ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А. И. ГЕРЦЕНА»

На правах рукописи

ПАВЛОВ ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ НА МНОЖЕСТВАХ В $\mathbb{R}^n$

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Широков Николай Алексеевич

Санкт-Петербург – 2023

# Оглавление

**Введение** **3**

**Глава 1. Псевдогармоническое расширение** **15**

1.1. Предварительные замечания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

1.2. Леммы о дифференцировании . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

1.3. Построение псевдогармонического расширения . . . . . . . . . . . . 22

**Глава 2. Приближение в равномерной норме** **31**

2.1. Предварительные замечания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

2.2. Свойства псевдогармонического расширения . . . . . . . . . . . . . 33

2.3. Построение приближающей функции . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

2.4. Обобщение на компакты меньших размерностей . . . . . . . . . . . 46

**Глава 3. Приближение в $L^p$-норме** **50**

3.1. Предварительные замечания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

3.2. Свойства псевдогармонического расширения . . . . . . . . . . . . . 53

3.3. Построение приближающей функции . . . . . . . . . . . . . . . . . 56

**Заключение** **62**

**Литература** **63**

# Введение

Исследование конструктивного описания класса гёльдеровых функций в терминах скорости приближения функциями, взятыми из некоторого специального класса (алгебраические многочлены, тригонометрические многочлены, рациональные функции и т. п.) началось с классических работ Д. Джексона [1] и С. Н. Бернштейна [2], опубликованных в начале двадцатого века. Неравенство Джексона и теорема Бернштейна вместе дают следующее утверждение: $2\pi$-периодическая функция $f$ является гёльдеровой с показателем $\alpha \in (0,\, 1)$ тогда и только тогда, когда для любого натурального $n$ существует такой тригонометрический многочлен $T_n$ степени не выше $n$, что

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x) - T_n(x)| \leqslant \frac{C_f}{n^\alpha},$$

где константа $C_f$ зависит лишь от функции $f$.

Кажущаяся естественно вытекающей отсюда задача конструктивного описания класса гёльдеровых на отрезке функций в терминах скорости приближения алгебраическими многочленами была решена только в 1956 году. Дело в том, что обратные теоремы, соответствующие неравенству Джексона в этом случае, не удавалось доказать. Выяснилось, что имеют место более сильные оценки, зависящие от положения точки на отрезке. В итоге, опираясь на оценки, полученные С. М. Никольским [3] и А. Ф. Тиманом [4], В. К. Дзядык [5] получил следующий результат: функция $f$, заданная на отрезке $[-1,\, 1]$, является гёльдеровой с показателем $\alpha \in (0,\, 1)$ тогда и только тогда, когда для любого натурального $n$ существует такой алгебраический многочлен $P_n$ степени не выше $n$, что при всех $x \in [-1,\, 1]$ выполнено

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C_f}{n^\alpha}\left((1-x^2)^{\alpha/2} + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

В дальнейшем задачи конструктивного описания классов функций, заданных на областях комплексной плоскости, сыграли весьма существенную роль в теории аппроксимации. С конца пятидесятых годов XX века многие авторы исследовали следующий вопрос. Пусть $G$ — замкнутая жорданова область на комплексной плоскости. Можно ли построить какую-то функцию, являющуюся «шкалой приближения» (как функция в правой части последнего неравенства) функций, аналитических во внутренности $G$ и непрерывных на её замыкании, алгебраическими многочленами, чтобы из возможности приближения можно было сделать вывод о гладкости (или гёльдеровости) приближаемой функции? В. К. Дзядык [6–8] ввёл в рассмотрение такую функцию $\rho_{1+1/n}$ на границе $\Gamma$ области $G$ (её конструкция непосредственно связана с конфморным отображением дополнения $G$ на внешность единичного круга), что при некоторых условиях на $\Gamma$ условие гёльдеровости $f$ с показателем $\alpha \in (0,\, 1)$ равносильно возможности для любого натурального $n$ подобрать такой многочлен $P_n$ степени не выше $n$, что выполнено неравенство

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant C_f \rho^{\alpha}_{1+1/n}(z), \quad z \in \Gamma. \tag{$\star$}$$

То есть для некоторых областей функция $\rho_{1+1/n}$ явила собой успешную «шкалу» для конструктивного описания вышеупомянутых классов функций. Следующей целью в этом направлении стало ослабление дополнительных условий, накладываемых на $\Gamma$. Сначала соответствующий результат был получен для кусочно-гладкой (с дополнительными ограничениями, связанными с угловыми точками) кривой [9, 10], затем для кривой, обладающей свойством соизмеримости дуги и хорды [11], и, наконец, для квазиконформной кривой [12].

Оказалось, что если функция $f$ может быть приближена многочленами $P_n$ степени не выше $n$, чтобы выполнялось ($\star$), то $f$ аналитична во внутренности $G$ и является гёльдеровой с показателем $\alpha$ для любой жордановой области $G$ [13, 14]. Однако в случае, когда $\Gamma$ имеет заострения, то есть точки, в которых угол между односторонними касательными нулевой, приближние многочленами со скоростью $C\rho^{\alpha}_{1+1/n}(z)$ возможно не для всех гёльдеровых функций [15, 16]. В связи с этим обстоятельством была введена модифицированная «шкала» $\rho^{\star}_{1+1/n}$, которая оказалось применимой для конструктивного описания класса гёльдеровых функций на жордановых областях с непустой внутренностью. В случае, когда внутренность $G$ пуста, то есть $G = \Gamma$, задача становится куда более запутанной. Например, для $G = \Gamma_\beta = [-1,\, 0] \cup [0,\, e^{i\beta}]$, $\beta \in (0,\, \pi)$

простые комбинации упомянутых «шкал» не дают нужного результата, как показал в своей работе Н. А. Широков [17]. Даже для случая $\Gamma_\beta$ потребовались содержательные дополнительные конструкции.

В 1994 году В. В. Андриевский [18] нашёл другой подход к задаче конструктивного описания классов функций на жордановых дугах. Он использовал равномерное приближение функции многочленами вместе с равномерными оценками на их производные в окрестности дуги. Также в его работах показано [19], что для конструктивного описания гёльдеровых классов на континуумах в $\mathbb{C}$ можно использовать гармонические многочлены.

Заметим, что вышеупомянутые конструкции со «шкалами» $\rho_{1+1/n}$ и $\rho^\star_{1+1/n}$ пригодны для конструктивного описания классов Гёльдера только для плоских кривых, поскольку эти построения используют конформное отображение дополнения области на внешность единичного круга. Тем не менее данный вопрос можно исследовать и для гёльдеровых классов на пространственных кривых. В работе Т. А. Алексеевой и Н. А. Широкова [20], опубликованной в 2020 году, дано конструктивное описание класса гёльдеровых функций, заданных на пространственной незамкнутой кривой, дуга которой соизмерима с хордой, в терминах скорости приближения функциями, гармоническими в окрестности кривой. Помимо скорости приближения даны равномерные оценки на градиент приближающей функции. Размер окрестности напрямую связан со скоростью приближения: чем точнее приближение, тем у́же окрестность.

Сформулируем этот результат подробнее. Пусть $\omega$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}\,dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \leqslant C\omega(x), \quad x \in (0, +\infty). \qquad (\diamondsuit)$$

Через $H^\omega(L)$ обозначим пространство всех функций $f\colon L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $|f(x)-f(y)| \leqslant C_f\omega(\|x-y\|)$, где $\|x-y\|$ — евклидово расстояние между точками $x,\, y \in \mathbb{R}^3$. Функции из $H^\omega(L)$ разумно называть гёльдеровыми на $L$, ведь $\omega(t) = t^\alpha$ удовлетворяет условию $(\diamondsuit)$ при $C = 1/\alpha + 1/(1-\alpha)$. Обозначим ещё через $\Lambda_\varepsilon(L)$ окрестность $L$ радиуса $\varepsilon$. Тогда имеет место следующая

**Теорема А.** *Пусть $L$ — кривая в $\mathbb{R}^3$, дуга которой соизмерима с хордой,*

*$f\colon L\to\mathbb{R}$. Тогда $f$ принадлежит классу $H^\omega(L)$, если и только если для любого $\delta>0$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция $u_\delta$, что*

$$|f(x)-u_\delta(x)|\leqslant C_1(f,\,L)\omega(\delta),\quad x\in L;$$

$$\|\mathrm{grad}\,u_\delta(x)\|\leqslant C_2(f,\,L)\frac{\omega(\delta)}{\delta},\quad x\in\Lambda_{\delta/2}(L).$$

В статье 2022 года тех же авторов [21] приводится аналогичный результат для приближения в $L^p$-норме. Пусть $L$ — снова пространственная кривая, обладающая свойством соизмеримости дуги и хорды. Для $f\colon L\to\mathbb{R}$, $x\in L$ и $r>0$ положим

$$\Delta^*f(x,\,r)=\sup_{y\in L,\,\|y-x\|\leqslant r}|f(y)-f(x)|.$$

Через $H_p^\alpha(L)$ обозначим пространство всех функций $f$, удовлетворяющих соотношению

$$\left(\int\limits_L(\Delta^*f(t,\,r))^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant C_f r^\alpha$$

где $\alpha\in(0,\,1)$. Через $\widetilde{H}_p^\alpha(L)$ обозначим подпространство $H_p^\alpha(L)$ функций $f$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\Delta^*f(x,\,r)\leqslant C_f\left(\frac{r}{R}\right)^\varepsilon\Delta^*f(y,\,R)$$

при $\varepsilon=\varepsilon(f)>0$, $r\in(0,\,R]$, $\|x-y\|\leqslant R$, $x,\,y\in L$. Для функции $v$, дифференцируемой в $\Lambda_\delta(L)$, положим

$$\mathrm{grad}_\delta\,v(x)=\sup_{\|y-x\|\leqslant\delta/2}\|\mathrm{grad}\ v(y)\|,$$

а для $F$, заданной на $L$, положим

$$\max\nolimits_\delta F(x)=\sup_{y\in L,\|y-x\|\leqslant\delta}|F(y)|.$$

Тогда справедливы следующие теоремы.

**Теорема B.** *Пусть* $f \in \widetilde{H}_p^\alpha(L)$, $\alpha \in (0,\,1)$, $p > 1/\alpha$. *Тогда для любого* $\delta \in (0,\,|L|)$ *существует такая гармоническая в* $\Lambda_\delta(L)$ *функция* $u_\delta$, *что*

$$\left(\int\limits_L (\max\nolimits_\delta (f(t) - u_\delta(t)))^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant C_1(f,\,L)\delta^\alpha, \tag{$*_1$}$$

$$\left(\int\limits_L (\operatorname{grad}_\delta u_\delta(t))^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant C_2(f,\,L)\delta^{\alpha-1}. \tag{$*_2$}$$

**Теорема C.** *Пусть функция* $f$ *такова, что для любого* $\delta \in (0,\,2|L|)$ *существует такая гармоническая в* $\Lambda_\delta(L)$ *функция* $u_\delta$, *что выполнены условия* $(*_1)$ *и* $(*_2)$. *Тогда* $f \in H_p^\alpha(L)$.

Построение приближающей функции (как в равномерном случае, так и в случае $L^p$-нормы) опирается на конструкцию так называемого *псевдогармонического расширения*, заключающуюся в непрерывном продолжении гёльдеровой функции на всё пространство, обладающем некоторыми дополнительными свойствами. Именно, в [20] доказано следующее утверждение.

**Теорема D.** *Пусть* $f \in H^\omega(L)$. *Тогда существует такая функция* $f_0 \in C(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus L)$, *что* $f_0|_L = f$,

$$\|\operatorname{grad} f_0(x)\| \leqslant C_1 \frac{\omega(\operatorname{dist}(x,\,L))}{\operatorname{dist}(x,\,L)},$$

$$f_0(x) = 0 \text{ при } \|x\| \geqslant R_0,\ L \subset B(\mathbb{O},\,R_0),$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C_2 \frac{\omega(\operatorname{dist}(x,\,L))}{(\operatorname{dist}(x,\,L))^2},$$

*где* $B(\mathbb{O},\,R_0)$ *— открытый шар радиуса* $R_0$ *с центром в нуле.*

В работе [21] в условиях теоремы B доказана гёльдеровость функции $f$ с показателем $\alpha - 1/p$ и показано, что для псевдогармонического расширения $f$ в этом случае имеет место следующий

**Факт.** *Разобъём кривую $L$ на $n$ равных дуг длины $\ell_n$. Пусть $x_0 \in L$. Тогда для $x \in B(x_0,\, 2\ell_n)$ верны следующие оценки:*

$$\|\mathrm{grad}\, f_0(x)\| \leqslant C_1 \ell_n^{-1} \Delta^* f(x_0,\, C_3 \mathrm{dist}\,(x,\, L)),$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C_2 \ell_n^{-2} \Delta^* f(x_0,\, C_3 \mathrm{dist}\,(x,\, L)).$$

Термин «псевдогармоническое расширение» является прямым переводом термина "pseudoharmonic extension", введённого в работе [20]. Внешне похожий, но совсем иной по смыслу термин "pseudo-harmonic extension" ввели У. Дж. Гордон и Дж. А. Уиксом в своей работе [22], опубликованной в 1974 году. Для выпуклой ограниченной области $\Omega$ с кусочно-гладкой границей и функции $f$, заданной на $\partial\Omega$, авторы так назвали функцию, продолжающую $f$ на $\Omega$ и заданную формулой

$$u(x,\, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left( \frac{d_2(\theta)}{d_1(\theta) + d_2(\theta)} f(Q_1(\theta)) + \frac{d_1(\theta)}{d_1(\theta) + d_2(\theta)} f(Q_2(\theta)) \right) d\theta,$$

где $Q_1(\theta)$ и $Q_2(\theta)$ — точки пересечения границы $\Omega$ с прямой, проходящей через $(x,\, y)$ с наклоном $\theta$, а $d_1(\theta)$ и $d_2(\theta)$ — расстояния от точки $(x,\, y)$ до точек $Q_1(\theta)$ и $Q_2(\theta)$. В статье [22] доказано, что если $\Omega$ — круг, а $f$ кусочно непрерывна, то функция $u$ является решением соответствующей задачи Дирихле, чем и объясняется название термина. Также термин "pseudoharmonic extension" не связан с изучавшимся, например, М. Морсом и М. Хейнсом [23] термином "pseudoharmonic function".

Конструкция псевдогармонического расширения восходит к идеям Е. М. Дынькина, который рассматривал псевдоаналитическое расширение (или продолжение) функций, заданных на областях комплексной плоскости [24, 25], в вопросах, связанных с равномерным приближением алгебраическими многочленами степени $n$ со скоростью $Cn^{-\alpha}$. Сформулируем один из его результатов.

Пусть $G$ — достаточно хорошая (не будем уточнять, дабы не перегружать введение определениями из комплексного анализа) область на комплексной плоскости, $\varphi$ — конформное отображение внешности замыкания $G$ на внешность замкнутого единичного круга с обычной нормировкой

$$\varphi(\infty) = \infty, \quad \varphi'(\infty) > 0.$$

Пусть ещё $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$. Тогда имеет место

**Теорема E.** *Пусть функция $f$ аналитична в $G$ и непрерывна в $\overline{G}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

*1. Существуют алгебраические многочлены $P_n$ степени $n$, такие, что*

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant \frac{C}{n^\alpha}, \quad z \in G.$$

*2. Функция $f$ допускает непрерывное продолжение $F$ на $\mathbb{C}$, непрерывно дифференцируемое в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ и такое, что*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\right| \leqslant C|\varphi'(z)|(|\varphi(z)| - 1)^{\alpha - 1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}.$$

Конечно, в теореме E используется специфический для комплексного анализа аппарат — конформное отображение — тем не менее определённую аналогию между теоремами D и E можно проследить. Теорема D говорит нам, что гёльдерову функцию можно непрерывно продолжить на всё пространство так, что величина «негармоничности» продолжения будет оцениваться через расстояние до компакта и модуль непрерывности. Как мы упоминали ранее, условие 1 теоремы E влечёт гёльдеровость $f$ с показателем $\alpha$, поэтому фактически мы получаем, что гёльдеровость влечёт возможность продолжения, величину «неаналитичности» которого можно оценить через $\alpha$. Если положить $\omega(t) = t^\alpha$ в теореме D, то похожесть оценок станет ещё более явной.

Однако эта внешняя похожесть не должна ввести в заблуждение: идеи, на которых основаны эти построения, довольно далеки друг от друга. Как уже неоднократно упоминалось, комплексно-аналитические рассуждения нельзя перенести на случай пространства.

Перейдём к обзору основной части текста. Диссертация посвящена обобщению теорем A, B, C и D на многомерный случай.

### Обзор первой главы

Первая глава посвящена построению псевдогармонического расширения в многомерном случае.

Прежде всего распространим понятие пространственной кривой, дуга которой соизмерима с хордой, на случай большего числа измерений.

**Определение.** *Множество $L \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$ назовём хорошим компактом, если существует такое отображение $\varphi\colon [0,\,1]^{m-2} \to \mathbb{R}^m$, что*

$$\widetilde{C}_1\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \widetilde{C}_2\|x_1 - x_2\|$$

*и $\varphi([0,\,1]^{m-2}) = L$.*

Пусть $K$ — произвольное компактное подмножество $L$. Обозначим через $d(x)$ расстояние от $x$ до $K$, а через $\nu(x)$ — какую-нибудь точку из $K$, реализующую это расстояние. Пусть также, как и выше,

$$\Delta^* f(x,\,r) = \sup_{y \in L,\,\|y-x\| \leqslant r} |f(y) - f(x)|.$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат главы.

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ задана и ограничена на $K$. Тогда существует такая функция $f_0 \in C^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$, что*

$$f_0(x) = 0 \text{ при } \|x\| \geqslant R_0,\ K \subset B(\mathbb{O},\,R_0),$$

$$\|\operatorname{grad} f_0(x)\| \leqslant C_1 \frac{\Delta^* f(\nu(x),\,C_3 d(x))}{d(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K,$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C_2 \frac{\Delta^* f(\nu(x),\,C_3 d(x))}{d^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K,$$

*где $C_i = C_i(f,\,K)$. Кроме того, если $x_0 \in K$ — точка непрерывности $f$, а точки $x_n \notin K$ таковы, что $x_n \to x_0$, то $f_0(x_n) \to f(x_0)$. В частности, если $f$ непрерывна на $K$, то $f_0$ непрерывна на $\mathbb{R}^m$, и $f_0|_K = f$.*

Функцию $f_0$, обладающую всеми свойствами, перечисленными в теореме 1, будем называть *псевдогармоническим расширением* функции $f$.

Построение $f_0$, если говорить совсем кратко, производится последовательным взятием средних значений некоторых функций по шарам с переменными центром и радиусом. Через $B(x,\,r)$ обозначим открытый шар с центром $x$ и радиусом $r$, через $\overline{B}(x,\,r)$ — замкнутый, $S(x,\,r)$ — сферу, его ограничивающую.

Пусть $\lambda$ обозначает меру Лебега на $\mathbb{R}^m$, а $\sigma$ — $(m-1)$-мерную меру Хаусдорфа, нормированную так, чтобы мера единичной сферы имела привычное значение. В процессе доказательства нужных оценок используются следующие леммы. Функция $f$ ниже (как и все функции, рассматриваемые в работе) предполагается вещественнозначной.

**Лемма 1.** *Пусть $\overline{B}(x, r)$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $F \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(F)$, $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$. Тогда функция $g$, определённая равенством*

$$g(x) = \int\limits_{B(x,r)} f(y)\, d\lambda(y),$$

*дифференцируема в точке $x$ по направлению $v$, и*

$$g'_v(x) = \int\limits_{B(x,r)} f'_v(y)\, d\lambda(y).$$

**Лемма 2.** *Пусть $\overline{B}(x, r(x))$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $F \subset \mathbb{R}^m$, где $r \in C^1(F)$, $f \in C(F)$; $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$. Тогда функция $g$, определённая равенством*

$$g(x) = \int\limits_{B(x,r(x))} f(y)\, d\lambda(y),$$

*дифференцируема в точке $x$ по направлению $v$, и*

$$g'_v(x) = \int\limits_{S(x,r(x))} (n(y) \cdot v + r'_v(x)) f(y)\, d\sigma(y),$$

*где $n(y)$ — внешняя единичная нормаль к сфере в точке $y$, $x \cdot y$ — скалярное произведение элементов $x$, $y \in \mathbb{R}^m$.*

**Лемма 3.** *Пусть $S(x, r(x))$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $F \subset \mathbb{R}^m$, где $r \in C^1(F)$, $f \in C^1(F)$; $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$.*

*Тогда функция $g$, определённая равенством*

$$g(x) = \int\limits_{S(x,\,r(x))} f(y)\,d\sigma(y),$$

*дифференцируема в точке $x$ по направлению $v$, и*

$$g'_v(x) = \int\limits_{S(x,\,r(x))} r'_v(x) f'_{n(y)}(y)\,d\sigma(y) + \\ + (m-1) \int\limits_{S(x,\,r(x))} \frac{r'_v(x)}{r(x)} f(y)\,d\sigma(y) + \int\limits_{S(x,\,r(x))} f'_v(y)\,d\sigma(y).$$

**Обзор второй главы**

Эта глава посвящена случаю равномерного приближения. Пусть $K$ — компактное подмножество хорошего компакта. Основным результатом главы является следующая

**Теорема 1.** *Для того, чтобы $f\colon K \to \mathbb{R}$ принадлежала классу $H^\omega(K)$, где $\omega$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию ($\diamondsuit$), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta > 0$ существовала такая гармоническая в $\Lambda_\delta(K)$ функция $u_\delta$, что*

$$|f(x) - u_\delta(x)| \leqslant C_1(f,\,K)\omega(\delta), \quad x \in K;$$

$$\|\operatorname{grad} u_\delta(x)\| \leqslant C_2(f,\,K)\frac{\omega(\delta)}{\delta}, \quad x \in \Lambda_{\delta/2}(K).$$

Также во второй главе показано, что приведённые результаты можно распространить на компакты меньших размерностей, а именно на компакты коразмерности $\ell$ в смысле следующего определения.

**Определение.** *Множество $L \subset \mathbb{R}^m$ назовём хорошим компактом коразмерности $\ell$ ($\ell = 2,\,3,\,\ldots,\,m-1$), если существует такое отображение $\varphi\colon [0,\,1]^{m-\ell} \to \mathbb{R}^m$, что*

$$\widetilde{C}_5\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \widetilde{C}_6\|x_1 - x_2\|$$

и $\varphi([0,\,1]^{m-\ell}) = L$.

**Обзор третьей главы**

Эта глава посвящена случаю приближения в $L^p$-норме. Пусть $L$ — хороший компакт, $\mu$ — $(m-2)$-мерная мера Хаусдорфа на $\mathbb{R}^m$. Через $H_p^\alpha(L)$ обозначим пространство всех функций $f$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\Delta^* f(\cdot,\, r)\|_p \leqslant C_f r^\alpha$$

для всех $r > 0$, где $\alpha \in (0,\,1)$, а норма взята в пространстве $L^p(L,\,\mu)$. Через $\widetilde{H}_p^\alpha(L)$ обозначим подпространство $H_p^\alpha(L)$ функций $f$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\Delta^* f(x,\, r) \leqslant C_f \left(\frac{r}{R}\right)^\varepsilon \Delta^* f(y,\, R)$$

при $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$, $r \in (0,\, R]$, $\|x - y\| \leqslant R$, $x,\, y \in L$. Для функции $v$, дифференцируемой в $\Lambda_\delta(L)$, положим

$$\operatorname{grad}_\delta v(x) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\,\delta/2)} \|\operatorname{grad} v(y)\|,$$

а для $F$, заданной на $L$, положим

$$\max\nolimits_\delta F(x) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\,\delta) \cap L} |F(y)|.$$

Основным результатом этой главы являются следующие две теоремы.

**Прямая теорема для класса $\boldsymbol{\widetilde{H}_p^\alpha(L)}$.** *Пусть $f \in \widetilde{H}_p^\alpha(L)$, $p \geqslant 1$. Тогда для любого $\delta \in (0,\, 1/2)$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция $u_\delta$, что*

$$\|\max\nolimits_\delta (f(\cdot) - u_\delta(\cdot))\|_p \leqslant C_1(f,\, L)\delta^\alpha, \tag{$*_3$}$$

$$\|\operatorname{grad}_\delta u_\delta(\cdot)\|_p \leqslant C_2(f,\, L)\delta^{\alpha-1}. \tag{$*_4$}$$

**Обратная теорема для класса $\boldsymbol{H_p^\alpha(L)}$.** *Пусть функция $f$ такова, что для любого $\delta \in (0,\, 1/2)$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция*

*$u_\delta$, что выполнены условия $(*_3)$ и $(*_4)$. Тогда $f \in H_p^\alpha(L)$.*

Отметим, что требование $p > 1/\alpha$, указанное в теореме B, оказалось излишним.

Автор сердечно благодарит своего руководителя Николая Алексеевича Широкова за постановку задачи, руководство работой, ценные замечания и интересные беседы.

# Глава 1. Псевдогармоническое расширение

## 1.1. Предварительные замечания

На протяжении всей работы $m \geqslant 3$ — фиксированное натуральное число. Через $\lambda$ будем обозначать меру Лебега на $\mathbb{R}^m$, $\sigma$ — $(m-1)$-мерную Хаусдорфа на $\mathbb{R}^m$, $B(x,\,r)$ — открытый шар радиуса $r$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^m$, $\overline{B}(x,\,r)$ — замкнутый шар с теми же радиусом и центром, $S(x,\,r)$ — сферу, ограничивающую этот шар. Меру $\sigma$ нормируем так, чтобы выполнялось привычное равенство

$$\sigma(S(\mathbb{O},\,1)) = \frac{m\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)},$$

где $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$. Под $\|x\|$ мы будем понимать стандартную евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^{m-2}$ или $\mathbb{R}^m$. Пространство, которому принадлежит рассматриваемый вектор, будет понятно из контекста.

**Определение.** *Множество $L \subset \mathbb{R}^m$ назовём хорошим компактом, если существует такое отображение $\varphi\colon [0,\,1]^{m-2} \to \mathbb{R}^m$, что*

$$\widetilde{C}_1\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \widetilde{C}_2\|x_1 - x_2\|$$

*и $\varphi([0,\,1]^{m-2}) = L$.*

Покажем, что в случае $m = 3$ множество $L$ является хорошим компактом тогда и только тогда, когда $L$ — незамкнутая кривая, обладающая свойством соизмеримости дуги и хорды. Пусть $L$ — хороший компакт в $\mathbb{R}^3$, $A = \varphi(x_1)$, $B = \varphi(x_n)$, $x_1 < x_n$. Тогда для любого разбиения дуги $AB$ точками $\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{n-1})$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ будет

$$\sum_{k=1}^{n-1} \|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\| \leqslant \widetilde{C}_2 \sum_{k=1}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| = \widetilde{C}_2|x_n - x_1| \leqslant \widetilde{C}_2\widetilde{C}_1^{-1}\|\varphi(x_n) - \varphi(x_1)\|$$

Переходя к супремуму по всем разбиениям, получим

$$\ell(A,\,B) \leqslant \widetilde{C}_2\widetilde{C}_1^{-1}\|\varphi(x_n)-\varphi(x_1)\| = \widetilde{C}_2\widetilde{C}_1^{-1}|AB|,$$

где $\ell(A,\,B)$ — длина дуги $AB$. Обратно, пусть $L$ — кривая, дуга которой соизмерима с хордой, $\gamma\colon [0,\,|L|]\to\mathbb{R}^3$ — её естественная параметризация. Положим $\varphi(x)=\gamma(|L|x)$. Тогда $\varphi\colon [0,\,1]\to\mathbb{R}^3$ и

$$\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\| \asymp \ell(\varphi(x_1),\,\varphi(x_2)) = \ell(\gamma(x_1/|L|),\gamma(x_2/|L|)) = \frac{1}{|L|}|x_1-x_2|.$$

Первое сравнение следует из свойства соизмеримости дуги и хорды, а последнее равенство из определения естественной параметризации. Таким образом, понятие хорошего компакта действительно распространяет понятие кривой, дуга которой соизмерима с хордой, на бóльшие размерности.

Для $f\colon L\to\mathbb{R}$, $x\in L$ и $r>0$ положим

$$\Delta^* f(x,\,r) = \sup_{y\in\overline{B}(x,\,r)\cap L}|f(y)-f(x)|.$$

Проверим легко доказываемое свойство $\Delta^* f$, которым мы часто будем молчаливо пользоваться:

$$\Delta^* f(y,\,r) \leqslant 2\Delta^* f(x,\,r+\|y-x\|).$$

Действительно, если $t\in\overline{B}(y,\,r)$, то $t\in\overline{B}(x,\,r+\|y-x\|)$, и

$$\begin{aligned}|f(t)-f(y)| &\leqslant |f(t)-f(x)|+|f(x)-f(y)| \leqslant \\ &\leqslant \Delta^* f(x,\,r+\|y-x\|)+\Delta^* f(x,\,\|y-x\|) \leqslant 2\Delta^* f(x,\,r+\|y-x\|)\end{aligned}$$

Остаётся перейти к супремуму по всем $t$.

Через $C$ мы будем обозначать различные константы, зависящие только от указанных в формулировках утверждений аргументов (или вообще абсолютные). $C$ может означать разные константы даже в одной цепочке равенств или неравенств. Некоторые фиксированные константы мы будем выделять отдельно (например, $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2, C_1$, $C_2,\ldots$) с собственной нумерацией в каждой главе. Леммы и теоремы также имеют собственную нумерацию в каждой главе.

Пусть $K$ — произвольное компактное подмножество $L$. В дальнейшем через $d(x)$ будем обозначать расстояние от точки $x$ до множества $K$, а через $\nu(x)$ —

какую-нибудь точку из $K$, реализующую это расстояние. Основным результатом этой главы является следующая

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ задана и ограничена на $K$. Тогда существует такая функция $f_0 \in C^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$, что*

$$f_0(x) = 0 \text{ при } \|x\| \geqslant R_0,\ K \subset B(\mathbb{O}, R_0),$$

$$\|\operatorname{grad} f_0(x)\| \leqslant C_1 \frac{\Delta^* f(\nu(x), C_3 d(x))}{d(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K,$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C_2 \frac{\Delta^* f(\nu(x), C_3 d(x))}{d^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K,$$

*где $C_i = C_i(f, K)$. Кроме того, если $x_0 \in K$ — точка непрерывности $f$, а точки $x_n \notin K$ таковы, что $x_n \to x_0$, то $f_0(x_n) \to f(x_0)$. В частности, если $f$ непрерывна на $K$, то $f_0$ непрерывна на $\mathbb{R}^m$, и $f_0|_K = f$.*

Функцию $f_0$, обладающую всеми свойствами, перечисленными в теореме 1, будем называть *псевдогармоническим расширением* функции $f$.

Из определения хорошего компакта и построения меры Хаусдорфа можно получить (и это будет сделано в третьей главе), что хаусдорфова размерность $L$ равна $m-2$, поэтому к любой точке из $L$ (и тем более из $K$) можно устремить последовательность точек из дополнения $L$ (или $K$). Поэтому последняя часть формулировки теоремы корректна.

Доказательству теоремы 1 посвящён третий раздел главы. Во втором разделе доказываются важные для этого доказательства леммы.

## 1.2. Леммы о дифференцировании

В построении псевдогармонического расширения будут использоваться функции, заданные как интегралы по шарам как с постоянным, так и переменным радиусом. Для доказательства заявленных оценок нам нужно уметь работать с первыми и вторыми производными таких функций. В этом нам помогут следующие три леммы. Функция $f$ в их формулировках (как и все функции, рассматриваемые в работе) предполагается вещественнозначной.

**Лемма 1.** *Пусть* $\overline{B}(x, r)$ *содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте* $K \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(K)$, $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$. *Тогда функция* $g$, *определённая равенством*

$$g(x) = \int\limits_{B(x,r)} f(y)\, d\lambda(y),$$

*дифференцируема в точке* $x$ *по направлению* $v$, *и*

$$g'_v(x) = \int\limits_{B(x,r)} f'_v(y)\, d\lambda(y).$$

*Доказательство.* Пусть $h_n \to 0$. Заменяя под интегралом $y$ на $y + h_n v$, запишем разностное отношение

$$\frac{g(x+h_n v) - g(x)}{h_n} = \int\limits_{B(x,r)} \frac{f(y+h_n v) - f(y)}{h_n}\, d\lambda(y) = \int\limits_{B(x,r)} \varphi_n(y)\, d\lambda(y). \qquad (1)$$

Применяя теорему Лагранжа к функции $\psi(h) = f(y+hv)$, получим, что $\varphi_n(y) = f'_v(c_n(y))$, то есть что функции $\varphi_n$ равномерно ограничены. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости можно совершить предельный переход под знаком интеграла и получить, что правая часть равенства (1) стремится к правой части доказываемого равенства. В силу произвольности $\{h_n\}$ лемма 1 доказана. □

**Лемма 2.** *Пусть* $\overline{B}(x, r(x))$ *содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте* $K \subset \mathbb{R}^m$, *где* $r \in C^1(K)$, $f \in C(K)$; $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$. *Тогда функция* $g$, *определённая равенством*

$$g(x) = \int\limits_{B(x,r(x))} f(y)\, d\lambda(y),$$

*дифференцируема в точке* $x$ *по направлению* $v$, *и*

$$g'_v(x) = \int\limits_{S(x,r(x))} (n(y)\cdot v + r'_v(x)) f(y)\, d\sigma(y),$$

*где $n(y)$ — внешняя единичная нормаль к сфере в точке $y$, $x \cdot y$ — скалярное произведение элементов $x$, $y \in \mathbb{R}^m$.*

*Доказательство.* Запишем и преобразуем разностное отношение

$$\frac{g(x+hv)-g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_{B(x+hv,\, r(x+hv))} f(y)\, d\lambda(y) - \frac{1}{h} \int\limits_{B(x,\, r(x))} f(y)\, d\lambda(y) =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{B(x+hv,\, r(x+hv))} f(y)\, d\lambda(y) - \frac{1}{h} \int\limits_{B(x+hv,\, r(x))} f(y)\, d\lambda(y) +$$

$$+ \frac{1}{h} \int\limits_{B(x+hv,\, r(x))} f(y)\, d\lambda(y) - \frac{1}{h} \int\limits_{B(x,\, r(x))} f(y)\, d\lambda(y) =$$

$$\frac{1}{h}\left( \int\limits_{B(x+hv,\, r(x+hv))} f(y)\, d\lambda(y) - \int\limits_{B(x+hv,\, r(x))} f(y)\, d\lambda(y) \right) +$$

$$+ \frac{1}{h} \int\limits_{B(x+hv,\, r(x))\setminus B(x,\, r(x))} f(y)\, d\lambda(y) - \frac{1}{h} \int\limits_{B(x,\, r(x))\setminus B(x+hv,\, r(x))} f(y)\, d\lambda(y) =$$

$$= A(h) + D_1(h) - D_2(h).$$

Разность интегралов в $A(h)$ представляет собой интеграл по многомерному сферическому слою толщины $|r(x+hv) - r(x)|$. Расписывая интегральные суммы, как это обычно делается при сведении кратного интеграла к повторному, мы получим, что

$$A(h) = \frac{1}{h} \int\limits_{S(x+hv,\, r(x))} \int\limits_{0}^{r(x+hv)-r(x)} f(y + tn(y))\, dt\, d\sigma(y).$$

Применяя теорему о среднем к внутреннему интегралу, получим

$$A(h) = \int\limits_{S(x+hv,\, r(x))} \frac{r(x+hv) - r(x)}{h} f(y + t_y n(y))\, d\sigma(y),$$

где $t_y \in [0,\, |r(x+hv) - r(x)|]$. Переходя к пределу, находим, что

$$A(h) \to \int\limits_{S(x,\, r(x))} r'_v(x) f(y)\, d\sigma(y).$$

Законность перехода к пределу можно обосновать сделав замену $x + hv$ на $x$, чтобы интегрирование велось по сфере с фиксированным центром (относительно $h$), и аналогично доказательству леммы 1 получив ограниченность подынтегрального выражения.

Аналогично при малых $h$ получим представление

$$D_1(h) - D_2(h) = \frac{1}{h} \int\limits_{S(x,\,r(x))} \int\limits_0^{l_y} f(y + tn(y))\,dt\,d\sigma(y),$$

где $l_y$ — ориентированная длина отрезка нормали в точке $y$, заключённого в разности рассматриваемых шаров. Длина берётся с плюсом, если отрезок лежит на внешней нормали, и с минусом — если на внутренней. За счёт этого уничтожается минус перед $D_2$.

Вычислим $l_y$. Заметим, что точка $y + l_y n(y)$ лежит на сфере $S(x + hv,\, r(x))$, поэтому $\|(y + l_y n(y)) - (x + hv)\| = r(x)$. Легко понять, что $y - x = r(x)n(y)$. Тогда мы имеем соотношение

$$r(x) = \|(r(x) + l_y)n(y) - hv\|.$$

Возводя его в квадрат, мы получим квадратное уравнение относительно $l_y$, дискриминант которого положителен и отделён от нуля при малых $h$. Тогда

$$l_y = h(n(y) \cdot v) - r(x) + \sqrt{r^2(x) + h^2(n(y) \cdot v)^2 - h^2},$$

поскольку $|l_y| \leqslant h$, а для другого корня при $h \to 0$ будет $l_y \to -2r(x)$. Значит, $l_y/h \to n(y) \cdot v$, тогда по теореме о среднем

$$D_1(h) - D_2(h) \to \int\limits_{S(x,\,r(x))} (n(y) \cdot v) f(y)\,d\sigma(y).$$

Складывая найденные соотношения для $A(h)$ и $D_1(h) - D_2(h)$, получим требуемую формулу. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть $S(x,\, r(x))$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, где $r \in C^1(K)$, $f \in C^1(K)$; $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$. Тогда функция $g$, определённая равенством*

$$g(x) = \int\limits_{S(x,\,r(x))} f(y)\,d\sigma(y),$$

*дифференцируема в точке $x$ по направлению $v$, и*

$$g'_v(x) = \int\limits_{S(x,r(x))} r'_v(x) f'_{n(y)}(y)\, d\sigma(y) +$$

$$+ (m-1) \int\limits_{S(x,r(x))} \frac{r'_v(x)}{r(x)} f(y)\, d\sigma(y) + \int\limits_{S(x,r(x))} f'_v(y)\, d\sigma(y).$$

*Доказательство.* Запишем и преобразуем разностное отношение

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_{S(x+hv,\, r(x+hv))} f(y)\, d\sigma(y) - \frac{1}{h} \int\limits_{S(x,r(x))} f(y)\, d\sigma(y) =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{S(x+hv,\, r(x+hv))} f(y)\, d\sigma(y) - \frac{1}{h} \int\limits_{S(x+hv,\, r(x))} f(y)\, d\sigma(y) +$$

$$+ \frac{1}{h} \left( \int\limits_{S(x+hv,\, r(x))} f(y)\, d\sigma(y) - \int\limits_{S(x,r(x))} f(y)\, d\sigma(y) \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{S(x,r(x))} \frac{r^{m-1}(x+hv)}{r^{m-1}(x)} f(t(y))\, d\sigma(y) - \frac{1}{h} \int\limits_{S(x,r(x))} f(y+hv)\, d\sigma(y) + E(h),$$

где

$$t(y) = x + hv + \frac{r(x+hv)}{r(x)}(y-x).$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 1, получим, что

$$E(h) \to \int\limits_{S(x,r(x))} f'_v(y)\, d\sigma(y).$$

Далее, обозначим

$$\frac{1}{h} \int\limits_{S(x,r(x))} \frac{r^{m-1}(x+hv)}{r^{m-1}(x)} f(t(y))\, d\sigma(y) - \frac{1}{h} \int\limits_{S(x,r(x))} f(y+hv)\, d\sigma(y) =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{S(x,r(x))} \frac{r^{m-1}(x+hv)}{r^{m-1}(x)} \big(f(t(y)) - f(y+hv)\big)\, d\sigma(y) +$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_{S(x,r(x))}\left(\frac{r^{m-1}(x+hv)}{r^{m-1}(x)}-1\right)f(y+hv)\,d\sigma(y)=A(h)+D(h).$$

Заметим, что $\|y-x\|=r(x)$, поэтому

$$t(y)-(y+hv)=\frac{r(x+hv)-r(x)}{r(x)}(y-x)=(r(x+hv)-r(x))n(y).$$

Значит, пользуясь непрерывной дифференцируемостью $f$, можем написать

$$\frac{f(t(y))-f(y+hv)}{h}=f'_{n(y)}(y+hv)\frac{r(x+hv)-r(x)}{h}+$$
$$+\frac{o(r(x+hv)-r(x))}{h}\to f'_{n(y)}(y)r'_v(x).$$

Второе слагаемое бесконечно мало, поскольку $r(x+hv)-r(x)=O(h)$. Таким образом,

$$A(h)\to\int\limits_{S(x,r(x))}r'_v(x)f'_{n(y)}(y)\,d\sigma(y).$$

Наконец,

$$\frac{r^{m-1}(x+hv)-r^{m-1}(x)}{h}\cdot\frac{1}{r^{m-1}(x)}\to\frac{(r^{m-1}(x))'_v}{r^{m-1}(x)}=(m-1)\frac{r'_v(x)}{r(x)},$$

откуда

$$D(h)\to(m-1)\int\limits_{S(x,r(x))}\frac{r'_v(x)}{r(x)}f(y)\,d\sigma(y).$$

Складывая найденные соотношения для $A(h)$, $D(h)$ и $E(h)$, получим требуемую формулу. $\square$

## 1.3. Построение псевдогармонического расширения

Докажем сначала простую, но важную лемму, которой мы неоднократно воспользуемся в дальнейшем.

**Лемма 4.** *Пусть в $k$-мерном кубе со стороной $a$ выбраны несколько точек, попарные расстояния между которыми не меньше $b$, причём $a\sqrt{k}\geqslant b$. Тогда количество этих точек не превосходит $(3a\sqrt{k}/b)^k$.*

*Доказательство.* Разобьём куб на $(\lceil 2a\sqrt{k}/b\rceil)^k$ одинаковых кубов. Тогда длина диагонали маленького куба не превосходит $b/2$, значит, в одном таком кубе лежит не больше одной выбранной точки. Остаётся заметить, что в условиях леммы $\lceil 2a\sqrt{k}/b\rceil \leqslant 2a\sqrt{k}/b + 1 \leqslant 3a\sqrt{k}/b$. $\square$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Возьмём произвольную точку $x_{0n} \in K$. Далее, если точки $x_{0n}, \ldots, x_{(k-1)n}$ уже выбраны, то возьмём в качестве $x_{kn}$ одну из ближайших к множеству $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overline{B}(x_{in},\, 2^{-n})$ точек множества $K \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} B(x_{in},\, 2^{-n})$, если последнее множество непусто. Пусть $x_{kn} = \varphi(t_{kn})$. Поскольку $\|x_{kn} - x_{k'n}\| \geqslant 2^{-n}$ при $k \neq k'$, то $\|t_{kn} - t_{k'n}\| \geqslant \widetilde{C}_2^{-1} 2^{-n}$. Эти точки содержатся в единичном $(m-2)$-мерном кубе, так что по лемме 4 мы выберем $c_n \leqslant C 2^{(m-2)n}$ точек (если лемма неприменима, то есть $\widetilde{C}_2^{-1} 2^{-n} > \sqrt{m-2}$, то мы выбрали лишь одну точку, а тогда заявленная оценка выполняется при $C = 1$). Процесс окончен, поэтому $K \subset \bigcup\limits_{k=0}^{c_n-1} B(x_{kn},\, 2^{-n})$.

Положим $\Omega_n^* = \bigcup\limits_{k=0}^{c_n-1} \overline{B}(x_{kn},\, 2^{-n+1})$, $\Omega_n = \Omega_n^* \setminus \Omega_{n+1}^*$. Из определения ясно, что $d(x) \leqslant 2^{-n+1}$ для $x \in \Omega_n^*$. В то же время для некоторого $k_0$ выполняется $\|\nu(x) - x_{k_0(n+1)}\| \leqslant 2^{-n-1}$, поэтому если $d(x) \leqslant 2^{-n-1}$, то

$$\|x - x_{k_0(n+1)}\| \leqslant \|x - \nu(x)\| + \|\nu(x) - x_{k_0(n+1)}\| \leqslant 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{-n},$$

то есть $x \in B(x_{k_0(n+1)}, 2^{-n}) \subset \Omega_{n+1}^*$. Таким образом,

$$2^{-n-1} < d(x) \leqslant 2^{-n+1}, \quad x \in \Omega_n. \tag{2}$$

Отсюда следует, что множества $\Omega_n$ с номерами, отличающимися больше, чем на 2, попарно не пересекаются; множества же $\Omega_n$ и $\Omega_{n+1}$ не пересекаются, поскольку $\Omega_{n+1} \subset \Omega_{n+1}^*$. Получается, что множества $\Omega_n$ попарно не пересекаются. Определим теперь множества $\omega_{kn}$: $\omega_{0n} = \overline{B}(x_{0n},\, 2^{-n+1}) \cap \Omega_n$,

$$\omega_{kn} = (\overline{B}(x_{kn},\, 2^{-n+1}) \cap \Omega_n) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \overline{B}(x_{in},\, 2^{-n+1}) \text{ при } k = 1, \ldots, c_n - 1.$$

Легко видеть, что множетсва $\omega_{kn}$ попарно (по всем $k$ и $n$) не пересекаются.

Положим $g_1(x) = f(x_{kn})$ при $x \in \omega_{kn}$ и $g_1(x) = 0$ при $x$, не принадлежащем ни одному $\omega_{kn}$. Обозначим $B_1(x) = \overline{B}(x,\, 2^{-1}d(x))$. Оценим $\|x_{kn} - x_{k'n'}\|$ в случае, когда $x \in \omega_{kn}$, $y \in B_1(x) \cap \omega_{k'n'}$. Применяя неравенства $|d(x) - d(y)| \leqslant \|x - y\|$ и (2), получим

$$2^{-n'-1} \leqslant d(y) \leqslant d(x) + \|x - y\| \leqslant 2^{-n+1} + 2^{-1}d(x) \leqslant 2^{-n+2},$$

то есть $-n' \leqslant -n + 3$. Далее,

$$\|\nu(x) - x_{kn}\| \leqslant \|\nu(x) - x\| + \|x - x_{kn}\| \leqslant d(x) + 2^{-n+1} \leqslant 2^{-n+2},$$

$$\|\nu(y) - x_{k'n'}\| \leqslant \|\nu(y) - y\| + \|y - x_{k'n'}\| \leqslant 2^{-n'+1} + 2^{-n'+1} = 2^{-n'+2} \leqslant 2^{-n+5},$$

$$\|\nu(x) - \nu(y)\| \leqslant \|\nu(x) - x\| + \|x - y\| + \|y - \nu(y)\| \leqslant 19 \cdot 2^{-n}. \tag{3}$$

Из трёх последних оценок получаем, что

$$\|x_{kn} - x_{k'n'}\| \leqslant \|x_{kn} - \nu(x)\| + \|\nu(x) - \nu(y)\| + \|\nu(y) - x_{k'n'}\| \leqslant 55 \cdot 2^{-n}.$$

Значит, для $y \in B_1(x)$, $x \in \omega_{kn}$ выполнено

$$|g_1(y) - g_1(x)| = |f(x_{k'n'}) - f(x_{kn})| \leqslant \Delta^* f(x_{kn}, \|x_{kn} - x_{k'n'}\|) \leqslant \Delta^* f(x_{kn}, 55 \cdot 2^{-n}).$$

Отсюда, используя оценку на $\|\nu(x) - x_{kn}\|$, получаем

$$|g_1(y) - g_1(x)| \leqslant \Delta^* f(\nu(x), C_1 2^{-n}), \quad y \in B_1(x). \tag{4}$$

Определим на $\mathbb{R}^m \setminus K$ новую функцию

$$g_2(x) = \frac{1}{\lambda(B_1(x))} \int\limits_{B_1(x)} g_1(y)\, d\lambda(y).$$

Заметим, что $g_2 \in C(\mathbb{R}^m \setminus K)$. Действительно, $1/\lambda(B_1(x)) = C(d(x))^{-m}$, что является непрерывной функцией, а для $t$ близких к $x$

$$\left| \int\limits_{B_1(x)} g_1(y)\, d\lambda(y) - \int\limits_{B_1(t)} g_1(y)\, d\lambda(y) \right| \leqslant \int\limits_{B_1(x) \triangle B_1(t)} |g_1(y)| d\lambda(y),$$

что стремится к нулю, поскольку мера симметрической разности стремится к нулю, а $g_1$ ограничена (ведь такова $f$). Кроме того, используя (4), получим для $x \in \omega_{kn}$

$$|g_2(x) - f(x_{kn})| = |g_2(x) - g_1(x)| =$$

$$= \left| \frac{1}{\lambda(B_1(x))} \int\limits_{B_1(x)} g_1(y)\, d\lambda(y) - \frac{1}{\lambda(B_1(x))} \int\limits_{B_1(x)} g_1(x)\, d\lambda(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda(B_1(x))} \int\limits_{B_1(x)} |g_1(y) - g_1(x)|\, d\lambda(y) \leqslant \Delta^* f(\nu(x),\, C_1 2^{-n}). \quad (5)$$

Пусть $x_0$ — точка непрерывности $f$, $x \notin K$. Тогда из неравенства

$$|g_2(x) - f(x_0)| \leqslant |g_2(x) - f(x_{kn})| + |f(x_{kn}) - f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \Delta^* f(\nu(x),\, C_1 2^{-n}) + \Delta^* f(x_0,\, \|x_0 - x_{kn}\|)$$

следует, что $g_2(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$, поскольку каждое из двух слагаемых мы можем оценить через $\Delta^* f(x_0,\, C 2^{-n})$.

Построим теперь функцию $d_0 \in C^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$, $d_0 \asymp d$. Определим для каждого $q \in \mathbb{Z}$ множество $\Sigma_q = \{x \in \mathbb{R}^m \mid 2^{q-1} < d(x) \leqslant 2^q\}$. Положим $d_1(x) = 2^{q-1}$ для $x \in \Sigma_q$ и $d_1(x) = 0$ для $x \in K$. Очевидно,

$$\frac{1}{2} d(x) \leqslant d_1(x) \leqslant d(x). \quad (6)$$

Далее, определим функции

$$d_2(x) = \frac{1}{\lambda(B(x,\, 2^{q-5}))} \int\limits_{B(x,\, 2^{q-5})} d_1(y)\, d\lambda(y), \quad 2^{q-0{,}5} < d(x) \leqslant 2^{q+0{,}5};$$

$$d_3(x) = \frac{1}{\lambda(B(x,\, 2^{q-5}))} \int\limits_{B(x,\, 2^{q-5})} d_2(y)\, d\lambda(y), \quad 2^{q-0{,}5} < d(x) \leqslant 2^{q+0{,}5}.$$

Заметим, что «граница смены» радиуса шара, по которому берутся интегралы, то есть множество $F_q = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x) = 2^{q-0{,}5}\}$, вместе со своей окрестностью радиуса $2^{q-3}$ лежит во внутренности множества $\Sigma_q$, поскольку

$$2^{q-0{,}5} + 2^{q-3} = 2^{q-3}(2^{2{,}5} + 1) < 2^q, \quad 2^{q-0{,}5} - 2^{q-3} > 2^{q-1}.$$

Поэтому в $\Lambda_{2^{q-3}}(F_q)$ выполнено $d_1 = \mathrm{const}$, откуда $d_2 = \mathrm{const}$ в $\Lambda_{2^{q-3} - 2^{q-5}}(F_q)$. Отсюда несложно получить, что $d_2$ непрерывна. Кроме того, в $\Lambda_{2^{q-4}}(F_q)$ имеем

$d_3 = \mathrm{const}$. Получается, что на этом множестве $\operatorname{grad} d_3 = \mathbb{O}$. Если же $x$ лежит вне указанной окрестности, то вблизи $x$ радиус шара не изменяется, тогда по лемме 2

$$d'_{3u}(x) = \frac{1}{\lambda(B(x,\, 2^{q-5}))} \int\limits_{S(x,\, 2^{q-5})} (n(y) \cdot u) d_2(y)\, d\sigma(y)$$

для произвольного единичного $u \in \mathbb{R}^m$. Поскольку мы брали средние по шарам функции $d_1$, для функций $d_2$ и $d_3$ верны оценки, аналогичные (6). Также ясно, что $|n(y) \cdot u| \leqslant 1$, ведь оба вектора единичные. Значит,

$$|d'_{3u}(x)| \leqslant C \frac{1}{2^{m(q-5)}} \cdot 2^{(m-1)(q-5)} \cdot 2^{q+0,5} \leqslant C. \tag{7}$$

Положим

$$d_0(x) = \frac{1}{\lambda(B(x,\, 2^{q-5}))} \int\limits_{B(x,\, 2^{q-5})} d_3(y)\, d\lambda(y), \quad 2^{q-0,5} < d(x) \leqslant 2^{q+0,5}.$$

Ясно, что

$$\frac{1}{2} d(x) \leqslant d_0(x) \leqslant d(x). \tag{8}$$

Возьмём два произвольных единичных вектора $u,\, v \in \mathbb{R}^m$ и докажем оценки

$$|d'_{0u}(x)| \leqslant C, \quad |d''_{0uv}(x)| \leqslant \frac{C}{d(x)}. \tag{9}$$

Поскольку $d_3 = \mathrm{const}$ в $\Lambda_{2^{q-4}}(F_q)$, получаем, что $d_0 = \mathrm{const}$ в $\Lambda_{2^{q-5}}(F_q)$. Отсюда следует, что указанные оценки достаточно получить для $x$, отделённых от $F_q$. По лемме 1

$$d'_{0u}(x) = \frac{1}{\lambda(B(x,\, 2^{q-5}))} \int\limits_{B(x,\, 2^{q-5})} d'_{3u}(y)\, d\lambda(y),$$

откуда с помощью (7) сразу следует первая оценка. Снова из рассуждений про окрестности множества $F_q$ получим непрерывность функции $d'_{3u}$, а тогда по лемме 2

$$d''_{3uv}(x) = \frac{1}{\lambda(B(x,\, 2^{q-5}))} \int\limits_{S(x,\, 2^{q-5})} (n(y) \cdot v) d'_{3u}(y)\, d\sigma(y).$$

Так как для $x \in \Sigma_q$ выполнено $d(x) \asymp 2^q$, и

$$\frac{\sigma(S(x,\, r))}{\lambda(B(x,\, r))} = \frac{C}{r}, \tag{10}$$

отсюда следует вторая из доказываемых оценок.

Вернёмся к построению. Положим $r(x) = 2^{-1}d_0(x)$, $B(x) = B(x, r(x))$, $S(x) = \partial B(x)$ и определим на $\mathbb{R}^m \setminus K$ функции

$$g_3(x) = \frac{1}{\lambda(B(x))} \int\limits_{B(x)} g_2(y)\, d\lambda(y), \quad f_0(x) = \frac{1}{\lambda(B(x))} \int\limits_{B(x)} g_3(y)\, d\lambda(y).$$

Используя оценки (2), (4), (5) и (8), получим

$$|g_1(y) - g_1(x)| \leqslant \Delta^* f(\nu(x), C_2 d(x)), \quad y \in B(x),$$

$$|g_2(x) - g_1(x)| \leqslant \Delta^* f(\nu(x), C_2 d(x)). \tag{11}$$

Тогда для $y \in B(x)$ напишем

$$\begin{aligned} |g_2(y) - g_2(x)| &\leqslant |g_2(y) - g_1(y)| + |g_1(y) - g_1(x)| + |g_1(x) - g_2(x)| \leqslant \\ &\leqslant 2\Delta^* f(\nu(x), C_2 d(x)) + \Delta^* f(\nu(y), C_2 d(y)) \leqslant C\Delta^* f(\nu(x), C_3 d(x)). \end{aligned} \tag{12}$$

В последнем переходе мы воспользовались неравенством (3).

Из определения ясно, что $g_3$ непрерывна на $\mathbb{R}^m \setminus K$. Кроме того, по лемме 2 для произвольного единичного вектора $u$ выполнено

$$\begin{aligned} g'_{3u}(x) = (g_3(t) - g_2(x))'_u|_{t=x} = \left(\frac{1}{\lambda(B(x))}\right)'_u \int\limits_{B(x)} (g_2(y) - g_2(x))\, d\lambda(y) + \\ + \frac{1}{\lambda(B(x))} \int\limits_{S(x)} (n(y) \cdot u + r'_u(x))(g_2(y) - g_2(x))\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

Первая из оценок (9) влечёт неравенство

$$\left| \left(\frac{1}{\lambda(B(x))}\right)'_u \lambda(B(x)) \right| = C \left| \frac{r'_u(x)}{r^{m+1}(x)} r^m(x) \right| \leqslant \frac{C}{d(x)}. \tag{13}$$

Тогда применяя ту же оценку, соотношение (10) и неравенство (12), получим, что

$$|g'_{3u}(x)| \leqslant C \frac{\Delta^* f(\nu(x), C_3 d(x))}{d(x)}. \tag{14}$$

Аналогично тому, как это было проделано для функции $g_2$ с помощью $g_1$, для функций $g_3$ и $g_2$, а также $f_0$ и $g_3$ можно получить следующие оценки:

$$|g_3(x) - g_2(x)| \leqslant C\Delta^* f(\nu(x), C_4 d(x)), \quad |f_0(x) - g_3(x)| \leqslant C\Delta^* f(\nu(x), C_4 d(x)), \tag{15}$$

$$|g_3(y)-g_3(x)| \leqslant C\Delta^* f(\nu(x),\, C_4 d(x)), \quad y \in B(x). \tag{16}$$

Если $x_0$ — точка непрерывности $f$, то мы можем написать

$$|f_0(x)-f(x_0)| \leqslant |f_0(x)-g_2(x)| + |g_2(x)-f(x_0)|$$

и заметить, что второе слагаемое стремится к нулю при $x \to x_0$ по доказанному выше, а первое — потому что его можно оценить через $C\Delta^* f(x_0,\, Cd(x))$.

Заметим, что все построенные нами функции обнуляются вне некоторого шара. Действительно, функция $g_1$ такова, поскольку множество $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ ограничено, а $g_1$ не равна 0 лишь на его подмножествах. $g_2$ представляет собой среднее функции $g_1$ по шару радиуса $2^{-1}d(x)$, поэтому если $d(x) > 2R$, где $R$ — радиус шара, содержащего $\Omega$, то окажется, что это среднее равно 0. Получаем, что $g_2$ обнуляется вне некоторого шара. Аналогично получим, что этим свойством обладают $g_3$ и $f_0$. Осталось доказать оценки на производные и лапласиан $f_0$.

По лемме 2

$$f'_{0u}(x) = (f_0(t)-g_3(x))'_u|_{t=x} = \left(\frac{1}{\lambda(B(x))}\right)'_u \int\limits_{B(x)} (g_3(y)-g_3(x))\, d\lambda(y) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda(B(x))} \int\limits_{S(x)} (n(y)\cdot u + r'_u(x))(g_3(y)-g_3(x))\, d\sigma(y).$$

Применяя (13), (16) и первую из оценок (9), получим

$$|f'_{0u}(x)| \leqslant C\frac{\Delta^* f(\nu(x),\, C_4 d(x))}{d(x)}.$$

Далее,

$$f''_{0uv}(x) = (f_0(t)-g_3(x))''_{uv}|_{t=x} = \left(\frac{1}{\lambda(B(x))}\right)''_{uv} \int\limits_{B(x)} (g_3(y)-g_3(x))\, d\lambda(y) +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda(B(x))}\right)'_u \int\limits_{S(x)} (n(y)\cdot v + r'_v(x))(g_3(y)-g_3(x))\, d\sigma(y) +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda(B(x))}\right)'_v \int\limits_{S(x)} (n(y)\cdot u + r'_u(x))(g_3(y)-g_3(x))\, d\sigma(y) +$$

$$+\frac{1}{\lambda(B(x))}\left(\int\limits_{S(t)}(n(y)\cdot u+r'_u(t))(g_3(y)-g_3(x))\,d\sigma(y)\right)'_v\Bigg|_{t=x}. \quad (17)$$

Аналогично неравенству (13) легко доказать, что

$$\left|\left(\frac{1}{\lambda(B(x))}\right)''_{uv}\lambda(B(x))\right|\leqslant\frac{C}{d^2(x)}.$$

Также очевидно, что

$$\left|\left(\frac{1}{\lambda(B(x))}\right)'_{u}\sigma(S(x))\right|\leqslant\frac{C}{d^2(x)}.$$

Используя два эти обстоятельства, первое из неравенств (9) и (16), получим оценку на сумму модулей первых трёх слагаемых в (17) выражением

$$C\frac{\Delta^* f(\nu(x),\,C_4 d(x))}{d^2(x)}.$$

Последним шагом в доказательстве являются вычисление производной в четвёртом слагаемом (17). Перепишем этот интеграл в виде суммы

$$r'_u(t)\int\limits_{S(t)}(g_3(y)-g_3(x))\,d\sigma(y)+\int\limits_{S(t)}(n(y)\cdot u)(g_3(y)-g_3(x))\,d\sigma(y)=a(t)+b(t)$$

и найдём производную каждого слагаемого по отдельности, применяя лемму 3.

$$a'_v(t)=r''_{uv}(t)\int\limits_{S(t)}(g_3(y)-g_3(x))\,d\sigma(y)+r'_u(t)\int\limits_{S(t)}r'_v(t)g'_{3n(y)}(y)\,d\sigma(y)+$$
$$+(m-1)r'_u(t)\int\limits_{S(t)}\frac{r'_v(t)}{r(t)}(g_3(y)-g_3(x))\,d\sigma(y)+r'_u(t)\int\limits_{S(t)}g'_{3v}(y)\,d\sigma(y).$$

Тогда из (9), (10), (14) с заменой $C_3$ на $C_4$ ($C_4\geqslant C_3$, так что от такой замены неравенство разве лишь ослабится) и (16) следует, что

$$\left|\frac{a'_v(x)}{\lambda(B(x))}\right|\leqslant C\frac{\Delta^* f(\nu(x),\,C_4 d(x))}{d^2(x)}.$$

Для небольшого упрощения и без того весьма громоздких выкладок оценим сначала производную (относительно $y$) по произвольному направлению подынтегральной функции в $b(t)$. Обозначим эту функцию через $h(y)$ и возмём произвольный единичный вектор $w$. Тогда

$$h'_w(y)=(n(y)\cdot u)'_w(g_3(y)-g_3(x))+(n(y)\cdot u)g'_{3w}(y).$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$. Тогда

$$\|\mathrm{grad}\,(n(y)\cdot u)\| = \left\|\mathrm{grad}\,\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{y_i - x_i}{r(x)}u_i\right)\right\| = \frac{\|u\|}{r(x)} = \frac{1}{r(x)}.$$

Значит, $|(n(y)\cdot u)'_w| \leqslant 1/r(x)$. Второе же слагаемое моментально оценивается при помощи (14). Объединяя это с (16), получим

$$|h'_w(y)| \leqslant C\frac{\Delta^* f(\nu(x),\, C_4 d(x))}{d(x)}.$$

Наконец, применяя лемму 3, напишем

$$b'_v(t) = \int\limits_{S(t)} r'_v(t) h'_{n(y)}(y)\, d\sigma(y) + (m-1)\int\limits_{S(t)} \frac{r'_v(t)}{r(t)} h(y)\, d\sigma(y) + \int\limits_{S(t)} h'_v(y)\, d\sigma(y).$$

Применяя (9), (10), (16) и найденную оценку на производную $h$, получим, что

$$\left|\frac{b'_v(x)}{\lambda(B(x))}\right| \leqslant C\frac{\Delta^* f(\nu(x),\, C_4 d(x))}{d^2(x)}.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$|f''_{0uv}(x)| \leqslant C\frac{\Delta^* f(\nu(x),\, C_4 d(x))}{d^2(x)}.$$

В силу произвольности $u$ и $v$ отсюда следует, что

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C\frac{\Delta^* f(\nu(x),\, C_4 d(x))}{d^2(x)}.$$

# Глава 2. Приближение в равномерной норме

## 2.1. Предварительные замечания

Напомним, что хороший компакт — это множество $L = \varphi([0,\,1]^{m-2})$ в $\mathbb{R}^m$, где $\varphi$ удовлетворяет неравенствам

$$\widetilde{C}_1\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \widetilde{C}_2\|x_1 - x_2\|.$$

Пусть $K$ — компактное подмножество $L$, а $\omega$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}\,dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \leqslant C_0\omega(x). \tag{18}$$

В дальнейшем мы будем часто молчаливо пользоваться следующим хорошо известным свойством модулей непрерывности: для любого числа $s > 0$ существуют такие константы $s_1,\, s_2 > 0$, зависящие лишь от $\omega$, что для любого $t > 0$ выполнено

$$s_1\omega(t) \leqslant \omega(st) \leqslant s_2\omega(t).$$

Через $H^\omega(K)$ будем обозначать множество всех функций $f\colon K \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C_f\omega(\|x - y\|). \tag{19}$$

Также напомним, что

$$\Delta^* f(x,\,r) = \sup_{y\in\overline{B}(x,\,r)\cap L} |f(y) - f(x)|.$$

Тогда условие (19) можно переписать как

$$\Delta^* f(x,\,r) \leqslant C_f\omega(r). \tag{20}$$

Действительно, если (19) выполнено, то

$$\Delta^* f(x, r) = \sup_{y \in \overline{B}(x, r) \cap L} |f(x) - f(y)| \leqslant C_f \sup_{y \in \overline{B}(x, r) \cap L} \omega(\|x - y\|) \leqslant C_f \omega(r),$$

поскольку модуль непрерывности является неубывающей функцией. И обратно, полагая $r = \|x - y\|$, получим

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \Delta^* f(x, r) \leqslant C_f \omega(r) = C_f \omega(\|x - y\|).$$

Функции из $H^\omega(K)$ будем называть *гёльдеровыми*. Данное соглашение вполне естественно, ведь $\omega(t) = t^\alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$ удовлетворяет условию (18) с константой $C_0 = 1/\alpha + 1/(1 - \alpha)$.

Как и ранее $\Lambda_\varepsilon(K)$ обозначает $\varepsilon$-окрестность множества $K$. Основным результатом этой главы является следующая

**Теорема 1.** *Для того, чтобы $f\colon K \to \mathbb{R}$ принадлежала классу $H^\omega(K)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta > 0$ существовала такая гармоническая в $\Lambda_\delta(K)$ функция $u_\delta$, что*

$$|f(x) - u_\delta(x)| \leqslant C_1(f, K)\omega(\delta), \quad x \in K; \tag{21}$$

$$\|\operatorname{grad} u_\delta(x)\| \leqslant C_2(f, K)\frac{\omega(\delta)}{\delta}, \quad x \in \Lambda_{\delta/2}(K). \tag{22}$$

Достаточность указанных условий установить несложно. Пусть $x, y \in K$. Возьмём $\delta$, удовлетворяющее неравенствам $2\|x - y\| < \delta < 3\|x - y\|$, построим приближающую функцию $u_\delta$ и напишем

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - u_\delta(x)| + |u_\delta(x) - u_\delta(y)| + |u_\delta(y) - f(y)|.$$

Первое и третье слагаемые оцениваются через $C\omega(\delta) \leqslant C\omega(\|x - y\|)$ из условия и выбора $\delta$. Остаётся оценить второе слагаемое. Ясно, что отрезок соединяющий $x$ и $y$ содержится в $\Lambda_{\delta/2}(K)$, поэтому по теореме Лагранжа

$$u_\delta(x) - u_\delta(y) = u'_{\delta v}(y + cv)\|x - y\|,$$

где $v$ — единичный вектор, сонаправленный с $x-y$, $c \in (0,\, \|x-y\|)$. Пользуясь вторым неравенством из условия теоремы и оценкой на $\delta$, получим, что и это слагаемое оценивается через $C\omega(\|x-y\|)$.

Более содержательной частью главы является доказательство необходимости, то есть построение приближающей функции. Покажем, что достаточно научиться строить приближающую функцию не для всех положительных $\delta$, а лишь для достаточно малых. Предположим, нашлись такие константы $C_1$ и $C_2$, что для любого $\delta \in (0,\, \delta_0)$ существует гармоническая в $\Lambda_\delta(K)$ функция $u_\delta$, для которой выполняются оценки (21) и (22). Для $\delta \geqslant \delta_0$ положим $u_\delta = 0$. Разумеется, эта функция гармонична в любой окрестности $K$, и оценка (22) выполняется для любого $C_2 \geqslant 0$. Пусть $|f(x)| \leqslant C$ на $K$ ($f$ непрерывна). Тогда для $x \in K$

$$|f(x) - u_\delta(x)| = |f(x)| \leqslant C = \frac{C}{\omega(\delta_0)}\omega(\delta_0) \leqslant \frac{C}{\omega(\delta_0)}\omega(\delta) = C_1'\omega(\delta).$$

Значит, заменяя $C_1$ на наибольшее из чисел $C_1$ и $C_1'$, получим существование констант, для которых требуемые условия выполняются при всех положительных $\delta$.

Построению приближающей функции посвящён третий раздел главы. Во втором разделе изучаются свойства псевдогармонического расширения гёльдеровой функции, в частности доказывается интегральное представление

$$f(x) = -\frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y),$$

на котором основывается последующее построение приближающей функции. В четвёртом разделе обсуждается обобщение полученных результатов на компакты меньших размерностей.

## 2.2. Свойства псевдогармонического расширения

Пусть нам дана гёльдерова функция $f$. Применяя теорему из предыдущей главы, построим её псевдогармоническое расширение $f_0$. Пользуясь (20), можем написать

$$\Delta^* f(\nu(x),\, C_4 d(x)) \leqslant C\omega(C_4 d(x)) \leqslant C\omega(d(x)).$$

Поэтому в данном случае для $f_0$ верны следующие оценки:

$$\|\operatorname{grad} f_0(x)\| \leqslant C\frac{\omega(d(x))}{d(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K, \tag{23}$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C\frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K. \tag{24}$$

Поскольку $f$ непрерывна на $K$, $f_0$ непрерывна на $\mathbb{R}^m$, и $f_0|_K = f$. Напомним также, что $f_0$ обнуляется вне шара $B_0 = B(\mathbb{O}, R_0)$.

В предыдущей главе мы для каждого натурального $n$ построили систему из $c_n \leqslant C2^{(m-2)n}$ точек $x_{kn} \in K$, обладающих следующими свойствами: попарные расстояния между точками $x_{kn}$ не меньше $2^{-n}$, а открытые шары с центрами в точках $x_{kn}$ радиуса $2^{-n}$ покрывают $K$. Затем мы ввели в рассмотрение множества $\Omega_n^* = \bigcup\limits_{k=0}^{c_n-1} \overline{B}(x_{kn}, 2^{-n+1})$ и $\Omega_n = \Omega_n^* \setminus \Omega_{n+1}^*$ и получили оценку (2):

$$2^{-n-1} < d(x) \leqslant 2^{-n+1}, \quad x \in \Omega_n.$$

Возьмём точку $x \in B_0 \setminus K$ и подберём такое $n$, что при любом целом неотрицательном $k$ будет выполнено $x \notin \Omega_{n+k}^*$ (для этого достаточно, чтобы $2^{-n}$ было достаточно мало по сравнению с $d(x)$). Обозначим через $T_n$ компоненту связности множества $B_0 \setminus \Omega_n^*$, содержащую точку $x$. Применим известную формулу [26, гл. 11, с. 229]:

$$f_0(x) = \frac{1}{(m-2)s_m} \int\limits_{\partial T_n} f'_{0n(y)}(y) \frac{1}{r_x^{m-2}(y)}\, d\sigma(y) -$$

$$- \frac{1}{(m-2)s_m} \int\limits_{\partial T_n} f_0(y) \left(\frac{1}{r_x^{m-2}(y)}\right)'_{n(y)} d\sigma(y) - \frac{1}{(m-2)s_m} \int\limits_{T_n} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y), \tag{25}$$

где $s_m = \sigma(S(\mathbb{O}, 1))$, $r_x(y) = \|x - y\|$, $n(y)$ — внешняя единичная нормаль к гиперповерхности $T_n$ в точке $y$.

Поскольку $f_0$ и $f'_{0n(y)}$ равны нулю на $\partial B_0$, первые два интеграла в (25) берутся по гиперповерхности, содержащейся в $\partial\Omega_n^*$, которая состоит из подмножеств $c_n$ сфер радиуса $2^{-n+1}$, суммарная мера которых равна

$$c_n s_m (2^{-n+1})^{m-1} \leqslant s_m 2^{(m-2)n+(m-1)(-n+1)} = C2^{-n},$$

поскольку $c_n \leqslant C2^{(m-2)n}$. Точка $x$ не принадлежит компакту $\Omega_n^*$, так что $r_x(y)$ отделено от нуля, причём для рассматриваемых $n$ одним и тем же числом. Значит, применяя (23) и учитывая (2), получим

$$\left| \int\limits_{\partial T_n} f'_{0n(y)}(y) \frac{1}{r_x^{m-2}(y)} \, d\sigma(y) \right| \leqslant C2^{-n} \sup_{y \in \partial\Omega_n^*} \frac{\omega(d(y))}{d(y)} \leqslant C\omega(2^{-n}),$$

что стремится к нулю с ростом $n$. Далее, оценив модуль нормальной производной нормой градиента и используя ограниченность $f_0$, получим

$$\left| \frac{1}{(m-2)s_m} \int\limits_{\partial T_n} f_0(y) \left( \frac{1}{r_x^{m-2}(y)} \right)'_{n(y)} \, d\sigma(y) \right| \leqslant C \int\limits_{\partial T_n} |f_0(y)| \frac{1}{r_x^{m-1}(y)} \, d\sigma(y) \leqslant C2^{-n},$$

что также стремится к нулю. Таким образом, переходя к пределу в (25), получаем важное интегральное представление $f_0$:

$$f_0(x) = -\frac{1}{(m-2)s_m} \int\limits_{B_0} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)} \, d\lambda(y) = -\frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)} \, d\lambda(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K, \tag{26}$$

где мы для краткости обозначили $q_m = (m-2)s_m$.

Мы хотим доказать, что представление (26) верно на всём $\mathbb{R}^m$. Для этого мы установим непрерывность на $\mathbb{R}^m$ интеграла, стоящего в правой части равенства, как функции от $x$. В этом нам помогут следующие леммы. Для $A \subset \mathbb{R}^m$ обозначим $A' = A \cap B_0$.

**Лемма 1.** *Пусть $x \in K$. Тогда*

$$\int\limits_{B'(x,R)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)} \, d\lambda(y) \leqslant CR^{m-2}\omega(R).$$

*Доказательство.* Пусть $\Omega_0 = B_0 \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Положим $\sigma_n = B'(x, R) \cap \Omega_n$. Тогда

$$\int\limits_{B'(x,R)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)} \, d\lambda(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\sigma_n} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)} \, d\lambda(y) = \sum_{n=n(R)}^{\infty} \int\limits_{\sigma_n} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)} \, d\lambda(y),$$

где $n(R)$ обозначает наименьшее $n$, для которого $\sigma_n \neq \varnothing$. Заметим, что из (2) следует, что $2^{-n(R)} \leqslant 2R$. Рассмотрим для фиксированного $n \geqslant n(R)$ все точки $x_{kn} = \varphi(t_{kn})$, для которых $B(x_{kn}, 2^{-n+1}) \cap B(x, R) \neq \varnothing$ (множество $\sigma_n$ может состоять только из подмножеств таких шаров). Поскольку для рассматриваемых $n$ выполнено $2^{-n} \leqslant 2^{-n(R)} \leqslant 2R$, все эти точки принадлежат шару $B(x, 3R)$. Попарные расстояния между точками $t_{kn}$ не меньше $\widetilde{C}_2^{-1}2^{-n}$, все они лежат в $(m-2)$-мерном шаре радиуса $3\widetilde{C}_1^{-1}R$ и тем более в $(m-2)$-мерном кубе со стороной $6\widetilde{C}_1^{-1}R$. По лемме 4 первой главы, этих точек (как и точек $x_{kn}$) не больше, чем $CR^{m-2}2^{(m-2)n}$ (лемма применима, ведь для рассматриваемых $n$ выполнено $\widetilde{C}_2^{-1}2^{-n} \leqslant 6\sqrt{m-2}\widetilde{C}_1^{-1}R$, поскольку $\widetilde{C}_1 \leqslant \widetilde{C}_2$) . Множество $\Omega_n$ состоит из подмножеств шаров с центрами $x_{kn}$ радиуса $2^{-n+1}$, поэтому

$$\lambda(\sigma_n) \leqslant CR^{m-2}2^{(m-2)n+m(-n+1)} = CR^{m-2}2^{-2n}.$$

Учитывая это и оценивая снизу $d(y)$ с помощью (2), получим

$$\sum_{n=n(R)}^{\infty} \int_{\sigma_n} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C \sum_{n=n(R)}^{\infty} 2^{2n}\omega(2^{-n})\lambda(\sigma_n) \leqslant CR^{m-2} \sum_{n=n(R)}^{\infty} \omega(2^{-n}).$$

Применим теперь условие (18):

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \omega(2^{-n}) = 2\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-n+1}}\, dt \leqslant 2\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} \frac{\omega(t)}{t}\, dt = 2\int_0^{2^{-n_0+1}} \frac{\omega(t)}{t}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant C\omega(2^{-n_0+1}) \leqslant C\omega(2^{-n_0}). \quad (27)$$

Значит, подставляя сюда $n_0 = n(R)$ и снова применяя оценку $2^{-n(R)} \leqslant 2R$, получим

$$\int_{B'(x,R)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)} \leqslant CR^{m-2} \sum_{n=n(R)}^{\infty} \omega(2^{-n}) \leqslant CR^{m-2}\omega(R),$$

что и требовалось. $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $x \in K$. Тогда*

$$\int_{B'(x,R)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C\omega(R).$$

*Доказательство.* Преобразуем интеграл из левой части и применим лемму 1:

$$\int\limits_{B'(x,R)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{B'(x,2^{-n}R)\setminus B'(x,2^{-(n+1)}R)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(m-2)(n+1)}}{R^{m-2}} \int\limits_{B'(x,2^{-n}R)\setminus B'(x,2^{-(n+1)}R)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)}\,d\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(m-2)(n+1)}}{R^{m-2}} \int\limits_{B'(x,2^{-n}R)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)}\,d\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(m-2)n}}{R^{m-2}} 2^{-(m-2)n} R^{m-2}\omega(2^{-n}R) = C\sum_{n=0}^{\infty}\omega(2^{-n}R) \leqslant C\omega(R).$$

В последнем переходе мы воспользовались (27). □

Обозначим выражение из правой части (26) через $g(x)$. Заметим, что в силу неравенства (24), леммы 2 и того обстоятельства, что $\Delta f_0 = 0$ вне $B_0$, имеем

$$q_m|g(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) = \int\limits_{B(x,1)} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus B(x,1)} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) =$$

$$= \int\limits_{B'(x,1)} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) + \int\limits_{B_0\setminus B(x,1)} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) \leqslant \int\limits_{B'(x,1)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y)r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) + C \leqslant$$

$$\leqslant C\omega(1) + C,$$

то есть $g(x)$ корректно определено для $x \in K$. Проверим сначала, что

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant C\omega(\|x_1 - x_2\|), \quad x_1,\, x_2 \in K. \tag{28}$$

Пусть $x_1,\, x_2 \in K$. Тогда

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(y)}{r_{x_1}^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) - \frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(y)}{r_{x_2}^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) =$$

$$= \frac{1}{q_m} \int\limits_{B(x_1,\, 2\|x_1-x_2\|)} \frac{\Delta f_0(y)}{r_{x_1}^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) - \frac{1}{q_m} \int\limits_{B(x_1,\, 2\|x_1-x_2\|)} \frac{\Delta f_0(y)}{r_{x_2}^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) +$$

$$+ \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B(x_1,\, 2\|x_1-x_2\|)} \Delta f_0(y) \left( \frac{1}{r_{x_1}^{m-2}(y)} - \frac{1}{r_{x_2}^{m-2}(y)} \right) d\lambda(y) = I_1 - I_2 + I_3. \quad (29)$$

Неравенство (24) и лемма 2 сразу дают нам, что

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{q_m} \int\limits_{B(x_1,\, 2\|x_1-x_2\|)} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_{x_1}^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) = \frac{1}{q_m} \int\limits_{B'(x_1,\, 2\|x_1-x_2\|)} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_{x_1}^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{q_m} \int\limits_{B'(x_1,\, 2\|x_1-x_2\|)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y) r_{x_1}^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C\omega(2\|x_1 - x_2\|) \leqslant C\omega(\|x_1 - x_2\|).$$

Аналогично, учитывая, что $B(x_1,\, 2\|x_1 - x_2\|) \subset B(x_2,\, 3\|x_1 - x_2\|)$, получим

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{q_m} \int\limits_{B'(x_2,\, 3\|x_1-x_2\|)} \frac{\omega(d(y))}{d^2(y) r_{x_2}^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C\omega(3\|x_1 - x_2\|) \leqslant C\omega(\|x_1 - x_2\|).$$

Заметим, что для $y \notin B(x_1,\, 2\|x_1 - x_2\|)$ выполнено

$$\|y - x_2\| \geqslant \|y - x_1\| - \|x_1 - x_2\| \geqslant \frac{1}{2}\|y - x_1\|, \quad \|y - x_2\| \leqslant 2\|y - x_1\|,$$

то есть $r_{x_2}(y) \asymp r_{x_1}(y)$. Заметим, что для $a,\, b \geqslant 0$ выполнено

$$|a^j - b^j| \leqslant |a - b| \sum_{i=0}^{j-1} a^{j-i} b^i \leqslant |a - b| \cdot j(\max(a,\, b))^{j-1} \leqslant j|a - b|(a^{j-1} + b^{j-1}),$$

поэтому для таких $y$ справедливо

$$\left| \frac{1}{r_{x_1}^{m-2}(y)} - \frac{1}{r_{x_2}^{m-2}(y)} \right| = \frac{|r_{x_1}^{m-2}(y) - r_{x_2}^{m-2}(y)|}{r_{x_1}^{m-2}(y) r_{x_2}^{m-2}(y)} \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{|r_{x_1}(y) - r_{x_2}(y)|(r_{x_1}^{m-3}(y) + r_{x_2}^{m-3}(y))}{r_{x_1}^{2m-4}(y)} \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{|r_{x_1}(y) - r_{x_2}(y)| r_{x_1}^{m-3}(y)}{r_{x_1}^{2m-4}(y)} \leqslant C \frac{\|x_1 - x_2\|}{r_{x_1}^{m-1}(y)}.$$

Тогда, применяя неравенство (24), лемму 1 и условие (18), получим

$$|I_3| \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B'(x_1,\, 2^{k+1}\|x_1-x_2\|) \setminus B'(x_1,\, 2^k\|x_1-x_2\|)} \frac{\|x_1 - x_2\| \omega(d(y))}{r_{x_1}^{m-1}(y) d^2(y)}\, d\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(m-1)k}\|x_1-x_2\|^{m-2}}\int\limits_{B'(x_0,\,2^{k+1}\|x_1-x_2\|)}\frac{\omega(d(y))}{d^2(y)}\,d\lambda(y)\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{(m-2)(k+1)}\|x_1-x_2\|^{m-2}\omega(2^{k+1}\|x_1-x_2\|)}{2^{(m-1)k}\|x_n-x_0\|^{m-2}}\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega(2^k\|x_1-x_2\|)}{2^k}=$$

$$=C\sum_{k=1}^{\infty}4\|x_1-x_2\|\int\limits_{2^k\|x_1-x_2\|}^{2^{k+1}\|x_1-x_2\|}\frac{\omega(2^k\|x_1-x_2\|)}{(2^{k+1}\|x_1-x_2\|)^2}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}2\|x_1-x_2\|\int\limits_{2^k\|x_1-x_2\|}^{2^{k+1}\|x_1-x_2\|}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt=C\cdot 2\|x_1-x_2\|\int\limits_{2\|x_1-x_2\|}^{\infty}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C\omega(2\|x_1-x_2\|)\leqslant C\omega(\|x_1-x_2\|).$$

Итак, (28) доказано. Отсюда следует, что сужение $g$ на $K$ является непрерывной на $K$ функцией, и нам осталось проверить, что если $x_k\to x_0\in K$, $x_k\notin K$, то $g(x_k)\to g(x_0)$. Напишем равенство (29) для $x_1=\nu(x_k)$ (точка, реализующая расстояние от $x_k$ до $K$), $x_2=x_k$. В оценке $I_1$ и $I_3$ мы никак не использовали, что $x_2\in K$, поэтому имеем

$$|I_1|+|I_3|\leqslant C\omega(\|x_k-\nu(x_k)\|)=C\omega(d(x_k)),$$

что стремится к нулю. Величину $I_2$ оценим отдельно. Делая сферическую замену, легко получить, что

$$\int\limits_{B(x_k,\,R)}\frac{d\lambda(y)}{r_{x_k}^{m-2}(y)}=CR^{m-1}.$$

Поскольку $x_k\notin K$, то внутри шара $B(x_k,\,\frac{1}{2}d(x_k))$ величина $d(y)$ эквивалентна $d(x_k)$, а вне этого шара $r_{x_k}(y)$ можно оценить снизу через $\frac{1}{2}d(x_k)$. Тогда по неравенству (24) и лемме 1 имеем

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{q_m}\int\limits_{B(x_k,\,\frac{1}{2}d(x_k))}\frac{\omega(d(y))}{d^2(y)r_{x_k}^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)+$$

$$+\frac{1}{q_m}\int\limits_{B'(\nu(x_k),\,2\|x_k-\nu(x_k)\|)\setminus B(x_k,\,\frac{1}{2}d(x_k))}\frac{\omega(d(y))}{d^2(y)r_{x_k}^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\omega(d(x_k))}{d^2(x_k)}\int\limits_{B(x_k,\,\frac{1}{2}d(x_k))}\frac{d\lambda(y)}{r_{x_k}^{m-2}(y)}+\frac{C}{d^{m-2}(x_k)}\int\limits_{B'(\nu(x_k),\,2d(x_k))}\frac{\omega(d(y))}{d^2(y)}\,d\lambda(y)\leqslant$$

$$\leqslant Cd^{m-3}(x_k)\omega(d(x_k))+\frac{C}{d^{m-2}(x_k)}(2d(x_k))^{m-2}\omega(2d(x_k))\leqslant$$

$$\leqslant C(1+d^{m-3}(x_k))\omega(d(x_k)),$$

что также стремится к нулю с ростом $k$. Наконец, напишем

$$|g(x_k)-g(x_0)|\leqslant|g(x_k)-g(\nu(x_k))|+|g(\nu(x_k))-g(x_0)|.$$

Мы только что доказали, что первое слагаемое стремится к нулю при $k\to\infty$. Второе слагаемое стремится к нулю, поскольку сужение $g$ на $K$ непрерывно, а при $x_k\to x_0$ также выполняется $\nu(x_k)\to x_0$.

Таким образом, $g$ неперерывна на $\mathbb{R}^m$. Получается, что (26) выполняется для всех $x\in\mathbb{R}^m$, ведь в обеих частях равенства стоят непрерывные на $\mathbb{R}^m$ функции, а поскольку хаусдорфова размерность $K$ равна $m-2$, для любой точки $x\in K$ можно построить последовательность $x_k\notin K$, сходящуюся к $x$. В частности, подставляя точки из $K$, получим

$$f(x)=-\frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y). \tag{30}$$

**Замечание.** Из (28) и (30) следует, что существование псевдогармонического расширения при условии $\Delta^*f(x,\,r)\leqslant C\omega(r)$ влечёт гёльдеровость с модулем непрерывности $\omega$. Речь идёт именно о гёльдеровости (а не просто о непрерывности с данным модулем), потому что в доказательстве мы существенно использовали свойство (18), которое по сути и означает гёльдеровость функции с модулем непрерывности $\omega$.

## 2.3. Построение приближающей функции

Перейдём к построению приближающей функции. Как мы показали в первом разделе, достаточно сделать это лишь для достаточно малых $\delta$. Проведём построение для $\delta\in(0,\,1/2)$. Начнём с $\delta=2^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть $C_5\geqslant 2$. Применяя лемму 4 первой главы так, как это было сделано при доказательстве леммы 1, получим, что что в шаре $\overline{B}(x_{k_0 n}, C_5 2^{-n})$ не больше $CC_5^{m-2}$ точек $x_{kn}$ (соответствующие точки $t_{kn} = \varphi^{-1}(x_{kn})$ лежат в $(m-2)$-мерном кубе с ребром $2\widetilde{C}_1^{-1} C_5 2^{-n}$, а попарные расстояния между ними не меньше $\widetilde{C}_2^{-1} 2^{-n}$). Значит,

$$\lambda(\overline{B}(x_{k_0 n}, C_5 2^{-n}) \cap \Omega_n^*) \leqslant CC_5^{m-2} 2^{m(-n+1)}.$$

В то же время

$$\lambda(\overline{B}(x_{k_0 n}, C_5 2^{-n})) = CC_5^m 2^{-mn}.$$

Многочлен степени $m$ растёт быстрее многочлена степени $m-2$, поэтому можно выбрать $C_5$ так, чтобы

$$\lambda(\overline{B}(x_{k_0 n}, C_5 2^{-n}) \setminus \Omega_n^*) \geqslant \frac{1}{2} \lambda(B(\mathbb{O},\, C_5 2^{-n}))$$

выполнялось для всех $k_0 = 0,\, 1, \ldots,\, c_n - 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Определим для $k = 0,\, 1, \ldots,\, c_n - 1$ множества $\beta_{kn}$:

$$\beta_{0n} = B(x_{0n},\, 2^{-n+1}),\ \beta_{kn} = B(x_{kn},\, 2^{-n+1}) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} B(x_{in},\, 2^{-n+1}) \text{ при } k = 1, \ldots,\, c_n - 1.$$

Ясно, что множества $\beta_{kn}$ попарно (по $k$) не пересекаются и дают в объединении множество, отличающееся от $\Omega_n^*$ на множество меры нуль. Далее, неравенство (24) и лемма 1 дают нам, что

$$\int\limits_{\beta_{kn}} |\Delta f_0(y)|\, d\lambda(y) = C_{kn} 2^{-(m-2)n} \omega(2^{-n}), \tag{31}$$

причём $C_{kn} \leqslant C$ для всех $k$ и $n$.

Обозначим через $\chi_{kn}$ характеристическую функцию множества $B(x_{kn},\, C_5 2^{-n}) \setminus \Omega_n^*$ и положим

$$\varphi_{kn}(y) = \gamma_{kn} \chi_{kn}(y) 2^{2n} \omega(2^{-n}),$$

где числа $\gamma_{kn}$ подобраны так, чтобы выполнялось

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(y)\, d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(y)\, d\lambda(y) = 0. \tag{32}$$

Иными словами,

$$\gamma_{kn} = -\frac{1}{2^{2n} \omega(2^{-n}) \lambda(B(x_{kn},\, C_5 2^{-n}) \setminus \Omega_n^*)} \int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(y)\, d\lambda(y).$$

Тогда из определения $C_5$ и равенства (31) получим

$$|\gamma_{kn}| \leqslant \frac{2C_{kn}2^{-(m-2)n}\omega(2^{-n})}{2^{2n}\omega(2^{-n})\lambda(B(\mathbb{O},\, C_5 2^{-n}))} \leqslant C\frac{2^{-(m-2)n}}{2^{2n}\cdot 2^{-mn}} = C.$$

Положим $\Phi_n = \sum\limits_{k=0}^{c_n-1}\varphi_{kn}$ и определим функцию $u_{2^{-n}}$:

$$u_{2^{-n}}(x) = -\frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus\Omega_n^*}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) + \frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y).$$

В первой главе мы уже убеждались, что из $d(x) \leqslant 2^{-n}$ следует $x \in \Omega_n^*$, поэтому $\Lambda_{2^{-n}}(K) \subset \Omega_n^*$, а значит, по теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, $u_{2^{-n}}$ гармонична в $\Lambda_{2^{-n}}(K)$, ведь такова функция $r_x^{2-m}$.

Разобъём куб $[0,\,1]^{m-2}$ на $(\lceil\widetilde{C}_2 2^{n+1}\sqrt{m-2}\rceil)^{m-2}$ одинаковых кубов. Тем самым мы добъёмся того, что сторона маленького куба будет соизмерима с $2^{-n}$ (с одинаковыми константами для всех $n$) и что в одном кубе будет лежать не более одной точки $t_{kn} = \varphi^{-1}(x_{kn})$. Возьмём произвольную точку $t \in [0,\,1]^{m-2}$. Один из кубов, содержащих $t$ назовём нулевым. Множество кубов, имеющих общие точки с нулевым, назовём первым слоем. Далее, $i$-ым слоем назовём множество кубов, не названных ранее и имеющих общие точки с кубами $(i-1)$-го слоя. Пусть длина ребра маленького куба оценивается снизу величиной $\widetilde{C}_3 2^{-n}$, а длина диагонали оценивается сверху $\widetilde{C}_4 2^{-n}$. Подберём такую константу $C_6$, чтобы наименьший номер слоя, содержащего куб, не лежащий целиком в множестве $\{s \in [0,\,1]^{m-2} \mid \|s-t\| \leqslant C_6\widetilde{C}_2^{-1}2^{-n}\}$, удовлетворял неравенству $\widetilde{C}_1\widetilde{C}_3(i-1) - C_5 > 0$. Смысл такого выбора $C_6$ станет понятным ниже.

Пусть $x \in K$. Используя (30), напишем

$$u_{2^{-n}}(x) - f(x) = \frac{1}{q_m}\int\limits_{\Omega_n^*}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) + \frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{c_n-1}\left(\frac{1}{q_m}\int\limits_{\beta_{kn}}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) + \frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)\right) = \frac{1}{q_m}(\Sigma_1 + \Sigma_2),$$

где $\Sigma_1$ — сумма по индексам $k$, для которых $x_{kn} \in B(x,\, C_6 2^{-n})$, а $\Sigma_2$ — по всем остальным. Множество индексов $k$ набора $\Sigma_i$ обозначим через $S_i$. Из определения $\Sigma_1$ следует, что $\bigcup\limits_{k\in S_1}\beta_{kn}\subset B(x,\,(C_6+2)2^{-n})$, так что по неравенству (24) и лемме 2 имеем

$$\left|\sum_{k\in S_1}\int\limits_{\beta_{kn}}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)\right|\leqslant\int\limits_{B(x,\,(C_6+2)2^{-n})}\frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)\leqslant C\omega(2^{-n}).$$

Снова применяя лемму 4 первой главы, получим, что $|S_1|\leqslant C$. Учитывая это и то, что для $y\notin\Omega_n^*$ выполнено $r_x(y)\geqslant 2^{-n}$, получим

$$\left|\sum_{k\in S_1}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)\right|\leqslant C2^{-mn}\frac{2^{2n}\omega(2^{-n})}{2^{(m-2)(-n)}}=C\omega(2^{-n}).$$

Таким образом, $|\Sigma_1|\leqslant\omega(2^{-n})$.

Используя (32), перепишем слагаемые из $\Sigma_2$ следующим образом:

$$\int\limits_{\beta_{kn}}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)=\int\limits_{\beta_{kn}}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(x_{kn})}\,d\lambda(y)+$$

$$+\int\limits_{\beta_{kn}}\Delta f_0(y)\left(\frac{1}{r_x^{m-2}(y)}-\frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})}\right)\,d\lambda(y)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(x_{kn})}\,d\lambda(y)+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi_{kn}(y)\left(\frac{1}{r_x^{m-2}(y)}-\frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})}\right)\,d\lambda(y)=$$

$$=\frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})}\left(\int\limits_{\beta_{kn}}\Delta f_0(y)\,d\lambda_m(y)+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi_{kn}(y)\,d\lambda(y)\right)+\ldots=$$

$$=\int\limits_{\beta_{kn}}\Delta f_0(y)\left(\frac{1}{r_x^{m-2}(y)}-\frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})}\right)\,d\lambda(y)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi_{kn}(y)\left(\frac{1}{r_x^{m-2}(y)}-\frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})}\right)\,d\lambda(y).$$

Мы хотим оценить разность дробей в скобках. Поскольку носитель $\varphi_{kn}$ содержится в $B(x_{kn},\,C_5 2^{-n})$, как и множество $\beta_{kn}$, достаточно написать оценку для $y\in B(x_{kn},\,C_5 2^{-n})$. Для $t=\varphi^{-1}(x)$ разобъём на $N^{m-2}$ кубов так, как это было описано выше. Пусть $t_{kn}=\varphi^{-1}(x_{kn})$ принадлежит кубу $i$-го слоя. Оценим сначала с двух сторон $\|y-x\|$.

$$\|y-x\| \geqslant \|x-x_{kn}\| - \|y-x_{kn}\| \geqslant \widetilde{C}_1\|t-t_{kn}\| - C_5 2^{-n} \geqslant \widetilde{C}_1\widetilde{C}_3 2^{-n}(i-1) - C_5 2^{-n},$$

причём последнее число положительно в силу выбора $C_6$. Действительно, $x_{kn}$ не принадлежит шару $B(x,\, C_6 2^{-n})$, а значит $\|t-t_{kn}\| \geqslant \widetilde{C}_2^{-1}\|x-x_{kn}\| > \widetilde{C}_2^{-1}C_6 2^{-n}$. С другой стороны,

$$\|y-x\| \leqslant \|x-x_{kn}\| + \|y-x_{kn}\| \leqslant \widetilde{C}_2\widetilde{C}_4 2^{-n} + C_5 2^{-n}.$$

Тогда, применяя доказанное ранее неравенство $|a^j - b^j| \leqslant j|a-b|(a^{j-1}+b^{j-1})$, получим

$$\left|\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}} - \frac{1}{\|x-x_{kn}\|^{m-2}}\right| = \left|\frac{\|x-x_{kn}\|^{m-2} - \|x-y\|^{m-2}}{\|x-y\|^{m-2}\|x-x_{kn}\|^{m-2}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(m-2)\|y-x_{kn}\|(\|x-x_{kn}\|^{m-3} + \|x-y\|^{m-3})}{\|x-y\|^{m-2}\|x-x_{kn}\|^{m-2}} \leqslant$$
$$\leqslant C\frac{2^{-n}((\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4(i+1))^{m-3}2^{-n(m-3)} + (\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4(i+1)+C_6)^{m-3}2^{-n(m-3)})}{(\widetilde{C}_1\widetilde{C}_3(i-1)-C_6)^{m-2}2^{-n(m-2)}(\widetilde{C}_1\widetilde{C}_3(i-1))^{m-2}2^{-n(m-2)}} =$$
$$= C2^{n(m-2)}\frac{(\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4(i+1))^{m-3} + (\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4(i+1)+C_6)^{m-3}}{(\widetilde{C}_1\widetilde{C}_3(i-1)-C_6)^{m-2}(\widetilde{C}_1\widetilde{C}_3(i-1))^{m-2}} = C2^{n(m-2)}a_i.$$

Обозначим множество индексов $k$, для которых $t_{kn}$ лежит в $i$-ом слое, через $F_i$. Положим также $a_i = 0$ для тех $i$, для которых оно не определено. Тогда, применяя последнюю оценку, равенство (31) и определение $\varphi_{kn}$, получим

$$|\Sigma_2| \leqslant C2^{n(m-2)}\sum_{i=1}^{2N}\sum_{k\in F_i} a_i\left(\int\limits_{\beta_{kn}} |\Delta f_0(y)|\,d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\varphi_{kn}(y)|\,d\lambda(y)\right) \leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{i=1}^{2N}\sum_{k\in F_i} a_i(C_{kn}2^{-(m-2)n}\omega(2^{-n}) + |\gamma_{kn}|2^{2n}(C_5 2^{-n})^m\omega(2^{-n})) \leqslant$$
$$\leqslant C\omega(2^{-n})\sum_{i=1}^{2N}\sum_{k\in F_i} a_i \leqslant C\omega(2^{-n})\sum_{i=1}^{\infty} a_i((2i+1)^{m-2} - (2i-1)^{m-2}),$$

поскольку в $i$-ом слое лежит не больше, чем $(2i+1)^{m-2} - (2i-1)^{m-2}$ кубов. Легко видеть, что $a_i \asymp i^{-(m-1)}$, поэтому последний ряд сходится. Значит, мы получили оценку

$$|f(x) - u_{2^{-n}}(x)| \leqslant \frac{1}{q_m}(|\Sigma_1| + |\Sigma_2|) \leqslant C\omega(2^{-n}). \tag{33}$$

Докажем теперь оценку на градиент приближающей функции. Пусть

$$w_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \int\limits_{\Omega_\ell} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) = \sum_{\ell=0}^{n-1} h_\ell(x).$$

Тогда, применяя оценку $r_x(y) \geqslant 2^{-\ell-1}$ для $x \in \Omega_\ell$ и формулы

$$\|\operatorname{grad} r_x^k(y)\| = |k| r_x^{k-1}(y)$$

и

$$\|\operatorname{grad} \int v(x,\, y)\, d\lambda(y)\| \leqslant \int \|\operatorname{grad} v(x,\, y)\|\, d\lambda(y)$$

(дифференцирование ведётся по переменной $x$), получаем

$$\|\operatorname{grad} h_\ell(x)\| \leqslant C \int\limits_{\Omega_\ell} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-1}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C 2^\ell \int\limits_{\Omega_\ell} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y).$$

Заметим, что в процессе доказательства (33), мы фактически получили оценку

$$\int\limits_{\Omega_\ell} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C\omega(2^{-\ell}).$$

Тогда, применяя (18), будем иметь

$$\|\operatorname{grad} w_n(x)\| \leqslant \sum_{\ell=0}^{n-1} \|\operatorname{grad} h_\ell(x)\| \leqslant C \sum_{\ell=0}^{n-1} 2^\ell \omega(2^{-\ell}) \leqslant C \sum_{\ell=0}^{n-1} \int\limits_{2^{-\ell}}^{2^{-\ell+1}} \frac{\omega(2^{-\ell})}{(2^{-\ell+1})^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{\ell=0}^{n-1} \int\limits_{2^{-\ell}}^{2^{-\ell+1}} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt \leqslant C \int\limits_{2^{-(n-1)}}^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt \leqslant C 2^{n-1} \omega(2^{n-1}) \leqslant C 2^n \omega(2^{-n}). \tag{34}$$

Далее положим

$$v_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y),$$

и напишем

$$\|\operatorname{grad} v_n(x)\| \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{|\Phi_n(y)|}{r_x^{m-1}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C 2^n \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{|\Phi_n(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C 2^n \omega(2^{-n}). \tag{35}$$

Здесь мы снова воспользовались оценкой $r_x(y) \geqslant 2^{-n}$ для $y \notin \Omega_n^*$ и тем обстоятельством, что, доказав (33), мы доказали

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{|\Phi_n(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C\omega(2^{-n}).$$

Объединяя неравенства (34) и (35) и используя определение $u_{2^{-n}}$, получим, что

$$\|\operatorname{grad} u_{2^{-n}}(x)\| \leqslant C\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-n}}. \tag{36}$$

Чтобы построить приближающую функцию для произвольного $\delta \in (0,\, 1/2)$, подберём такое $n$, что $2^{-n-1} < \delta \leqslant 2^{-n}$ и положим $u_\delta = u_{2^{-n}}$. Тогда очевидно, что $\Lambda_\delta(K) \subset \Lambda_{2^{-n}}(K)$, так что $u_\delta$ гармонична на требуемом множестве. Далее, используя оценку (33), неравенство $2^{-n} \leqslant 2\delta$ и свойства модуля непрерывности, получим

$$|f(x) - u_\delta(x)| = |f(x) - u_{2^{-n}}(x)| \leqslant C\omega(2^{-n}) \leqslant C\omega(\delta).$$

Аналогично, применяя (36), получим

$$\|\operatorname{grad} u_\delta(x)\| \leqslant \|\operatorname{grad} u_{2^{-n}}(x)\| \leqslant C\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-n}} \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

## 2.4. Обобщение на компакты меньших размерностей

Определение хорошего компакта, данное нами, обобщает понятие незамкнутой пространственной кривой, обладающей свойством соизмеримости дуги и хорды, на бóльшие размерности, если рассматривать кривую как множество коразмерности 2. Соизмеримость дуги и хорды мы заменили билипшицевостью. Однако можно пойти дальше и рассмотреть множества меньших размерностей.

**Определение.** *Множество $L \subset \mathbb{R}^m$ назовём хорошим компактом коразмерности $\ell$ ($\ell = 2, 3, \ldots, m-1$), если существует такое отображение $\varphi\colon [0,\, 1]^{m-\ell} \to \mathbb{R}^m$, что*

$$\widetilde{C}_5\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \widetilde{C}_6\|x_1 - x_2\|$$

*и $\varphi([0,\, 1]^{m-\ell}) = L$.*

Хороший компакт коразмерности 2 мы будем и дальше называть просто хорошим компактом. Аналогично тому, как мы в первой главе доказали, что при $m = 3$ множество хороших компактов совпадает со множеством незамкнутых пространственных кривых, обладающих свойством соизмеримости дуги и хорды, можно доказать, что множество хороших компактов коразмерности $m-1$ совпадает со множеством таких кривых в $\mathbb{R}^m$.

Проследим за предыдущими рассуждениями и убедимся, что доказанные нами теоремы справедливы для хороших компактов коразмерности $\ell$ для всех $\ell = 2, 3, \dots, m-1$.

Пусть $L$ — хороший компакт коразмерности $\ell$, $K \subset L$ — его произвольное компактное подмножество. Как и в первой главе, построим последовательность точек $x_{kn}$. Теперь точки $t_{kn} = \varphi^{-1}(x_{kn})$ будут содержаться в единичном $(m-\ell)$-мерном кубе, поэтому их количество $c_n$ будет оцениваться как

$$c_n \leqslant 2^{(m-\ell)n}.$$

Далее в первой главе коразмерность не играет роли — в построении псевдогармонического расширения мы пользовались лишь тем, что к любой точке $K$ можно устремить последовательность точек из дополнения. Разумеется, данное свойство сохраняется и в этом случае.

Во второй главе коразмерность впервые используется в доказательстве оценки

$$\left| \int\limits_{\partial T_n} f'_{0n(y)}(y) \frac{1}{r_x^{m-2}(y)}\, d\sigma(y) \right| \leqslant C 2^{-n} \sup_{y \in \partial\Omega_n^*} \frac{\omega(d(y))}{d(y)} \leqslant C\omega(2^{-n}),$$

когда мы из формулы (25) получаем интегральное представление $f_0$ на $\mathbb{R}^m \setminus K$. Для этого нам нужно было оценить меру множества $\partial\Omega_n^*$. В случае $\ell = 2$ мы имели

$$\sigma(\partial\Omega_n^*) \leqslant C 2^{-n}.$$

В произвольном же случае получим

$$\sigma(\partial\Omega_n^*) \leqslant c_n s_m (2^{-n+1})^{m-1} \leqslant s_m 2^{(m-\ell)n + (m-1)(-n+1)} = C 2^{-(\ell-1)n},$$

откуда

$$\left| \int\limits_{\partial T_n} f'_{0n(y)}(y) \frac{1}{r_x^{m-2}(y)}\, d\sigma(y) \right| \leqslant C 2^{-(\ell-1)n} \sup_{y \in \partial\Omega_n^*} \frac{\omega(d(y))}{d(y)} \leqslant C 2^{-(\ell-2)n} \omega(2^{-n}),$$

что также стремится к нулю с ростом $n$.

Далее в доказательстве леммы 1 мы рассматриваем множества

$$\sigma_n = B'(x,\, R) \cap \Omega_n$$

для $n \geqslant n(R)$, где $n(R)$ — наименьшее $n$, для которого $\sigma_n \neq \varnothing$. Для оценки меры $\sigma_n$ мы оцениваем количество точек $x_{kn}$, для которых

$$B(x_{kn},\, 2^{-n+1}) \cap B(x,\, R) \neq \varnothing.$$

Оказалось, что все точки $t_{kn} = \varphi^{-1}(x_{kn})$ лежат в кубе со стороной $6\widetilde{C}_1^{-1}R$. Но если раньше размерность этого куба была $m-2$, то теперь она равна $m-\ell$. Тогда по лемме 4 первой главы количество этих точек не превосходит $CR^{m-\ell}2^{(m-\ell)}$ (попарные расстояния между $t_{kn}$ всё ещё не меньше $\widetilde{C}_2^{-1}2^{-n}$). Также вспомним, что $2^{-n} \leqslant 2^{-n(R)} \leqslant 2R$, поэтому

$$\begin{aligned}\lambda(\sigma_n) \leqslant CR^{m-\ell}2^{(m-\ell)n+m(-n+1)} = CR^{m-\ell}2^{-\ell n} = \\ = CR^{m-\ell}2^{-(\ell-2)n} \cdot 2^{-2n} \leqslant CR^{m-\ell}(2R)^{\ell-2} \cdot 2^{-2n} \leqslant CR^{m-2}2^{-2n},\end{aligned}$$

то есть мы получили ту же оценку. Дальше доказательство проходит без изменений. Больше во втором разделе (кроме шага с последовательностью точек из дополнения, который мы уже упоминали) коразмерность никак не используется.

В построении приближающей функции коразмерность впервые возникает при оценке

$$\lambda(\overline{B}(x_{k_0n}, C_5 2^{-n}) \cap \Omega_n^*) \leqslant CC_5^{m-2}2^{m(-n+1)},$$

откуда мы из сравнения роста многочленов степеней $m-2$ и $m$ делаем вывод о возможности выбора такой константы $C_5$, чтобы неравенство

$$\lambda(\overline{B}(x_{k_0n}, C_5 2^{-n}) \setminus \Omega_n^*) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(B(\mathbb{O},\, C_5 2^{-n}))$$

выполнялось при всех допустимых $k_0$ и $n$. В случае произвольной коразмерности мы скажем, что по лемме 4 первой главы в шаре $\overline{B}(x_{k_0n},\, C_5 2^{-n})$ не больше $CC_5^{m-\ell}$ точек $x_{kn}$, откуда

$$\lambda(\overline{B}(x_{k_0n}, C_5 2^{-n}) \cap \Omega_n^*) \leqslant CC_5^{m-\ell}2^{m(-n+1)},$$

значит, сравнивая рост многочленов степеней $m-\ell$ и $m$, докажем существование требуемой константы $C_5$.

Затем вместо описанного разбиения мы будем разбивать куб $[0,\,1]^{m-\ell}$ на $(\lceil\widetilde{C}_2 2^{n+1}\sqrt{m-2}\rceil)^{m-\ell} = N^{m-\ell}$ одинаковых кубов. Последующие рассуждения остаются без изменений до того момента, где мы получаем оценку

$$|\Sigma_2| \leqslant C\omega(2^{-n})\sum_{i=1}^{2N}\sum_{k\in F_i} a_i \leqslant C\omega(2^{-n})\sum_{i=1}^{\infty} a_i((2i+1)^{m-2}-(2i-1)^{m-2}).$$

В нашем случае она заменится на

$$|\Sigma_2| \leqslant C\omega(2^{-n})\sum_{i=1}^{2N}\sum_{k\in F_i} a_i \leqslant C\omega(2^{-n})\sum_{i=1}^{\infty} a_i((2i+1)^{m-\ell}-(2i-1)^{m-\ell}),$$

поскольку именно числом $(2i+1)^{m-\ell}-(2i-1)^{m-\ell}$ оценивается сверху количество кубов в $i$-м слое для $(m-\ell)$-мерного куба. Этой заменой мы разве лишь уменьшили положительные члены сходящегося ряда, поэтому он останется сходящимся. Больше коразмерность в этом разделе не используется, так что все рассуждения остаются верными без каких-либо изменений.

Таким образом, все доказанные ранее утверждения справедливы и для хороших компактов коразмерности $\ell$.

# Глава 3. Приближение в $L^p$-норме

## 3.1. Предварительные замечания

Напомним, что хороший компакт — это множество $L = \varphi([0,\,1]^{m-2})$ в $\mathbb{R}^m$, где $\varphi$ удовлетворяет неравенствам

$$\widetilde{C}_1\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \widetilde{C}_2\|x_1 - x_2\|.$$

Пусть $\mu$ — $(m-2)$-мерная мера Хаусдорфа на $\mathbb{R}^m$, $A$ — произвольное $\mu$-измеримое подмножество $[0,\,1]^{m-2}$. Пусть множества $P_n = \varphi(Q_n)$ образуют произвольное $\varepsilon$-покрытие множества $\varphi(A)$. Тогда, используя определение хорошего компакта, получим

$$\widetilde{C}_1^{m-2}(\operatorname{diam} Q_n)^{m-2} \leqslant (\operatorname{diam} P_n)^{m-2} \leqslant \widetilde{C}_2^{m-2}(\operatorname{diam} Q_n)^{m-2}.$$

Складывая такие неравенства и по очереди, начиная с правого выражения, переходя к супремуму по всем $\varepsilon$, получим, что

$$\widetilde{C}_1^{m-2}\mu(A) \leqslant \mu(\varphi(A)) \leqslant \widetilde{C}_2^{m-2}\mu(A). \tag{37}$$

В частности, подставляя $A = [0,\,1]^{m-2}$, получим, что хаусдорфова размерность $L$ равна $m-2$.

Также напомним, что

$$\Delta^* f(x,\,r) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\,r) \cap L} |f(y) - f(x)|.$$

Через $H_p^\alpha(L)$ обозначим пространство всех функций $f$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\Delta^* f(\cdot,\,r)\|_p \leqslant C_f r^\alpha \tag{38}$$

для всех $r > 0$, где $\alpha \in (0,\, 1)$, а норма взята в пространстве $L^p(L,\, \mu)$. Через $\widetilde{H}_p^\alpha(L)$ обозначим подпространство $H_p^\alpha(L)$ функций $f$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\Delta^* f(x,\, r) \leqslant C_f \left(\frac{r}{R}\right)^\varepsilon \Delta^* f(y,\, R) \tag{39}$$

при $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$, $r \in (0,\, R]$, $\|x - y\| \leqslant R$, $x,\, y \in L$. Пространство всех функций $f$, удовлетворяющих неравенству

$$\Delta^* f(x,\, r) \leqslant C_f r^\alpha$$

будем обозначать $H^\alpha(L)$ (в обозначениях второй главы это просто $H^\omega(L)$ для $\omega(t) = t^\alpha$).

Для функции $v$, дифференцируемой в $\Lambda_\delta(L)$, положим

$$\operatorname{grad}_\delta v(x) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\, \delta/2)} \|\operatorname{grad} v(y)\|,$$

а для $F$, заданной на $L$, положим

$$\max\nolimits_\delta F(x) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\, \delta) \cap L} |F(y)|.$$

Основным результатом этой главы являются следующие две теоремы.

**Прямая теорема для класса $\boldsymbol{\widetilde{H}_p^\alpha(L)}$.** *Пусть $f \in \widetilde{H}_p^\alpha(L)$, $p \geqslant 1$. Тогда для любого $\delta \in (0,\, 1/2)$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция $u_\delta$, что*

$$\|\max\nolimits_\delta (f(\cdot) - u_\delta(\cdot))\|_p \leqslant C_1(f,\, L)\delta^\alpha, \tag{40}$$

$$\|\operatorname{grad}_\delta u_\delta(\cdot)\|_p \leqslant C_2(f,\, L)\delta^{\alpha - 1}. \tag{41}$$

**Обратная теорема для класса $\boldsymbol{H_p^\alpha(L)}$.** *Пусть функция $f$ такова, что для любого $\delta \in (0,\, 1/2)$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция $u_\delta$, что выполнены условия (40) и (41). Тогда $f \in H_p^\alpha(L)$.*

Сначала докажем обратную теорему. В этом нам поможет следующая лемма, представляющая и самостоятельный интерес.

**Лемма 1.** *Пусть для функции $f$ условие (38) выполняется при $r \leqslant r_0$. Тогда для любого $r > 0$ функции $\Delta^* f(\cdot, r)$ равномерно ограничены. Кроме того, функция $f$ также является ограниченной, а условие (38) выполняется для всех $r > 0$ (но с другой константой).*

*Доказательство.* Докажем сначала ограниченность функции $\Delta^* f(\cdot, r_0/3)$. Предположим, это не так, то есть для любого натурального $n$ найдётся такая точка $x_n \in L$, что $\Delta^* f(x_n, r_0/3) > n$. Выделим из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ ($L$ — компакт), пусть она сходится к $x_0 \in L$. Из определения $\Delta^* f$ следует существование таких $y_{n_k} \in B(x_{n_k}, r_0/3)$, что

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > n_k. \tag{42}$$

При больших $k$ выполнено $\|x_{n_k} - x_0\| \leqslant r_0/3$. Поэтому для любого $x \in B(x_0, r_0/3)$ при таких $k$ выполнено

$$\|x - x_{n_k}\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0 - x_{n_k}\| \leqslant 2r_0/3, \quad \|x - y_{n_k}\| \leqslant \|x - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \leqslant r_0,$$

то есть $x_{n_k}, y_{n_k} \in B(x, r_0)$. Из неравенства (42) следует выполнение хотя бы одного из неравенств

$$|f(x) - f(x_{n_k})| > n_k/2, \; |f(x) - f(y_{n_k})| > n_k/2.$$

Получается, что для любого $k$ выполнено $\Delta^* f(x, r_0) > n_k/2$, то есть $\Delta^* f(x, r_0) = +\infty$. Поскольку это верно для любого $x \in B(x_0, r_0/3)$, мы получили противоречие с включением $\Delta^* f(\cdot, r_0) \in L^p(L, \mu)$.

Возьмём теперь произвольные $x \in L$, $r > 0$. Пользуясь компактностью $L$ найдём конечный набор шаров $B(y_i, r_0/6)$, покрывающий $L$. Тогда для любой точки $t \in B(x, r)$ мы сможем соединить $x$ и $t$ ломаной, проходящей через точки $y_i$ так, чтобы длина любого звена не превосходила $r_0/3$. Отсюда, написав

$$|f(x) - f(t)| \leqslant |f(x) - f(y_{i_1})| + |f(y_{i_1}) - f(y_{i_2})| + \ldots + |f(y_{i_k}) - f(t)|,$$

мы получим оценку на $\Delta^* f(x, r)$ через сумму некоторых $\Delta^* f(y_i, r_0/3)$, причём их количество не превосходит количества шаров в покрытии, увеличенного на 1.

Значит, $\Delta^* f(x,\, r) \leqslant C$ для любых $x$, $r$. Взяв $r = \operatorname{diam} L$, получим $|f(x)| \leqslant 2C$. Наконец, для любого $r > r_0$

$$\|\Delta^* f(\cdot,\, r)\|_p \leqslant C = \frac{C}{r_0^\alpha} r_0^\alpha \leqslant \frac{C}{r_0^\alpha} r^\alpha \leqslant C r^\alpha. \quad \square$$

Перейдём к доказательству обратной теоремы. По лемме 1 выполнение условия (38) достаточно проверить лишь для малых $r$. Проверим для $r \leqslant 2/5$. Пусть $\kappa\colon L \to L$ — произвольное $\mu$-измеримое отображение, для которого имеет место $\|\kappa(x) - x\| \leqslant r$. Возьмём $\delta = 2r$, построим $u_\delta$ и напишем

$$|f(\kappa(x)) - f(x)| \leqslant |f(\kappa(x)) - u_\delta(\kappa(x))| + |f(x) - u_\delta(x)| + |u_\delta(\kappa(x)) - u_\delta(x)|.$$

$L^p$-нормы первых двух слагаемых оцениваются через $\|\max_\delta (f(\cdot) - u_\delta(\cdot))\|_p$, то есть через $C\delta^\alpha$. Если обозначить через $v_x$ единичный вектор, сонаправленный с $\kappa(x) - x$, то по теореме Лагранжа

$$|u_\delta(\kappa(x)) - u_\delta(x)| = |u'_{\delta v_x}(x + c v_x)| \|\kappa(x) - x\| \leqslant \delta \operatorname{grad}_\delta u_\delta(x),$$

то есть $L^p$-норма третьего слагаемого оценивается так же. Таким образом,

$$\|f(\kappa(\cdot)) - f(\cdot)\|_p \leqslant C\delta^\alpha \leqslant C r^\alpha.$$

В силу произвольности $\kappa$ отсюда следует выполнение условия (38).

Доказательству прямой теоремы посвящён третий раздел главы. Во втором разделе мы изучим свойства функции $f$, удовлетворяющей условию (39), и её псевдогармонического расширения. Эти свойства будут использованы в построении приближающей функции. Рассуждения будут напоминать соответствующие выкладки второй главы. Это связано с тем, что в действительности из условия (39) следует гёльдеровость $f$, правда, с другим показателем.

## 3.2. Свойства псевдогармонического расширения

Изучим условие (39). По лемме 1 $\Delta^* f$ ограничена, а тогда взяв некоторый фиксированный $y$, $R = \operatorname{diam} L$, произвольный $x$ и $r \in (0,\, \operatorname{diam} L]$, получим

$$\Delta^* f(x,\, r) \leqslant C \left(\frac{r}{\operatorname{diam} L}\right)^\varepsilon \Delta^* f(y,\, \operatorname{diam} L) = C r^\varepsilon,$$

то есть включение $f \in H^\varepsilon(L)$.

Пользуясь теоремой 1 первой главы, построим псевдогармоническое расширение $f$, то есть такую функцию $f_0 \in C(\mathbb{R}^m) \cap C^2(\mathbb{R}^m \setminus L)$, что $f_0|_L = f$, и

$$f_0(x) = 0 \text{ при } \|x\| \geqslant R_0,\ L \subset B(\mathbb{O},\, R_0),$$

$$\|\operatorname{grad} f_0(x)\| \leqslant C_3 \frac{\Delta^* f(\nu(x),\, C_5 d(x))}{d(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus L, \tag{43}$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C_4 \frac{\Delta^* f(\nu(x),\, C_5 d(x))}{d^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus L, \tag{44}$$

где, как и ранее, $d(x)$ — расстояние от $x$ до $L$, а $\nu(x)$ — некоторая точка, реализующая это расстояние. Напомним, что в первой главе мы для каждого натурального $n$ построили систему из $c_n \leqslant C2^{(m-2)n}$ точек $x_{kn} \in K$, обладающих следующими свойствами: попарные расстояния между точками $x_{kn}$ не меньше $2^{-n}$, а открытые шары с центрами в точках $x_{kn}$ радиуса $2^{-n}$ покрывают $K$. Затем мы ввели в рассмотрение множества $\Omega_n^* = \bigcup\limits_{k=0}^{c_n-1} \overline{B}(x_{kn},\, 2^{-n+1})$ и $\Omega_n = \Omega_n^* \setminus \Omega_{n+1}^*$ и получили оценку (2):

$$2^{-n-1} < d(x) \leqslant 2^{-n+1}, \quad x \in \Omega_n.$$

Пусть также $A' = A \cap B(\mathbb{O},\, R_0)$.

**Лемма 2.**

$$\int\limits_{B'(x,R)} \frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)}\, d\lambda(y) \leqslant CR^{m-2} \Delta^* f(x,\, C_5 R), \quad x \in L.$$

*Доказательство.* Пусть $\Omega_0 = B(\mathbb{O},\, R_0) \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Положим $\sigma_n = B'(x,\, R) \cap \Omega_n$. Тогда

$$\int\limits_{B'(x,R)} \frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)}\, d\lambda(y) = \sum_{n=n(R)}^{\infty} \int\limits_{\sigma_n} \frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)}\, d\lambda(y),$$

где $n(R)$ обозначает наименьшее $n$, для которого $\sigma_n \neq \varnothing$. В доказательстве леммы 1 второй главы мы выяснили, что

$$\lambda(\sigma_n) \leqslant CR^{m-2} 2^{-2n}.$$

Условия (39) и (2) дают нам, что для $y \in \sigma_n$ будет

$$\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y)) \leqslant C \left(\frac{d(y)}{R}\right)^{\varepsilon} \Delta^* f(x,\, C_5 R) \leqslant C \left(\frac{2^{-n}}{R}\right)^{\varepsilon} \Delta^* f(x,\, C_5 R).$$

Применяя это, получим

$$\sum_{n=n(R)}^{\infty} \int\limits_{\sigma_n} \frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)}\, d\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=n(R)}^{\infty} \left(\frac{2^{-n}}{R}\right)^{\varepsilon} \Delta^* f(x,\, C_5 R) 2^{2n} R^{m-2} 2^{-2n} = C R^{m-2} \Delta^* f(x,\, C_5 R).$$

В последнем переходе мы воспользовались тем, что $2^{-n(R)} \asymp R$. $\square$

Как и ранее, $r_x(y)$ обозначает $\|x - y\|$.

**Лемма 3.**

$$\int\limits_{B'(x,R)} \frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y) r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C \Delta^* f(x,\, C_5 R), \quad x \in L.$$

*Доказательство.* Преобразуем интеграл из левой части, применим лемму 2 и условие (39):

$$\int\limits_{B'(x,R)} \frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y) r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{B'(x,\, 2^{-n}R) \setminus B'(x,\, 2^{-n+1}R)} \frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y) r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(m-2)(n-1)}}{R^{m-2}} \int\limits_{B'(x,\, 2^{-n}R)} \frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)}\, d\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{(m-2)(n-1)}}{R^{m-2}} R^{m-2} 2^{-(m-2)n} \Delta^* f(x,\, C_5 2^{-n} R) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n})^{\varepsilon} \Delta^* f(x,\, C_5 R) = C \Delta^* f(x,\, C_5 R). \quad \square$$

Поскольку $f \in H^\varepsilon(L)$, то, применяя результаты второй главы, получим, что выполняется частный случай формулы (30):

$$f(x) = -\frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y). \tag{45}$$

## 3.3. Построение приближающей функции

Построение приближающей функции вполне аналогично равномерному случаю. Снова достаточно сделать это для $\delta = 2^{-n}$. Подберём $C_6 \geqslant 2$ чтобы выполнялось

$$\lambda(\overline{B}(x_{kn}, C_6 2^{-n}) \setminus \Omega_n^*) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(B(\mathbb{O}, C_6 2^{-n})).$$

Определим для $k = 0, 1, \ldots, c_n - 1$ множества $\beta_{kn}$:

$$\beta_{0n} = B(x_{0n}, 2^{-n+1}),\ \beta_{kn} = B(x_{kn}, 2^{-n+1}) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} B(x_{in}, 2^{-n+1}) \text{ при } k = 1, \ldots, c_n - 1.$$

Неравенство (44) и лемма 2 дают нам, что

$$\int\limits_{\beta_{kn}} |\Delta f_0(x)|\, d\lambda(x) = C_{kn} 2^{-(m-2)n} \Delta^* f(x_{kn}, C_5 2^{-n}), \tag{46}$$

причём $|C_{kn}| \leqslant C$ для всех $k$ и $n$. Обозначим через $\chi_{kn}$ характеристическую функцию множества $B(x_{kn}, C_6 2^{-n}) \setminus \Omega_n^*$ и положим

$$\varphi_{kn}(x) = \gamma_{kn}\chi_{kn}(x) 2^{2n} \Delta^* f(x_{kn}, C_5 2^{-n}),$$

где числа $\gamma_{kn}$ подобраны так, чтобы выполнялось

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(x)\, d\lambda(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(x)\, d\lambda(x) = 0. \tag{47}$$

Как было показано во второй главе, равенство (46) и определение $C_6$ дают нам, что $|\gamma_{kn}| \leqslant C$ при всех $k$ и $n$. Положим $\Phi_n = \sum\limits_{k=0}^{c_n-1} \varphi_{kn}$ и определим функцию $u_{2^{-n}}$:

$$u_{2^{-n}}(x) = -\frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) + \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y).$$

Она гармонична в $\Lambda_{2^{-n}}(L)$.

Снова разобъём куб $[0,\,1]^{m-2}$ на $N^{m-2}$ одинаковых кубов так, чтобы в одном кубе будет лежало не более одной точки $t_{kn} = \varphi^{-1}(x_{kn})$ и чтобы длина ребра куба оценивалась снизу величиной $\widetilde{C}_3 2^{-n}$, а длина диагонали оценивалась сверху $\widetilde{C}_4 2^{-n}$. Подберём такую константу $C_7$, чтобы для любой точки $t \in [0,\,1]^{m-2}$ наименьший номер слоя, содержащего куб, не лежащий целиком в $\overline{B}(t, C_7 \widetilde{C}_2^{-1} 2^{-n})$, удовлетворял неравенству $\widetilde{C}_1 \widetilde{C}_3 (i-1) - C_6 > 0$.

Пусть $x \in L$. Используя (45), напишем

$$u_{2^{-n}}(x) - f(x) = \frac{1}{q_m} \int\limits_{\Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) + \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) =$$

$$= \frac{1}{q_m} \sum_{k=0}^{c_n - 1} \left( \int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \right) = \frac{1}{q_m} (\Sigma_1 + \Sigma_2),$$

где $\Sigma_1$ — сумма по индексам $k$, для которых $x_{kn} \in B(x,\, C_7 2^{-n})$, а $\Sigma_2$ — по всем остальным. Множество индексов $k$ набора $\Sigma_i$ обозначим через $S_i$. Из определения $\Sigma_1$ следует, что $\bigcup\limits_{k \in S_1} \beta_{kn} \subset B(x,\, (C_7 + 2) 2^{-n})$, поэтому по неравенству (44) и лемме 3

$$\left| \sum_{k \in S_1} \int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \right| \leqslant \int\limits_{B(x,\,(C_7+2)2^{-n})} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C \Delta^* f(x,\, C_5 (C_7 + 2) 2^{-n}).$$

Далее, поскольку $r_x(y) \geqslant 2^{-n}$ при $y \notin \Omega_n^*$, получим

$$\left| \sum_{k \in S_1} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \right| \leqslant C \sum_{k \in S_1} 2^{-mn} \frac{2^{2n}}{2^{-(m-2)n}} \Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n}) =$$

$$= C \sum_{k \in S_1} \Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n}).$$

Из леммы 1 следует, что $|S_1| \leqslant C$, так что последнюю сумму можно оценить через $\Delta^* f(x,\, C 2^{-n})$. Таким образом, $|\Sigma_1| \leqslant C \Delta^* f(x,\, C_8 2^{-n})$.

Используя (47), как и в предыдущей главе, перепишем слагаемые из $\Sigma_2$ следующим образом:

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) =$$

$$= \int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(y) \left( \frac{1}{r_x^{m-2}(y)} - \frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda(y) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(y) \left( \frac{1}{r_x^{m-2}(y)} - \frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda(y).$$

Разобъём куб $[0,\, 1]^{m-2}$ на $N^{m-2}$ кубов, как было описано выше, и пронумеруем слои для точки $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда, как мы уже выясняли, если $t_{kn} = \varphi^{-1}(x_{kn})$ лежит в $i$-ом слое, то

$$\left| \frac{1}{r_x^{m-2}(y)} - \frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})} \right| \leqslant C 2^{n(m-2)} a_i,$$

где

$$a_i = \frac{(\widetilde{C}_2 \widetilde{C}_4 (i+1))^{m-3} + (\widetilde{C}_2 \widetilde{C}_4 (i+1) + C_6)^{m-3}}{(\widetilde{C}_1 \widetilde{C}_3 (i-1) - C_6)^{m-2} (\widetilde{C}_1 \widetilde{C}_3 (i-1))^{m-2}}.$$

Обозначим множество индексов $k$, для которых $t_{kn}$ лежит в $i$-ом слое, через $F_i$. Положим также $a_i = 0$ для тех $i$, для которых оно не определено. Тогда, применяя последнюю оценку, равенство (46) и определение $\varphi_{kn}$, получим

$$|\Sigma_2| \leqslant C 2^{n(m-2)} \sum_{i=1}^{2N} \sum_{k \in F_i} a_i \left( \int\limits_{\beta_{kn}} |\Delta f_0(y)|\, d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\varphi_{kn}(y)|\, d\lambda(y) \right) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{2N} \sum_{k \in F_i} a_i \Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n}).$$

Таким образом, мы получили оценку

$$|u_{2^{-n}}(x) - f(x)| \leqslant C_9 \left( \Delta^* f(x,\, C_8 2^{-n}) + \sum_{i=1}^{2N} \sum_{k \in F_i} a_i \Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n}) \right). \qquad (48)$$

Положим $g_0(x) = C_9 \Delta^* f(x,\, C_8 2^{-n})$. Далее, пронумеруем все мультииндексы $(j_1, \ldots, j_m)$ с $\ell_\infty$-нормой, не превосходящей $2N$, в порядке неубывания нормы. Для мультииндекса с номером $j$ и нормой $i$ положим $g_j(x) = C_9 a_i \Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n})$, если в маленьком кубе, получающемся из нулевого (то есть содержащего точку $t = \varphi^{-1}(x)$) сдвигом на этот мультииндекс, есть точка $t_{kn}$, и $g_j(x) = 0$ в противном случае. Из неравенства (48) сразу следует, что $|u_{2^{-n}}(x) - f(x)| \leqslant \sum g_j(x)$, поскольку слагаемые в двойной сумме в скобках представляют собой всевозможные функции $g_j$. Возьмём теперь произвольное измеримое отображение $\kappa\colon L\to L$, такое, что $\|\kappa(x)-x\|\leqslant 2^{-n}$. Ясно, что $g_0(\kappa(x))\leqslant C\Delta^*f(x,\,C_{10}2^{-n})$. Кроме того, $\varphi^{-1}(\kappa(x))$ лежит в $(m-2)$-мерном шаре с центром $\varphi^{-1}(x)$ и радиусом $\widetilde{C}_1^{-1}2^{-n}$, который пересекает кубы, лежащие в некотором ограниченном количестве слоёв. Тогда мы можем оценить $g(\kappa(x))$ суммой значений $g(x)$ по этим кубам. Отсюда следует оценка

$$\|u_{2^{-n}}(\kappa(\cdot))-f(\kappa(\cdot))\|_p\leqslant C_9\|\Delta^*f(\cdot,\,C_{10}2^{-n})\|_p+C\sum_{j\geqslant 1}\|g_j\|_p.$$

Первое слагаемое оценивается через $C2^{-n\alpha}$, поскольку $f\in H_p^\alpha(L)$. Обозначим $\varphi$-образы маленьких кубов через $Q_\ell$, причём нумерацию подберём так, чтобы выполнялось $x_{kn}\in Q_k$. Отметим, что по неравенствам (37) (двусторонняя оценка на $\mu$-меру подмножеств $L$ с константами $\widetilde{C}_1^{m-2}$ и $\widetilde{C}_2^{m-2}$) $\mu(Q_\ell)\asymp 2^{-n(m-2)}$. Пользуясь этим соображением мы можем сначала оценить сверху меры всех $Q_\ell$ числом $(\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4 2^{-n})^{m-2}$, а потом это число снова оценить сверху через меру произвольного $Q_\ell$. Этим странным на первый взгляд действием мы добъёмся того, что получим сумму слагаемых, в которых $(\Delta^*f(x_{kn},\,C_5 2^{-n}))^p$ будет умножаться на меру множества $Q_k$ ($k$ в обоих случаях одно и то же). Тогда подобрав константу $C_{11}$ так, чтобы для произвольного $y\in Q_k$ выполнялось $\Delta^*f(x_{kn},\,C_5 2^{-n})\leqslant\Delta^*f(y,\,C_{11}2^{-n})$ мы сведём оценку к $L^p$-норме функции $\Delta^*f$. Именно, для $(2i-1)^{m-2}<j\leqslant(2i+1)^{m-2}$ (в точности такие номера имеют мультииндексы с нормой $i$) будем иметь

$$\int\limits_L g_j^p(x)\,d\mu(x)=\sum_{\ell=1}^{N^{m-2}}\int\limits_{Q_\ell}g_j^p(x)\,d\mu(x)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{c_n-1}\widetilde{C}_2(\widetilde{C}_4 2^{-n})^{m-2}(C_9 a_i\Delta^*f(x_{kn},\,C_5 2^{-n}))^p\leqslant$$

$$\leqslant Ca_i^p\sum_{k=0}^{c_n-1}\int\limits_{Q_k}(\Delta^*f(x_{kn},\,C_5 2^{-n}))^p\,d\mu(y)\leqslant Ca_i^p\sum_{k=0}^{c_n-1}\int\limits_{Q_k}(\Delta^*f(y,\,C_{11}2^{-n}))^p\,d\mu(y)\leqslant$$

$$\leqslant Ca_i^p\int\limits_L(\Delta^*f(y,\,C_{11}2^{-n}))^p\,d\mu(y)\leqslant Ca_i^p 2^{-n\alpha p}.$$

Значит,

$$\sum_{j\geqslant 1}\|g_j\|_p \leqslant C2^{-n\alpha}\sum_{i=1}^{\infty} a_i((2i+1)^{m-2}-(2i-1)^{m-2}).$$

Поскольку $a_i \asymp i^{-(m-1)}$, последний ряд сходится. Поэтому, мы получили оценку

$$\|u_{2^{-n}}(\kappa(\cdot)) - f(\kappa(\cdot))\|_p \leqslant C2^{-n\alpha},$$

из которой, в силу произвольности $\kappa$, следует, что

$$\|\max\nolimits_{2^{-n}}(u_{2^{-n}}(\cdot) - f(\cdot))\|_p \leqslant C2^{-n\alpha}.$$

Осталось получить оценку на градиент. Как и в предыдущей главе, введём функцию

$$w_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus\Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\int\limits_{\Omega_\ell}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) = \sum_{\ell=0}^{n-1} h_\ell(x),$$

и получим, что

$$\|\operatorname{grad} h_\ell(x)\| \leqslant C2^{\ell}\int\limits_{\Omega_\ell}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) = C2^{\ell}h_\ell^*(x).$$

Из предыдущих рассуждений следует, что $\|\max_{2^{-n}} h_\ell^*(\cdot)\|_p \leqslant C2^{-\ell\alpha}$, а значит $\|\operatorname{grad}_{2^{-n}} h_\ell(\cdot)\|_p \leqslant C2^{\ell(1-\alpha)}$. Получается, что

$$\|\operatorname{grad}_{2^{-n}} w_n(\cdot)\|_p \leqslant \sum_{\ell=0}^{n-1}\|\operatorname{grad}_{2^{-n}} h_\ell(\cdot)\|_p \leqslant C\sum_{\ell=0}^{n-1}2^{\ell(1-\alpha)} \leqslant C2^{-n(\alpha-1)}. \tag{49}$$

Аналогично положим

$$v_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y),$$

напишем

$$\|\operatorname{grad} v_n(x)\| \leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-1}(y)}\,d\lambda(y) \leqslant C2^n\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)$$

и получим оценку

$$\|\operatorname{grad}_{2^{-n}} v_n(\cdot)\|_p \leqslant C2^{-n(\alpha-1)}. \tag{50}$$

Из неравенств (49) и (50) и определения функции $u_{2^{-n}}$ следует требуемое.

Мы получили заявленные оценки для $\delta = 2^{-n}$, переход к произвольному $\delta \in (0,\,1/2)$ производится так же, как и во второй главе.

Также совершенно аналогично тому, как это было проделано в четвёртом разделе второй главы, можно проверить, что все результаты третьей главы будут справедливы для любого хорошего компакта коразмерности $\ell$.

# Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Построен многомерный аналог псевдогармонического расширения функции из класса Гёльдера, заданной на компактном подмножестве хорошего компакта — множества, представляющего собой обобщение понятия пространственной кривой, дуга которой соизмерима с хордой, на бо́льшие размерности.

2. Введены классы Гёльдера в $L^p$-норме на хорошем компакте, построено псевдогармоническое расширение функции из этого класса.

3. Доказана теорема о возможности приближения функции, принадлежащей классу Гёльдера на компактном подмножестве хорошего компакта, функциями, гармоническими в сужающихся окрестностях компакта. Также доказана соответствующая ей обратная теорема.

4. Для более узкого класса, чем класс, упомянутый в п. 2, доказана прямая теорема приближения $L^p$-норме функциями, гармоническими в сужающихся окрестностях компакта. Обратная теорема доказана для всего класса.

# Литература


[1] *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische summen gegebener Ordnung
Göttingen: Dieterich'schen Universität – Buchdruckerei, 1911.

[2] *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени
Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер., 13:2-3, с. 49–144, 1912.

[3] *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 10:4, с. 295–322, 1946.

[4] *Тиман А. Ф.* Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси
Доклады Ак. наук СССР, 78, с. 17–20, 1951.

[5] *Дзядык В. К.* О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ на конечном отрезке вещественной оси
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 20:5, с. 623–642, 1956.

[6] *Дзядык В. К.* О проблеме С. М. Никольского в комплексной области
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 23:5, с. 697–736, 1959.

[7] *Дзядык В. К.* К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 26:6, с. 797–824, 1962.

[8] *Дзядык В. К.* Обратные теоремы теории приближения функций в комплекс-

ных областях
Укр. мат. журн., 15:4, с. 365–375, 1963.

[9] *Дзядык В. К.* О приближении аналитических функций в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей
В сб. «Третья летняя матем. школа». Конструктивная теория функций. Кацивели, июнь-июль 1965, с. 29–83, 1966.

[10] *Лебедев Н. А., Широков Н. А.* О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами
Вестник Академии наук Армянской ССР. Математика, 6(4), с. 311–341, 1971.

[11] *Дзядык В. К.* К теории приближения функций на замкнутых множествах комплексной плоскости (по поводу одной проблемы С. М. Никольского)
Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, том 134, с. 63–114, 1975.

[12] *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей
Матем. сб., 102(144):3, с. 331–361, 1977.

[13] *Лебедев Н. А.* Об обратных теоремах равномерного приближения
Доклады Ак. наук СССР, 171:4, с. 788–790, 1966.

[14] *Лебедев Н. А., Тамразов П. М.* Обратные теоремы приближения на регулярных компактах комплексной плоскости
Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 34:6, с. 1340–1390, 1970.

[15] *Андриевский В. В.* Геометрическое строение областей и прямые теоремы конструктивной теории функций
Матем. сб., 126(168):1, с. 41–58, 1985.

[16] *Shirokov N. A.* Constructive Descriptions of Functional Classes by Polynomial Approximations
Journal of Mathematical Sciences, 105, pp. 2269–2291, 2001.

[17] *Широков Н. А.* Аппроксимативная энтропия континуумов
Доклады Ак. наук СССР, 235:3, с. 546–549, 1977.

[18] *Андриевский В. В., Маймескул В. В.* Конструктивное описание некоторых классов функций на квазигладких дугах
Изв. РАН, сер. матем, 58:1, с. 195–208, 1994.

[19] *Андриевский В. В.* О приближении функций гармоническими полиномами
Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, том 180, с. 28–29, 1989.

[20] *Alexeeva T. A., Shirokov N. A.* Constructive description of Hölder-like classes on an arc in $\mathbb{R}^3$ by means of harmonic functions
Journal of Approximation Theory, 249, 2020.

[21] *Алексеева Т. А., Широков Н. А.* Классы Гёльдера в $L^p$-норме на chord-arc кривой в $\mathbb{R}^3$
Алгебра и анализ, 34:4, с. 1–21, 2022.

[22] *Gordon W. J., Wixom J. A.* Pseudo-harmonic interpolation on convex domains
SIAM Journal on Numerical Analysis, 11:5, pp. 909–933, 1974.

[23] *Morse M., Heins M.* Topological methods in the theory of functions of a single complex variable
Annals of Math., 46, pp. 600–666, 1945.

[24] *Дынькин Е. М.* О равномерном приближении функций в жордановых областях
Сиб. матем. журн., 18:4, с. 775–786, 1977.

[25] *Dyn'kin E. M.* The Pseudoanalytic extension
Journal d Analyse Mathematique, 60, pp. 45–70, 1993.

[26] *Михлин С. Г.* Курс математической физики
Москва, Наука, 1968.

[27] *Павлов Д. А.* Конструктивное описание гёльдеровых классов на компактах в $\mathbb{R}^3$.
Зап. научн. сем. ПОМИ, 491, с. 119–144, 2020.

[28] *Павлов Д. А.* Конструктивное описание гёльдеровых классов на некоторых многомерных компактах

Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 8 (66), вып. 3, с. 430–441, 2021.

[29] *Павлов Д. А.* Приближение гёльдеровых функций гармоническими в $L^p$-норме на некоторых многомерных компактах
Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, том 10 (68), вып. 2, с. 259–269, 2023.