$$

$$+\frac{z^{n-1}\overline{z}^{n-1}}{r^{2(n-1)}}\left(h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\frac{r^2}{z}\left(h_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\overline{g_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}\right)+\frac{r^4}{z\overline{z}}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)\right)-$$

$$-\frac{\overline{z}^{n-1}}{nr^{2(n-1)}}\frac{r^2}{z^2}\left(z^n-\frac{r^{2n}}{\overline{z}^n}\right)\left(h_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\overline{g_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}-\frac{r^2}{z}\overline{g_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}-\frac{r^2}{\overline{z}}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)\right)$$

и

$$\widehat{f_{\overline{z}}}(z)=-\frac{r^2}{\overline{z}^2}h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)-\frac{r^4}{z\overline{z}^2}\left(h_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\overline{g_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}\right)-\frac{r^6}{\overline{z}^3z}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)-$$

$$-\frac{r^2}{n\overline{z}^2}\left((n-1)\frac{z^n\overline{z}^n}{r^{2n}}+1\right)\left(h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\frac{r^2}{z}\left(h_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\overline{g_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}\right)+\frac{r^4}{z\overline{z}}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)\right)+$$

$$+\frac{\overline{z}^{n-3}}{nr^{2(n-2)}}\left(z^n-\frac{r^{2n}}{\overline{z}^n}\right)\left(h''\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+2\frac{r^2}{z}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\frac{r^4}{z\overline{z}}h_1''\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)\right)=$$

$$=\frac{n-1}{n}\frac{r^2}{\overline{z}^2}\left(\frac{z^n\overline{z}^n}{r^{2n}}-1\right)\left(h'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\frac{r^2}{z}\left(h_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\overline{g_1\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)}\right)+\frac{r^4}{z\overline{z}}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)\right)-$$

$$-\frac{r^4}{n\overline{z}^3}\left(\frac{z^n\overline{z}^n}{r^{2n}}-1\right)\left(h''\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+2\frac{r^2}{z}h_1'\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)+\frac{r^4}{z\overline{z}}h_1''\left(\frac{r^2}{\overline{z}}\right)\right).$$

В последнем выражении для удобства заменим $r^2/\overline{z}$ на ζ. Получим

$$\widehat{f_z}(\zeta)=-\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}\left(\overline{g'(\zeta)}+\zeta\left(h_1(\zeta)+\overline{g_1(\zeta)}\right)+|\zeta|^2\overline{g_1'(\zeta)}\right)+$$

$$+\frac{r^{2(n-1)}}{\zeta^{n-1}\overline{\zeta}^{n-1}}\left(h'(\zeta)+\overline{\zeta}\left(h_1(\zeta)+\overline{g_1(\zeta)}\right)+|\zeta|^2h_1'(\zeta)\right)-$$

$$-\frac{1}{n\zeta^{n-1}}\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}\left(\frac{r^{2n}}{\overline{\zeta}^n}-\zeta^n\right)\left(h_1(\zeta)+\overline{g_1(\zeta)}+\overline{\zeta}\overline{g_1'(\zeta)}+\zeta h_1'(\zeta)\right)=$$

$$=\frac{r^{2(n-1)}}{\zeta^{n-1}\overline{\zeta}^{n-1}}f_\zeta(\zeta)-\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}f_{\overline{\zeta}}(\zeta)-\frac{1}{n\zeta^{n-1}}\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}\left(\frac{r^{2n}}{\overline{\zeta}^n}-\zeta^n\right)\left(h_1(\zeta)+\overline{g_1(\zeta)}+\overline{\zeta}\overline{g_1'(\zeta)}+\zeta h_1'(\zeta)\right)=$$

$$=\frac{r^{2(n-1)}}{\zeta^{n-1}\overline{\zeta}^{n-1}}f_\zeta(\zeta)-\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}f_{\overline{\zeta}}(\zeta)-\frac{1}{n\zeta^{n-1}}\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}\left(\frac{r^{2n}}{\overline{\zeta}^n}-\zeta^n\right)f_{\zeta\overline{\zeta}}=$$

$$=-\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}f_{\overline{\zeta}}+\frac{r^{2(n-1)}}{|\zeta|^{2(n-1)}}f_\zeta-\frac{\overline{\zeta}}{n}\frac{r^{2(n-1)}}{|\zeta|^{2(n-1)}}f_{\zeta\overline{\zeta}}+\frac{\overline{\zeta}}{n}\frac{|\zeta|^2}{r^2}f_{\zeta\overline{\zeta}}=\frac{r^{2(n-1)}}{|\zeta|^{2(n-1)}}\left(f_\zeta-\frac{\overline{\zeta}}{n}f_{\zeta\overline{\zeta}}\right)-\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}\left(f_{\overline{\zeta}}-\frac{\zeta}{n}f_{\zeta\overline{\zeta}}\right)$$

и

$$\widehat{f_{\overline{z}}}(\zeta)=\frac{n-1}{n}\frac{\zeta^2}{r^2}\left(\frac{r^{2n}}{\zeta^n\overline{\zeta}^n}-1\right)\left(h'(\zeta)+\overline{\zeta}\left(h_1(\zeta)+\overline{g_1(\zeta)}\right)+\zeta\overline{\zeta}h_1'(\zeta)\right)-$$

$$-\frac{\zeta^3}{nr^2}\left(\frac{r^{2n}}{\zeta^n\overline{\zeta}^n}-1\right)\left(h''(\zeta)+2\overline{\zeta}h_1'(\zeta)+|\zeta|^2h_1''(\zeta)\right)=$$

$$=\frac{\zeta^2}{nr^2}\left(\frac{r^{2n}}{\zeta^n\overline{\zeta}^n}-1\right)f_\zeta(\zeta)\left((n-1)-\zeta\frac{f_{\zeta\zeta}(\zeta)}{f_\zeta(\zeta)}\right).$$

Ясно, что

$$\left|\frac{\widehat{f_{\overline{z}}}(\zeta)}{\widehat{f_z}(\zeta)}\right|\le\frac{\left|\frac{\zeta^2}{nr^2}\left(\frac{r^{2n}}{\zeta^n\overline{\zeta}^n}-1\right)f_\zeta(\zeta)\left((n-1)-\zeta\frac{f_{\zeta\zeta}(\zeta)}{f_\zeta(\zeta)}\right)\right|}{\left|\frac{r^{2(n-1)}}{|\zeta|^{2(n-1)}}\left(f_\zeta-\frac{\overline{\zeta}}{n}f_{\zeta\overline{\zeta}}\right)-\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}\left(f_{\overline{\zeta}}-\frac{\zeta}{n}f_{\zeta\overline{\zeta}}\right)\right|}\le$$

$$\le\frac{\left|\frac{f_\zeta}{\left(f_\zeta-\frac{\overline{\zeta}}{n}f_{\zeta\overline{\zeta}}\right)}\right|\left|\frac{\zeta^2}{nr^2}\left(\frac{r^{2n}}{|\zeta|^{2n}}-1\right)\left(n-1-\zeta\frac{f_{\zeta\zeta}(\zeta)}{f_\zeta(\zeta)}\right)\right|}{\left|\frac{r^{2(n-1)}}{|\zeta|^{2(n-1)}}-\frac{\overline{\zeta}^2}{r^2}\frac{\left(f_{\overline{\zeta}}-\frac{\zeta}{n}f_{\zeta\overline{\zeta}}\right)}{\left(f_\zeta-\frac{\overline{\zeta}}{n}f_{\zeta\overline{\zeta}}\right)}\right|}\le$$

$$\leq \frac{1}{|n|}\frac{\left|\frac{f_\zeta}{\left(f_\zeta-\frac{\bar\zeta}{n}f_{\zeta\bar\zeta}\right)}\right|\left|\left(\frac{r^{2n}}{|\zeta|^{2n}}-1\right)\left(n-1-\zeta\frac{f_{\zeta\zeta}(\zeta)}{f_\zeta(\zeta)}\right)\right|}{\frac{r^{2n}}{|\zeta|^{2n}}-\left|\frac{f_{\bar\zeta}-\frac{\zeta}{n}f_{\bar\zeta\bar\zeta}}{f_\zeta-\frac{\bar\zeta}{n}f_{\zeta\bar\zeta}}\right|}.$$

Следовательно, локальная однолистность эквивалентна следующему утверждению

$$X(\zeta) := |n|\frac{|\zeta|^{2|n|}}{r^{2|n|}}|\omega(\zeta)| + \left|1-\frac{\zeta^{2|n|}}{r^{2|n|}}\right|\left|\frac{f_\zeta}{\left(f_\zeta-\frac{\bar\zeta}{n}f_{\zeta\bar\zeta}\right)}\right|\left|n-1-\zeta\frac{f_{\zeta\zeta}(\zeta)}{f_\zeta(\zeta)}\right| < |n|.$$

Если

$$\left|\frac{f_\zeta}{f_\zeta-\frac{\bar\zeta}{n}f_{\zeta\bar\zeta}}\right|\left|n-1-\zeta\frac{f_{\zeta\zeta}(\zeta)}{f_\zeta(\zeta)}\right| = 0$$

в некоторой точке ζ, $|\zeta|\leq r$, то неравенство $X(\zeta)<|n|$ выполнено, так как

$$|\zeta|^2/r^2 \leq 1 \quad \text{и} \quad |\omega(\zeta)|<1.$$

Если

$$\left(1-\frac{|\zeta|^{2n}}{r^{2|n|}}\right)\left|\frac{f_\zeta}{f_\zeta-\frac{\bar\zeta}{n}f_{\zeta\bar\zeta}}\right|\left|n-1-\zeta\frac{f_{\zeta\zeta}(\zeta)}{f_\zeta(\zeta)}\right| > 0,$$

то из соотношений

$$|\zeta|^2/r^2 \leq 1 \quad \text{и} \quad 1-|\zeta|^{2|n|}/r^{2|n|} < 1-|\zeta|^{2|n|},$$

следует

$$X(\zeta) < X_1(\zeta),$$

где

$$X_1(\zeta) := |n||\omega(\zeta)| + \left(1-|\zeta|^{2|n|}\right)\left|\frac{f_\zeta}{f_\zeta-\frac{\bar\zeta}{n}f_{\zeta\bar\zeta}}\right|\left|n-1-\zeta\frac{f_{\zeta\zeta}(\zeta)}{f_\zeta(\zeta)}\right| \leq |n|,$$

для любых $\zeta\in\mathbb{D}$. Следовательно, также справедливо неравенство $X(\zeta)<1$.

Таким образом, получаем, что функция $\widehat{f}$ непрерывна, а из положительности якобиана следует, что $\widehat{f}$ является локально гомеоморфным в $0<|z|\leq r$ и в $r\leq|z|<\infty$. Используя лемму из [22], получаем, что $\widehat{f}$ локально гомеоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Более того, получаем, что функция $\widehat{f}$ является внутренним отображением по Стоилову (дополнительную информацию см. в [42]) и

$$\lim_{z\to 0} z^{-n}\widehat{f}(z) = 1.$$

Ясно, что существует проколотая окрестность нуля U такая, что $\widehat{f}(z)\neq 0$ $\forall z\in U$. Рассмотрим функцию φ, определенную следующим образом

$$\varphi(z) = \sqrt[n]{\widehat{f}(z)} = z\sqrt[n]{\frac{\widehat{f}(z)}{z^n}}, \quad z\in U$$

Мы выбираем ветвь такую, что

$$\sqrt[n]{1} = \lim_{z\to 0} \sqrt[n]{\frac{f(z)}{z^n}} = 1.$$

Следовательно, $\widehat{f}(z) = g(\varphi(z)), \quad z \in U$, где $g(w) = w^n$ и $\varphi(z)$ является биекцией.

Таким образом, мы имеем следующее представление

$$w = \widehat{f}(z) = \psi(T(z)),$$

где ψ — аналитическая функция, а T — гомеоморфизм. То есть $\widehat{f}(z)$ топологически эквивалентно аналитической функции и $\widehat{f}(z) \to \infty$ для любого $z \to \infty$.

Отсюда, используя теорему Стоилова [22], [42], получаем, что $\widehat{f}$ топологически эквивалентно z^n. Это доказывает, что f является $|n|$-листным бигармоническим отображением.

Это завершает доказательство теоремы 4.2.1. □

Рассмотрим некоторые примеры

Пример 4.2.1. *Пусть* $h(z) = z$, $g(z) = \frac{z^p}{p}$, $p \geq 2$, $h_1(z) = 0$ *и* $g_1(z) = 0$. *Тогда гармоническая функция*

$$f(z) = z + \frac{\overline{z}^p}{p}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2.1. Значит функция f однолистна (см., например, [94, с. 2]).

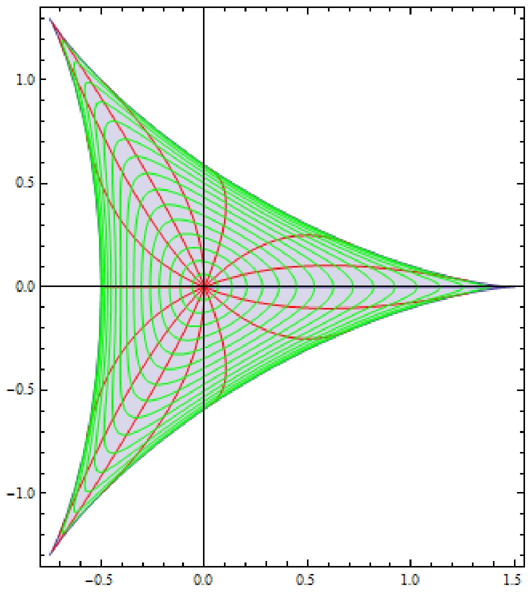

Рисунок 4.2.1: График функции $z + \frac{\overline{z}^2}{2}$.

Пример 4.2.2. *Предположим, что* $h(z) = z$, $g(z) = \frac{z^2}{8}$, $h_1(z) = \frac{z}{2}$ *и* $g_1(z) = 0$. *Тогда бигармоническое отображение* $f(z) = z + \frac{\overline{z}^2}{8} + \frac{z^2\overline{z}}{2}$ *локально однолистно, так как*

$$\left|\frac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)}\right| = \left|\frac{\frac{\overline{z}}{4} + \frac{z^2}{2}}{1 + z\overline{z}}\right| \leq \frac{\left|\frac{\overline{z}}{4}\right| + \left|\frac{z^2}{2}\right|}{1 + |z|^2} \leq \frac{3}{4}$$

для любого $z \in \mathbb{D}$.

Очевидно, для любого $z \in \mathbb{D}$ *мы имеем оценки*

$$|\omega(z)| = \left|\frac{\overline{z}}{4} - \frac{z^2}{2}\right| \leq \frac{3}{4}$$

и

$$|\omega(z)| \left|1 - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}}{f_z}\right| + \left(1 - |z|^2\right) \left|z\frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)}\right| =$$

$$= \frac{1}{1+|z|^2}\left|\frac{\overline{z}}{4} - \frac{z^2}{2}\right| + (1 - |z|^2)\frac{|z|^2}{1+|z|^2} \leq \frac{1}{1+|z|^2} = \left|1 - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}}{f_z}\right|.$$

Следовательно, функция f *удовлетворяет теореме 4.2.1 и* f *однолистна.*

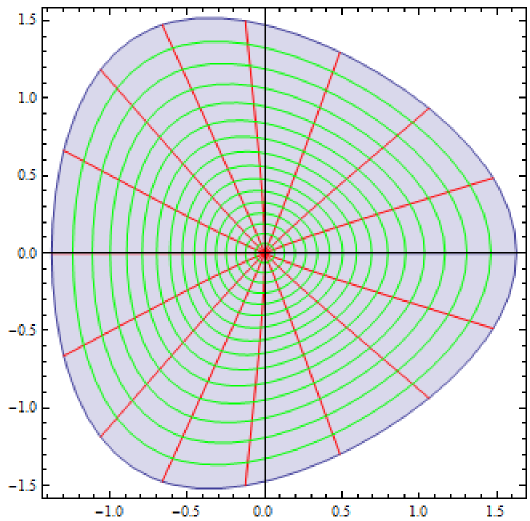

Рисунок 4.2.2: График функции $z + \overline{z}^2/8 + z^2\overline{z}/2$.

Пример 4.2.3. *Пусть* $h(z) = z^2$, $g(z) = \frac{z^3}{6}$, $h_1(z) = -\frac{z}{4}$ *и* $g_1(z) = 0$. *Тогда*

$$f(z) = z^2 + \frac{\overline{z}^3}{6} - \frac{z^2\overline{z}}{4}$$

удовлетворяет условиям теоремы 4.2.1 и f *является* 2*-листной.*

На самом деле, мы можем показать, что

$$\left|\frac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)}\right| = \left|\frac{\frac{\overline{z}^2}{2} - \frac{z^2}{4}}{2z - \frac{z\overline{z}}{2}}\right| = \frac{1}{4}\frac{\left|1 - \frac{z^2}{2\overline{z}^2}\right|}{\left|1 - \frac{\overline{z}}{4}\right|} < \frac{1}{2}$$

и

$$|\omega(z)| = \frac{\left|\frac{z^2}{2}\right|}{\left|2z - \frac{z\overline{z}}{4}\right|} \leq \frac{\frac{1}{4}}{\left|1 - \frac{\overline{z}}{8}\right|} = \frac{2}{7} < 1.$$

Так как

$$\left|1 - z\frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)}\right| = \left|1 - z\frac{2 - \frac{\overline{z}}{2}}{2z - \frac{z\overline{z}}{2}}\right| = 0,$$

мы имеем

$$|\omega(z)|\left|2 - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}}{f_z}\right| + \left(1 - |z|^4\right)\left|1 - z\frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)}\right| = |\omega(z)|\left|2 - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}}{f_z}\right| \leq \left|2 - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}}{f_z}\right|.$$

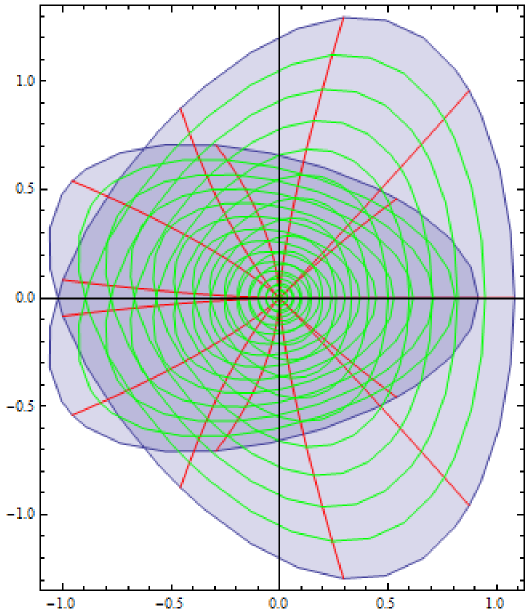

Рисунок 4.2.3: График функции $z^2 + \frac{\overline{z}^3}{6} - \frac{\overline{z}z^2}{4}$.

Установим теперь условие однолистности бигармонических функций.

Теорема 4.2.2. *Предположим, что бигармоническая функция*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + |z|^2\left(h_1(z) + \overline{g_1(z)}\right)$$

является локально однолистной в круге и сохраняет ориентацию $\mathbb{D}$, где h, g, h_1 и g_1 — голоморфные в $\mathbb{D}$ функции такие, что

$$h_1(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad g_1(z) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k.$$

Также положим, что

$$f_z(z) \neq 0, f_z(z) \neq \overline{z} f_{z\overline{z}} \quad \text{и} \quad |\omega(z)| := \left|\frac{f_{\overline{z}} - z f_{z\overline{z}}}{f_z - \overline{z} f_{z\overline{z}}}\right| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Если имеет место следующее неравенство

$$|\omega(z)|\left|1 - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}}{f_z}\right| + (1 - |z|^2)\left|z\frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)}\right| \leq \left|1 - \overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}}{f_z}\right|$$

для любого $z \in \mathbb{D}$, то $f(z)$ является однолистной в $\mathbb{D}$.

Доказательство. Применяя рассуждения доказательства теоремы 4.2.1 к бигармонической функции f, удовлетворяющей условиям теоремы 4.2.2, получаем, что f локально гомеоморфна в $\mathbb{C}$ и

$$\lim_{z\to\infty}\widehat{f}(z)=\infty.$$

В отличие от доказательства теоремы 4.2.1 в этом случае нам не нужно следующее ограничение:

$$\lim_{z\to 0}z^{-n}\widehat{f}(z)=1.$$

Теорема Адамара (см., например, [42, с. 164]) утверждает, что каждое локально гомеоморфное отображение евклидовой плоскости отображает эту плоскость гомеоморфно на себя, если всякая последовательность точек, стремящаяся к бесконечности, отображается в подобную последовательность.

Это доказывает, что f является однолистным бигармоническим отображением. □

Пример 4.2.4. *Пусть* $h(z)=z, g(z)=\frac{z}{8}$, $h_1(z)=z/8$ *и* $g_1(z)=0$. *Тогда*

$$f(z)=z+\frac{\overline{z}}{8}+\frac{z^2\overline{z}}{8}$$

удовлетворяет критериям, указанным в теореме 4.2.2, и f *является однолистным.*

В самом деле, легко показать, что

$$\left|\frac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)}\right|=\left|\frac{\frac{1}{8}+\frac{z^2}{8}}{1+\frac{z\overline{z}}{4}}\right|\le\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\quad \text{и}\quad |\omega(z)|=\left|\frac{1}{8}-\frac{z^2}{8}\right|\le\frac{1}{4}.$$

Очевидно,

$$|\omega(z)|\left|1-\overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}}{f_z}\right|+\left(1-|z|^2\right)\left|z\frac{f_{zz}(z)}{f_z(z)}\right|=$$

$$=\frac{|\omega(z)|}{1+\frac{z\overline{z}}{4}}+(1-|z|^2)\frac{\frac{|z|^2}{4}}{1+\frac{z\overline{z}}{4}}\le\frac{1}{2(1+\frac{z\overline{z}}{4})}\le\frac{1}{1+\frac{z\overline{z}}{4}}=\left|1-\overline{z}\frac{f_{z\overline{z}}}{f_z}\right|.$$

Кроме того, этот пример показывает, что классы однолистных бигармонических функций теорем 4.2.1 и 4.2.2 различны.

Как мы упоминали выше, каждая гармоническая функция является бигармонической. Если f гармоническая, то, очевидно, $f_{z\overline{z}}(z)=0$. Следовательно, из теоремы 4.2.2 следует теорема A, а из теоремы 4.2.1 следует следующее утверждение

Следствие 4.2.1. *Предположим, что* n *— целое число и гармоническая функция* $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ *является локально однолистной в* $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ *и сохраняет ориентацию, где* h *и* g *— голоморфные в* $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ *функции такие, что*

$$h(z)=z^n+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k,\quad g(z)=b_{n+1}z^{n+1}+\sum_{k=n+2}^{\infty}b_kz^k,$$

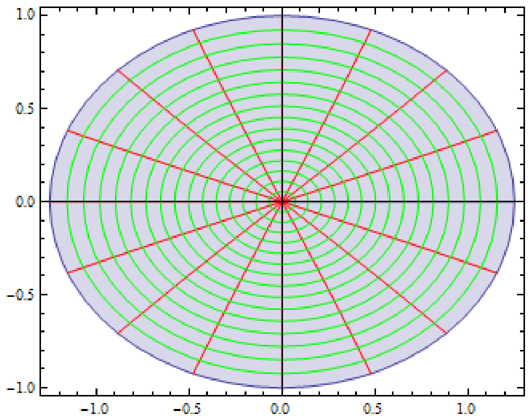

Рисунок 4.2.4: График функции $z + \frac{\overline{z}}{8} + \frac{\overline{z}z^2}{8}$.

Если имеет место следующее неравенство

$$|n|\,|\omega(z)| + \left(1 - z^{2|n|}\right)\left|n - 1 - z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \le |n|$$

для любого $z \in \mathbb{D}$, то $f(z)$ является $|n|$-листной в $\mathbb{D}$.

Замечание 4.2.1. Используя теорему 4.2.1, мы можем также получить условия однолистности для бигармонических и гармонических отображений. Эти однолистные условия будут отличаться от условий однолистности теоремы 4.2.2 и следствия 4.2.1.

4.2.4 Достаточные условия однолистности во внешности единичного круга

В этом пункте мы устанавливаем достаточные условия однолистности во внешности единичного круга. Положим

$$F(\zeta) = H(\zeta) + \overline{G(\zeta)} + |\zeta|^2\left(H_1(\zeta) + \overline{G_1(\zeta)}\right),$$

где H, G, H_1 и G_1 — голоморфные в $\mathbb{D}^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ функции.

Основным результатом этого пункта является следующее утверждение.

Теорема 4.2.3. *Пусть $F(\zeta) = H(\zeta) + \overline{G(\zeta)} + |\zeta|^2\left(H_1(\zeta) + \overline{G_1(\zeta)}\right)$ локально однолистное и сохраняющее ориентацию отображение, действующее на $\mathbb{D}^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, где H, G, H_1 и G_1 — функции голоморфные в $\mathbb{D}^- \setminus \{\infty\}$ такие, что для каждого $n \ge 1$*

$$G(\zeta) = \sum_{k=n}^{\infty} g_k/\zeta^k, G_1(\zeta) = \sum_{k=n+3}^{\infty} g_{1k}/\zeta^k, H_1(\zeta) = \sum_{k=n+3}^{\infty} h_{1k}/\zeta^k,$$

и более того H имеет полюс порядка n в точке $\zeta = \infty$ и

$$H(\zeta) = \zeta^n + \sum_{k=n}^{\infty} h_k/\zeta^k.$$

Предположим также, что $f_\zeta(\zeta)\neq 0,\quad f_\zeta(\zeta)\neq\frac{\overline{\zeta}}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)$ *и*

$$\omega(\zeta)=\left|\frac{F_{\overline{\zeta}}(\zeta)-\frac{\zeta}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)}{F_{\zeta}(\zeta)-\frac{\overline{\zeta}}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)}\right|<1$$

для любого $\zeta\in\mathbb{D}^-\setminus\{\infty\}$. *Тогда, если*

$$|\zeta|^{2n}\left|\omega(\zeta)\right|\left|n-\overline{\zeta}\frac{F_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right|+\left(|\zeta|^{2n}-1\right)\left|n-1-\zeta\frac{F_{\zeta\zeta}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right|\le\left|n-\overline{\zeta}\frac{F_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right|$$

для любого $\zeta\in\mathbb{D}^-$, *то* $F(\zeta)$ *является* n*-листной в* $\mathbb{D}^-$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\widehat{F}$, действующее из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ и такое, что

$$\widehat{F}(\zeta)=\begin{cases}F(\zeta), & |\zeta|\ge r,\\ F\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+\frac{\overline{\zeta}^{n-1}}{nr^{2(n-1)}}\left(\zeta^n-\frac{r^{2n}}{\overline{\zeta}^n}\right)F_\zeta\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right) & |\zeta|\le r.\end{cases}$$

где $r\in(1,\infty)$ и

$$F_\zeta(\zeta)=H'\left(\zeta\right)+\overline{\zeta}\left(H_1\left(\zeta\right)+\overline{G_1\left(\zeta\right)}\right)+|\zeta|H_1'\left(\zeta\right).$$

Очевидно, что функция $\widehat{F}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ является непрерывной,

$$\lim_{\zeta\to 0}\zeta^{-n}\widehat{F}(\zeta)=1$$

и $\widehat{F}(\zeta)\to\infty$ при $\zeta\to\infty$.

На самом деле,

$$F\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+\frac{\overline{\zeta}^{n-1}}{nr^{2(n-1)}}\left(\zeta^n-\frac{r^{2n}}{\overline{\zeta}^n}\right)F_\zeta\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)=\frac{r^{2n}}{\overline{\zeta}^n}+\sum_{k=n}^{\infty}h_k\frac{\overline{\zeta}^k}{r^{2k}}+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\overline{g_k}\frac{\zeta^k}{r^{2k}}+\left(\frac{\overline{\zeta}^{n-1}\zeta^{n-1}}{nr^{2(n-2)}}+\frac{n-1}{n}\frac{r^4}{\zeta\overline{\zeta}}\right)\left(\sum_{k=n+3}^{\infty}h_{1k}\frac{\overline{\zeta}^k}{r^{2k}}+\sum_{k=n+3}^{\infty}\overline{g_{1k}}\frac{\zeta^k}{r^{2k}}\right)+$$

$$+\left(\frac{\overline{\zeta}^{n-1}\zeta^n}{nr^{2(n-1)}}-\frac{r^2}{n\overline{\zeta}}\right)\left(n\frac{r^{2(n-1)}}{\overline{\zeta}^{n-1}}-\sum_{k=n}^{\infty}kh_k\frac{\overline{\zeta}^{k+1}}{r^{2k}}-\frac{r^4}{|\zeta|^2}\sum_{k=n+3}^{\infty}kh_{1k}\frac{\overline{\zeta}^{k+1}}{r^{2k}}\right)=$$

$$=\zeta^n(1+\dots\quad).$$

Теперь мы покажем, что $\widehat{F}$ сохраняет ориентацию и является локально однолистной в $|\zeta|\le r$. Мы должны доказать, что

$$\frac{|\widehat{F}_{\overline{\zeta}}|}{|\widehat{F}_\zeta|}<1,\quad |\zeta|\le r.$$

Прямыми вычислениями имеем

$$\widehat{F}_\zeta(\zeta)=-\frac{r^2}{\zeta^2}\overline{G'\left(r^2/\overline{\zeta}\right)}-\frac{r^4}{\zeta^2\overline{\zeta}}\left(H_1(r^2/\overline{\zeta})+\overline{G_1(r^2/\overline{\zeta})}\right)-\frac{r^6}{\zeta^3\overline{\zeta}}\overline{G_1'(r^2/\overline{\zeta})}+$$

$$+\frac{|\zeta|^{2(n-1)}}{r^{2(n-1)}}\left(H'\left(r^2/\overline{\zeta}\right)+\frac{r^2}{\zeta}\left(H_1(r^2/\overline{\zeta})+\overline{G_1(r^2/\overline{\zeta})}\right)+\frac{r^4}{\zeta\overline{\zeta}}H_1'\left(r^2/\overline{\zeta}\right)\right)+$$

$$+\frac{r^2}{n\overline{\zeta}}\left(\frac{|\zeta|^{2n}}{r^{2n}}-1\right)\left(-\frac{r^2}{\zeta^2}\left(H_1(r^2/\overline{\zeta})+\overline{G_1(r^2/\overline{\zeta})}\right)-\frac{r^4}{\zeta^3}\overline{G_1'(r^2/\overline{\zeta})}-\frac{r^4}{\zeta^2\overline{\zeta}}H_1'(r^2/\overline{\zeta})\right)$$

и

$$\widehat{F}_{\overline{\zeta}}(\zeta)=\frac{n-1}{n}\frac{r^2}{\overline{\zeta}^2}\left(\frac{|\zeta|^{2n}}{r^{2n}}-1\right)\times\left(H'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+\frac{r^2}{\zeta}\left(H_1\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+\overline{G_1\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}\right)+\frac{r^4}{\zeta\overline{\zeta}}H_1'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)\right)$$

$$-\frac{r^4}{n\overline{\zeta}^3}\left(\frac{|\zeta|^{2n}}{r^{2n}}-1\right)\left(H''\left(r^2/\overline{\zeta}\right)+2\frac{r^2}{\zeta}H_1'(r^2/\overline{\zeta})+\frac{r^4}{\zeta\overline{\zeta}}H_1''\left(r^2/\overline{z}\right)\right).$$

Если $z=r^2/\overline{\zeta}$, то

$$\widehat{F}_{\zeta}(z)=-\frac{\overline{z}^2}{r^2}F_{\overline{z}}(z)+\frac{r^{2(n-1)}}{|z|^{2(n-1)}}F_z(z)+\frac{z}{n}\frac{\overline{z}^2}{r^2}\left(\frac{r^{2n}}{|z|^{2n}}-1\right)F_{z\overline{z}}(z)$$

и

$$\widehat{F}_{\overline{\zeta}}(z)=\frac{1}{n}\frac{z^2}{r^2}\left(\frac{r^{2n}}{|z|^{2n}}-1\right)F_{\zeta}(z)\left(n-1-z\frac{F_{\zeta\zeta}(z)}{F_{\zeta}(z)}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{|\widehat{F}_{\overline{\zeta}}|}{|\widehat{F}_{\zeta}|}\le\frac{1}{n}\frac{\left|\left(\frac{r^{2n}}{|z|^{2n}}-1\right)F_{\zeta}(z)\left(n-1-z\frac{F_{\zeta\zeta}(z)}{F_{\zeta}(z)}\right)\right|}{\frac{r^{2n}}{|z|^{2n}}\left|F_{\zeta}(z)-\frac{\overline{z}}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(z)\right|-\left|F_{\overline{\zeta}}(z)-\frac{z}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}\right|}=$$

$$=\frac{1}{n}\left|\frac{F_{\zeta}(z)}{F_{\zeta}(z)-\frac{\overline{z}}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(z)}\right|\frac{\left|\left(\frac{r^{2n}}{|z|^{2n}}-1\right)\left(n-1-z\frac{F_{\zeta\zeta}(z)}{F_{\zeta}(z)}\right)\right|}{\frac{r^{2n}}{|z|^{2n}}-\frac{\left|F_{\overline{\zeta}}(z)-\frac{z}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}\right|}{\left|F_{\zeta}(z)-\frac{\overline{z}}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(z)\right|}}.$$

Таким образом, локальная однолистность эквивалентна следующему утверждению

$$X(z):=\frac{|z|^{2n}}{r^{2n}}\frac{\left|F_{\overline{\zeta}}(z)-\frac{z}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}\right|}{\left|F_{\zeta}(z)-\frac{\overline{z}}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(z)\right|}+\frac{1}{n}\left|\frac{F_{\zeta}(z)}{F_{\zeta}(z)-\frac{\overline{z}}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(z)}\right|\left(\frac{|z|^{2n}}{r^{2n}}-1\right)\left|n-1-z\frac{F_{\zeta\zeta}(z)}{F_{\zeta}(z)}\right|<1.$$

Очевидно, что $X(z)<X_1(z)$, где

$$X_1(z):=|z|^{2n}\left|\frac{F_{\overline{\zeta}}(z)-\frac{z}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}}{F_{\zeta}(z)-\frac{\overline{z}}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(z)}\right|+\frac{1}{n}\left|\frac{F_{\zeta}(z)}{F_{\zeta}(z)-\frac{\overline{z}}{n}F_{\zeta\overline{\zeta}}(z)}\right|\left(|z|^{2n}-1\right)\left|n-1-z\frac{F_{\zeta\zeta}(z)}{F_{\zeta}(z)}\right|\le 1.$$

Следовательно, $\widehat{F}$ сохраняет ориентацию и локально однолистна в $|\zeta|\ge r$ и $|\zeta|\le r$. Используя Лемму A, мы получим, что $\widehat{F}$ сохраняет ориентацию и локально однолистна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Более того, мы получим, что функция $\widehat{F}$ является внутренней по Стоилову и $\widehat{F}(z)$ топологически эквивалентно аналитической функции и $\widehat{F}(z)\to\infty$ для любого $z\to\infty$.

Используя теорему Стоилова, мы имеем, что $\widehat{F}$ топологически эквивалентна z^n. Что доказывает n-листность F. □

Пример 4.2.5. *Пусть* $H(\zeta)=\zeta+\frac{1}{8\zeta}$, $G(\zeta)=\frac{1}{8\zeta}$, $H_1(\zeta)=\frac{1}{80\zeta^4}$ *и* $G_1(\zeta)=0$. *Тогда*

$$F(\zeta)=\zeta+\frac{1}{8\zeta}+\frac{1}{8\overline{\zeta}}+\frac{\overline{\zeta}}{80\zeta^3}$$

удовлетворяет все условиям теоремы 4.2.3. Проверим это:

$$\left|\frac{F_{\bar\zeta}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{8\bar\zeta^2}+\frac{1}{80\zeta^3}}{1-\frac{1}{8\zeta^2}-\frac{3\bar\zeta}{80\zeta^4}}\right| \le \frac{\frac{11}{80}}{\frac{67}{80}} = \frac{11}{67} \quad \text{и} \quad |\omega(\zeta)| = \left|\frac{-\frac{1}{8\bar\zeta^2}+\frac{1}{20\zeta^3}}{1-\frac{1}{8\zeta^2}}\right| \le \frac{\frac{14}{80}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{5}.$$

Более того,

$$|\zeta|^2\,|\omega(\zeta)|\left|n-\bar\zeta\frac{F_{\zeta\bar\zeta}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right| + \left(|\zeta|^2-1\right)\left|\zeta\frac{F_{\zeta\zeta}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right| =$$

$$\left|\frac{-\frac{1}{8}+\frac{\bar\zeta^2}{20\zeta^3}}{F_\zeta(\zeta)}\right| + \left(1-\frac{1}{|\zeta|^2}\right)\left|\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{20}\frac{\bar\zeta}{\zeta^2}}{F_\zeta(\zeta)}\right| \le \frac{46}{70}\left|\frac{1-\frac{1}{8\zeta^2}}{F_\zeta(\zeta)}\right| \le \left|\frac{1-\frac{1}{8\zeta^2}}{F_\zeta(\zeta)}\right| = \left|1-\bar\zeta\frac{F_{\zeta\bar\zeta}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right|.$$

Таким образом, F однолистна.

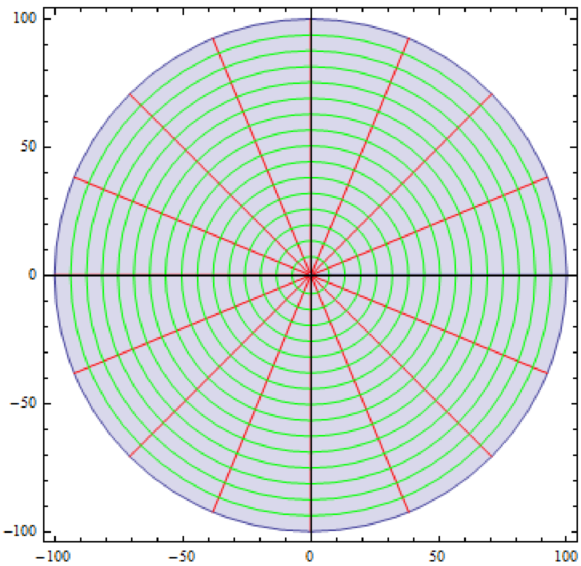

Рисунок 4.2.1: График функции $\zeta+\frac{1}{8\zeta}+\frac{1}{8\bar\zeta}+\frac{\bar\zeta}{80\zeta^3}$.

Пример 4.2.6. *Пусть $H(\zeta)=\zeta^2+\frac{1}{8\zeta^2}$, $G(\zeta)=\frac{1}{8\zeta^2}+\frac{1}{9\zeta^3}$, $H_1(\zeta)=\frac{1}{80\zeta^5}$ и $G_1(\zeta)=0$. Тогда следующая бигармоническая функция*

$$F(\zeta)=\zeta^2+\frac{1}{8\zeta^2}+\frac{1}{8\bar\zeta^2}+\frac{1}{9\bar\zeta^3}+\frac{\bar\zeta}{80\zeta^4}$$

удовлетворяет условиям теоремы 4.2.3 и F является 2-листной. Легко увидеть, что

$$\left|\frac{F_{\bar\zeta}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{4\bar\zeta^3}-\frac{1}{3\bar\zeta^4}+\frac{1}{80\zeta^4}}{2\zeta-\frac{1}{4\zeta^3}-\frac{4\bar\zeta}{80\zeta^5}}\right| \le \frac{143}{408} \quad \text{и} \quad |\omega(\zeta)| = \left|\frac{-\frac{1}{4\bar\zeta^3}-\frac{1}{3\bar\zeta^4}+\frac{3}{80\zeta^4}}{2\zeta-\frac{1}{4\zeta^3}-\frac{2\bar\zeta}{80z^5}}\right| \le \frac{149}{414}.$$

Кроме этого,

$$|\zeta|^4\,|\omega(\zeta)|\left|2-\bar\zeta\frac{F_{\zeta\bar\zeta}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right| + \left(|\zeta|^4-1\right)\left|1-\zeta\frac{F_{\zeta\zeta}(\zeta)}{F_\zeta(\zeta)}\right| =$$

$$\left|\frac{-\frac{1}{4}-\frac{1}{3\bar\zeta}+\frac{3\bar\zeta^3}{80\zeta^4}}{2-\frac{1}{4\zeta^4}-\frac{2\bar\zeta}{80z^6}}\right|\left|\frac{4-\frac{1}{2\zeta^4}-\frac{4\bar\zeta}{80\zeta^5}}{2-\frac{1}{4\zeta^4}-\frac{4\bar\zeta}{80\zeta^5}}\right| + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{|\zeta|^2}\right) \le \frac{30815}{32706}\left|\frac{4-\frac{1}{2\zeta^4}-\frac{4\bar\zeta}{80\zeta^5}}{2-\frac{1}{4\zeta^4}-\frac{4\bar\zeta}{80\zeta^5}}\right| \le$$

$$\leq \left| \frac{4 - \frac{1}{2\zeta^4} - \frac{4\bar{\zeta}}{80\zeta^5}}{2 - \frac{1}{4\zeta^4} - \frac{4\bar{\zeta}}{80\zeta^5}} \right| = \left| 2 - \bar{\zeta}\frac{F_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta)}{F_{\zeta}(\zeta)} \right|.$$

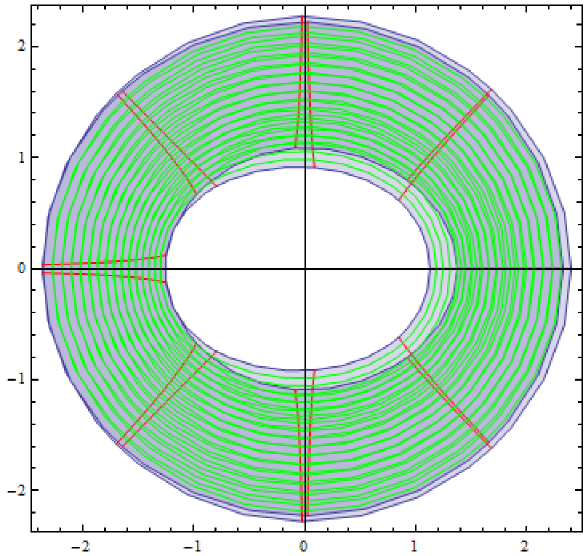

Рисунок 4.2.2: График функции $\zeta^2 + \frac{1}{8\zeta^2} + \frac{1}{8\bar{\zeta}^2} + \frac{1}{9\bar{\zeta}^3} + \frac{\bar{\zeta}}{80\zeta^4}$.

В следующей теореме рассматривается семейство бигармонических однолистных отображений внешности единичного круга (см. также [189]).

Теорема 4.2.4. *Предположим, что* $F(\zeta) = H(\zeta) + \overline{G(\zeta)} + |\zeta|^2 \left(H_1(\zeta) + \overline{G_1(\zeta)} \right)$, *где* H *и* G *— голоморфные в* $\mathbb{D} \setminus \{\infty\}$ *функции, имеющие полюс в* $\zeta = \infty$, *а функции* H_1 *и* G_1 *— голоморфные в* $\mathbb{D}^-$ *и такие, что*

$$\lim_{\zeta \to \infty} \zeta^3 H_1(\zeta) = const < \infty, \quad \lim_{\zeta \to \infty} \zeta^3 G_1(\zeta) = const < \infty.$$

Кроме того, $|F_{\zeta}(\zeta)| > |F_{\bar{\zeta}}(\zeta)|$. *Тогда, если для любых* $|\zeta| > 1$ *имеет место неравенство*

$$\left|\bar{\zeta} F_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) + \zeta F_{\zeta\zeta}(\zeta)\right| + \left|\zeta F_{\bar{\zeta}\zeta}(\zeta) + \bar{\zeta} F_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}(\zeta)\right| \leq \frac{|F_{\zeta}(\zeta)| - |F_{\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|\zeta|^2 - 1},$$

то F *однолистна в* $\mathbb{D}^-$.

Доказательство. Пусть отображение $\widehat{F} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ задано условием

$$\widehat{F}(\zeta) = \begin{cases} F(\zeta), & |\zeta| \geq r, \\ F\left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}}\right) + \left(\zeta - \frac{r^2}{\bar{\zeta}}\right) F_{\zeta}\left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}}\right) + \left(\bar{\zeta} - \frac{r^2}{\zeta}\right) F_{\bar{\zeta}}\left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}}\right), & |\zeta| \leq r, \end{cases}$$

где $r \in (1, \infty)$,

$$F_{\zeta}\left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}}\right) = H'\left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}}\right) + \frac{r^2}{\zeta}\left(H_1\left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}}\right) + \overline{G_1\left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}}\right)}\right) + \frac{r^4}{\zeta\bar{\zeta}} H_1'\left(\frac{r^2}{\bar{\zeta}}\right),$$

$$F_{\overline{\zeta}}\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)=\overline{G'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}+\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\left(H_1\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+\overline{G_1\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}\right)+\frac{r^4}{\zeta\overline{\zeta}}\overline{G_1'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}.$$

Очевидно, функция $\widehat{F}$ является непрерывной и $\widehat{F}(\zeta)\to\infty$ при $\zeta\to\infty$. Так как

$$|F_\zeta\left(z\right)|-|F_{\overline{\zeta}}\left(z\right)|>0\quad\forall\zeta\in\mathbb{D}^-,$$

то $\widehat{F}$ не меняет ориентацию и локально однолистна в $|\zeta|\ge r$.

Покажем, что $\widehat{F}$ не меняет ориентацию и локально однолистна также в $|\zeta|\le r$.

Непосредственным вычислением имеем

$$\widehat{F}_\zeta(\zeta)=F_\zeta\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)-\frac{r^2}{\zeta^2}\left(\zeta-\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)\left(H_1\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+\overline{G_1\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}+\frac{r^2}{\zeta}\overline{G_1'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}+\frac{r^2}{\overline{\zeta}}H_1'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)\right)-$$

$$-\left(\overline{\zeta}-\frac{r^2}{\zeta}\right)\frac{r^2}{\zeta^2}\left(\overline{G''\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}+2\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\overline{G_1'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}+\frac{r^4}{\zeta\overline{\zeta}}\overline{G_1''\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}\right)$$

и

$$F_{\overline{\zeta}}(\zeta)=F_{\overline{\zeta}}\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)-\left(\overline{\zeta}-\frac{r^2}{\zeta}\right)\frac{r^2}{\overline{\zeta}^2}\left(H_1\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+\overline{G_1\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}+\frac{r^2}{\overline{\zeta}}H_1'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+\frac{r^2}{\zeta}\overline{G_1'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)}\right)-$$

$$-\left(\zeta-\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)\frac{r^2}{\overline{\zeta}^2}\left(H''\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+2\frac{r^2}{\zeta}H_1'\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)+\frac{r^4}{\zeta\overline{\zeta}}H_1''\left(\frac{r^2}{\overline{\zeta}}\right)\right).$$

Для удобства сделаем замену переменной $z=r^2/\overline{\zeta}$. Очевидно, $|z|\ge r$. Имеем

$$\widehat{F}_\zeta(\zeta)=F_\zeta\left(z\right)-\frac{\overline{z}|z|^2}{r^2}\left(\frac{r^2}{|z|^2}-1\right)\left(H_1\left(z\right)+\overline{G_1\left(z\right)}+\overline{z}\overline{G_1'\left(z\right)}+zH_1'\left(z\right)\right)-$$

$$-\frac{\overline{z}^3}{r^2}\left(\frac{r^2}{|z|^2}-1\right)\left(\overline{G''\left(z\right)}+2z\overline{G_1'\left(z\right)}+|z|^2\overline{G_1''\left(z\right)}\right)=F_z\left(z\right)-\frac{\overline{z}^2}{r^2}\left(\frac{r^2}{|z|^2}-1\right)\left(zF_{\overline{z}z}(z)+\overline{z}F_{\overline{z}\overline{z}}(z)\right)$$

и

$$F_{\overline{\zeta}}(\zeta)=F_{\overline{\zeta}}\left(z\right)-\frac{z|z|^2}{r^2}\left(\frac{r^2}{|z|^2}-1\right)\left(H_1\left(z\right)+\overline{G_1\left(z\right)}+zH_1'\left(z\right)+\overline{z}\overline{G_1'\left(z\right)}\right)-$$

$$-\frac{z^3}{nr^2}\left(\frac{r^2}{|z|^2}-1\right)\left(H''\left(z\right)+2\overline{z}H_1'\left(z\right)+|z|^2H_1''\left(z\right)\right)=F_{\overline{z}}\left(z\right)-\frac{z^2}{r^2}\left(\frac{r^2}{|z|^2}-1\right)\left(\overline{z}F_{z\overline{z}}(z)+zF_{zz}(z)\right).$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\widehat{F}_{\overline{\zeta}}}{\widehat{F}_\zeta}\right|\le\frac{|F_{\overline{z}}\left(z\right)|+\left(|z|^2/r^2-1\right)|(-\overline{z}F_{z\overline{z}}(z)-zF_{zz}(z)|}{|F_z\left(z\right)|-\left(|z|^2/r^2-1\right)|zF_{\overline{z}z}(z)-\overline{z}F_{\overline{z}\overline{z}}(z)|}<$$

$$<\frac{|F_{\overline{z}}\left(z\right)|+\left(|z|^2-1\right)|\overline{z}F_{z\overline{z}}(z)+zF_{zz}(z)|}{|F_z\left(z\right)|-\left(|z|^2-1\right)|zF_{\overline{z}z}(z)+\overline{z}F_{\overline{z}\overline{z}}(z)|}\le 1.$$

Мы использовали, что $|z|^2/r^2\ge 1$ и $1-|z|^2/r^2>1-|z|^2$.

Последнее утверждение эквивалентно неравенству

$$|\overline{z}F_{z\overline{z}}(z)+zF_{zz}(z)|+|zF_{\overline{z}z}(z)+\overline{z}F_{\overline{z}\overline{z}}(z)|\le\frac{1}{|z|^2-1}\left(|F_z\left(z\right)|-|F_{\overline{z}}\left(z\right)|\right).$$

Теорема Адамара утверждает, что каждое локально гомеоморфное отображение евклидовой плоскости отображает эту плоскость гомеоморфно на себя, если всякая последовательность точек, стремящаяся к бесконечности, отображается в аналогичную последовательность. Это доказывает, что F является однолистным бигармоническим отображением. $\square$

Пример 4.2.7. *Предположим, что* $H(\zeta) = \zeta + \frac{1}{20\zeta}$, $G(\zeta) = \frac{\zeta}{4} + \frac{1}{20\zeta}$, $H_1(\zeta) = \frac{1}{40\zeta^3}$ *и* $G_1(\zeta) = 0$. *Тогда следующая бигармоническая функция*

$$F(\zeta) = \zeta + \frac{1}{20\zeta} + \frac{\overline{\zeta}}{4} + \frac{1}{20\overline{\zeta}} + \frac{\overline{\zeta}}{40\zeta^2}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2.4 и F однолистна. Кроме того, этот пример показывает, что классы однолистных бигармонических функций теорем 4.2.3 и 4.2.4 различны.

Проверим это. Непосредственным вычислением имеем

$$\left|\frac{F_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{F_{\zeta}(\zeta)}\right| = \left|\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{20\overline{\zeta}^2} + \frac{1}{40\zeta^2}}{1 - \frac{1}{20\zeta^2} - \frac{\overline{\zeta}}{20\zeta^3}}\right| \leq \frac{23}{36}$$

и

$$\left|\overline{\zeta}F_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta) + \zeta F_{\zeta\zeta}(\zeta)\right| + \left|\zeta F_{\overline{\zeta}\zeta}(\zeta) + \overline{\zeta}F_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}}(\zeta)\right| = \frac{1}{10|\zeta|^2}\left|1 + \frac{\overline{\zeta}}{\zeta}\right| + \frac{1}{10|\zeta|^2}\left|1 - \frac{\overline{\zeta}^2}{2\zeta^2}\right| \leq$$

$$\leq \frac{7}{20}\frac{1}{|\zeta|^2 - 1} \leq \frac{|1 - \frac{1}{20\zeta^2} - \frac{\overline{\zeta}}{20\zeta^3}| - |\frac{1}{4} - \frac{1}{20\overline{\zeta}^2} + \frac{1}{40\zeta^2}|}{|\zeta|^2 - 1} = \frac{|F_{\zeta}(\zeta)| - |F_{\overline{\zeta}}(\zeta)|}{|\zeta|^2 - 1}.$$

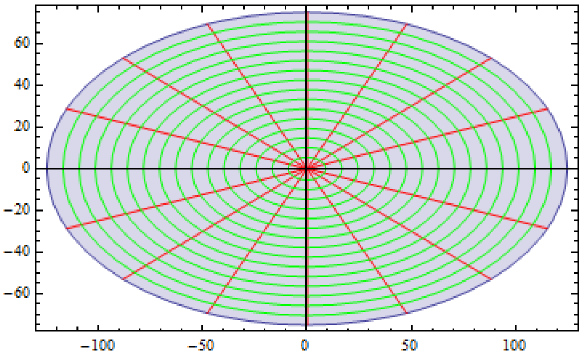

Рисунок 4.2.3: График функции $\zeta + \frac{1}{20\zeta} + \frac{\overline{\zeta}}{4} + \frac{1}{20\overline{\zeta}} + \frac{\overline{\zeta}}{40\zeta^2}$.

§4.3 Неравенства Реллиха

В этом параграфе мы рассмотрим пространственные неравенства типа Реллиха с дополнительными слагаемыми. В отличие от неравенства типа Харди, неравенства Реллиха (см. [6]) связывают в интегральном соотношении функцию и её лапласиан.

Будут рассмотрены приложения полученных ранее соответствующих одномерных неравенств Харди. Мы получим неравенства в терминах расстояния в среднем, неравенства в регулярных областях, в областях, удовлетворяющих условие конуса, и выпуклых областях.

4.3.1 Неравенства в произвольных областях

Пусть Ω — открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть через $C_0^1(\Omega)$ обозначено семейство непрерывно дифференцируемых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактным носителем, лежащим в области Ω. Как и в предыдущих главах, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ — элемент площади поверхности единичной сферы и $d\omega(\nu) = \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{|\mathbb{S}^{n-1}|}$ — нормированная мера на единичной сфере. Для любой точки $x \in \Omega$, $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ полагаем

$$\tau_\nu(x) := \min\{s > 0 : x + s\nu \notin \Omega\}$$

— расстояние от точки x до границы области Ω по направлению вектора ν,

$$\delta(x) = \inf_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \tau_\nu(x),$$

— расстояние от точки x до границы области Ω,

$$\rho_\nu(x) := \min\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\}, \quad \mu_\nu(x) := \max\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\},$$

$$D_\nu(x) := \tau_\nu(x) + \tau_{-\nu}(x), \quad D(\Omega) = \sup_{x \in \Omega, \nu \in \mathbb{S}^{n-1}} D_\nu(x),$$

и расстояние в среднем

$$\delta_M^{-2} = n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_\nu^{-2}(x) d\omega(\nu).$$

Через $|\Omega|$ обозначим объём области Ω и через Ω_x — элементы множества Ω, которые “видны” из точки x. Напомним, что постоянная

$$K(n) = n \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right]^{2/n}.$$

Предположим также, что $s > 0$, $q > 0$, $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$ и $\lambda_\nu(2s/q)$ — постоянная Лэмба,

$$B(n, s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}, \quad c(s) := \frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} \quad \text{и} \quad \mu(s) := \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{4}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3.1. *Пусть Ω — открытое собственное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим также, что $s > 0$, $q > 0$ и $\nu \in [0, s/q]$. Если $s \geq 1$ и $s + 3 \geq q$, то для* *любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{n(n+2)} \int\limits_{\Omega} \left[|\Delta u(x)|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j} \right|^2 \right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Если $s \geq 1$ и $s+3 \leq q$, то для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$ имеем

$$\frac{1}{n(n+2)} \int\limits_{\Omega} \left[|\Delta u(x)|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j} \right|^2 \right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Если $0 < s \leq 1$ и $s+3 \geq q$, то для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{3}{n(n+2)} \frac{2^{s-1}}{D^{s-1}(\Omega)} \int\limits_{\Omega} |\Delta u(x)|^2 dx \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Если $0 < s \leq 1$ и $s+3 \leq q$, то для для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\frac{3 \cdot 2^{s-1}}{n(n+2)D^{s-1}(\Omega)} \int\limits_{\Omega} |\Delta u(x)|^2 dx \geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Доказательство. Используя теорему 2.1.1 при $p = 2$, для любой функции $y \in C_0^1(a,b)$ получим следующее неравенство

$$\int\limits_a^b \frac{|y'(t)|^2}{\rho(t)^{s-1}} dt \geq c(s) \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^2}{\rho(t)^{s+1}} dt + \frac{\mu(s)}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|y(t)|^2}{\rho(t)^{s-q+1}} dt. \tag{4.3.1}$$

Последнее неравенство впервые доказано Ф.Г. Авхадиевым и К.-Й. Виртсом в статье [59]. Применяя неравенство (4.3.1) для функции y, определенной следующим образом: $y(t) = u'(t)$, где $u \in C_0^2[a,b]$, мы получим

$$\int\limits_a^b \frac{|u''(t)|^2}{\rho(t)^{s-1}} dt \geq c(s) \int\limits_a^b \frac{|u'(t)|^2}{\rho(t)^{s+1}} dt.$$

Таким образом, опять применяя неравенство (4.3.1), имеем

$$\int\limits_a^b \frac{|u''(t)|^2}{\rho(t)^{s-1}} dt \geq c(s) \left(c(s+2) \int\limits_a^b \frac{|u(t)|^2}{\rho(t)^{s+3}} dt + \frac{\mu(s+2)}{\delta_0^q} \int\limits_a^b \frac{|u(t)|^2}{\rho(t)^{s-q+3}} dt \right)$$

для любой $u \in C_0^2(a,b)$.

Следовательно,

$$\int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{|\partial_\nu^2 u(t)|^2}{\rho_\nu(t)^{s-1}} dt \geq c(s) \left(c(s+2) \int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{|u(t)|^2}{\rho_\nu(t)^{s+3}} dt + \frac{\mu(s+2)}{\delta_0^q} \int\limits_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{|u(t)|^2}{\rho_\nu(t)^{s-q+3}} dt \right),$$

где через $\partial_\nu^2 u$, $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ обозначена вторая производная функции u по направлению ν, (a_ν, b_ν) — интервал, образующийся пересечением Ω с лучом в направлении ν и $\delta_0 = \frac{b_\nu - a_\nu}{2}$.

Интегрируя обе стороны этого неравенства по единичной поверхностной мера $d\omega(\nu)$ на $\mathbb{S}^{n-1}$, мы получим

$$\int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\partial_\nu^2 u(x)|^2}{\rho_\nu(x)^{s-1}} d\omega(\nu) dx \geq c(s) \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{c(s+2)}{\rho_\nu(x)^{s+3}} + \left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^q \frac{\mu(s+2)}{\rho_\nu(x)^{s-q+3}} d\omega(\nu) |u(x)|^2 dx. \quad (4.3.2)$$

Рассмотрим четыре случая.

Случай 1. $s \geq 1$ и $s+3 \geq q$. Очевидно, что для любого $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-1}} \leq \frac{1}{\delta(x)^{s-1}}, \qquad \frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-q+3}} \geq \frac{2^{s-q+3}}{D(\Omega)^{s-q+3}}. \quad (4.3.3)$$

Как мы уже упоминали, в своей работе [165] Дж. Тидблом показал, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^q d\omega(\nu) \geq \left(\frac{n|\Omega_x|}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\right)^{-\frac{q}{n}}. \quad (4.3.4)$$

Объединяя (4.3.2), (4.3.3) и (4.3.4), мы получим

$$\int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} |\partial_\nu^2 u(x)|^2 d\omega(\nu) \frac{dx}{\delta(x)^{s-1}} \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2) 2^{s-q+3}}{D(\Omega)^{s-q+3}} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Случай 2. $s \geq 1$ и $s+3 < q$. Ясно, что при любом $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ справедливы оценки

$$\frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-1}} \leq \frac{1}{\delta(x)^{s-1}}, \qquad \frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-q+3}} \geq \frac{1}{\delta(x)^{s-q+3}}.$$

По аналогии со случаем 1, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} |\partial_\nu^2 u(x)|^2 d\omega(\nu) \frac{dx}{\delta(x)^{s-1}} \geq c(s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \left(c(s+2)\rho(x, s+3) + \frac{\mu(s+2)}{\delta(x)^{s-q+3}} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Случай 3. $0 < s < 1$ и $s+3 \geq q$. Очевидно, что при любом $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-1}} \leq \frac{2^{s-1}}{D(\Omega)^{s-1}}, \quad \frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-q+3}} \geq \frac{2^{s-q+3}}{D(\Omega)^{s-q+3}}.$$

Следовательно,
$$\frac{2^{s-1}}{D(\Omega)^{s-1}}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}|\partial_\nu^2 u(x)|^2 d\omega(\nu)dx \geq$$
$$\geq c(s)\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\left(c(s+2)\rho(x,s+3)+\frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D(\Omega)^{s-q+3}}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$

Случай 4. $0 < s < 1$ и $s+3 < q$. Ясно, что при любом $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ имеем
$$\frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-1}} \leq \frac{2^{s-1}}{D(\Omega)^{s-1}}, \quad \frac{1}{\rho_\nu(x)^{s-q+3}} \geq \frac{1}{\delta(x)^{s-q+3}}.$$

Следовательно,
$$\frac{2^{s-1}}{D(\Omega)^{s-1}}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}|\partial_\nu^2 u(x)|^2 d\omega(\nu)dx \geq$$
$$\geq c(s)\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\left(c(s+2)\rho(x,s+3)+\frac{\mu(s+2)}{\delta(x)^{s-q+3}}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$

В статье [98] В.Д. Эванс и Р.Т. Льюис доказали, что если Ω является подмножеством $\mathbb{R}^n$, то для любого $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство
$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}|\partial_\nu^2 u(x)|^2 d\omega(\nu) = \frac{1}{n(n+2)}\left[|\Delta u(x)|^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j}\right|^2\right],$$

и для каждого $u \in C_0^2(\Omega)$
$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}|\partial_\nu^2 u(x)|^2 d\omega(\nu)dx = \frac{3}{n(n+2)}\int\limits_{\Omega}|\Delta u(x)|^2 dx.$$

Это завершает доказательство теоремы 4.2.1. □

4.3.2 Случай областей, регулярных в смысле Дэвиса

Так как функция $f(t) = t^{s/2}$ является выпуклой при $s \geq 2$ и $t > 0$, то используя неравенство Йенсена, получим
$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{1}{\rho_\nu(x)^s}d\omega(\nu) \geq \left(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{1}{\rho_\nu(x)^2}d\omega(\nu)\right)^{s/2}.$$

Следовательно, в случае регулярных областей
$$\frac{1}{\rho(x,s)^s} := \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu(x)^s} \geq \frac{1}{m(\Omega)^s\delta(x)^s}.$$

Как следствие теоремы 4.2.1 имеем

Теорема 4.3.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является областью регулярной в смысле Дэвиса и пусть $m(\Omega)$ — константа регулярности области Ω. Предположим также, что $s \geq 2$, $q > 0$ и $\nu \in [0, s/q]$. Если $s + 3 \geq q$, то для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$*

$$\frac{1}{n(n+2)} \int\limits_\Omega \left[|\Delta u(x)|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j} \right|^2 \right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_\Omega |u(x)|^2 \left(\frac{c(s+2)}{m(\Omega)^{s+3} \delta^{s+3}(x)} + \frac{\mu(s+2) 2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Если $s + 3 \leq q$, то для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$

$$\frac{1}{n(n+2)} \int\limits_\Omega \left[|\Delta u(x)|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j} \right|^2 \right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_\Omega |u(x)|^2 \left(\frac{c(s+2)}{m^{s+3}(\Omega) \delta^{s+3}(x)} + \frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|} \right)^{\frac{q}{n}} \right) dx.$$

Пример 4.3.1. *Пусть Ω_0 — концентрический круг с радиусами R_1 и R_2, где $R_2 \geq R_1/5$. В [43] показано, что $m(\Omega_0) = 2\sqrt{12}$. Следовательно, если $s \geq 2$ и $s + 3 \leq q$, то для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$*

$$\frac{1}{8} \int\limits_\Omega \left[|\Delta u(x)|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j} \right|^2 \right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_\Omega |u(x)|^2 \left(\frac{c(s+2)}{48^{(s+3)/2} \delta^{s+3}(x)} + \frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)} \left(\frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \right)^{\frac{q}{2}} \right) dx.$$

Пример 4.3.2. *Пусть Ω_1 — шар радиуса R с удаленным сферическим центром. Рассмотрим конус соответствующий удаленному. Через α обозначим угол конуса, т.е. угол между краем конуса и направлением на середину конуса, если смотреть из центра сферы. В [43] показано, что*

$$m(\Omega_1) = \frac{2\sqrt{7}}{\sin \frac{\alpha}{4}}.$$

Следовательно, если $s \geq 2$ и $s + 3 \leq q$, то для каждой функции $u \in C_0^2(\Omega)$

$$\frac{1}{15} \int\limits_\Omega \left[|\Delta u(x)|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j} \right|^2 \right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \geq$$

$$\geq c(s) \int\limits_\Omega |u(x)|^2 \left(\left(\frac{\sin \frac{\alpha}{4}}{2\sqrt{7}} \right)^{s+3} \frac{c(s+2)}{\delta^{s+3}(x)} + \frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)} \left(\frac{1}{R^3 \cos^2 \frac{\alpha}{4}} \right)^{\frac{q}{3}} \right) dx.$$

Выше мы воспользовались тем, что $|\mathbb{S}^2| = 4\pi$ и $|\Omega_1| = \frac{4}{3}\pi R^3 \cos \frac{\alpha}{4}$.

4.3.3 Области, удовлетворяющие условию θ-конуса

Если Ω удовлетворяет условию θ-конуса, то

$$\delta_M(x) \le 2\delta(x) \left[\frac{1}{ns(\frac{1}{2}\sin\theta)}\right]^{1/2},$$

где $s(\alpha) = \int\limits_0^{\arcsin\alpha} \sin^{n-2} t dt / \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2} t dt.$

Используя последние оценки и теорему 4.2.1, получаем следующую теорему.

Теорема 4.3.3. *Пусть Ω — подобласть $\mathbb{R}^n$ и граница $\partial\Omega$ удовлетворяет условия θ-конуса. Пусть также $s > 0$, $q > 0$ и $\nu \in [0, s/q]$. Если $s \ge 1$ и $s + 3 \ge q$,то для каждого $u \in C_0^2(\Omega)$*

$$\frac{1}{n(n+2)} \int\limits_\Omega \left[|\Delta u(x)|^2 + 2\sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j}\right|^2\right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \ge$$

$$\ge c(s) \int\limits_\Omega |u(x)|^2 \left(c(s+2)\frac{h\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^{s+3}\delta^{s+3}(x)} + \frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right) dx.$$

Если $s \ge 1$ и $s + 3 \le q$, то для каждого $u \in C_0^2(\Omega)$

$$\frac{1}{n(n+2)} \int\limits_\Omega \left[|\Delta u(x)|^2 + 2\sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j}\right|^2\right] \frac{dx}{\delta^{s-1}(x)} \ge$$

$$\ge c(s) \int\limits_\Omega |u(x)|^2 \left(c(s+2)\frac{h\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^{s+3}\delta^{s+3}(x)} + \frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right) dx.$$

Если $0 < s \le 1$ и $s + 3 \ge q$, то для каждой функции $u \in C_0^2(\Omega)$

$$\frac{3}{n(n+2)} \frac{2^{s-1}}{D^{s-1}(\Omega)} \int\limits_\Omega |\Delta u(x)|^2 dx \ge$$

$$\ge c(s) \int\limits_\Omega |u(x)|^2 \left(c(s+2)\frac{h\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^{s+3}\delta^{s+3}(x)} + \frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right) dx.$$

Если $0 < s \le 1$ и $s + 3 \le q$, то для каждой функции $u \in C_0^2(\Omega)$

$$\frac{3}{n(n+2)} \frac{2^{s-1}}{D^{s-1}(\Omega)} \int\limits_\Omega |\Delta u(x)|^2 dx \ge$$

$$\ge c(s) \int\limits_\Omega |u(x)|^2 \left(c(s+2)\frac{h\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^{s+3}\delta^{s+3}(x)} + \frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega_x|}\right)^{\frac{q}{n}}\right) dx.$$

4.3.4 Случай выпуклых областей

Пусть Ω — выпуклая область евклидова пространства. В этом случае

$$\rho(x;s)^{-s} := \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu(x)^s} \ge \frac{B(n,s)}{\delta(x)^s},$$

где
$$B(n,s)=\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}.$$
Напомним, что
$$c(s):=\frac{s^2-\nu^2q^2}{4}\qquad \text{и}\qquad \mu(s):=\frac{q^2\lambda_\nu^2(2s/q)}{4}.$$
Более того, для случая выпуклых областей $|\Omega_x|=|\Omega|$. Принимая во внимание теорему 4.2.1, получаем следующую теорему.

Теорема 4.3.4. *Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$. Пусть также $s>0$, $q>0$ и $\nu\in[0,s/q]$. Если $s\geq 1$ и $s+3\geq q$, то для каждой функции $u\in C_0^2(\Omega)$*
$$\frac{1}{n(n+2)}\int\limits_\Omega\left[|\Delta u(x)|^2+2\sum_{i,j=1}^n\left|\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i\partial y_j}\right|^2\right]\frac{dx}{\delta^{s-1}(x)}\geq$$
$$\geq c(s)\int\limits_\Omega|u(x)|^2\left(c(s+2)\frac{B(n,s+3)}{\delta^{s+3}(x)}+\frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$
Если $s\geq 1$ и $s+3<q$, то для любого $u\in C_0^2(\Omega)$
$$\frac{1}{n(n+2)}\int\limits_\Omega\left[|\Delta u(x)|^2+2\sum_{i,j=1}^n\left|\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i\partial y_j}\right|^2\right]\frac{dx}{\delta^{s-1}(x)}\geq$$
$$\geq c(s)\int\limits_\Omega|u(x)|^2\left(c(s+2)\frac{B(n,s+3)}{\delta(x)^{s+3}}+\frac{\mu(s+2)}{\delta^{s-q+3}(x)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$
Если $0<s<1$ и $s+3\geq q$, то для каждого $u\in C_0^2(\Omega)$
$$\frac{1}{n(n+2)}\frac{2^{s-1}}{D^{s-1}(\Omega)}\int\limits_\Omega|\Delta u(x)|^2dx\geq$$
$$\geq c(s)\int\limits_\Omega|u(x)|^2\left(c(s+2)\frac{B(n,s+3)}{\delta^{s+3}(x)}+\frac{\mu(s+2)2^{s-q+3}}{D^{s-q+3}(\Omega)}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$
Если $0<s<1$ и $s+3<q$, то для каждой функции $u\in C_0^2(\Omega)$
$$\frac{1}{n(n+2)}\frac{2^{s-1}}{D^{s-1}(\Omega)}\int\limits_\Omega|\Delta u(x)|^2dx\geq$$
$$\geq c(s)\int\limits_\Omega|u(x)|^2\left(c(s+2)\frac{B(n,s+3)}{\delta^{s+3}(x)}+\frac{\mu(s+2)}{\delta(x)^{s-q+3}}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\right)dx.$$

Следствие 4.3.1. *Пусть Ω выпуклая область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждой функции $u\in C_0^2(\Omega)$, имеет место неравенство*
$$\int\limits_\Omega|\Delta u(x)|^2dx\geq\frac{9}{16}\int\limits_\Omega\frac{|u(x)|^2}{\delta^4(x)}dx+Kn(n+2)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{4}{n}}\int\limits_\Omega|u(x)|^2dx,$$
где $K=\frac{\lambda_0^2(3/2)}{3}\approx 0.417322$.

§4.4 Оценки первого собственного значения p-лапласиана при граничном условии Дирихле

Как мы уже говорили во введении, задача добавления дополнительного слагаемого в (0.0.20) связана с классическими оценками первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ для лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_1(\Omega)\int\limits_{\Omega}|g(x)|^2dx \le \int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^2dx \quad \forall g\in C_0^1(\Omega).$$

По аналогии с L_2-случаем задача добавления дополнительного слагаемого в L_p-неравенствах связана с оценками первого собственного числа $\lambda_p(\Omega)$ для p-лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_p(\Omega)\int\limits_{\Omega}|g(x)|^pdx \le \int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^pdx \quad \forall g\in C_0^1(\Omega).$$

Т.е. $\lambda_p(\Omega)$ совпадает с наименьшим $\lambda\in\mathbb{R}$, таким что краевая задача

$$-\Delta_p u=\lambda|u|^{p-2}u \quad \text{в } \Omega, \quad u=0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

имеет нетривиальное решение из соответствующего класса функций. Здесь

$$\Delta_p u=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Заметим, что p-лапласиан при $p=2$ совпадает с обычным оператором Лапласа.

Поэтому в виде следствия наших полученных результатов из третий главы, мы можем получить оценки первого собственного значения p-лапласиана для задачи Дирихле в различных классах областей. Обратим внимание, что мы получаем оценки в терминах диаметра, объёма и (или) внутреннего радиуса.

4.4.1 Оценки в произвольных областях

Пусть Ω — произвольная ограниченная область евклидова пространства. В этом случае из теоремы 3.1.2 при $\nu\in(0,1]$ для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ получим неравенства

$$n\frac{9-9\nu^2+6{j'_\nu}^2}{4D^2(\Omega)}\int\limits_{\Omega}g^2(x)dx \le \int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^2dx,$$

$$n\frac{7C_0^2(1)}{4D^2(\Omega)}\int\limits_{\Omega}g^2(x)dx \le \int\limits_{\Omega}|\nabla g(x)|^2dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1)\approx 1.25578$.

Поэтому для первого собственного числа Лапласиана при граничных условиях Дирихле при $\nu \in (0,1]$ имеем

$$\lambda_1(\Omega) \geq n\frac{9 - 9\nu^2 + 6j'^2_\nu}{4D^2(\Omega)},$$

и аналог при $\nu = 0$

$$\lambda_1(\Omega) \geq n\frac{7C_0^2(1)}{4D^2(\Omega)}.$$

4.4.2 Случай областей, регулярных по Дэвису

Пусть Ω является регулярной по Дэвису. Напомним, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ регулярная, если существует константа $m(\Omega) > 0$ такая, что

$$\frac{\delta(x)}{\sqrt{2n}} \leq \delta_M(x) \leq \frac{m(\Omega)}{\sqrt{2n}}\delta(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Постоянную $m(\Omega)$ называем константой регулярности области Ω.

Из теоремы 3.1.3 в виде следствия при $\nu \in (0,1]$ для любой функции $g \in C_0^1(\Omega)$ получим неравенства

$$\frac{(1-\nu^2)n}{2m^2(\Omega)\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_\Omega g^2(x)dx + K(n)\frac{5 - 5\nu^2 + 4j'^2_\nu}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}}\int\limits_\Omega g^2(x)dx \leq \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx,$$

$$\frac{n}{2m^2(\Omega)\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_\Omega g^2(x)dx + \frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}\int\limits_\Omega g^2(x)dx \leq \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$. Поэтому для первого собственного числа Лапласиана при граничных условиях Дирихле при $\nu \in (0,1]$ имеем

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{(1-\nu^2)n}{2m^2(\Omega)\delta_0^2(\Omega)} + K(n)\frac{5 - 5\nu^2 + 4j'^2_\nu}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}},$$

и аналог при $\nu = 0$

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{n}{2m^2(\Omega)\delta_0^2(\Omega)} + \frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}.$$

Из теоремы 3.2.4 при $s = p = q$ и $p \geq 2$ для всех $f \in C_0^1(\Omega)$ получим

$$\frac{B(n,p)}{c_p}\int\limits_\Omega |\nabla f(x)|^p dx \geq \frac{2n}{m(\Omega)^p\delta_0(\Omega)^p}\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx + \mu_s\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx,$$

где

$$B(n,p) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}, \quad c_p = \frac{((p-1)^2 - \nu^2p^2)^{p/2}}{p^p} \quad \text{и} \quad \mu_p = \frac{p}{2}\frac{q^2\lambda_\nu^2(2(p-1)/p)}{(p-1)^2 - \nu^2p^2}.$$

Следовательно,

$$\lambda_p(\Omega) \geq \frac{c_p}{B(n,p)}\left(\frac{2n}{m(\Omega)^p\delta_0(\Omega)^p} + \mu_p\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\right),$$

где $\lambda_\nu^2(2(p-1)/q)$ — соответствующая константа Лэмба.

Аналогично, можно получить, что при $p>q$ имеет место оценка

$$\lambda_p(\Omega) \geq \frac{c_p}{B(n,p)}\left(\frac{2n}{m(\Omega)^p \delta_0^p(\Omega)} + \frac{2^{p-q}\mu_p}{D(\Omega)^{p-q}}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{q}{n}}\right).$$

Приведем две оценки p-лапласиана для областей регулярных в смысле Дэвиса. Отметим, что регулярность этих областей была обоснована в статье А.М. Тухватуллиной [43].

Пример 4.4.1. *Пусть Ω_0 — концентрические окружности с радиусами R_1 и R_2, когда $R_2 \geq R_1/5$. Следовательно, для всех $f \in C_0^1(\Omega_0)$ имеет место следующее неравенство типа Пуанкаре*

$$\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f(x)|^p dx \geq \frac{c_p}{B(2,p)}\left(\frac{2^{p+2}}{48^{p/2}(R_2-R_1)^p}\int\limits_{\Omega_0}|f(x)|^p dx + \mu_p\left(\frac{1}{R_1^2-R_2^2}\right)^{\frac{p}{2}}\int\limits_{\Omega_0}|f(x)|^p dx\right).$$

Таким образом,

$$\lambda_p(\Omega) \geq \frac{c_p}{B(2,p)}\left(\frac{2^{p+2}}{48^{p/2}(R_2-R_1)^p} + \mu_p\left(\frac{1}{R_1^2-R_2^2}\right)^{\frac{p}{2}}\right).$$

Пример 4.4.2. *Пусть Ω_1 — шар с удаленным сферическим сектором. Пусть R — радиус шара. Рассмотрим конус, соответствующий удаленному сферическому сектору. Через α обозначим плоский угол между образующими конуса, который получается при рассмотрении центрального сечения конуса, $0<\alpha<\pi$. Следовательно, для любой функции $f \in C_0^1(\Omega_1)$ имеет место неравенство Пуанкаре*

$$\int\limits_{\Omega_1} |\nabla f(x)|^p dx \geq \frac{c_p}{B(3,p)}\left(8\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{2\sqrt{7}\ \delta_0(\Omega)}\right)^p\int\limits_{\Omega_1}|f(x)|^p dx + \mu_p\left(\frac{1}{R^3\cos^2\frac{\alpha}{4}}\right)^{\frac{p}{3}}\int\limits_{\Omega_1}|f(x)|^p dx\right).$$

Таким образом,

$$\lambda_p(\Omega) \geq \frac{c_p}{B(3,p)}\left(8\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{2\sqrt{7}\ \delta_0(\Omega_1)}\right)^p + \mu_p\left(\frac{1}{R^3\cos^2\frac{\alpha}{4}}\right)^{\frac{p}{3}}\right).$$

4.4.3 Области, удовлетворяющие условию конуса

Пусть $\nu \in (0,1]$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условию внешнего θ-конуса.* Мы будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условию внешнего θ-конуса*, если каждая точка $x \in \Omega$ является вершиной кругового конуса C_x с углом 2θ, лежащего полностью в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Напомним, что

$$s(\alpha) = \int\limits_0^{\arcsin\alpha} \sin^{n-2} t dt \Big/ \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2} t dt.$$

В виде следствия теоремы 3.1.4 получим неравенства

$$(1-\nu^2)\frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)n}{16\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_{\Omega} g^2(x)dx + K(n)\frac{5-5\nu^2+4{j'}_\nu^2}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}}\int\limits_{\Omega} g^2(x)dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx,$$

$$\frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)n}{16\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_{\Omega} g^2(x)dx + \frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}\int\limits_{\Omega} g^2(x)dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$. Поэтому для первого собственного числа лапласиана при граничных условиях Дирихле при $\nu \in (0,1]$ имеем

$$\lambda_1(\Omega) \geq (1-\nu^2)\frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)n}{16\delta_0^2(\Omega)} + K(n)\frac{5-5\nu^2+4{j'}_\nu^2}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}},$$

а при $\nu = 0$

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{s\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)n}{16\delta_0^2(\Omega)} + \frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}.$$

Используя теорему 3.2.5 можем получить оценки также для первого собственного значения $\lambda_p(\Omega)$ при $p \geq 2$. А именно,

$$\lambda_p(\Omega) \geq \frac{c_p}{B(n,p)}\left(\frac{p\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)}{2^p} + \mu_p\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\right).$$

4.4.4 Области, λ-близкие к выпуклым

Пусть $\nu \in (0,1]$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является λ-близкой к выпуклой. Мы говорим, что область Ω является λ-близкой к выпуклой, если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ и для любой граничной точки $y \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ существует такая точка $a_y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, что $|y - a_y| = \lambda$ и

$$B_y = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a_y| < \lambda\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega},$$

т.е. точку y можно коснуться шаром, лежащим вне области Ω.

Напомним, также что

$$v(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \sin^{n-2}\theta\cos^2\theta d\theta \Big/ \int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\theta\cos^2\theta d\theta.$$

В виде следствия теорем 3.1.5 и 3.2.6, в которых доказаны неравенства типа Харди, получим неравенства типа Пуанкаре, с константами, зависящими от внутреннего радиуса и объёма, вида

$$v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)\frac{1-\nu^2}{4\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_{\Omega} g^2(x)dx + K(n)\frac{5-5\nu^2+4{j'}_\nu^2}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}}\int\limits_{\Omega} g^2(x)dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx,$$

$$\frac{v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)}{4\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_\Omega g^2(x)dx+\frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}\int\limits_\Omega g^2(x)dx\leq\int\limits_\Omega|\nabla g(x)|^2dx,$$

и неравенства типа Пуанкаре, с константами, уже зависящими от внутреннего радиуса и диаметра,

$$v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)\frac{1-\nu^2}{4\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_\Omega g^2(x)dx+n\frac{9-9\nu^2+6{j'}_\nu^2}{4D^2(\Omega)}\int\limits_\Omega g^2(x)dx\leq\int\limits_\Omega|\nabla g(x)|^2dx,$$

$$\frac{v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)}{4\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_\Omega g^2(x)dx+n\frac{7C_0^2(1)}{4D^2(\Omega)}\int\limits_\Omega g^2(x)dx\leq\int\limits_\Omega|\nabla g(x)|^2dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1)\approx 1.25578$.

Таким образом, в случае областей, λ-близких к выпуклым, имеем оценки первого собственного числа лапласиана в терминах внутреннего радиуса и объёма:

$$\lambda_1(\Omega)\geq v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)\frac{1-\nu^2}{4\delta_0^2(\Omega)}+K(n)\frac{5-5\nu^2+4{j'}_\nu^2}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}},$$

$$\lambda_1(\Omega)\geq\frac{v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)}{4\delta_0^2(\Omega)}+\frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}$$

и в терминах внутреннего радиуса и диаметра

$$\lambda_1(\Omega)\geq v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)\frac{1-\nu^2}{4\delta_0^2(\Omega)}+n\frac{9-9\nu^2+6{j'}_\nu^2}{4D^2(\Omega)},$$

$$\lambda_1(\Omega)\geq\frac{v\left(\arcsin\frac{\lambda}{\lambda+\delta_0(\Omega)}\right)}{4\delta_0^2(\Omega)}+n\frac{7C_0^2(1)}{4D^2(\Omega)}.$$

4.4.5 Случай выпуклых областей

Пусть $\nu\in(0,1]$ и Ω — открытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с конечным объёмом. Тогда в виде следствия теоремы 3.1.7 для любой функции $g\in C_0^1(\Omega)$ получим неравенства

$$\frac{1-\nu^2}{4\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_\Omega g^2(x)dx+K(n)\frac{5-5\nu^2+4{j'}_\nu^2}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}}\int\limits_\Omega g^2(x)dx\leq\int\limits_\Omega|\nabla g(x)|^2dx,$$

$$\frac{1}{4\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_\Omega g^2(x)dx+\frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}}\int\limits_\Omega g^2(x)dx\leq\int\limits_\Omega|\nabla g(x)|^2dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1)\approx 1.25578$. Поэтому в выпуклых областях Ω с фиксированным объёмом

$$\lambda_1(\Omega)\geq\frac{1-\nu^2}{4\delta_0^2(\Omega)}+K(n)\frac{5-5\nu^2+4{j'}_\nu^2}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}},\quad\lambda_1(\Omega)\geq\frac{1}{4\delta_0^2(\Omega)}+\frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}},$$

где $j'_1 \approx 1.84118$ — первый положительный корень производной $J_1{}'$ функции Бесселя J_1.

Используя определение $\lambda_p(\Omega)$ и следствие 3.2.2, получим, что в выпуклых областях Ω с фиксированным объёмом при $p \in (2,3]$, имеет место оценка

$$\lambda_p(\Omega) \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \left(\frac{1}{\delta_0^p(\Omega)} + \frac{7p\lambda_1^2}{8(p-1)^2 B(n,p)} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}}\right),$$

где λ_1 — первый положительный корень уравнения типа Лэмба

$$(p-1)J_0(\lambda_1) - 2\lambda_1 J_1(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 \in (0, j_0).$$

Аналогичные результаты справедливы при $p > 3$.

Из теоремы 3.2.9 следует, что в выпуклых областях Ω с фиксированным диаметром

$$\lambda_p(\Omega) \geq \frac{7p\lambda_1^2}{2(p-1)^2 D^p(\Omega) B(n,p)},$$

где $\lambda_1 \approx 1.25578$.

В параграфе §3.2 мы доказали следствие 3.2.1, из которой мы немедленно получим оценку первого собственного числа p-лапласиана в терминах внутреннего радиуса и диаметра.

$$\lambda_p(\Omega) \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \left(\frac{1}{\delta_0^p(\Omega)} + \frac{7p\lambda_1^2}{2(p-1)^2\, B(n,p)\, D^p(\Omega)}\right).$$

Там же мы обосновали, что константа в неравенстве лучше константы Тидблума при $p \geq 2$ даже без члена с внутренним радиусом.

Заключение

В диссертационной работе получены одномерные и пространственные неравенства типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, например, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области, а также рассмотрены их применения в теории достаточных условий однолистности, при оценке первого собственного числа p-лапласиана при граничных условиях Дирихле и при обосновании неравенств типа Реллиха. Все намеченные цели достигнуты и все поставленные задачи решены.

Естественное в теории интегральных неравенств направление исследований связано с получением L_1- и L_p- неравенств в одномерном и пространственном случае, различными обобщениями и усилениями весовых функций, поиском других неравенств, для которых возможен эффект Брезиса-Маркуса, распространением неравенств на другие классы областей отличных от выпуклых, установлением неравенств-“мостиков”, связывающих различные классы вариационных задач, получением неравенств с весами, зависящими от гиперболического радиуса, и с исследованием возможных приложений.

Получены новые L_1-, L_2- и L_p- усиленные дополнительными слагаемыми неравенства типа Харди, весовые функции которых имеют степенные особенности, содержат тригонометрические функции, функцию Бесселя; отдельно выделим неравенства для веса Якоби. Дополнительными слагаемыми усилены уже известные, а также новые неравенства, полученные в данной диссертационной работе. Дополнительные слагаемые удалось добавить за счет недостижимости и точности соответствующих констант либо за счет их ослабления. Поэтому важной составной частью исследований было изучение случаев, когда появляется возможность усиления соответствующих неравенства за счет дополнительных слагаемых.

Исследована взаимосвязь одномерных неравенств, приводящих к различным классам вариационных задач таких, как многомерные неравенства Харди в терминах функции расстояния до границы области с фиксированным объёмом, диаметром или внутренним радиусом, а также приводящих к конформно инвариантным неравенствам, с весами зависящими от конформного радиуса. Тем самым, построена единая теория неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми.

Для непрерывно дифференцируемых или гладких функций с компактным носителем получены L_1-, L_2- и L_p- неравенства типа Харди в пространственных областях. Получены неравенства в термине расстояния в среднем в произвольных областях, а в терминах функции расстояния до границы — в произвольных областях, в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым и выпуклых областях. В плоских односвязных и двусвязных областях получены L_p-конформно инвариантные неравенства.

Рассмотрены применения доказанных одномерных и пространственных неравенств. А именно, получены оценки первого собственного значения p-лапласиана для задачи Дирихле в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях, λ-близких к выпуклым и выпуклых областях. Эти оценки включают две или три характеристики области как диаметр, объём и внутренний радиус одновременно. Получены достаточные условия однолистности мероморфных в круге функций в терминах оценки модуля шварциана, а также достаточные условия однолистности и p-листности типа Авхадиева-Беккера, тем самым расширен соответствующий класс однолистных функций. Также с применением одномерных неравенств получены многомерные неравенства типа Реллиха.

Результаты работы ставят новые интересные задачи и указывают перспективные направления в развитии идей, содержащихся в диссертации.

Библиография

[1] Авхадиев, Ф.Г. *Теоремы вложения, связанные с жесткостью кручения и основной частотой* / Ф.Г. Авхадиев // Изв. РАН. Сер. матем. – 2022. – Т. 86, № 1. – С. 3–35.

[2] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Харди, содержащие градиент функции расстояния* / Ф.Г. Авхадиев // Уфимск. матем. журн. – 2021. – Т. 13, № 3. – С. 3–16.

[3] Авхадиев, Ф.Г. *Конформно инвариантные неравенства в областях евклидова пространства* / Ф.Г. Авхадиев // Изв. РАН. Сер. матем. – 2019. – Т. 83, № 5. – С. 3–26.

[4] Авхадиев, Ф.Г. *Конформно инвариантные неравенства* / Ф.Г. Авхадиев // Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2020 – 260 с.

[5] Авхадиев, Ф.Г. *Свойства и применения функции расстояния открытого подмножества в евклидовом пространстве* / Ф.Г. Авхадиев // Изв. вузов. Матем. – 2020. – № 4. – С. 87–92.

[6] Авхадиев, Ф.Г. *Об экстремальных областях для интегральных неравенств в евклидовом пространстве* / Ф.Г. Авхадиев // Изв. вузов. Матем. – 2019. – № 6. – С. 80–84.

[7] Авхадиев, Ф.Г. *Интегральные неравенства Харди и Реллиха в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы* / Ф.Г. Авхадиев // Алгебра и анализ – 2018. – Т. 30, № 2. – С. 18–44.

[8] Авхадиев, Ф.Г. *Задача Брезиса–Маркуса и ее обобщения* / Ф.Г. Авхадиев // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2018. – Т. 153. – С. 3–12.

[9] Авхадиев, Ф.Г. *Конформно инвариантные неравенства* / Ф.Г. Авхадиев // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2017. – Т. 142. – С. 28–41.

[10] Авхадиев, Ф.Г. *L_p-неравенства типа Харди в областях, r-близких к выпуклым* / Ф.Г. Авхадиев // Изв. вузов. Матем. – 2015. – № 1. – С. 84–88.

[11] Авхадиев, Ф.Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения* / Ф.Г. Авхадиев // Матем. сб. – 2015. – Т. 206, № 12. – С. 3–28.

[12] Авхадиев, Ф.Г. *Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна 1/4* / Ф.Г. Авхадиев // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – Т. 78, № 5. – С. 3–26.

[13] Авхадиев, Ф.Г. *Точные оценки констант Харди для областей со специальными граничными свойствами* / Ф.Г. Авхадиев, И.К. Шафигуллин // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 2. – С. 69–73.

[14] Авхадиев, Ф.Г. *Семейства областей, обладающих максимальной константой Харди* / Ф.Г. Авхадиев // Изв. вузов. Матем. – 2013. – № 9. – С. 59–63.

[15] Авхадиев, Ф.Г. *Оценки констант Харди при трубчатом расширении множеств и в областях с конечными граничными моментами* / Ф.Г. Авхадиев, И.К. Шафигуллин // Матем. тр. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 3–12.

[16] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах* / Ф.Г. Авхадиев // Труды МИАН – 2006. – Т. 255. – С. 8–18.

[17] Авхадиев, Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* / Ф.Г. Авхадиев // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189, № 12. – С. 3–12.

[18] Авхадиев, Ф.Г. *Функционал Минковского по областям значений логарифма производной и условия однолистности* / Ф.Г. Авхадиев // Тр. сем. по краев. задачам – 1992. – Т. 27. – С. 3–21.

[19] Авхадиев, Ф.Г. *Условия однолистности решения в задачах построения крыловых профилей* / Ф.Г. Авхадиев // Тр. сем. по краев. задачам – 1991. – Т. 26. – С. 3–19.

[20] Авхадиев, Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи* / Ф.Г. Авхадиев // Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2019 – 412 с.

[21] Авхадиев, Ф.Г. *Достижения и проблемы в достаточных условиях конечнолистности аналитических функций* / Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев // Изв. вузов. Матем. – 1986. – № 10. – С. 3–16.

[22] Авхадиев, Ф.Г. *Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений* / Ф.Г. Авхадиев // Матем. заметки – 1975. – Т. 18, № 6. – С. 793–802.

[23] Авхадиев, Ф.Г. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций* / Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев // УМН – 1975. – Т. 30, № 4 (184). – С. 3–60.

[24] Аермарк, Л. *Неравенство Харди для оператора Грушина с магнитным полем типа Ааронова–Бома* / Л. Аермарк, А. Лаптев // Алгебра и анализ. – 2011. – Т. 23, № 2. – С. 1–8.

[25] Батуев, Э.Н. *О весовых неравенствах типа Харди* / Э.Н. Батуев, В.Д. Степанов // Сиб. матем. журн. – 1989. – Т. 30, № 1. – С. 13–22.

[26] Ватсон, Дж.Н. *Теория бесселевых функций* / Дж.Н. Ватсон // М.: Издательство иностранной литературы, 1949 – 799 с.

[27] Дубинский, Ю.А. *Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях* / Ю.А. Дубинский // Тр. МИАН. – 2010. – Т. 269. – С. 112–132.

[28] Дубинский, Ю.А. *Двусторонние шкалы неравенств Харди и их приложения к некоторым задачам математической физики* / Ю.А. Дубинский // СМФН. – 2012. – Т. 46. – С. 49–91.

[29] Куфнер, А. *Замечание о неравенствах Харди k-го порядка* / А. Куфнер // Тр. МИАН. – 2005. – Т. 248. – С. 144–152.

[30] Левин, В.И. *О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств* / В.И. Левин // Матем. сб. – 1938. – Т. 4(46), № 2. – С. 309–324.

[31] Мазья, В.Г. *Пространства С.Л. Соболева* / В.Г. Мазья // Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985 – 416 с.

[32] Митидиери, Э. *Простой подход к неравенствам Харди* / Э. Митидиери // Матем. заметки – 2000. – Т. 67, № 4. – С. 563–572.

[33] Михлин, С.Г. *Линейные уравнения в частных производных* / С.Г. Михлин // М.: «Высш. школа», 1977. – 431 с.

[34] Покорный, В.В. *О некоторых достаточных условиях однолистности* / В.В. Покорный // ДАН. – 1951. – Т. 79, № 5. – С. 743–746.

[35] Прохоров, Д.В. *Неравенство Харди с мерами, случай* $0 < p < 1$ / Д.В. Прохоров // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86, № 6. – С. 870–883.

[36] Прохоров, Д.В. *Интегральные операторы Харди–Стеклова* / Д.В. Прохоров, В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова // Совр. пробл. матем. – 2016. – Т. 22. – С. 3–185.

[37] Самко, С.Г. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев // Минск: Наука и техника, 1987 – 688 с.

[38] Соболев, С.Л. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных производных* / С.Л. Соболев // М.: Наука, 1989 – 254 с.

[39] Степанов, В.Д. *О весовом неравенстве Харди* / В.Д. Степанов // Сиб. матем. журн. – 1987. – Т. 28, № 3. – С. 205–207.

[40] Степанов, В.Д. *Весовые неравенства типа Харди для производных высших порядков и их приложения* / В.Д. Степанов // Докл. АН СССР – 1988. – Т. 302, № 5. – С. 1059–1062.

[41] Степанов, В.Д. *О весовых неравенствах типа Харди для дробных интегралов Римана - Лиувилля* / В.Д. Степанов // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31, № 3. – С. 186–197.

[42] Стоилов, С. *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций* / С. Стоилов // М.: ИЛ, 1964 – 228 с.

[43] Тухватуллина, А.М. *Неравенства типа Харди для специального семейства невыпуклых областей* / А.М. Тухватуллина // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, № 1. – С. 211–220.

[44] Хоффманн-Остенхоф, Т. *Неравенство Харди для антисимметричных функций* / Т. Хоффманн-Остенхоф, А.А. Лаптев // Функц. анализ и его прил. – 2021. – Т. 55, № 2. – С. 55–64.

[45] Франк, Р. Л. *Два следствия неравенства Харди в версии Дэвиса* / Р.Л. Франк, С. Ларсон // Функц. анализ и его прил. – 2021. – Т. 55, № 2. – С. 118–121.

[46] Abdulhadi Z. *Landau's theorem for biharmonic mappings* / Z. Abdulhadi, Y. Abu Muhanna // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 338. – P. 705–709.

[47] AbdulHadi, Z. *On univalent solutions of the biharmonic equation* / Z. AbdulHadi, Y. Abu Muhanna, S. Khuri // J. Inequal. Appl. – 2005. – Vol. 2005, № 5. – P. 469–478.

[48] Abu Muhanna, Y. *On univalence of biharmonic maps* / Y. Abu Muhanna // Complex Var. Elliptic Equ. – 2008. – Vol. 5, № 3. – P. 745–751.

[49] Abu Muhanna, Y. *One parameter family of univalent biharmonic mappings* / Y. Abu Muhanna, S.V. Bharanedhar, S. Ponnusamy // Taiwanese journal of mathematics. – 2014. – Vol. 18, № 4. – P. 1151–1169.

[50] Abdulhadi, Z. *Univalent biharmonic mappings and linearly connected domains International* / Z. Abdulhadi, L. El Hajj // Journal of Analysis and Applications. – 2015. – Vol. 9, № 1. – P. 1–8.

[51] Ahlfors, L. *A uniqueness theorem for Beltrami equations* / L. Ahlfors, G. Weill // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 13. – P. 975–978.

[52] Ahlfors, L.V. *Conformal invariants, Topics in Geometric Function Theory* / L.V. Ahlfors // Hill: McGraw, 1973.

[53] Alvarez, V. *Isoperimetric Inequalities in Riemann surfaces of infinite type* / V. Alvarez, D. Pestana, J.M. Rodríguez // Revista Matematica Iberoamericana – 1999. – Vol. 15, № 2. – P. 353–425.

[54] Alvino, A. *Sharp Hardy inequalities in the half space with trace remainder term* / A. Alvino, R. Volpicelli, A. Ferone // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2012. – Vol. 75, № 14. – P. 5466–5472.

[55] Ancona, A. *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$ / A. Ancona // J. London Math. Soc. – 1986. – Vol. s2-34, № 2. – P. 274–290.

[56] Anastassiou, G.A. *Vectorial Hardy type fractional inequalities* / G.A. Anastassiou // Bull. Tbilisi Int. Centre Math. Inform. – 2012. – Vol. 16, № 2. – P. 21–57.

[57] Avkhadiev, F.G. *Weighted Hardy Inequalities with Sharp Constants* / F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2010. – Vol. 31, № 1. – P. 1–7.

[58] Avkhadiev, F.G. *Unified Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* / F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // Z. Angew. Math. Mech. – 2007. – Vol. 87, № 8-9. – P. 632–642.

[59] Avkhadiev, F.G. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* / F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2011. – Vol. 18, № 4. – P. 723–736.

[60] Avkhadiev, F.G. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* / F.G. Avkhadiev // Lobachevskii J. Math. – 2006. – Vol. 21. – P. 3–31.

[61] Avkhadiev, F.G. *The Saint-Venant type isoperimetric inequalities for assessing saturated water storage in lacunary shallow perched aquifers* / F.G. Avkhadiev, A.R. Kacimov // ZAMM-Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik – 2022. – Vol. 103, № 1, art. no. e202100069.

[62] Avkhadiev, F.G. *Selected results and open problems on Hardy-Rellich and Poincare-Friedrichs inequalities* / F.G. Avkhadiev // Analysis and mathematical physics. – 2021. – Vol. 11, № 3. – P. Article number: 134.

[63] Avkhadiev, F.G. *Schwarz-Pick Type Inequalities* / F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009 – 156 p.

[64] Avkhadiev, F.G. *Laptev A. (eds) Around the Research of Vladimir Maz'ya I. International Mathematical Series* / F.G. Avkhadiev, A. Laptev // New York: Springer, 2010.

[65] Avkhadiev, F.G. *On the best constants for the Brezis-Marcus inequalities in balls* / F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths // J. Math. Analysis and Applications. – 2012. – Vol. 396, № 2. – P. 473–480.

[66] Balinsky, A.A. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality* / A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis // Heidelberg - New York- Dordrecht - London: Springer, 2015 – 263 p.

[67] Balinsky, A. *Generalized Hardy inequality for the magnetic Dirichlet forms* / A. Balinsky, A. Laptev, A.V. Sobolev // J. of Statistical Physics. – 2004.– Vol. 116, №1-4. – P. 507–521.

[68] Bandle, C. *Isoperimetric inequalities and applications* / C. Bandle // Boston-London-Melbourne: Pitman Adv. Publ. Program, 1980.

[69] Barbatis, G. *Improved Rellich inequalities for the polyharmonic operator* / G. Barbatis // Indiana University Mathematics Journal. – 2006. – Vol. 55, №4. – P. 1401–1422.

[70] Barbatis, G. *Series expansion for L^p Hardy inequalities* / G. Barbatis, S. Filippa, A. Tertikas // Indiana Univ. Math. – 2003. – Vol. 52, № 1. – P. 171–190.

[71] Becker, J. *Löwnersche differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte functionen* / J. Becker // J. Reine Angew. Math. – 1972. – Vol. 255. – P. 23–43.

[72] Becker, J. *Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien* / J. Becker // Math. Ann. – 1973. – Vol. 202, № 4. – P. 321–335.

[73] Becker, J. *Schlichtheitskriterien und Jordangebiete* / J. Becker, Ch. Pommerenke // J. Reine Angew. Math. – 1984. – Vol. 354. – P. 74–94.

[74] Beesack, P.R. *Hardy's inequality and its extensions* / P.R. Beesack // Pacific J. Math. – 1961. – Vol. 11, № 1. – P. 39–61.

[75] Beesack, P.R. *Extensions of Opial's inequality* / P.R. Beesack, K.M. Das // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 26, № 2. – P. 215–232.

[76] Brezis, H. *Hardy's inequality revisited* / H. Brezis, M. Marcus // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) – 1997. – Vol. 25, № 1-2. – P. 217–237.

[77] Brezis, H. *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems* / H. Brezis, J.L. Vázquez // Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid – 1997. – Vol. 10, № 2. – P. 443–469.

[78] Brown, R.C. *Opial's inequality and o scillation of 2nd order equations* / R.C. Brow, D.B. Hinton // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – Vol. 125, № 4. – P. 1123–1129.

[79] Boyd D.W. *An extension of Opial's inequality* / D.W. Boyd, J.S.W. Wong // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1967. – Vol. 19, № 1. – P. 100–102.

[80] Boyd, D.W. *Best constants in a class of integral inequalities* / D.W. Boyd // Pacific J. Math. – 1969. – Vol. 30, № 2. – P. 367–383.

[81] Burenkov, V.I. *Hardy-type inequality for* $0 < p < 1$ *and hypodecreasing functions* / V.I. Burenkov, A. Senouci, T.V. Tararykova // Eurasian mathematical journal. – 2010. – Vol. 1, № 3. – P. 27–42.

[82] Burenkov, V.I. *Function spaces. Main integral inequalities related to* L_p*-spaces* / V.I. Burenkov // Moscow: Peoples' Friendship University, 1973.

[83] Burenkov, V.I. *On the exact constant in the Hardy inequality with* $0 < p < 1$ *for monotone* / V.I. Burenkov // Proc. Steklov Inst. Math. – 1993. – Vol. 194, № 4. – P. 59–63.

[84] Chan, Ling-Yau *Some extensions of Hardy's inequality* / Ling-Yau Chan // Canad. Math. Bull. – 1979. – Vol. 22, № 2. – P. 165–169.

[85] Chen, Sh.L. *Linear Connectivity, Schwarz-Pick Lemma and Univalency Criteria for Planar Harmonic Mapping* / Sh.L. Chen, S. Ponnusamy, A. Rasila, X.T. Wang // Acta Mathematica Sinica, English Series – 2016. – Vol. 32, № 3. – P. 297–308.

[86] Chen, C. *Extensions of Hardy inequality* / C.Chen, D. Luor, Z. Ou // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 273. – P. 160–171.

[87] Chen, Q. *Half-discrete Hardy-Hilbert's inequality with two interval variables* / C. Qiang, Y. Bicheng // J. Math. Inequal. Appl. – 2013. – 2013:485

[88] Čžmešija, A. *On weighted discrete Hardy's inequality for negative power numbers* / A. Čžmešija // J. Math. Inequal. Appl. – 2005. – Vol. 8, №2. – 273–285.

[89] Davies, E.B. *The Hardy constant* / E.B. Davies // Quart. J. Math. Oxford (2). – 1995. – Vol. 46, № 4. – P. 417–431.

[90] Davies, E.B. *A Review of Hardy Inequalities* / E.B. Davies // The Maz'ya anniversary Collection, Vol.2, Oper.Theory Adv. Appl. – 1999. – Vol. 110. – P. 55–67.

[91] Davies, E.B. *Spectral theory and differential operators*, Cambridge studies in advanced mathematics, 42 / E.B. Davies // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

[92] Del Pino, M. *A logarithmic Hardy inequality* / M. Del Pino, J. Dolbeault, S. Filippas, A. Tertikas // J. Funct. Anal. – 2010. – Vol. 259. – P. 2045–2072.

[93] Dou, J. *Hardy inequalities with remainder terms for the generalized Baouendi-Grushin vetor fields* / J. Dou , Q. Guo, P. Niu // Math. Inequal. Appl. 2010. – Vol. 13, № 3. – P. 555–570.

[94] Duren, P. *Harmonic Mappings in the Plane* / P. Duren // Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[95] Duren, P.L. *Singular measure and domaine not of Smirnov type* / P.L. Duren, M.S. Shapiro, A.L. Shields // Duke Math. J. – 1966. – Vol. 33, № 2. – P. 247–254.

[96] Edmunds, D.E. *On the boundedness and compactness of weighted Hardy operators in spaces* $L^{p(x)}$ / D.E. Edmunds, V. Kokilashvili, A. Meskhi // Georgian Math. J. – 2005. – Vol. 12, № 1. – P. 27–44.

[97] Efraimidis, I. *Criteria for univalence and quasiconformal extension for harmonic mappings on planar domains* / I. Efraimidis // Annales Fennici Mathematici. – 2021. – Vol. 46, № 3. – P. 1123–1134.

[98] Evans, W.D. *Hardy and Rellich inequalities with remainders* / W.D. Evans, R.T. Lewis // J. Math. Inequal. – 2007. – Vol. 1, № 4. – P. 473–490.

[99] Federer, H. *Geometric function theory* / H. Federer // New York: Springer Verlag, 1969 – 309–324 P.

[100] Fernández, J.L. *Domains with Strong Barrier* / J.L. Fernández // Revista Matematica Iberoamericana. – 1989. – Vol. 5. – P. 47–65.

[101] Fernández, J.L. *The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann surfaces* / J.L. Fernández, J.M. Rodríguez // Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Mathematica. – 1990. – Vol. 15. – P. 165–182.

[102] Filippas, S. *On a question of Brezis and Marcus* / S. Filippas, V. Maz'ya, A. Tertikas // Calc. Var. – 2006. – Vol. 25, № 4. – P. 491–501.

[103] Gao, P. *Hardy type inequalities via auxiliary sequences* / P. Gao // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 34. – P. 48-57.

[104] Gevirtz, J. *An upper bound for the John constant* / J. Gevirtz // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – Vol. 83, № 3. – P. 476–478.

[105] Gesztesy, F. *Bessel-Type Operators and a Refinement of Hardy's Inequality.* / F. Gesztesy, M.M.H. Pang, J. Stanfill // Operator Theory to Orthogonal Polynomials, Combinatorics, and Number Theory. Operator Theory: Advances and Applications, – 2021. – Vol. 285.

[106] Gesztesy, F. *Bessel-Type Operators and a Refinement of Hardy's Inequality* / F. Gesztesy, M.M.H. Pang, J. Stanfill // arXiv:2102.00106v5. – 2021.

[107] Guzu, D. *On a class of sharp multiplicative Hardy inequalities* / D. Guzu, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev // Алгебра и анализ. – 2020. – Т. 32, № 3. – С. 180–190.

[108] Hadwiger, H. *Vorlesungen öber Inhalt, Oberfläsche und Isoperimetrie* / H. Hadwiger // Verlag: Springer, 1957.

[109] Hardy, G.H. *Inequalities* / G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.

[110] Hardy, G.H. *Note on a theorem of Hilbert* / G.H. Hardy // Math. Zeitschr. – 1920. – Vol. 6. – P. 314–317.

[111] Harjulehto, P. *Hardy's inequality in variable exponent Sobolev spaces* / P. Harjulehto, P. Hästö, M. Koskenoja // Georgian Math. J. – 2005. – Vol. 12, № 3. – P. 431–442.

[112] Hernandez, R. *Pre-Schwarzian and Schwarzian Derivatives of Harmonic Mappings* / R. Hernandez, M.J. Martin // J. Geom. Anal. – 2015. – Vol. 25 (1). – P. 64–91.

[113] Hersch, J. *Sur la fréquence fondamentale d'une membrande vibrante; évaluation par défaut et principe de maximum* / J. Hersch // J. Math. Phys. Appl. – 1960. – Vol. 11. – P. 387–412.

[114] Hoffmann-Ostenhof, M. *A geometrical version of Hardy's inequality* / M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev // J. Funct. Anal. – 2002. – Vol. 189, № 2. – P. 539–548.

[115] Kawashima, S. *Hardy type inequality and application to the stability of degenerate stationary waves* / S. Kawashima, M. Kurata // J. Func. Anal. – 2009. – Vol. 257. – P. 1–19.

[116] Kinnunen, J. *Characterizations for the Hardy Inequality. In: Laptev, A. (eds) Around the Research of Vladimir Maz'ya* / J. Kinnunen, R. Korte // New York: Springer, 2010 – 239–254.

[117] Kufner, A. *Weighted inequalities of Hardy type* / A. Kufner, L.E. Persson // New Jersey-London-Singapore-Hong Kong: World Scientific, 2003.

[118] Kufner, A. *Weighted Sobolev Spaces* / A. Kufner // New York: John Wiley and Sons Inc., 1985.

[119] Kufner, A. *The Hardy inequality. About its history and some related results* / A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson // Vydavatelský Servis, Plzeň, 2007 – 161 P.

[120] Kufner, A. *The prehistory of the Hardy Inequality* / A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson // The American Mathematical Monthly. – 2006. – Vol. 113, № 8. – P. 715–732.

[121] Lamb, H. *Note on the induction of electric currents in a cylinder placed across the lines of magnetic force* / H. Lamb // Proc. Lond. Math. Soc. – 1884. – Vol. XV, № 2. – P. 270–274.

[122] Laptev, A. *Hardy inequalities for simply connected planar domains* / A. Laptev, A.V.Sobolev // Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2 – 2008. – Vol. 225. – P. 133–140.

[123] Laptev, A. *Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms* / A. Laptev, T. Weidl // Operator Theory: Advances and Applications. – 1999. – Vol. 108. – P. 299–305.

[124] Lewis, R.T. *A geometric characterization of a sharp Hardy inequality* / R.T. Lewis, Li Junfang, Li Yanyan // Journal of Functional Analysis. – 2012. – Vol. 262, № 11. – P. 3159–3185.

[125] Lewis, J.L. *Uniformly fat sets* / J.L. Lewis // Trans. Amer. Math. Soc. – 1988. – Vol. 308, № 1. – P. 177–196.

[126] Lewy, H. *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings* / H. Lewy // Bull. Amer. Math. Soc. – 1936. – Vol. 42. – P. 689–692.

[127] Liu, J. *Some generalizations and improvements of discrete Hardy's inequality* / J. Liu, X. Zhang, B. Jiang // Computers and Mathematics with Applications. – 2012. – Vol. 63. – P. 601-607.

[128] Loss, M. *Hardy inequalities for fractional integrals on general domains* / M. Loss, C. Sloane // J. Funct. Anal. – 2010. – Vol. 259, № 6. – P. 1369–1379.

[129] Mashiyev, R.A. *Hardy's inequality in power-type weighted $L^{p()}(0,\infty)$ spaces* / R.A. Mashiyeva, B. Çekiç, F.I.Mamedovb, S.Ograsa // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2006. – Vol. 7, № 3. – P. 289–298.

[130] Mashiyeva, R.A. *On Hardy's inequality in $L^{p(x)}(0,\infty)$* / R.A. Mashiyev, B. Çekiç, S.Ograsa // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 334, № 1, Article 106.

[131] Marcus, M. *On the best constants for Hardy's inequality in R^n* / M. Marcus, V.J. Mizel, Y. Pinchover // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 350. – P. 3237–3250.

[132] Matskewich, T. *The best possible constant in a generalized Hardy's inequality for convex domains in R^n* / T. Matskewich, P.E. Sobolevskii // Nonlinear Anal. – 1997. – Vol. 28, № 9. – P. 1601–1610.

[133] Marcus, M. *On the best constant for Hardy's inequality in R^n* / M. Marcus, V.J. Mitzel, V.J. Pinchover // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 350, № 8. – P. 3237–3255.

[134] Miclo, L. *An example of application of discrete Hardy's inequalities* / L. Miclo // Markov Processes Relat. Filelds. – 1999. – Vol. 5, № 1. – P. 319-330.

[135] Miklyukov, V.M. *Hardy's Inequality for $W_0^{1,p}$-Functions on Riemannian Manifolds* / V.M. Miklyukov, M.K. Vuorinen // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1999. – Vol. 127, № 9. – P. 2745–2754.

[136] Muckenhoupt, B. *Hardy's inequality with weights* / B. Muckenhoupt // Studia Mathematica. – 1972. – Vol. 44, № 1. – P. 31–38.

[137] Nečas, J. *Sur une méthod pou résondre les équations aux dérivées partielle du type elliptique, voisine de la variationell* / J. Nečas // Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa. – 1962. – Vol. 16, № 3. – P. 305-326.

[138] Nehari, Z. *The Schwarzian derivative and schlicht functions* / Z. Nehari // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 55, № 6. – P. 545–551.

[139] Nguyen, V.H. *Some trace Hardy type inequalities and trace Hardy-Sobolev-Maz'ya type inequalities* / V.H. Nguyen // Journal of Functional Analysis. – 2016. – Vol. 270, № 11. – P. 4117–4151.

[140] Okpoti, A. *Weight characterizations for the discrete Hardy inequality with kernel* / A. Okpoti, L.-E. Persson, A. Wedestig // J. Math. Inequal. Appl.– 2006. – 2006:18030.

[141] Opic, B. *Hardy-type inequalities* / B. Opic, A. Kufner // Harlow: Longman Scientific and Technical, 1990.

[142] Payne, L.E. *On the mean value of the fundamental mode in the fixed membrane problem* / L.E. Payne, I. Stakgold // Applicable Anal. – 1973. – Vol. 3, № 3. – P. 295–306.

[143] Pachpatte, B.G. *A note on certain inequalities related to Hardy's inequality* / B.G. Pachpatte // Indian J. pure appl. Math. – 1992. – Vol. 23, № 11. – P. 773–776.

[144] Persson, L.E. *Weighted Integral Inequalities with the geometric mean operator* / L.E. Persson, V.D. Stepanov // J. of Inequal. and Appl. – 2002. – Vol. 7, № 5. – P. 727–746.

[145] Prokhorov, D.V. *Weighted estimates for the Riemann-Liouville operators and applications* / D.V. Prokhorov, V.D. Stepanov // Proc. Steklov Inst. Math. – 2003. – Vol. 243. – P. 278–301.

[146] Pommerenke, Ch. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric* / Ch. Pommerenke // Arch. Math. – 1979. – Vol. 32. – P. 192–199.

[147] Psaradakis, G. L_1 *Hardy Inequalities with Weights* / G. Psaradakis // J. Geom. Anal. – 2013. – Vol. 23. – P. 1703–1728.

[148] Rademacher, H. *Über partielle und totale Diferenzierbarkeit* / H. Rademacher // I. Math. Ann. – 1919. – Vol. 89, № 4. – P. 340–359.

[149] Ruzhansky, M. *Hardy inequalities on homogeneous groups* (Birkhäuser, 2019).

[150] Ruzhansky, M. *Layer potentials, Kac's problem, and refined Hardy inequality on homogeneous Carnot groups* / M. Ruzhansky, D. Suragan // Adv. Math. – 2017. – Vol. 308. – P. 483–528.

[151] Ruzhansky, M. *Rellich, Caffarelli-Kohn-Nirenberg and p-sub-Laplacian inequalities on stratified groups* / M. Ruzhansky, D. Suragan // J. Differential Equations – 2017. – Vol. 262. – P. 1799–1821.

[152] Ruzhansky, M. *Geometric Hardy and Hardy-Sobolev inequalities on Heisenberg groups* / M. Ruzhansky, B. Sabitbek, D. Suragan // Bulletin of Mathematical Sciences – 2020. – Vol. 10, № 2, 2050016.

[153] Ruzhansky, M. *Sobolev type inequalities, Euler-HilbertSobolev and Sobolev-Lorentz-Zygmund spaces on homogeneous groups* / M. Ruzhansky, D. Suragan, N. Yessirkegenov // Integral Equations and Operator Theory. – 2018. – Vol. 90. – P. 10.

[154] Ruzhansky, M. *Extended Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, and remainders, stability, and superweights for Lp-weighted Hardy inequalities* / M. Ruzhansky, D. Suragan, N. Yessirkegenov // Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B. – 2018. – Vol. 5. – P. 32–62.

[155] Ruscheweyh, S. *An extension of Becker's univalence condition* / S. Ruscheweyh // Math. Ann. – 1976. – Vol. 220. – P. 285–290.

[156] Sakaguchi, K. *A note on p-valent functions* / K. Sakaguchi // J. Math. Soc. Japan. – 1962. – Vol. 14, № 3. – P. 312–321.

[157] Senouci, A. *Some integral inequalities for quasimonotone functions in weighted variable exponent Lebesgue space with* $0 < p(x) < 1$ / A. Senouci, A. Zanou // Eurasian Math. J. – 2020. – Vol. 11, № 4. – P. 58–65.

[158] Shum, D.T. *On integral inequalities related to Hardy's* / D.T. Shum // Canada. Math. Bull. – 1997. – Vol. 14, № 2. – P. 225–230.

[159] Sinnamon, G. *Weighted inequalities for positive operators* / G. Sinnamon // J. Math. Inequal. Appl. – 2005. – Vol. 8, №3. – P. 419–440.

[160] Sinnamon, G. *The weighted Hardy inequality: new proofs and the case* $p = 1$ / G. Sinnamon, V.D. Stepanov // J. London Math. Soc. – 1996. – Vol. 54, № 1. – P. 89–101.

[161] Stepanov, V.D. *Weighted inequalities of Hardy type for Riemann-Liouville fractional integrals* / V.D. Stepanov // Sib. Mat. Zh. – 1990. – Vol. 31. – P. 513–522.

[162] Stepanov, V.D. *Weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator: the case* $q<p$ / V.D. Stepanov, E.P. Ushakova // Math. Inequal. Appl. – 2023. – Vol. 26, № 1. – P. 267–288.

[163] Sullivan, D. *Related aspects of positivity in Riemannian geometry* / D. Sullivan // J. Differential Geom. – 1987. – Vol. 25. – P. 327–351.

[164] Talenti, D.G. *Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze* / D.G. Talenti // Rend. Sem. Mat. Fiz. Milano. – 1969. – Vol. 39. – P. 171–185.

[165] Tidblom, J. *A geometrical version of Hardy's inequality for* $W_0^{1,p}(\Omega)$ / J. Tidblom // Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – Vol. 132, № 8. – P. 2265–2271.

[166] Tidblom, J. *A Hardy inequality in the half-space* / J. Tidblom // Journal of Functional Analysis. – 2005. – Vol. 221, № 2. – P. 482–495.

[167] Tomaselli, G. *A class of inequalities* / G. Tomaselli // Boll. Un. Mat. Ital. – 1969. – Vol. 2. – P. 622–631.

[168] Tzirakis, K. *Improving interpolated Hardy and trace Hardy inequalities on bounded domains* / K. Tzirakis // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications – 2015. – Vol. 127. – P. 17–34.

[169] Wannebo, A. *Hardy Inequalities* / A. Wannebo // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – Vol. 109, № 1. – P. 85–95.

[170] Zhen-Qing Chen *Hardy inequality for censored stable processes* / Zhen-Qing Chen // Tohoku Math. J. – 2003. – Vol. 55. – P. 439–450.

[171] Van den Berg, M. *Heat content and a Hardy inequality for complete riemannian manifolds* / M. Van den Berg, P.B. Gilkey // Bull. London Math. Soc. – 2004. – Vol. 36. – P. 577–586.

[172] Yamashita, S. *Inequalities for the Schwarzian derivative* / S. Yamashita // Indiana Univ. Math. J. – 1979. – Vol. 28, № 1. – P. 131–135.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи из списков RSCI, Scopus, WoS

[173] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди для одной весовой функции и их применения* / Р.Г. Насибуллин // Изв. РАН. Сер. матем. – 2023. – Т. 87, № 2. – С. 168–195.

[174] Насибуллин, Р.Г. *Геометрия одномерных и пространственных неравенств типа Харди* / Р.Г. Насибуллин // Изв. вузов. Матем. – 2022. – № 11. – С. 52–88.

[175] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства Харди для веса Якоби и их применения* / Р.Г. Насибуллин // Сиб. матем. журн. – 2022. – Т. 63, № 6. – С. 1313–1333.

[176] Nasibullin, R.G. *Hardy and Rellich Type Inequalities with Remainders* / R.G. Nasibullin // Czechoslovak Mathematical Journal – 2022. – Vol. 72. – P. 87–110.

[177] Насибуллин, Р.Г. *Одномерные L_p-неравенства типа Харди для специальных весовых функций и их применения* / Р.Г. Насибуллин // Уфимск. матем. журн. – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 101–120.

[178] Nasibullin, R.G. *Sharp conformally invariant Hardy-type inequalities with remainders* / R.G. Nasibullin // Eurasian Math. J. – 2021. – Vol. 12, № 3. – P. 46–56.

[179] Nasibullin, R.G. *Avkhadiev-Backer type p-valent conditions for biharmonic* / R.G. Nasibullin // Analysis and Mathematical Physics. – 2021. – Vol. 11, № 2. – Art. № 80.

[180] Макаров, Р.В. *Неравенства Харди с дополнительными слагаемыми и уравнения типа Лэмба* / Р.В. Макаров, Р.Г. Насибуллин // Сиб. матем. журн. – 2020. – Т. 61, № 6. – С. 1377–1397.

[181] Makarov, R.V. *Hardy type inequalities and parametric Lamb equation* / R.V. Makarov, R.G. Nasibullin // Indagationes Mathematicae – 2020. – Vol. 31, № 4. – P. 632–649.

[182] Nasibullin, R.G. *Avkhadiev-Becker type P-valent conditions for harmonic mappings of the unit disk and its exterior* / R.G. Nasibullin, I.K. Shafigullin // Mathematical Reports – 2020. – Vol. 22, № 1. – P. 59–71.

[183] Makarov, R.V *Weighted Hardy Type Inequalities and Parametric Lamb Equation* / R.V. Makarov, R.G Nasibullin, G.R. Shaymardanova // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2020. – Vol. 41, № 11. – P. 2198–2210.

[184] Nasibullin, R.G. *Brezis–Marcus type inequalities with Lamb constant* / R.G. Nasibullin // Сиб. электрон. матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 449–464.

[185] Nasibullin, R.G. *A geometrical version of Hardy-Rellich type inequalities* / R.G. Nasibullin // Mathematica Slovaca. – 2019. – Vol. 69, № 4. – P. 785–800.

[186] Nasibullin, R.G. *Multidimensional Hardy Type Inequalities with Remainders* / R.G. Nasibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, № 9. – P. 1383–1396.

[187] Авхадиев, Ф.Г. *Конформные инварианты плоских областей гиперболического типа* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Уфимск. матем. журн. – 2019. – Т. 11, № 2. – С. 3–18.

[188] Авхадиев, Ф.Г. *L_p-версии одного конформно инвариантного неравенства* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Изв. вузов. Матем. – 2018. – № 8. – С. 88–92.

[189] Nasibullin, R.G. *Avkhadiev-Becker Type Univalence Conditions for Biharmonic Mappings* / R.G. Nasibullin // Lobachevskii J. Math. – 2018. – Vol. 39, № 6. – P. 794–802.

[190] Насибуллин, Р.Г. *Точные интегральные неравенства типа Харди с весами, зависящими от функции Бесселя* / Р.Г. Насибуллин // Уфимск. матем. журн. – 2017. – Т. 9, № 1. – С. 89–97.

[191] Насибуллин, Р.Г. *Условия p-листности типа Авхадиева–Беккера для гармонических отображений круга* / Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 3. – С. 84–88.

[192] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства, включающие дробные интегралы функции и её производную* / Р.Г. Насибуллин // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. – 2017. – Т. 140. – С. 68–77.

[193] Nasibullin, R.G. *Hardy type inequalities for fractional integrals and derivatives of Riemann-Liouville* / R.G. Nasibullin // Lobachevskii J. Math. – 2017. – Vol. 38, № 3. – P. 709–718.

[194] Авхадиев Ф.Г. *Условия однолистности типа Беккера для гармонических отображений* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 11. – С. 80–85.

[195] Nasibullin, R.G. *Hardy type inequalities with weights dependent on the bessel functions* / R.G. Nasibullin // Lobachevskii J. Math. – 2016. – Vol. 37, № 3. – P. 274–283.

[196] Насибуллин, Р.Г. *Об одном дискретном неравенстве типа Харди с логарифмическим весом* / Р.Г. Насибуллин // Владикавк. матем. журн. – 2016. – Т. 18, № 2. – С. 67–75.

[197] Насибуллин, Р.Г. *Обобщения неравенств типа Харди в форме Ю. А. Дубинского* / Р.Г. Насибуллин // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95, № 1. – С. 109–122.

[198] Авхадиев, Ф. Г. *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55, № 2. – С. 239–250.

[199] Насибуллин, Р.Г. *Точность констант логарифмических неравенств типа Харди в открытых многомерных областях* / Р.Г. Насибуллин // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 111–125.

[200] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди с логарифмическими и степенными весами для специального семейства невыпуклых областей* / Р.Г. Насибуллин, А.М. Тухватуллина // Уфимск. матем. журн. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 43–55.

[201] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства* / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 9. – С. 90–94.

Прочие публикации

[202] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди, включающие повторные логарифмы* / Р.Г. Насибуллин // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2011. – Т. 43. – С. 262–263.

[203] Насибуллин, Р.Г. *О точности двух констант в неравенствах типа Харди* / Р.Г. Насибуллин // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2013. – Т. 46. – С. 331–333.

[204] Насибуллин, Р.Г. *Логарифмические особенности в неравенствах типа Харди* / Р.Г. Насибуллин // Сборник материалов Открытого конкурса научных работ студентов и аспирантов им. Н.И. Лобачевского – Казань: Изд-во: Научный Издательский Дом. – 2012. – С. 78–79.

[205] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди с логарифмическими особенностями в ядре* / Р.Г. Насибуллин // Сборник научных трудов победителей всероссийского конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках Всероссийского фестиваля науки. – М.: Изд-во РГСУ. – 2011. – С. 199–209.

[206] Насибуллин, Р.Г. *Некоторое обобщение неравенства Харди* / Р.Г. Насибуллин // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2011. – Т. 44. – С. 221–222.

[207] Насибуллин, Р.Г. *Геометрическая версия неравенств типа Харди-Реллиха* / Р.Г. Насибуллин // Труды Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. – 2019. – Т. 57.

[208] Makarov, R.V., Nasibullin, R.G. *Hardy type inequalities with additional nonnegative terms* / R.V. Makarov, R.G. Nasibullin // Procceedings of the International Conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics. – 2019. – P. 327–29.

[209] Nasibullin, R.G. *Hardy type Inequalities with remainders* / R.G. Nasibullin // ICOM 2019 Conference Short Abstracts and Proceedings Book. – P.46, ISBN: 978-605-67964-3-2 2017

[210] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства, включающие функцию и ее производную* / Р.Г. Насибуллин // Труды Матем. центра имени Н.И. Лобачевского.– 2017 – Т. 54.

[211] Насибуллин, Р.Г. *Точное неравенство Харди с весом, зависящим от функции Бесселя* / Р.Г. Насибуллин // Материалы Международной конференции по теории функций, посвящённой 100-летию А.Ф.Леонтьева. – 2017. – С. 122–123.

[212] Насибуллин, Р.Г. *Интегральные неравенства типа Харди с весами, зависящими от функции Бесселя* / Р.Г. Насибуллин // Материалы международной Уфимской международной математической конференции. — 2016. – С. 121–122.

[213] Насибуллин, Р.Г. *Неравенства типа Харди с весовыми функциями, зависящими от функции Бесселя* / Р.Г. Насибуллин // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (26 июня - 2 июля 2016 г., Казань), КПФУ. – 2016. – С. 254–255.

[214] Насибуллин, Р.Г. *Неравенство типа Харди с весом, зависящим от функции Бесселя* / Р.Г. Насибуллин // Труды Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. – 2015. – Т. 51. – С. 326–328.