«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор — начальник
Управления научной политики
МГУ имени М. В. Ломоносова

д.ф.-м.н., профессор А. А. Федянин
« 29.01.2024 » 2024 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертации ПАВЛОВА Дмитрия Александровича
«Приближение гармоническими функциями на множествах в $\mathbb{R}^n$»
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Вопросы описания функций из классов Гёльдера в терминах скорости их приближения функциями различных специальных классов (например, тригонометрическими или алгебраическими многочленами, рациональными функциями и др.) — это хорошо известные классическое задачи математического анализа, возникшие в начале XX столетия. Один из первых результатов такого рода состоял в том, что 2π-периодическая функция является функцией класса Гёльдера с данным показателем $\alpha \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда для любого натурального k найдется тригонометрический многочлен степени не выше k, который равномерно приближает данную функцию на отрезке $[0, 2\pi]$ с точностью $Ck^{-\alpha}$, где C — константа, зависящая только от f. Этот результат вытекает из классического неравенства Джексона и одной теоремы С. Н. Бернштейна. Следующий результат в рассматриваемом направлении — описание классов Гёльдера в терминах скорости приближения алгебраическими многочленами — был получен лишь полвека спустя в работах В. К. Дзядыка. Далее, также в середине XX столетия В. К. Дзядык получил необходимое и достаточное условие принадлежности функции к классу Гёльдера в данной области в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в терминах скорости приближения этой функции многочленами комплексного переменного. Этот результат был получен при определенных, достаточно ограничительных условиях на рассматриваемую область и ее границу. В дальнейшем эти условия были ослаблены в работах В. В. Андриевского, Н. А. Лебедева, П. М. Тамразова, Н. А. Широкова и др. В работах В. В. Андриевского было также предложено использовать гармонические многочлены (вместо многочленов комплексного переменного) для описания условий принадлежности функций к классам Гёлдера в областях в $\mathbb{C}$. Важно отметить, что все упомянутые результаты для областей в $\mathbb{C}$ существенно опираются на свойства конформных отображений единичного круга на рассматриваемые области, включая достаточно тонкие результаты о граничных свойствах таких отображений. Это обстоятельство потребовало разработки совершенно новых методов и подходов к изучению аналогичных задач в многомерной ситуации. В недавних работах Т. А. Алексеевой и Н. А. Широкова получено описание класса гёльдеровских функций на незамкнутой кривой в $\mathbb{R}^3$, обладающей тем свойство, что длина дуги кривой соизмерима с длиной стягивающей ее хорды (такие кривые обычно называются chord-arc кривыми). Это описание дается в терминах скоростей равномерного и L^p-приближения (при $p > 1/\alpha$, где α — показатель Гёльдера) рассматриваемых функций функциями, гармоническими в окрестности данной кривой, причем в ответе используются оценка скорости приближения и оценка на градиент приближающей функции в окрестности рассматриваемой кривой. Также по существу использовалось понятие *псевдогармонического расширения* функции — непрерывного продолжения рассматриваемой функции на все пространство $\mathbb{R}^3$ со специальными дополнительными условиями и оценками Лапласиана продолженной функции.

Диссертация Д. А. Павлова принадлежит к описанному выше направлению исследований, что, безусловно, свидетельствует об *актуальности темы диссертации.*

Целью рассматриваемой диссертационной работы является построение многомерного аналога псевдогармонического расширения функций с компактов специального вида в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, а также получение описания классов Гёльдера на рассматриваемых компактах в терминах скорости приближения в равномерной норме и в нормах пространств L^p функций из этих классов функциями, гармоническими в окрестностях таких компактов. Класс компактов, рассматриваемый в диссертации, является естественным обобщением трехмерной chord-arc кривой.

Эти вопросы также являются *актуальными* и *представляют интерес.*

Выделим основные полученные соискателем результаты, которые включены в диссертацию и выносятся на защиту (в диссертации и в автореферате основные результаты диссертации приведены в виде списка из 7 пунктов, но они естественно объединяются в три следующие группы):

1) Доказано существование гармонического расширения функций, ограниченных на «хороших» компактах в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$. Хорошие компакты — это специальный класс компактов в $\mathbb{R}^m$, введенный в диссертации, и являющийся естественным обобщением понятия трехмерной chord-arc кривой.

2) Получено необходимое и достаточное условие принадлежности функции, заданной на компактном подмножестве K некоторого хорошего компакта в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, классу Гёльдера, заданного модулем непрерывности ω, удовлетворяющем специальному условию

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t}\,dt + x\int_x^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \leqslant C\omega(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

в терминах равномерного приближения этой функции на K функциями, гармоническими в окрестностях K в следующем смысле: для любого $\delta > 0$ должна существовать δ-окрестность U_δ компакта K и функция v_δ, гармоническая в U_δ такие, что $|f(x) - v_\delta(x)| \leqslant C\omega(\delta)$ при всех $x \in K$ и $|\operatorname{grad} v_\delta(x)| \leqslant C\omega(\delta)/\delta$ при всех $x \in U_{\delta/2}$. Символ C в этих неравенствах и в дальнейшем обозначает константу, зависящую только от f и K, которая может быть различной в разных соотношениях.

3) Пусть, далее, $p \geqslant 1$ и $\alpha \in (0, 1)$, а K — хороший компакт в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$. Пространство $H_p^\alpha(K)$ определено в диссертации как пространство всех функций f,

для которых $\|\Delta^* f(\cdot, r)\|_p \leqslant Cr^\alpha$ при $\Delta^* f(x,r) = \sup_{y\in K, |x-y|\leqslant r} |f(y) - f(x)|$. Кроме того $\widetilde{H}_p^\alpha(K)$ — это подпространство функций из $H_p^\alpha(K)$, удовлетворяющее специальному дополнительному условию на $\Delta^* f$.

В диссертации для функций f класса $\widetilde{H}_p^\alpha(K)$ доказана теорема о приближении гармоническими функциями в δ-окрестностях K в L^p-норме в следующем смысле: для любого $\delta \in (0, 1/2)$ существует такая гармоническая в δ-окрестности K функция v_δ такая, что $\| \max_\delta (f - v_\delta)\|_p \leqslant C\delta^\alpha$ и $\| \operatorname{grad}_\delta v_\delta\|_p \leqslant C\delta^{\alpha-1}$. Здесь $\max_\delta h(x) = \sup_{y\in K\cap\overline{B(x,\delta)}} |h(y)|$ и $\operatorname{grad}_\delta h(x) = \sup_{y\in\overline{B(x,\delta/2)}} |\operatorname{grad} h(y)|$.

Также в диссертации доказано, что если функция f, определенная на K, приближается в указанном выше смысле функциями, гармоническими в окрестности K, то она принадлежит пространству $H_p^\alpha(K)$.

Все эти результаты являются *новыми*, они *получены автором самостоятельно. Достоверность* полученные результатов подтверждается приведенными в тексте диссертации полными математическими доказательствами соответствующих утверждений. Полученные результаты являются *значимыми* и представляют интерес для теории приближений аналитическими функциями и для смежных областей современного математического анализа.

Все основные результаты своевременно опубликованы в рецензируемых российских научных журналах, входящих в список, рекомендованный ВАК. По диссертации опубликовано 3 работы (одна статья в Записках научных семинаров ПОМИ и две статьи в Вестнике Санкт-Петербургского университета), все они написаны без соавторов.

Основные положения и выводы диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях по математическому анализу и теории приближений, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, в Санкт-Петербургском государственном университете, в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, в других университетах и математических центрах в России и за рубежом.

Представленная диссертация состоит из введение и трех глав, заключения и списка литературы. Во *введении* автор приводит обзор области исследования, к которому относится диссертация, формулирует цели и задачи диссертационного исследования, а также дает краткий обзор основного содержания диссертации и приводит формулировки основных полученных результатов. *Первая глава* диссертации посвящена построению псевдогармонического расширения в многомерном случае. В этой главе вводится понятие хороших компактов (являющееся естественным обобщением понятия chord-arc кривой) и доказывается теорема о существовании и свойствах псевдогармонического расширения. *Вторая* и *третья* главы посвящены вопросам описания функций из классов Гёльдера в терминах равномерной и L^p-аппроксимации этих функций гармоническими функциями в окрестности данного компакта. В этих главах формулируются и доказываются результаты, приведенные в п. 2) и 3) описания основных результатов диссертации. В *заключении* еще раз формулируются основные полученные в диссертации и выносимые на защиту результаты.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации. В автореферате и самой диссертации имеются опечатки и незначительные погрешности редакционного характера, неизбежные в работе значительного объема. Приведем лишь некоторые из них:

i) Как во введении, так и в автореферате соискатель несколько раз путает область и ее замыкание. Так, имеет место фраза "В случае, когда внутренность G пуста, т.е. $G = \Gamma$ ...", где G — область, а Γ — ее граница. Но область, по определению, — это открытое множество и приведенная фраза звучит странно. Далее, в тексте говорится о жордановых областях на плоскости с непустой внутренностью, что также странно и не соответствует стандартным определениям.

ii) Выбранная автором нумерация утверждений неудачна и не удобна для чтения. Теоремы 1.1, 2.1 и 3.1 намного проще найти в тексте и отследить, чем Теоремы 1 первой, второй и третьей главы.

iii) Во введении при формулировке условия ($\Diamond$) не уточняется, какие условия на функцию ω скрыты под термином «модуль непрерывности». Объем текста диссертации вполне позволяет привести соответствующее определение в полном объеме. Также как в диссертации, так и в автореферате не приведено определение множества $\Lambda_\varepsilon(L)$ — окрестности L радиуса ε. Необходимо также отметить еще ряд обозначений, которые используются во введении и в тексте автореферата, но определяются только в основном тексте диссертации. Такие текстовые неточности затрудняют чтение и портят впечатление о работе.

iv) В определении хорошего компакта не уточняется, от чего зависят константы $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$. Более того, то что $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$ именно константы, причем фиксированные, говорится спустя страницу после определение хорошего компакта. Это вызывает естественные сложности в восприятии и понимании введенного определения (одного из центральных в диссертации).

v) В доказательстве Лемм 2 и 3 первой главы используется знак «стремления» $\to$, но не указывается явно, в каком смысле рассматривается предельный переход. Это затрудняет чтение и понимание.

Отметим, что эти и другие, не включенные в список, замечания не снижают общее положительное впечатление о рассматриваемой работе и полученных результатах.

Отметим также, что в главе 3 диссертации имеется зазор между «прямой» и «обратной» теоремами: теорема о приближении доказана для класса $\widetilde{H}_p^\alpha(L)$, но функция, допускающая соответствующее приближение, в соответствии с обратной теоремой, принадлежит более широкому пространству $H_p^\alpha(L)$. Диссертация бы только выиграла от пояснения почему так происходит. Если для функций класса $H_p^\alpha(L)$, не лежащих в $\widetilde{H}_p^\alpha(L)$, соответствующего приближения может не быть, то было бы хорошо привести подходящий контрпример. Это замечание приводится не столько для критики автора, сколько в качестве возможного предложения по дальнейшему развитию полученных в диссертации результатов и, как и предыдущие замечания редакционного характера, не снижает общей положительной оценки работы.

Подводя итог скажем, что диссертация Д. А. Павлова «Приближение гармоническими функциями на множествах в $\mathbb{R}^n$» соответствует всем требованиям п. 9–11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. №842

«О присуждении ученых степеней», а ее автор — Павлов Дмитрий Александрович — заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук (специальность 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ), профессором, профессором кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова Парамоновым Петром Владимировичем (адрес: 127644, г. Москва, ул. Лобненская дом 12, корп. 1, кв. 255, e-mail: petr.paramonov@list.ru).

Отзыв обсуждён и одобрен на заседании кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, протокол №1 от 18 января 2024 г.

Доктор физико-математических наук
(01.01.01 – Вещественный, комплексный
и функциональный анализ), профессор,
профессор кафедры теории функций
и функционального анализа
механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова

Парамонов
Петр Владимирович

Заведующий кафедрой теории
функций и функционального анализа
механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова
академик РАН, доктор
физико-математических наук, профессор

Кашин
Борис Сергеевич

Заместитель декана
механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова, доктор
физико-математических наук, профессор

Иванов
Александр Олегович