

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор – проректор по научной деятельности  
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный  
университет», д.ф.-м.н., профессор

Тагорский

« 10 »



### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет", Министерство науки и высшего  
образования Российской Федерации, по диссертации  
Насибуллина Рамиля Гайсаевича  
«АНАЛИЗ И ГЕОМЕТРИЯ ОДНОМЕРНЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕРАВЕНСТВ ТИПА  
ХАРДИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ»

1. Диссертация Насибуллина Рамиля Гайсаевича на тему «Анализ и геометрия одномерных и пространственных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук выполнена на кафедре теории функций и приближений ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

2. В период подготовки диссертации соискатель ученой степени доктора физико-математических наук работал доцентом кафедры теории функций и приближений ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» и продолжает работать в этой должности по настоящее время.

3. Насибуллин Рамиль Гайсаевич в 2010 году окончил Казанский (Приволжский) федеральный университет с присвоением квалификации «Математик». Диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ на тему «Неравенства типа Харди с весами, имеющими степенные и логарифмические особенности» защитил в 2013 году в диссертационном совете Д212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет». Ученое звание: доцент.

4. Научный консультант — Авхадиев Фарит Габидинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Теории функций и приближений Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

По итогам рассмотрения диссертации принято следующее заключение:

### 1. Цель и актуальность диссертации:

Целью диссертационной работы Насибуллина Р.Г. является:

1. Систематическое изложение теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области;
2. Получение одномерных  $L_1$ -,  $L_2$ - и  $L_p$ -неравенств для различных весовых функций, которые имеют степенные особенности, содержат тригонометрические функции и функцию Бесселя, в частности, для веса Якоби;
3. Доказательство пространственных  $L_1$ -,  $L_2$ - и  $L_p$ -неравенств в произвольных областях, в областях регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях  $\lambda$ -близких к выпуклым и невыпуклым областям;
4. Исследование приложений полученных результатов при оценке первого собственного числа  $p$ -лапласиана при граничных условиях Дирихле в различных классах областей, при обосновании достаточных условий однолиственности типа Нехари-Покорного и доказательстве многомерных неравенств типа Реллиха.

В силу разного рода приложений в математике и математической физике, в частности, в геометрической теории функций, в теории изопериметрических неравенств и в теории вложения функциональных пространств, рассматриваемый в диссертации круг задач является весьма **актуальным**. Неравенствам Харди посвящали свои работы активно работающие в этой области российские и зарубежные математики такие, как Ф.Г. Авхадиев, В.И. Буренков, К.-Й. Виртс, Ф. Гецтези, М.Л. Гольдман, Ю.А. Дубинский, Е.Б. Дэвис, А. Куфнер, А. Лаптев, В.Г. Мазья, В.М. Миклюков, Р. Ойнаров, Д.В. Прохоров, Дж.М. Родригес, М. Ружанский, С.Л. Соболев, В.Д. Степанов, Д. Сураган, Дж. Тидблум, Дж.Л. Фернандес, и многие др. Неравенства типа Харди, усиленные дополнительными слагаемыми, играют важную роль в теории уравнений в частных производных и нелинейном анализе. Они используются, например, при исследовании устойчивости решений эллиптических и параболических уравнений, а также при изучении существования и асимптотического поведения решений уравнений теплопроводности с сингулярными потенциалами.

**2. Личное участие** соискателя ученой степени в получении результатов, изложенных в диссертации:

Все научные результаты, выносимые на защиту и составляющие основное содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Достоверность результатов исследования подтверждена строгими доказательствами и фактом публикации результатов в ведущих отечественных и зарубежных научных журналах и их апробации на конференциях и семинарах.

Часть основных положений, выносимых на защиту, опубликована в совместных статьях. Постановки задач в совместных работах [8, 9, 11] принадлежат Р.Г. Насибуллину. Доказательство всех теорем и утверждений, выносимых на защиту, принадлежит автору работы. Результаты из совместных работ [10, 16, 22] на защиту не выносятся.

**3. Степень достоверности** результатов проведенных соискателем исследований.



Все утверждения диссертации являются строго обоснованными, они снабжены подробными исчерпывающими доказательствами. В работе используются современные достоверные методы исследования, результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на различных международных конференциях и получили одобрение.

Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в работах [1]-[24] — это статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в списки RSCI, Scopus, Web of Science, тематике исследований посвящены также работы [25]-[29] — статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в списки RSCI, Scopus, Web of Science.

### Список публикаций автора по теме диссертации

- [1] Насибуллин, Р.Г. Неравенства типа Харди для одной весовой функции и их применения / Р.Г. Насибуллин // Известия Российской академии наук. Серия математическая. - 2023. - Т. 87, № 2. - С. 168-195.
- [2] Насибуллин, Р.Г. Геометрия одномерных и пространственных неравенств типа Харди / Р.Г. Насибуллин // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2022. - № 11. - С. 52-88.
- [3] Насибуллин, Р.Г. Неравенства Харди для веса Якоби и их применения / Р.Г.~Насибуллин // Сибирский математический журнал. - 2022. - Т. 63, № 6. - С. 1313-1333.
- [4] Nasibullin, R.G. Hardy and Rellich Type Inequalities with Remainders // Czechoslovak Mathematical Journal - 2022. - V. 72. - P. 87-110.
- [5] Насибуллин, Р.Г. Одномерные  $L_p$ -неравенства типа Харди для специальных весовых функций и их применения / Р. Г. Насибуллин // Уфимский математический журнал. - 2022. - Т. 14, № 3. - С. 101-120.
- [6] Nasibullin, R.G. Sharp conformally invariant Hardy-type inequalities with remainders / R.G. Nasibullin // Eurasian Mathematical Journal. - 2021. - Vol. 12, № 3. - P. 46-56.
- [7] Nasibullin, R.G. Avkhadiev-Backer type  $p$ -valent conditions for biharmonic / R.G. Nasibullin // Analysis and Mathematical Physics - 2021. - V. 11, № 2. - Art. № 80.
- [8] Макаров, Р.В. Неравенства Харди с дополнительными слагаемыми и уравнения типа Лэмба / Р.В. Макаров, Р.Г. Насибуллин // Сибирский математический журнал. - 2020. - Т. 61, № 6. - С. 1377-1397.
- [9] Makarov, R.V. Hardy type inequalities and parametric Lamb equation / R.V.~Makarov, R.G. Nasibullin // Indagationes Mathematicae - 2020. - V. 31, № 4. - P. 632-649.
- [10] Nasibullin, R.G. Avkhadiev-Becker type  $P$ -valent conditions for harmonic mappings of the unit disk and its exterior / R.G. Nasibullin, I.K. Shafigullin // Mathematical Reports - 2020. - V. 22, № 1. - P. 59-71.
- [11] Makarov, R.V. Weighted Hardy Type Inequalities and Parametric Lamb Equation / R.V. Makarov, R.G. Nasibullin, G.R. Shaymardanova // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2020. - V. 41, № 11. - P. 2198-2210.
- [12] Nasibullin, R.G. Brezis-Marcus type inequalities with Lamb constant / R.G.~Nasibullin // Сибирские электронные математические известия. - 2019. - Т. 16. - С. 449-464.
- [13] Nasibullin, R.G. A geometrical version of Hardy-Rellich type inequalities / R.G.~Nasibullin // Mathematica Slovaca - 2019. - V. 69, № 4. - P. 785-800.
- [14] Nasibullin, R.G. Multidimensional Hardy Type Inequalities with Remainders / R.G.~Nasibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2019. - V. 40, № 9. - P. 1383-1396.

[15] Авхадиев Ф.Г. Конформные инварианты плоских областей гиперболического типа / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Уфимский математический журнал. - 2019. - Т. 11, № 2. - С. 3-18.

[16] Авхадиев, Ф. Г. Lp-версии одного конформно инвариантного неравенства / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2018. - № 8. - С. 88-92.

[17] Nasibullin, R.G. Avkhadiev-Becker Type Univalence Conditions for Biharmonic Mappings / R.G. Nasibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2018. - V. 39, №6. - P. 794-802.

[18] Насибуллин, Р.Г. Точные интегральные неравенства типа Харди с весами, зависящими от функции Бесселя / Р.Г. Насибуллин // Уфимский математический журнал. - 2017. - Т. 9, № 1. - С. 89-97.

[19] Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин Условия р-листности типа Авхадиева-Беккера для гармонических отображений круга // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2017. - № 3. - С. 84-88.

[20] Насибуллин, Р.Г. Неравенства, включающие дробные интегралы функции и её производную / Р.Г. Насибуллин // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. - 2017. - Т. 140. - С. 68-77.

[21] Nasibullin, R.G. Hardy type inequalities for fractional integrals and derivatives of Riemann-Liouville / R.G. Nasibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2017. - Vol. 38, № 3. - P. 709-718.

[22] Авхадиев Ф.Г. Условия однолистности типа Беккера для гармонических отображений / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2016. - № 11. - С. 80-85.

[23] Nasibullin, R.G. Hardy type inequalities with weights dependent on the bessel functions / R.G. Nasibullin // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2016. - V. 37, № 3. - P. 274-283.

[24] Насибуллин, Р.Г. Об одном дискретном неравенстве типа Харди с логарифмическим весом / Р.Г. Насибуллин // Владикавказский математический журнал. - 2016. - Т. 18, № 2. - С. 67-75.

[25] Насибуллин, Р.Г. Обобщения неравенств типа Харди в форме Ю.А.~Дубинского / Р.Г. Насибуллин // Математические заметки - 2014. - Т. 95, № 1. - С. 109-122.

[26] Авхадиев, Ф. Г. Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин // Сибирский математический журнал. - 2014. - Т. 55, № 2. - С. 239-250.

[27] Насибуллин, Р.Г. Точность констант логарифмических неравенств типа Харди в открытых многомерных областях / Р.Г. Насибуллин // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки - 2013. - V. 155, № 3. - P. 111-125.

[28] Насибуллин, Р.Г. Неравенства типа Харди с логарифмическими и степенными весами для специального семейства невыпуклых областей / Р.Г. Насибуллин, А.М. Тухватуллина // Уфимский математический журнал. - 2013. - Т. 5, № 2. - С. 43-55.

[29] Авхадиев, Ф.Г. Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства / Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин, И.К. Шафигуллин // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2011. - № 9. - С. 90-94.

**4. Апробация результатов работы. Основные результаты, включенные в диссертационную работу, были представлены на следующих международных конференциях и школах:**



1. Международная научная конференция Discrete and Continuous Signals: Analysis, Information and Applications, St. Petersburg University 11.12.2023 - 16.12.2023;
2. Международная конференция "Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации", Уфа, 1.06.2023 - 3.06.2023;
3. Международная научная конференция "32th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis", Санкт-Петербург, 01.07.2023 - 06.07.2023;
4. III Международная конференция "Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ", посвященная 100-летию В.С. Владимирова, 100-летию Л.Д.~Кудрявцева и 85-летию О.Г. Смолянова, Московская область, г. Долгопрудный, 5-13 июля 2023 г.;
5. Международная конференция "Теория функций, её приложения и смежные вопросы", г. Казань, 22.08.2023-27.08.2023;
6. Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа", Уфа, 28.09.2022-01.10.2022;
7. Международная конференция "Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации", Уфа, 18.10.2022 - 22.10.2022;
8. Международная научная школа-конференция "Экстремальные проблемы теории функций, посвященная 75-летию профессора Ф.Г. Авхадиева", Казань, 29.10.2022 - 30.10.2022;
9. Международная конференция "Вторая конференция Математических центров России Москва", МГУ, 07.11.2022 - 11.11.2022;
10. Международная школа-конференция "Комплексный анализ и его приложения", Геленджик, 30.05.2021 - 05.06.2021;
11. Международная научная конференция "30th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis", Санкт-Петербург, 01.07.2021 - 06.07.2021;
12. Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, 09.08.2021 - 13.08.2021;
13. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, Казань, 22.08.2021 - 28.08.2021;
14. Вузовский научный семинар "Комплексный анализ и эллиптические уравнения", Казань, 17.06.2020 - 17.06.2020;
15. Международная конференция "Комплексный анализ и его приложения", Казань, 24.08.2020 - 28.08.2020;
16. Международная конференция "4th International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians", Стамбул, 27.10.2020 - 30.10.2020;
17. Международная научная конференция "3rd International Conference on Mathematics: "An Istanbul Meeting for World Mathematicians", Стамбул, 01.07.2019 - 03.07.2019;
18. XIV Международная Казанская школа-конференция "Теория функций, её приложения и смежные вопросы", Казань, 07.09.2019 - 12.09.2019;
19. Международная научная конференция the International Conference on Modern Problems of Mathematics and Mechanics, Баку, 23.10.2019 - 25.10.2019;
20. Международная научная конференция Scientific Workshop in Mathematics (Kazan University, Russia and Kanazawa University, Japan), Казань, 23.12.2019 - 23.12.2019;
21. Международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию А.Ф. Леонтьева, Уфа, 24.05.2017 - 27.05.2017;
22. XII Международная школа-конференция "Теория функций, её приложения и смежные вопросы", Казань, 21.08.2017 - 27.08.2017.

Результаты диссертации также докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. Семинар по геометрическому анализу, руководитель - д.ф.-м.н., проф. С.К. Водопьянов, 24 января 2024;

2. Общеинститутский семинар Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, 26 января, 2024;

3. Вузовский научный семинар "Комплексный анализ и эллиптические уравнения", Казань, 17 июня 2020.

Работа докладывалась на объединенном заседании кафедр математического анализа и теории функций приближений в К(П)ФУ 25 июня 2024 г.

#### 5. Новизна проведенных результатов исследований:

Все основные результаты, представленные выше и выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно. В диссертации Насибуллин Рамиля Гайсаевича, в частности, получены новые неравенства типа Харди с дополнительными слагаемыми, которые находят приложения при оценке первого собственного числа оператора Лапласа при граничных условиях Дирихле, а также эти неравенства использованы при обосновании достаточных условий однолиственности и использованы как инструмент доказательства многомерных неравенств Реллиха с дополнительными слагаемыми. Полученные результаты обобщают и усиливают красивые результаты Х. Брезиса и М. Маркуса, М. Хоффманн-Остенхофа, Т. Хоффманн-Остенхофа и А. Лаптева, Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса, Дж. Тидблума и т.д.

#### 6. Теоретическая и практическая значимость результатов научных исследований:

Результаты диссертационной работы носят теоретический характер. Они могут применяться для дальнейших исследований в рамках теории теории дискретных и интегральных неравенств, теории достаточных условий однолиственности различных классов функций и теории изопериметрических неравенств. Полученные неравенства можно трактовать как вложение функциональных пространств с весом, которые находят широкое применение, например, при решении интегро-дифференциальных уравнений приближенными методами. Результаты, представленные в диссертации, могут использоваться при чтении специальных курсов для студентов Казанского (Приволжского) федерального университета и могут аналогично использоваться в других вузах Российской Федерации, как МГУ им. М.В Ломоносова, СПбГУ, СамГТУ, Уфимский университет науки и технологий и др.

#### 7. Структура работы:

Диссертация состоит из введения, четырех глав, каждая из которых разбита на параграфы, заключения, указателей обозначений, списка использованной литературы, содержащего 214 наименований и включающего работы, опубликованные автором по теме диссертации. Общий объем диссертации составляет 270 страниц.

8. **Научная специальность**, которой соответствует диссертация: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, а именно: пункту 1 – «Вещественный анализ, локальные и глобальные свойства функций вещественных переменных, их представления и приближения»; пункту 3 – «Теория функциональных пространств; исследования классов функций, возникающих в математике и ее приложениях»; пункту 5 – «Комплексный анализ, аналитические функции одного и многих комплексных переменных и их свойства,



аналитическое продолжение, граничные свойства аналитических функций», пункту 7 – «Геометрическая теория функций одного и многих комплексных переменных, конформные отображения и их обобщения (квазиконформные, биголоморфные и т. п.)», пункту 13 – «Специальные функции и интегральные преобразования».

### **Выводы:**

Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как серьезное научное достижение в области интегральных неравенств, теорем вложения весовых пространств Соболева и теории решения интегро-дифференциальных уравнений приближенными методами.

В частности, в работе:

1. За счет недостижимости точных констант либо их ослабления, получены новые одномерные  $L_1$ -,  $L_2$ - и  $L_p$ - неравенства типа Харди, весовые функции которых имеют степенные особенности, содержат тригонометрические функции, функцию Бесселя, в частности, установлены неравенства для веса Якоби. Усилены дополнительными слагаемыми известные, а также новые, доказанные в данной диссертационной работе, неравенства.

2. Дано систематическое изложение теории неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми, в которых участвуют геометрические характеристики областей, такие как объём, диаметр, внутренний радиус или максимальный конформный модуль области.

3. Для непрерывно дифференцируемых или гладких функций с компактным носителем получены пространственные  $L_1$ -,  $L_2$ - и  $L_p$ -неравенства типа Харди в произвольных областях, в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях  $\lambda$ -близких к выпуклым и выпуклых областях. В плоских односвязных и двусвязных областях получены  $L_p$ - конформно инвариантные неравенства с дополнительными слагаемыми.

4. Рассмотрены применения доказанных одномерных и пространственных неравенств при получении оценок первого собственного значения  $p$ -лапласиана для задачи Дирихле в областях, регулярных в смысле Дэвиса, в областях, удовлетворяющих условию конуса, в областях,  $\lambda$ -близких к выпуклым, и выпуклых областях. Получены достаточные условия однолистности мероморфных в круге функций в терминах оценки модуля Шварциана, а также достаточные условия однолистности и  $p$ -листности типа Авхадиева-Беккера для бигармонических функций. Также с применением одномерных неравенств получены многомерные неравенства типа Реллиха в различных классах областей.

Диссертация Насибуллина Рамиля Гайсаевича на тему «Анализ и геометрия одномерных и пространственных неравенств типа Харди с дополнительными слагаемыми» отвечает всем п. 9-11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Заключение принято на совместном заседании кафедры математического анализа и кафедры теории функций и приближений ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Присутствовало на заседании 15 чел., в том числе 5 докторов наук, 10 кандидатов наук.

Результаты голосования: за – 15 чел., против – 0 чел., воздержались – 0 чел., протокол №  
10 от 10 июня 2024 г.

Заведующий кафедрой  
математического анализа  
д.ф.-м.н, профессор



С. Р. Насыров

Секретарь: ст. лаборант  
кафедры математического анализа



И.Л. Анисимова

Заместитель директора ИММ  
им. Н. И. Лобачевского  
к.ф.-м.н, доцент



Б.Ф. Тазюков