На правах рукописи

Павлов Дмитрий Александрович

Приближение гармоническими функциями на множествах в $\mathbb{R}^n$

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2023

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»

Научный руководитель: **Широков Николай Алексеевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Старков Виктор Васильевич**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»

Васин Андрей Васильевич
кандидат физико-математических наук, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО «Государственный университет морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова», г. Москва

Защита состоится «16» февраля 2024 г. в 15:00 на заседании объединённого диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте https://uust.ru.

Автореферат разослан «____» ________________ 2023 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук К. П. Исаев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Классические результаты Д. Джексона [1] и С. Н. Бернштейна [2], полученные в начале XX века, в объединении дают конструктивное описание класса гёльдеровых функций в терминах скорости приближения тригонометрическими многочленами. В 1956 году аналогичная задача для алгебраических многочленов была решена В. К. Дзядыком [5], который использовал оценки, полученные С. М. Никольским [3] и А. Ф. Тиманом [4].

С конца пятидесятых годов XX века активно изучался вопрос конструктивного описания классов функций, заданных на областях комплексной плоскости. В. К. Дзядык [6–8] ввёл в рассмотрение такую функцию $\rho_{1+1/n}$ на границе Γ области G (её конструкция непосредственно связана с конфморным отображением дополнения G на внешность единичного круга), что при некоторых условиях на Γ условие гёльдеровости f с показателем $\alpha \in (0,\,1)$ равносильно возможности для любого натурального n подобрать такой многочлен P_n степени не выше n, что выполнено неравенство

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant C_f \rho^{\alpha}_{1+1/n}(z), \quad z \in \Gamma. \tag{$\star$}$$

Далее изучался вопрос об ослаблении условий, накладываемых на Γ. Сначала соответствующий результат был получен для кусочно-гладкой (с дополнительными ограничениями, связанными с угловыми точками) кривой [9, 10], затем для кривой, обладающей свойством соизмеримости дуги и хорды [11], и, наконец, для квазиконформной кривой [12].

Оказалось, что если функция f может быть приближена многочленами P_n степени не выше n, чтобы выполнялось ($\star$), то f аналитична во внутренности G и является гёльдеровой с показателем α для любой жордановой области G [13, 14]. Однако в случае, когда Γ имеет заострения, то есть точки, в которых угол между односторонними касательными нулевой, приближение многочленами со скоростью $C\rho^{\alpha}_{1+1/n}(z)$ возможно не для всех гёльдеровых функций [15, 16].

Оказалось, что если функция f может быть приближена многочленами P_n степени не выше n, чтобы выполнялось ($\star$), то f аналитична во внутренности G и является гёльдеровой с показателем α для любой жордановой области G [13, 14]. Однако в случае, когда Γ имеет заострения, то есть точки, в которых угол между односторонними касательными нулевой, приближние многочленами со скоростью $C\rho^{\alpha}_{1+1/n}(z)$ возможно не для всех гёльдеровых функций [15, 16]. В связи с этим обстоятельством была введена модифицированная «шкала» $\rho^{\star}_{1+1/n}$, которая оказалось применимой для конструктивного описания класса гёльдеровых функций на жордановых областях с непустой внутренностью. В случае, когда внутренность G пуста, то есть $G = \Gamma$, задача становится куда более запутанной. Например, для $G = \Gamma_\beta = [-1,\, 0] \cup [0,\, e^{i\beta}]$, $\beta \in (0,\, \pi)$ простые комбинации упомянутых «шкал» не дают нужного результата [17]. Даже для случая Γ_β потребовались содержательные дополнительные конструкции.

В 1994 году В. В. Андриевский [18] нашёл другой подход к задаче конструктивного описания классов функций на жордановых дугах. Он использовал равномерное приближение функции многочленами вместе с равномерными оценками на их производные в окрестности дуги. Также в его работах показано [19], что для конструктивного описания гёльдеровых классов на континуумах в $\mathbb{C}$ можно использовать гармонические многочлены.

Заметим, что вышеупомянутые конструкции со «шкалами» $\rho_{1+1/n}$ и $\rho^{\star}_{1+1/n}$ пригодны для конструктивного описания классов Гёльдера только для плоских кривых, поскольку эти построения используют конформное отображение дополнения области на внешность единичного круга. Тем не менее данный вопрос можно исследовать и для гёльдеровых классов на пространственных кривых. В работе Т. А. Алексеевой и Н. А. Широкова [20], опубликованной в 2020 году, дано конструктивное описание класса гёльдеровых функций на незамкнутой пространственной кривой, дуга которой соизмерима с хордой, в терминах скорости приближения функциями, гармоническими в окрестности кривой. Помимо скорости приближения даны равномерные оценки на градиент приближающей функции. Размер окрестности напрямую связан со скоростью приближения: чем точнее приближение, тем у́же окрестность.

Сформулируем этот результат подробнее. Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t}\,dt + x\int_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \leqslant C\omega(x), \quad x\in(0,\,+\infty). \tag{$\diamondsuit$}$$

Через $H^\omega(L)$ обозначим пространство всех функций $f\colon L\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $|f(x)-f(y)|\leqslant C_f\omega(\|x-y\|)$. Функции из $H^\omega(L)$ разумно называть гёльдеровыми на L, ведь $\omega(t)=t^\alpha$ удовлетворяет условию ($\diamondsuit$) при $C=1/\alpha+1/(1-\alpha)$. Обозначим ещё через $\Lambda_\varepsilon(L)$ окрестность L радиуса ε. Тогда имеет место следующая

Теорема A. *Пусть L — кривая в $\mathbb{R}^3$, дуга которой соизмерима с хордой, $f\colon L\to\mathbb{R}$. Тогда f принадлежит классу $H^\omega(L)$, если и только если для любого $\delta>0$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция u_δ, что*

$$|f(x)-u_\delta(x)|\leqslant C_1(f,\,L)\omega(\delta), \quad x\in L;$$

$$\|\operatorname{grad} u_\delta(x)\|\leqslant C_2(f,\,L)\frac{\omega(\delta)}{\delta}, \quad x\in\Lambda_{\delta/2}(L).$$

В статье 2022 года тех же авторов [21] приводится аналогичный результат для приближения в L^p-норме. Пусть L — снова пространственная кривая, обладающая свойством соизмеримости дуги и хорды. Для $f\colon L\to\mathbb{R}$, $x\in L$ и $r>0$ положим

$$\Delta^* f(x,\,r)=\sup_{y\in L,\,\|y-x\|\leqslant r}|f(y)-f(x)|.$$

Через $H_p^\alpha(L)$ обозначим пространство всех функций f, удовлетворяющих соотношению

$$\left(\int_L (\Delta^* f(t,\,r))^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant C_f r^\alpha$$

где $\alpha\in(0,\,1)$. Через $\widetilde{H}_p^\alpha(L)$ обозначим подпространство $H_p^\alpha(L)$ функций f, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\Delta^* f(x,\,r)\leqslant C_f\left(\frac{r}{R}\right)^\varepsilon \Delta^* f(y,\,R)$$

при $\varepsilon=\varepsilon(f)>0$, $r\in(0,\,R]$, $\|x-y\|\leqslant R$, $x,\,y\in L$. Для функции v, дифференцируемой в $\Lambda_\delta(L)$, положим

$$\operatorname{grad}_\delta v(x)=\sup_{\|y-x\|\leqslant\delta/2}\|\operatorname{grad}\,v(y)\|,$$

а для F, заданной на L, положим

$$\max_\delta F(x) = \sup_{y\in L, \|y-x\|\leqslant\delta} |F(y)|.$$

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема B. *Пусть* $f \in \widetilde{H}_p^\alpha(L)$, $\alpha \in (0,\,1)$, $p > 1/\alpha$. *Тогда для любого* $\delta \in (0,\,|L|)$ *существует такая гармоническая в* $\Lambda_\delta(L)$ *функция* u_δ, *что*

$$\left(\int\limits_L (\max_\delta (f(t) - u_\delta(t)))^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant C_1(f,\,L)\delta^\alpha, \qquad (*_1)$$

$$\left(\int\limits_L (\operatorname{grad}_\delta u_\delta(t))^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant C_2(f,\,L)\delta^{\alpha-1}. \qquad (*_2)$$

Теорема C. *Пусть функция* f *такова, что для любого* $\delta \in (0,\,2|L|)$ *существует такая гармоническая в* $\Lambda_\delta(L)$ *функция* u_δ, *что выполнены условия* $(*_1)$ *и* $(*_2)$. *Тогда* $f \in H_p^\alpha(L)$.

Построение приближающей функции (как в равномерном случае, так и в случае L^p-нормы) опирается на конструкцию так называемого *псевдогармонического расширения*, заключающуюся в непрерывном продолжении гёльдеровой функции на всё пространство, обладающем некоторыми дополнительными свойствами. Именно, в [20] доказано следующее утверждение.

Теорема D. *Пусть* $f \in H^\omega(L)$. *Тогда существует такая функция* $f_0 \in C(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus L)$, *что* $f_0|_L = f$,

$$\|\operatorname{grad} f_0(x)\| \leqslant C_1 \frac{\omega(\operatorname{dist}(x,\,L))}{\operatorname{dist}(x,\,L)},$$

$$f_0(x) = 0 \text{ \textit{при} } \|x\| \geqslant R_0,\ L \subset B(\mathbb{O},\,R_0),$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C_2 \frac{\omega(\operatorname{dist}(x,\,L))}{(\operatorname{dist}(x,\,L))^2},$$

где $B(\mathbb{O},\,R_0)$ *— открытый шар радиуса* R_0 *с центром в нуле.*

Диссертация посвящена обобщению теорем A, B, C и D на многомерный случай.

Объект исследования

Классы Гёльдера, заданные на специальных многомерных компактах. Равномерное приближение гёльдеровых функций гармоническими в сужающихся окрестностях этих компактов функциями. Классы Гёльдера в смысле L^p-нормы. Приближение в L^p норме гёльдеровых функций гармоническими.

Степень разработанности темы

До сих пор вопросы о равномерном приближении или приближении в L^p-норме гёльдеровых функций, заданных на многомерных компактах, гармоническими в окрестностях этих компактов функциями, по всей видимости, не рассматривались.

Цель работы

Построить многомерный аналог так называемого псевдогармонического расширения гёльдеровой функции, заданной на компакте, представляющем собой обобщение трёхмерной незамкнутой пространственной кривой, обладающей свойством соизмеримости дуги и хорды. Получить конструктивное описание классов Гёльдера, заданных на таких компактах, в терминах скорости приближения гармоническими в сужающихся окрестностях компакта функциями. Доказать прямую и обратную теоремы приближения гёльдеровых функций гармоническими в L^p-норме.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Методика исследования

В работе применяется гармонический анализ и методы теории аппроксимации.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при дальнейшем изучении конструктивного описания гёльдеровых функций на множествах в $\mathbb{R}^n$.

Положения, выносимые на защиту

1. Построение псевдогармонического расширения в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) функции из класса Гёльдера, заданной на множестве, представляющем собой обобщение пространственной кривой, обладающей свойством соизмеримости дуги и хорды (так называемом хорошем компакте).

2. Введение гёльдеровского пространства в L^p-норме на хорошем компакте в $\mathbb{R}^n$.

3. Построение псевдогармонического расширения функции, принадлежащей классу, упомянутому в п. 2.

4. Теорема о возможности равномерного приближения функции из класса Гёльдера, заданной на хорошем компакте, функциями, гармоническими в сужающихся окрестностях компакта.

5. Обратная теорема приближения гармоническими функциями в сужающихся окрестностях хорошего компакта в равномерной норме.

6. Теорема о возможности приближения в L^p-норме функции из класса, упомянутого в п. 2., функциями, гармоническими в сужающихся окрестностях компакта.

7. Обратная теорема приближения гармоническими функциями в сужающихся окрестностях хорошего компакта в L^p-норме.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались автором на конференции «Герценовские чтения» (Санкт-Петербург, 2021, 2023 гг.), Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций (2023 г.) и на семинаре Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН «Комплексный и гармонический анализ» (Уфа, 2023 г.).

Публикации

Результаты по теме диссертации изложены в трёх статьях [27–29] в рецензируемых научных журналах, входящих в список, рекомендованный ВАК. Статьи написаны без соавторов.

Личный вклад автора

Результаты диссертации получены лично соискателем.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы, а также заключения и библиографии. Общий объём диссертации составляет 66 страниц. Библиография содержит 29 наименований.

Краткое содержание диссертации

Обзор первой главы

В работах [20, 21] построение приближающей функции (как в равномерном случае, так и в случае L^p-нормы) опирается на конструкцию так называемого *псевдогармонического расширения*, восходящую к идеям Е. М. Дынькина [24, 25]. Первая глава посвящена построению псевдогармонического расширения в многомерном случае.

Прежде всего распространим понятие пространственной кривой, дуга которой соизмерима с хордой, на случай большего числа измерений.

Определение. *Множество $L \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$ назовём хорошим компактом, если существует такое отображение $\varphi\colon [0,\ 1]^{m-2} \to \mathbb{R}^m$, что*

$$\widetilde{C}_1\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \widetilde{C}_2\|x_1 - x_2\|$$

и $\varphi([0,\ 1]^{m-2}) = L$.

Пусть K — произвольное компактное подмножество L. Обозначим через $d(x)$ расстояние от x до K, а через $\nu(x)$ — какую-нибудь точку из K, реализующую это расстояние. Пусть также $\Delta^* f(x, r)$ означает то же, что выше. Теперь мы готовы сформулировать основной результат главы.

Теорема 1. *Пусть f ограничена на K (в частности $\Delta^* f(x, r)$ равномерно ограничена). Тогда существует псевдогармоническое расширение f, то есть такая функция $f_0 \in C^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$, что*

$$f_0(x) = 0 \text{ при } \|x\| \geqslant R_0,\ K \subset B(\mathbb{O}, R_0),$$

$$\|\operatorname{grad} f_0(x)\| \leqslant C_1 \frac{\Delta^* f(\nu(x), C_3 d(x))}{d(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K,$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C_2 \frac{\Delta^* f(\nu(x), C_3 d(x))}{d^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K,$$

где $C_i = C_i(f, K)$. Кроме того, если $x_0 \in K$ — точка непрерывности f, а точки $x_n \notin K$ таковы, что $x_n \to x_0$, то $f_0(x_n) \to f(x_0)$. В частности, если f непрерывна на K, то f_0 непрерывна на $\mathbb{R}^m$, и $f_0|_K = f$.

Построение f_0, если говорить совсем кратко, производится последовательным взятием средних значений некоторых функций по шарам с переменными центром и радиусом. Через $B(x, r)$ обозначим открытый шар с центром x и радиусом r, через $\overline{B}(x, r)$ — замкнутый, $S(x, r)$ — сферу, его ограничивающую. Пусть λ обозначает меру Лебега на $\mathbb{R}^m$, а σ — $(m-1)$-мерную меру Хаусдорфа, нормированную так, чтобы мера единичной сферы имела привычное значение. В процессе доказательства нужных оценок используются следующие леммы. Функция f ниже (как и все функции, рассматриваемые в работе) предполагается вещественнозначной.

Лемма 1. *Пусть $B(x, r)$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $F \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(F)$, $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$. Тогда функция g, определённая равенством*

$$g(x) = \int\limits_{B(x,r)} f(y)\, d\lambda(y),$$

дифференцируема в точке x по направлению v, и

$$g'_v(x) = \int\limits_{B(x,r)} f'_v(y)\, d\lambda(y).$$

Лемма 2. *Пусть $B(x, r(x))$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $F \subset \mathbb{R}^m$, где $r \in C^1(F)$, $f \in C(F)$; $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$. Тогда функция g, определённая равенством*

$$g(x) = \int\limits_{B(x,r(x))} f(y)\, d\lambda(y),$$

дифференцируема в точке x по направлению v, и

$$g'_v(x) = \int\limits_{S(x,r(x))} (n(y) \cdot v + r'_v(x)) f(y)\, d\sigma(y),$$

где $n(y)$ — внешняя единичная нормаль к сфере в точке y, $x \cdot y$ — скалярное произведение элементов $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Лемма 3. *Пусть $S(x, r(x))$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $F \subset \mathbb{R}^m$, где $r \in C^1(F)$, $f \in C^1(F)$; $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$. Тогда функция g, определённая равенством*

$$g(x) = \int\limits_{S(x,r(x))} f(y)\, d\sigma(y),$$

дифференцируема в точке x по направлению v, и

$$g'_v(x) = \int\limits_{S(x,r(x))} r'_v(x) f'_{n(y)}(y)\, d\sigma(y) + \\ + (m-1) \int\limits_{S(x,r(x))} \frac{r'_v(x)}{r(x)} f(y)\, d\sigma(y) + \int\limits_{S(x,r(x))} f'_v(y)\, d\sigma(y).$$

Обзор второй главы

Эта глава посвящена случаю равномерного приближения. Пусть K — компактное подмножество хорошего компакта. Основным результатом главы является следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы $f\colon K \to \mathbb{R}$ принадлежала классу $H^\omega(K)$, где ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию ($\diamondsuit$), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta > 0$ существовала такая гармоническая в $\Lambda_\delta(K)$ функция u_δ, что*

$$|f(x) - u_\delta(x)| \leqslant C_1(f, K)\omega(\delta), \quad x \in K;$$

$$\|\operatorname{grad} u_\delta(x)\| \leqslant C_2(f,\, K)\frac{\omega(\delta)}{\delta}, \quad x \in \Lambda_{\delta/2}(K).$$

Также во второй главе показано, что приведённые результаты можно распространить на компакты меньших размерностей, а именно на компакты коразмерности ℓ в смысле следующего определения.

Определение. *Множество $L \subset \mathbb{R}^m$ назовём хорошим компактом коразмерности ℓ ($\ell = 2, 3, \dots, m-1$), если существует такое отображение $\varphi\colon [0,\, 1]^{m-\ell} \to \mathbb{R}^m$, что*

$$\widetilde{C}_5\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \widetilde{C}_6\|x_1 - x_2\|$$

и $\varphi([0,\, 1]^{m-\ell}) = L$.

Обзор третьей главы

Эта глава посвящена случаю приближения в L^p-норме. Пусть L — хороший компакт, μ — $(m-2)$-мерная мера Хаусдорфа на $\mathbb{R}^m$. Через $H_p^\alpha(L)$ обозначим пространство всех функций f, удовлетворяющих неравенству

$$\|\Delta^* f(\cdot,\, r)\|_p \leqslant C_f r^\alpha$$

для всех $r > 0$, где $\alpha \in (0,\, 1)$, а норма взята в пространстве $L^p(L,\, \mu)$. Через $\widetilde{H}_p^\alpha(L)$ обозначим подпространство $H_p^\alpha(L)$ функций f, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\Delta^* f(x,\, r) \leqslant C_f \left(\frac{r}{R}\right)^\varepsilon \Delta^* f(y,\, R)$$

при $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$, $r \in (0,\, R]$, $\|x - y\| \leqslant R$, $x,\, y \in L$. Для функции v, дифференцируемой в $\Lambda_\delta(L)$, положим

$$\operatorname{grad}_\delta v(x) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\, \delta/2)} \|\operatorname{grad} v(y)\|,$$

а для F, заданной на L, положим

$$\max\nolimits_\delta F(x) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\, \delta) \cap L} |F(y)|.$$

Основным результатом этой главы являются следующие две теоремы.

Прямая теорема для класса $\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{L})$. *Пусть $f \in \widetilde{H}_p^{\alpha}(L)$, $p \geqslant 1$. Тогда для любого $\delta \in (0,\, 1/2)$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция u_δ, что*

$$\|\max\nolimits_\delta (f(\cdot) - u_\delta(\cdot))\|_p \leqslant C_1(f,\, L)\delta^\alpha, \tag{$*_3$}$$

$$\|\operatorname{grad}_\delta u_\delta(\cdot)\|_p \leqslant C_2(f,\, L)\delta^{\alpha-1}. \tag{$*_4$}$$

Обратная теорема для класса $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{L})$. *Пусть функция f такова, что для любого $\delta \in (0,\, 1/2)$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция u_δ, что выполнены условия ($*_3$) и ($*_4$). Тогда $f \in H_p^{\alpha}(L)$.*

Отметим, что требование $p > 1/\alpha$, указанное в теореме B, оказалось излишним.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Построен многомерный аналог псевдогармонического расширения функции из класса Гёльдера, заданной на компактном подмножестве хорошего компакта — множества, представляющего собой обобщение понятия пространственной кривой, дуга которой соизмерима с хордой, на бóльшие размерности.

2. Введены классы Гёльдера в L^p-норме на хорошем компакте, построено псевдогармоническое расширение функции из этого класса.

3. Доказана теорема о возможности приближения функции, принадлежащей классу Гёльдера на компактном подмножестве хорошего компакта, функциями, гармоническими в сужающихся окрестностях компакта. Также доказана соответствующая ей обратная теорема.

4. Для более узкого класса, чем класс, упомянутый в п. 2, доказана прямая теорема приближения L^p-норме функциями, гармоническими в сужающихся окрестностях компакта. Обратная теорема доказана для всего класса.

Литература

[1] *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische summen gegebener Ordnung
Göttingen: Dieterich'schen Universität – Buchdruckerei, 1911.

[2] *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени
Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер., 13:2-3, с. 49–144, 1912.

[3] *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 10:4, с. 295–322, 1946.

[4] *Тиман А. Ф.* Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси
Доклады Ак. наук СССР, 78, с. 17–20, 1951.

[5] *Дзядык В. К.* О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip α $(0 < \alpha < 1)$ на конечном отрезке вещественной оси
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 20:5, с. 623–642, 1956.

[6] *Дзядык В. К.* О проблеме С. М. Никольского в комплексной области
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 23:5, с. 697–736, 1959.

[7] *Дзядык В. К.* К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 26:6, с. 797–824, 1962.

[8] *Дзядык В. К.* Обратные теоремы теории приближения функций в комплекс-

ных областях
Укр. мат. журн., 15:4, с. 365–375, 1963.

[9] *Дзядык В. К.* О приближении аналитических функций в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей
В сб. «Третья летняя матем. школа». Конструктивная теория функций. Кацивели, июнь-июль 1965, с. 29–83, 1966.

[10] *Лебедев Н. А., Широков Н. А.* О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами
Вестник Академии наук Армянской ССР. Математика, 6(4), с. 311–341, 1971.

[11] *Дзядык В. К.* К теории приближения функций на замкнутых множествах комплексной плоскости (по поводу одной проблемы С. М. Никольского)
Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, том 134, с. 63–114, 1975.

[12] *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей
Матем. сб., 102(144):3, с. 331–361, 1977.

[13] *Лебедев Н. А.* Об обратных теоремах равномерного приближения
Доклады Ак. наук СССР, 171:4, с. 788–790, 1966.

[14] *Лебедев Н. А., Тамразов П. М.* Обратные теоремы приближения на регулярных компактах комплексной плоскости
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 34:6, с. 1340–1390, 1970.

[15] *Андриевский В. В.* Геометрическое строение областей и прямые теоремы конструктивной теории функций
Матем. сб., 126(168):1, с. 41–58, 1985.

[16] *Shirokov N. A.* Constructive Descriptions of Functional Classes by Polynomial Approximations
Journal of Mathematical Sciences, 105, pp. 2269–2291, 2001.

[17] *Широков Н. А.* Аппроксимативная энтропия континуумов
Доклады Ак. наук СССР, 235:3, с. 546–549, 1977.

[18] *Андриевский В. В., Маймескул В. В.* Конструктивное описание некоторых классов функций на квазигладких дугах
Изв. РАН, сер. матем, 58:1, с. 195–208, 1994.

[19] *Андриевский В. В.* О приближении функций гармоническими полиномами
Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, том 180, с. 28–29, 1989.

[20] *Alexeeva T. A., Shirokov N. A.* Constructive description of Hölder-like classes on an arc in $\mathbb{R}^3$ by means of harmonic functions
Journal of Approximation Theory, 249, 2020.

[21] *Алексеева Т. А., Широков Н. А.* Классы Гёльдера в L^p-норме на chord-arc кривой в $\mathbb{R}^3$
Алгебра и анализ, 34:4, с. 1–21, 2022.

[22] *Gordon W. J., Wixom J. A.* Pseudo-harmonic interpolation on convex domains
SIAM Journal on Numerical Analysis, 11:5, pp. 909–933, 1974.

[23] *Morse M., Heins M.* Topological methods in the theory of functions of a single complex variable
Annals of Math., 46, pp. 600–666, 1945.

[24] *Дынькин Е. М.* О равномерном приближении функций в жордановых областях
Сиб. матем. журн., 18:4, с. 775–786, 1977.

[25] *Dyn'kin E. M.* The Pseudoanalytic extension
Journal d Analyse Mathematique, 60, pp. 45–70, 1993.

[26] *Михлин С. Г.* Курс математической физики
Москва, Наука, 1968.

[27] *Павлов Д. А.* Конструктивное описание гёльдеровых классов на компактах в $\mathbb{R}^3$.
Зап. научн. сем. ПОМИ, 491, с. 119–144, 2020.

[28] *Павлов Д. А.* Конструктивное описание гёльдеровых классов на некоторых многомерных компактах

Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 8 (66), вып. 3, с. 430–441, 2021.

[29] *Павлов Д. А.* Приближение гёльдеровых функций гармоническими в L^p-норме на некоторых многомерных компактах
Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 10 (68), вып. 2, с. 259–269, 2023.

Диссертант Д. А. Павлов