



Полякова Дарья Александровна

**ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ В
ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
ФУНКЦИЙ НОРМАЛЬНОГО ТИПА**

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Владикавказ – 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Федеральном научном центре «Владикавказский научный центр РАН» (в отделе математического анализа Южного математического института и в отделе математических исследований Северо-Кавказского центра математических исследований).

Официальные оппоненты: Абузярова Наталья Фаирбаховна

доктор физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник отдела теории
функций и функционального анализа
ИМВЦ УФИЦ РАН

Баранов Антон Дмитриевич

доктор физико-математических наук,
профессор РАН, профессор кафедры матема-
тического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-
Петербургский государственный университет»

Шерстюков Владимир Борисович

доктор физико-математических наук, профессор
кафедры математического анализа ФГБОУ ВО
«Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова»

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет», г. Казань

Защита состоится 5 октября 2026 г. в 15:00 на заседании объединённого диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте <https://uust.ru>.

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

доктор физико-математических наук



Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию операторов и уравнений свертки в пространствах Берлинга и Румье ультрадифференцируемых функций нормального типа. Теория пространств ультрадифференцируемых функций (УДФ) и ультрараспределений (УР) начала развиваться в 60-х годах 20-го века в работах Ш. Румье ¹, Х. Коматсу ², А. Берлинга и Г. Бьорка ³. Пространства УДФ — это пространства бесконечно дифференцируемых функций с определенными ограничениями на рост производных. В подходе, предложенном Ш. Румье и Х. Коматсу и называемом обычно подходом Данжуа-Карлемана, указанные ограничения задаются с помощью специальной последовательности положительных чисел. В свою очередь, в подходе Берлинга-Бьорка пространства определяются с помощью весовой функции ω . В дальнейшем подход Берлинга-Бьорка получил серьезное развитие сначала в работах И. Циоранеску и Л. Жидо, а затем в многочисленных работах Р. Брауна, Р. Майзе, Б. А. Тейлора, Д. Фогта, М. Лангенбруха, Т. Майера и других. В последние десятилетия подход Берлинга-Бьорка был обобщен А. В. Абаниным, а также Г. Шиндлом и его соавторами на случай произвольной весовой последовательности и, соответственно, произвольной весовой матрицы.

Изначально вводились два типа пространств УДФ: так называемые пространства УДФ типа Берлинга и типа Румье. Пространства Берлинга представляют собой весовые аналоги классического пространства C^∞ и включают в себя последние при $\omega(t) = \ln(1 + t)$. Топологически пространства Берлинга являются пространствами Фреше. Пространства Румье имеют смешанную проективно-индуктивную топологию. В частном случае, когда $\omega(t) = t^\rho$, $\rho \in (0, 1)$, они содержат известные классы Жевре.

В начале 2000-х годов шкала пространств УДФ была расширена за счет введения пространств Берлинга и Румье нормального типа. По расширенной шкале первоначальные пространства типа Берлинга и типа Румье являются пространствами Берлинга максимального типа и пространствами Румье минимального типа. Пространства нормального типа, хоть и сохранили структуру исходных

¹Roumieu C. Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables / C. Roumieu // J. Anal. Math. — 1962/1963. — V. 10. — P. 153–192.

²Komatsu H. Ultradistributions. Pt. I. Structure theorems and a characterization / H. Komatsu // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA, Math. — 1973. — V. 20, № 1. — P. 25–105.

³Björck G. Linear partial differential operators and generalized distributions / G. Björck // Ark. Mat. — 1965. — V. 6. — P. 351–407.

пространств Берлинга и Румье, имеют, как оказалось, и существенные отличия. В частности, ни они сами, ни пространства целых функций, представляющие собой изоморфные реализации их сильных сопряженных, не являются алгебрами относительно обычной операции умножения функций. В связи с этим и результаты, получаемые для пространств нормального типа, как правило, отличаются от соответствующих результатов для пространств максимального и минимального типов.

Пространства УДФ и УР исследовались и продолжают исследоваться в настоящее время с различных точек зрения. Здесь можно упомянуть и классические проблемы о продолжении по Борелю и Уитни, и аналоги теорем Пэли-Винера и Пэли-Винера-Шварца, и вопросы существования абсолютно представляющих систем экспонент с чисто мнимыми показателями, и другие проблемы.

Одним из главных направлений в теории пространств УДФ и УР является исследование в указанных пространствах операторов и уравнений свертки. Отправной точкой здесь следует считать работы Б. Мальгранжа ⁴, Л. Эренпрайса ⁵ и Л. Хермандера ⁶, посвященные операторам свертки в классических пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций. В дальнейшем операторы свертки и их обобщения рассматривались многими авторами в различных пространствах бесконечно дифференцируемых, обобщенных и аналитических функций. В работах Р. Брауна, Р. Майзе, Д. Фогта, Т. Майера и других операторы свертки были достаточно полно исследованы в пространствах УДФ Берлинга максимального типа и пространствах Румье минимального типа. Как известно, в качестве частных случаев в пространствах УДФ операторы свертки могут включать в себя дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, дифференциально-разностные и интегро-дифференциальные операторы.

Настоящая диссертация посвящена изучению операторов свертки в пространствах УДФ Берлинга и Румье нормального типа. В связи с тем, что указанные пространства были введены относительно недавно, операторы свертки в них еще не исследовались. Таким образом, тема работы представляется достаточно актуальной.

⁴Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution / B. Malgrange // Ann. Inst. Fourier Grenoble. – 1955-56. – V. 6. – P. 271–355.

⁵Ehrenpreis L. Solutions of some problems of division. V. Hyperbolic operators / L. Ehrenpreis // Am. J. Math. – 1962. – V. 84. – P. 324–348.

⁶Hörmander L. On the range of differential and convolution operators / L. Hörmander // Ann. of Math. – 1962. – V. 76. – P. 148–170.

Цели и задачи работы.

Классическими для операторов свертки являются следующие задачи.

1. Задача о сюръективности, состоящая в получении условий на символ оператора, при которых он сюръективен. Другими словами, это задача о том, при каких условиях соответствующее уравнение свертки имеет решение в рассматриваемом пространстве при любой правой части.

2. Задача о базисе в ядре оператора свертки, т. е., иначе говоря, об общем решении соответствующего однородного уравнения свертки.

3. Задача о наличии у неоднородного уравнения свертки частного решения определенного вида.

4. Задача о существовании линейного непрерывного правого обратного для сюръективного оператора свертки или проблема наличия у уравнения свертки решения, линейно и непрерывно зависящего от правой части.

Следует отметить, что имеется естественная двойственная взаимосвязь данных задач с проблемами замкнутости и дополнимости главных идеалов в весовых пространствах целых функций, представляющих собой изоморфные реализации сопряженных пространств. Это пространства целых функций со смешанными ограничениями на рост: глобально это функции экспоненциального типа, но вблизи вещественной оси их рост значительно меньше. Задачи о замкнутости и дополнимости главных идеалов в указанных пространствах представляют также и самостоятельный интерес.

Основные цели работы — решить перечисленные проблемы для операторов свертки в пространствах УДФ нормального типа. Помимо указанных центральных задач, в работе также будет рассмотрена проблема об образе несюръективного оператора свертки в пространствах УДФ Берлинга нормального типа.

Методы исследования.

Перечислим основные методы проводимых исследований.

1. Методы теории двойственности позволяют осуществить переход от имеющейся задачи для оператора свертки в пространстве УДФ к соответствующей задаче в сопряженном весовом пространстве целых функций. Эти методы являются классическими методами функционального анализа и используются при решении каждой из рассматриваемых задач.

2. Методы теории роста целых функций используются для исследования двойственных задач.

3. Классические методы теории обобщенных функций применяются для изу-

чения операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа, поскольку, в отличие от случая пространств Берлинга, в пространствах Румье операторы свертки, как правило, исследуются вместе и с помощью продолжающих их операторов свертки на соответствующих пространствах УР.

4. Важным инструментом исследования операторов свертки в пространствах Румье выступает устанавливаемый в работе аналог классической теоремы Л. Хермандера о разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в пространствах функций с системой весовых оценок.

5. Методы теории проективных спектров, развитые в работах В. П. Паламова и Д. Фогта, позволяют получить окончательный критерий сюръективности операторов свертки в пространствах УДФ Румье нормального типа.

6. Методы теории слабо достаточных множеств и абсолютно представляющих систем будут использованы для построения частного решения неоднородного уравнения свертки, имеющего определенный вид.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми. Поскольку пространства УДФ нормального типа в отличие от изучавшихся ранее пространств максимального и минимального типов имеют более тонкую структуру, для исследования операторов свертки в указанных пространствах потребовалась значительная модификация имеющихся методов, а также разработка новых методов и подходов. Основная часть полученных результатов отличается от известных ранее: именно, условия на символ оператора свертки, обеспечивающие ту или иную его характеристику, являются гораздо более жесткими, чем в случаях пространств максимального и минимального типов.

Практическая и теоретическая значимость.

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях уравнений свертки и, в частности, дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Некоторые результаты диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности «Математика».

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие основные результаты.

1. Критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале.

2. Необходимые и (отдельно) достаточные условия, при которых образ несюръективного оператора свертки в пространстве Берлинга УДФ нормального типа содержит пространство, порождаемое некоторым другим весом и имеющее другой тип.

3. Теорема о существовании абсолютного базиса в ядре оператора свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале, т. е. об общем решении соответствующего однородного уравнения свертки.

4. Построение частного решения неоднородного уравнения свертки, имеющего определенный вид.

5. Теорема о разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в пространствах функций с системой равномерных весовых оценок.

6. Полное описание символов операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале.

7. Изоморфное описание ядра оператора свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа на прямой.

8. Критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа на числовой прямой и в соответствующих пространствах УР.

9. Критерии наличия линейных непрерывных правых обратных (ЛНПО) для сюръективных операторов свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале.

Степень достоверности и апробация результатов.

Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в рецензируемых научных изданиях. Этим обеспечивается их достоверность.

Результаты неоднократно докладывались и обсуждались на различных конференциях и семинарах, в числе которых Семинар ИМВЦ УФИЦ РАН «Комплексный и гармонический анализ» (Уфа, 2026 г.), Общеинститутский семинар ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, 2022–2026 гг.), Международная научная конференция «Бесконечномерный анализ и математическая физика» (IDAMPh 2026) (Порхов, 2026 г.), Международная конференция «Комплексный анализ и смежные проблем» (Уфа, 2024 г.), Международная научная конференция «Discrete and Continuous Signals: Analysis, Information and Applications» (Санкт-Петербург, 2023 г.), Крымская международная математическая конференция КММК-2013 (Судак, 2013 г.), Международная конференция «Современные ме-

тоды и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» (Ростов-на-Дону, 2012, 2015–2019, 2022–2024 гг.), Международная научная конференция «Крымская осенняя математическая школа» (Севастополь, 2011, 2012 гг.), Десятая международная Казанская летняя научная школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2011 г.), Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2011, 2013, 2017 гг.), Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 2010, 2021 гг.), Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2010, 2022, 2023 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах [1]–[15]. Все журналы входят в перечень ВАК и индексируются в базах данных RSCI, Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в опубликованные работы. В совместной с А. В. Абаниным статье [1] А. В. Абанину принадлежит постановка задачи и формулировка теоремы 2. Теорема 1, а также доказательство теоремы 2 принадлежат Д. А. Поляковой. В диссертацию включена усиленная формулировка теоремы 2 из последующих личных работ Д. А. Поляковой. Все остальные работы являются личными работами автора диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 238 страниц. Библиография включает 114 источников.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, обоснована научная новизна результатов и описаны используемые методы.

Первая глава диссертации посвящена разрешимости уравнений свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале, т. е., иначе говоря, исследованию образов операторов свертки в указанных пространствах.

История задачи о сюръективности операторов свертки восходит к работе

Л. Эренпрайса ⁷, где данная проблема была решена для операторов свертки в классическом пространстве C^∞ всех бесконечно дифференцируемых функций. В дальнейшем проблема сюръективности операторов свертки исследовалась во многих пространствах. В частности, в работах ⁸ и ⁹ были изучены образы операторов свертки в пространствах УДФ Берлинга максимального типа.

Глава состоит из пяти параграфов. В первом параграфе вводятся пространства Берлинга $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ УДФ нормального типа p на конечном или бесконечном симметричном интервале I в $\mathbb{R}$, весовые пространства целых функций — изоморфные реализации сильных сопряженных пространств $(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I))'_\beta$, а также операторы свертки в пространствах $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$. Во втором параграфе рассматриваются частные случаи операторов свертки: дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, дифференциально-разностные и интегро-дифференциальные операторы. Там же устанавливаются условия на символ, при которых оператор свертки в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Кроме того, в случае конечного интервала I выделяется целый класс весов, для которых все операторы свертки в соответствующих пространствах $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ будут дифференциальными операторами бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Приведем основные понятия и формулировки из первых двух параграфов. Под *весовой функцией* будем понимать непрерывную неубывающую функцию $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющую условиям:

- (α) $\forall p > 1 \quad \exists C > 0 : \omega(x + y) \leq p(\omega(x) + \omega(y)) + C, \quad x, y \geq 0;$
- (α') $\omega(t) = o(t), \quad t \rightarrow \infty;$
- (γ) $\ln t = o(\omega(t)), \quad t \rightarrow \infty;$
- (δ) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0, \infty)$.

Если вес ω удовлетворяет дополнительному условию

$$(\beta) \quad \int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt < \infty,$$

⁷Ehrenpreis L. Solutions of some problems of division. V. Hyperbolic operators / L. Ehrenpreis // Am. J. Math. — 1962. — V. 84. — P. 324–348.

⁸Bonet J., Galbis A. The range of non-surjective convolution operators on Beurling spaces / J. Bonet, A. Galbis // Glasgow Math. J. — 1996. — V. 38. — P. 125–135.

⁹Meise R., Taylor B. A., Vogt D. Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions / R. Meise, B. A. Taylor, D. Vogt // Indiana Univ. Math. J. — 1987. — V. 36, № 4. — P. 729–756.

то он называется *неквазианалитическим*. В противном случае вес ω называется *квазианалитическим*.

Вес ω продолжается во всю комплексную плоскость радиальным образом: $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Введем еще функцию $\varphi_\omega^*(y) = \sup\{xy - \varphi_\omega(x) : x \geq 0\}$, $y \geq 0$, сопряженную по Юнгу к функции φ_ω .

Пусть теперь $p \in (0, \infty)$; $I = (-a, a)$, $a \in (0, \infty]$. *Пространством Берлинга УДФ типа p на интервале I* называется следующее весовое пространство бесконечно дифференцируемых на I функций

$$\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I) := \left\{ f \in C^\infty(I) : \forall l \in (0, a) \quad \forall q \in (0, p) \right. \\ \left. |f|_{\omega, q, l} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leq l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q \varphi_\omega^*(j/q)} < \infty \right\}.$$

При $p = \infty$ мы получим изучавшиеся ранее пространства Берлинга $\mathcal{E}_{(\omega)}^\infty(I)$ максимального типа. При $p \in (0, \infty)$ пространства $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ называются пространствами Берлинга УДФ нормального типа.

Сильное сопряженное пространство $(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I))'_\beta$ изоморфно следующему весовому пространству целых функций

$$H_{(\omega)}^{p, a}(\mathbb{C}) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \exists l \in (0, a) \quad \exists q \in (0, p) : \right. \\ \left. \|f\|_{\omega, q, l} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp (q\omega(z) + l|\operatorname{Im} z|)} < \infty \right\}.$$

Изоморфизм осуществляет преобразование Фурье-Лапласа функционалов $F : \psi \mapsto \hat{\psi}(z) = \psi_x(e^{-ixz})$, $z \in \mathbb{C}$.

Операторы свертки, как обычно, рассматриваются как сопряженные к операторам умножения. В связи с этим под символами операторов свертки удобно понимать мультипликаторы сопряженного пространства. Поскольку в случае $p \in (0, \infty)$ пространство $H_{(\omega)}^{p, a}(\mathbb{C})$ алгеброй не является, то сначала на основании общего результата Ю. Ф. Коробейника мы описываем множество всех мультипликаторов пространства $H_{(\omega)}^{p, a}(\mathbb{C})$, т. е. всех символов операторов свертки в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$. Именно, будет установлено, что в случае $a = \infty$ множество всех мультипликаторов пространства $H_{(\omega)}^{p, \infty}(\mathbb{C})$ совпадает с

$$M_{(\omega)}^1(\mathbb{C}) := \left\{ \mu \in H(\mathbb{C}) \mid \forall \varepsilon > 0 \quad \exists l > 0 : \|\mu\|_{\omega, \varepsilon, l} < \infty \right\}.$$

Если же $a \in (0, \infty)$, то множеством всех мультипликаторов пространства $H_{(\omega)}^{p, a}(\mathbb{C})$ является

$$M_{(\omega)}^0(\mathbb{C}) := \left\{ \mu \in H(\mathbb{C}) : \forall \varepsilon > 0 \quad \|\mu\|_{\omega, \varepsilon, \varepsilon} < \infty \right\}.$$

В обоих случаях каждый мультипликатор μ непрерывен, т. е. оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C})$ или, соответственно, в $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$.

Перейдем к определению операторов свертки в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$. Итак, пусть μ — мультипликатор пространства $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$; $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, $z \in \mathbb{C}$. Найдем функционал $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$ из $(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I))'$. Оператором свертки с символом μ в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ называется оператор T_μ , действующий по правилу:

$$T_\mu f := \psi_\mu * f, \quad f \in \mathcal{E}_{(\omega)}^p(I).$$

Введенный таким образом оператор T_μ представляет собой линейный непрерывный оператор в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$. При этом он является сопряженным к оператору $F^{-1} \circ \Lambda_{\check{\mu}} \circ F$, действующему в $(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I))'$.

Мультипликатор μ из $M_{(\omega)}^1(\mathbb{C})$ или из $M_{(\omega)}^0(\mathbb{C})$ будем называть *сильным*, если выполнено условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon > 0 : \quad |\mu(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon \omega(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Установлены две следующие теоремы.

Теорема 1.2.1. Пусть ω — весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $a \in (0, \infty]$. Если целая функция $\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (iz)^k$ является сильным мультипликатором пространства $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$, то порождаемый ею оператор свертки T_μ представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами:

$$T_\mu f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}.$$

Теорема 1.2.2. Пусть $p \in (0, \infty)$, $a \in (0, \infty)$. Если вес ω строгий, т. е. если

$$\exists K > 1 : \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K,$$

то любой мультипликатор $\mu \in M_{(\omega)}^0(\mathbb{C})$ пространства $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$ является сильным и, значит, все операторы свертки представляют собой дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Центральным параграфом главы является третий параграф, в котором устанавливаются критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале. Получены необходимые и достаточные условия на символ оператора, при

которых он сюръективен или, другими словами, при которых уравнение свертки разрешимо в рассматриваемом пространстве при любой правой части. Одновременно установленные критерии представляют собой теоремы деления в сопряженных весовых пространствах целых функций. Приведем их формулировки.

Теорема 1.3.1. Пусть ω — произвольная весовая функция; $p \in (0, \infty)$. Для оператора свертки T_μ с символом μ в пространстве Берлинга $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа на числовой прямой следующие утверждения эквивалентны:

- (A₁) T_μ сюръективен на $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$;
- (B₁) $\check{\mu}$ — делитель пространства $H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C})$, т. е.

$$f \in H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C}), \quad \frac{f}{\check{\mu}} \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow \frac{f}{\check{\mu}} \in H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C});$$

- (C₁) главный идеал $J := \text{Im } \Lambda_{\check{\mu}} = \check{\mu} H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C})$ замкнут в $H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C})$;

- (D₁) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists r_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq r_0 \quad \exists w \in \mathbb{C}$:

$$|w - x| \leq \delta \omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(w)| \geq e^{-\varepsilon \omega(w)};$$

- (E₁) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists r_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq r_0 \quad \exists t \in \mathbb{R} \text{ с } |t| > |x|$:

$$|t - x| \leq \delta \omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geq e^{-\varepsilon \omega(t)};$$

- (F₁) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall \delta \in (0, \delta_\varepsilon] \quad \exists r_0 > 0 \quad \exists L > 0$: для каждой точки $z \in \mathbb{C}$ с $|z| \geq r_0$ найдется окружность S_z , содержащая точку z внутри себя и обладающая свойствами:

- (a) если $|\text{Im } z| \leq \delta \omega(\text{Re } z)$, то для всех $\zeta \in S_z$

$$\|\zeta - z\| \leq 6\delta \omega(\text{Re } z), \quad |\mu(\zeta)| \geq \exp\{-\varepsilon \omega(\text{Re } \zeta)\};$$

- (b) если $|\text{Im } z| > \delta \omega(\text{Re } z)$, то для всех $\zeta \in S_z$

$$\|\zeta - z\| \leq \left(\frac{3}{4} + 4\beta\right) |\text{Im } z|, \quad |\mu(\zeta)| \geq \exp\{-L |\text{Im } \zeta|\}.$$

Здесь $\beta \in (0, \frac{1}{32}]$ — произвольно выбранное число.

Теорема 1.3.2. Пусть ω — произвольная весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $a \in (0, \infty)$; $I = (-a, a)$. Для оператора свертки T_μ с символом μ в пространстве Берлинга $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ УДФ нормального типа на конечном интервале следующие утверждения эквивалентны:

(A₂) T_μ сюръективен на $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$;

(B₂) $\check{\mu}$ — делитель пространства $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$, т. е.

$$f \in H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C}), \frac{f}{\check{\mu}} \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow \frac{f}{\check{\mu}} \in H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C});$$

(C₂) главный идеал $J := \text{Im } \Lambda_{\check{\mu}} = \check{\mu} H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$ замкнут в $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$;

(D₂) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists r_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq r_0 \quad \exists w \in \mathbb{C}$:

$$|w - x| \leq \delta \omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(w)| \geq e^{-\varepsilon \omega(w)};$$

(E₂) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists r_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq r_0 \quad \exists t \in \mathbb{R} \text{ с } |t| > |x|$:

$$|t - x| \leq \delta \omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geq e^{-\varepsilon \omega(t)};$$

(F₂) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists r_0 > 0$: для каждой точки $z \in \mathbb{C}$ с $|\text{Re } z| \geq r_0$, $|\text{Im } z| \leq \delta |\text{Re } z|$ найдется окружность S_z с радиусом $R_z \leq \delta \omega(\text{Re } z) + \delta |\text{Im } z|$, содержащая точку z внутри себя, для всех точек ζ которой выполняется неравенство

$$|\mu(\zeta)| \geq \exp \{ -\varepsilon \omega(\text{Re } \zeta) - \varepsilon |\text{Im } \zeta| \}.$$

Символы, удовлетворяющие условиям (D₁), (E₁), (F₁) теоремы 1.3.1 (или, соответственно, условиям (D₂), (E₂), (F₂) теоремы 1.3.2) вслед за Л. Эренпрайсом будем называть *медленно убывающими относительно ω в нормальном смысле*. Нетрудно видеть, что введенное условие значительно сильнее условия медленного убывания в максимальном смысле из ¹⁰:

$$\exists C > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq C \quad \exists w \in \mathbb{C} :$$

$$|w - x| \leq C \omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(w)| \geq \exp \{ -C \omega(w) \}.$$

Данное обстоятельство естественным образом связано с априорными оценками на символ μ : в случае пространств Берлинга максимального типа на числовой прямой он должен удовлетворять условию

$$\exists C > 0 : \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp (C \omega(\text{Re } z) + C |\text{Im } z|)} < \infty,$$

а в случае пространств Берлинга нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале — условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists l > 0 : \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp (\varepsilon \omega(\text{Re } z) + l |\text{Im } z|)} < \infty$$

¹⁰Meise R., Taylor B. A., Vogt D. Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions / R. Meise, B. A. Taylor, D. Vogt // Indiana Univ. Math. J. — 1987. — V. 36, № 4. — P. 729–756.

и, соответственно, условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp(\varepsilon \omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon |\operatorname{Im} z|)} < \infty.$$

Методика доказательства теорем 1.3.1 и 1.3.2 основана, во-первых, на выметании масс субгармонической функции на границу круга и построении семейства целых функций с максимально возможными по модулю значениями в заданных точках и с подходящими оценками во всей плоскости (доказательство условий (D_1) и (D_2)). Условия (F_1) и (F_2) устанавливаются за счет известной теоремы о минимуме модуля аналитической функции. В отличие от пространств максимального типа, в случае пространств нормального типа приходится отдельно рассматривать точки, близкие к действительной оси относительно ω , и точки с достаточно большой мнимой частью. Связано это с тем, что в случае пространств нормального типа размеры окружностей должны быть малыми относительно ω для сохранения коэффициентов в априорных оценках на функции.

Наиболее сложным при исследовании оказался случай пространств нормального типа на числовой прямой, что обусловлено имеющейся разницей в коэффициентах перед $\omega(\operatorname{Re} z)$ и $|\operatorname{Im} z|$. В пространствах нормального типа на конечном интервале априорные оценки обеспечивают то, что все символы будут целыми функциями вполне регулярного роста. Данный факт делает ненужным рассмотрение в условии (F_2) точек с большой мнимой частью (относительно ω).

Четвертый параграф главы посвящен исследованию образа несюръективного оператора свертки в пространстве $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$: именно, будет решен вопрос о том, при каких условиях образ оператора $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R}))$ содержит некоторое пространство $\mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$, порождаемое другим весом σ и имеющее другой тип q (нормальный или максимальный). Это позволит выделить класс правых частей g , для которых уравнение свертки $T_\mu f = g$ всегда имеет решение в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$. Основными результатами параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 1.4.1. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0, \infty)$; $p\omega \leq q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ , действующий в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$. Для того чтобы имело место вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$(A) \quad \forall r \in (0, p) \quad \forall \delta \in (0, \infty) \quad \exists s \in (0, q) \quad \exists R_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq R_0 \quad \exists w \in \mathbb{C} : \\ |w - x| \leq \delta \sigma(x) \quad \text{и} \quad |\mu(w)| \geq \exp \{ r\omega(w) - s\sigma(w) \}.$$

Теорема 1.4.2. Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0, \infty)$; $p\omega \leq q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ , действующий в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$. Если для целой функции μ выполнено условие

(B) $\forall r \in (0, p) \quad \exists s \in (0, q) \mid \forall \delta \in (0, \infty) \quad \exists R_0 > 0$: каждую точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \geq R_0$ и $|y| \leq \delta\sigma(x)$ можно погрузить внутрь окружности S_z с $\text{diam } S_z \leq \delta\sigma(x)$, для всех точек ζ которой справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \geq \exp \{ r\omega(\zeta) - s\sigma(\zeta) \},$$

то справедливо вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$.

Теорема 1.4.3. Пусть ω, σ — весовые функции; $p \in (0, \infty)$; $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R}) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^\infty(\mathbb{R})$; T_μ — оператор свертки в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (I) имеет место вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^\infty(\mathbb{R})$;
- (II) $T_\mu : \mathcal{E}_{(\omega)}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{(\sigma)}^\infty(\mathbb{R})$ сюръективен;
- (III) μ медленно убывает относительно σ в максимальном смысле.

Заметим, что результаты теорем 1.4.1 и 1.4.2 об образе оператора свертки в пространствах Берлинга нормального типа кардинальным образом отличаются от аналогичных результатов для пространств максимального типа. Именно, в ¹¹ было установлено, что вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^\infty(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^\infty(\mathbb{R})$ возможно в том и только в том случае, когда оператор $T_\mu : \mathcal{E}_{(\omega)}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{(\sigma)}^\infty(\mathbb{R})$ сюръективен. В случае пространств нормального типа данный факт остается верным только для вложения $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^\infty(\mathbb{R})$ (теорема 1.4.3). При этом, как показано в работе, вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$ может иметь место и для несюръективного на $\mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$ оператора T_μ .

Заметим также, что, как нетрудно видеть, несмотря на различие необходимых и достаточных условий, установленных в теоремах 1.4.1 и 1.4.2, из полученных результатов в случае $\sigma = \omega$, $q = p$ вытекает критерий сюръективности оператора свертки из теоремы 1.3.1.

В заключительном пятом параграфе главы рассматриваются различные примеры, иллюстрирующие все полученные результаты.

Вторая глава диссертации посвящена построению общего решения однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$ в пространствах Берлинга $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$

¹¹Bonet J., Galbis A. The range of non-surjective convolution operators on Beurling spaces / J. Bonet, A. Galbis // Glasgow Math. J. — 1996. — V. 38. — P. 125–135.

УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале, а также построению частного решения специального вида для неоднородного уравнения $T_\mu f = g$.

Задача об общем решении однородного уравнения свертки, как и задача о разрешимости, относится к классическим. Данная проблема естественным образом связана с задачей спектрального синтеза. Из предшествующих результатов наиболее близкими являются результаты работ ¹² и ¹³, в которых рассматривались ядра операторов свертки в пространствах УДФ Берлинга максимального типа и пространствах Румье минимального типа.

Итак, пусть $I = (-a, a)$ — заданный конечный симметричный интервал в $\mathbb{R}$ либо вся числовая прямая; T_μ — сюръективный оператор свертки в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ с символом μ ; $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, $z \in \mathbb{C}$. Как известно, если (λ_s) — нули функции $\check{\mu}$ кратностей k_s , то экспоненциальные "мономы"

$$(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}, \quad l = 0, \dots, k_s - 1, \quad s = 1, 2, \dots,$$

являются решениями уравнения $T_\mu f = 0$, т. е. принадлежат $\ker T_\mu$. При этом указанная система функций будет полна в $\ker T_\mu$, так что $\ker T_\mu$ допускает спектральный синтез. Данный факт стандартным образом получается с помощью критерия Банаха о полноте на основании того, что $\check{\mu}$ — делитель $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$.

Естественно возникает вопрос о существовании в $\ker T_\mu$ базиса, состоящего из приведенных элементарных решений, а точнее, из их линейных комбинаций, поскольку, как известно, элементарные решения необходимо группировать, чтобы обеспечить абсолютную сходимость соответствующих рядов. Ясно, что имеет смысл рассматривать лишь случай бесконечного числа нулей, когда $\ker T_\mu$ бесконечномерно.

Для решения данной задачи в пространствах нормального типа мы строим специальные открытые покрытия $(U_j)_{j=1}^\infty$ нулей λ_s функции $\check{\mu}$, после чего группируем элементарные решения, соответствующие нулям λ_s , попавшим в одно и то же множество U_j . Основная содержательная часть первых двух параграфов заключается именно в построении множеств U_j . В случае пространств нормального типа, в отличие от пространств максимального или минимального типов, их размеры должны быть малыми относительно веса ω , чтобы обеспе-

¹²Meise R., Schwerdtfeger K., Taylor B. A. On kernels of slowly decreasing convolution operators / R. Meise, K. Schwerdtfeger, B. A. Taylor // Doğa Mat. — 1986. — V. 10, № 1. — P. 176–197.

¹³Meyer T. Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu type / T. Meyer // Studia Math. — 1997. — V. 125, № 2. — P. 101–129.

чить впоследствии сохранение коэффициентов в определении пространств. При этом необходимо, чтобы на границах множеств U_j для $|\check{\mu}|$ выполнялись подходящие оценки снизу. Заметим, что построения проводятся по-разному в случае конечного интервала I и в случае, когда $I = \mathbb{R}$.

Построенные покрытия позволяют доказать следующий результат об абсолютном базисе в $\ker T_\mu$ (в тексте диссертации это теоремы 2.1.3 и 2.2.2).

Теорема 2.1.0. Пусть ω — весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $a \in (0, \infty]$; $I = (-a, a)$; T_μ — сюръективный оператор свертки с символом μ в пространстве $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$; $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, $z \in \mathbb{C}$; $N(\check{\mu}) = (\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — последовательность нулей функции $\check{\mu}$, $|\lambda_s| \uparrow \infty$; k_s — кратность нуля λ_s ; $(U_j)_{j=1}^\infty$ — специальное покрытие множества $N(\check{\mu})$. Тогда в $\ker T_\mu$ имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций элементарных решений, отвечающих нулям λ_s , попавшим в одно и то же множество U_j .

Заметим также, что в работе будут приведены некоторые ситуации, когда группировать нули λ_s функции $\check{\mu}$ не нужно.

Остальные три параграфа главы посвящены построению частных решений неоднородного уравнения свертки $T_\mu f = g$, имеющих определенный вид. Для этого будет использована теория слабо достаточных множеств, теория абсолютно представляющих систем и связь между ними. Идея поиска частного решения подобным образом была высказана А. Ф. Леонтьевым в работе ¹⁴. Для пространств УДФ максимального и минимального типов, насколько нам известно, подобные результаты не устанавливались.

Именно, на основании условия медленного убывания символа μ мы строим специальное слабо достаточное для пространства $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$ множество, состоящее из окружностей, на которых $|\check{\mu}|$ имеет подходящую оценку снизу. Затем на основании известного результата О. В. Епифанова мы выделяем из этого множества дискретное подмножество $(\nu_j)_{j=1}^\infty$, также слабо достаточное для $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$. Из общего результата Ю. Ф. Коробейника ¹⁵ тогда вытекает, что система $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^\infty$ будет абсолютно представляющей в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$. Это позволяет доказать следующий результат.

Теорема 2.3.0. Пусть ω — весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $a \in (0, \infty]$; $I =$

¹⁴Леонтьев А. Ф. О представлении произвольных функций рядами Дирихле / А. Ф. Леонтьев // ДАН СССР. — 1965. — Т. 164, № 1. С. 40–42.

¹⁵Коробейник Ю. Ф. Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50, № 3. — С. 539–565.

$(-a, a)$; T_μ — сюръективный оператор свертки в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$; $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^\infty$ — соответствующая ему абсолютно представляющая система в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$. Тогда для любой функции $g \in \mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ ряд $\sum_{j=1}^\infty \frac{g_j}{\check{\mu}(\nu_j)} e^{-i\nu_j x}$, где $\sum_{j=1}^\infty g_j e^{-i\nu_j x}$ — абсолютно сходящееся в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ разложение g , сходится абсолютно в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ и его сумма f является решением уравнения свертки $T_\mu f = g$.

В тексте данный результат формулируется и доказывается отдельно для случая всей числовой прямой (теорема 2.3.1) и для случая конечного интервала I (теорема 2.4.1). Отличия этих двух случаев проявляются в основном на этапе построения нужного слабо достаточного множества. Именно, в ситуации, когда I — конечный интервал, все символы уравнений свертки, как уже говорилось выше, являются целыми функциями вполне регулярного роста, что позволяет включить в искомое слабо достаточное множество участки самой мнимой оси, а не окружности.

Теорема 2.3.0 вместе с теоремой 2.1.0 позволяет выписать общее решение неоднородного уравнения свертки $T_\mu f = g$ в пространстве $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$.

В связи с тем, что в общем случае система показателей $(\nu_j)_{j=1}^\infty$ строится неконструктивно, мы дополнительно исследуем уравнения свертки в пространствах $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$, задаваемых весами $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \rightarrow \rho \in (0, 1)$ — некоторый уточненный порядок. Здесь I может быть как конечным интервалом, так и всей числовой прямой. В указанных пространствах для медленно убывающих относительно ω в нормальном смысле символов μ , заданных своими простыми нулями, удастся провести конструктивное построение абсолютно представляющей системы $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^\infty$ в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$.

В **третьей главе** диссертации исследуются операторы свертки в пространствах Румье $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа на числовой прямой. Принципиальным отличием пространств Румье от пространств Берлинга является их топологическая структура: если пространства Берлинга представляют собой пространства Фреше-Шварца, то пространства Румье имеют смешанную проективно-индуктивную топологию. Методика исследования операторов свертки в пространствах Румье, разработанная в ¹⁶, принципиально отличается от аналогичной методики для пространств Берлинга. Во-первых, операторы свертки T_μ в

¹⁶Braun R. W., Meise R., Vogt D. Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultradifferentiable functions / R. W. Braun, R. Meise, D. Vogt // Proc. London Math. Soc. — 1990. — V. 61. — P. 344–370.

пространствах Румье УДФ исследуются вместе и с помощью продолжающих их операторов свертки S_μ на соответствующих пространствах УР. Во-вторых, в пространствах Румье описание ядра оператора свертки является не независимой задачей, а необходимым шагом для решения проблемы о сюръективности оператора свертки T_μ .

Глава состоит из шести параграфов. Первый параграф имеет вспомогательный характер по отношению к настоящей диссертации, но при этом представляет собой и определенную самостоятельную ценность. Именно, в нем устанавливается аналог классической теоремы Л. Хермандера о разрешимости $\bar{\partial}$ -задачи в пространствах функций с системой весовых оценок. На основании данного результата затем будут описаны множества всех мультипликаторов проективных и индуктивно-проективных весовых пространств. В частности, это позволит получить полное описание всех символов операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа. Необходимость данного шага вызвана тем, что, как уже говорилось ранее, в случае пространств нормального типа сопряженные пространства не являются алгебрами относительно обычной операции умножения (в отличие от пространств максимального и минимального типов).

Приведем коротко результаты первого параграфа. *Регулярной функцией расстояния* будем называть невозрастающую непрерывно дифференцируемую функцию $\rho : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$, удовлетворяющую условиям:

$$\rho'(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty; \quad \ln \rho(e^x) \text{ вогнута на } \mathbb{R}.$$

В частности, регулярными функциями расстояния являются

$$\rho(t) \equiv 1; \quad \rho(t) = \frac{1}{(1+t)^s}, \quad s > 0; \quad \rho(t) = e^{-at^s}, \quad a > 0, \quad s > 0.$$

Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$.

Далее, функция $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется ρ -устойчивой, если при некотором $C_0 > 0$

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \leq C_0 \text{ для всех } z, \zeta \in \mathbb{C} \text{ с } |z - \zeta| \leq \rho(z).$$

Семейство равномерных весовых оценок будет задаваться с помощью весовой последовательности, состоящей из радиальных и нерадиальной компонент. Именно, пусть $U = (u_n)_{n=1}^\infty$ — невозрастающая по n последовательность непрерывных неубывающих функций $u_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, причем выполнены условия:

$$(\mathcal{U}_1) \quad u_n(e^x) \text{ выпукла на } [0, \infty), \quad n \in \mathbb{N};$$

($\mathcal{U}_2$) семейство $U = (u_n)_{n=1}^\infty$ равномерно ρ -устойчиво на $[0, \infty)$, т. е. существует $C_0 > 0$ такое, что

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leq C_0 \text{ для всех } t, s \in [0, \infty) \text{ с } |t - s| \leq \rho(t), n \in \mathbb{N};$$

($\mathcal{U}_3$) для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется $D_n > 0$, при котором

$$u_{n+1}(t) + \ln \frac{1+t^2}{\rho(t)} \leq u_n(t) + D_n, t \geq 0.$$

Далее, пусть функция $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами

($\mathcal{V}_1$) v субгармонична в $\mathbb{C}$;

($\mathcal{V}_2$) v ρ -устойчива в $\mathbb{C}$.

Положим

$$\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty; \quad \varphi_n(z) = u_n(|z|) + v(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ определим банаховы пространства

$$L_{\varphi_n}^\infty(\mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ измерима} : \|f\|_{\varphi_n} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} < \infty \right\},$$

$$H_{\varphi_n}(\mathbb{C}) = \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{\varphi_n} < \infty\}$$

и образуем проективные пределы

$$L_\Phi^\infty(\mathbb{C}) = \bigcap_{n=1}^\infty L_{\varphi_n}^\infty(\mathbb{C}), \quad H_\Phi(\mathbb{C}) = \bigcap_{n=1}^\infty H_{\varphi_n}(\mathbb{C}).$$

Основным результатом первого параграфа является

Теорема 3.1.1. *Если Φ — проективная весовая последовательность указанного вида, удовлетворяющая условиям ($\mathcal{U}_1$) — ($\mathcal{U}_3$) и ($\mathcal{V}_1$) — ($\mathcal{V}_2$), то*

1) *неоднородное уравнение Коши-Римана $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ имеет решение в $L_\Phi^\infty(\mathbb{C})$ при любой правой части $g \in L_\Phi^\infty(\mathbb{C})$;*

2) *проективный предел $H_\Phi(\mathbb{C})$ является слабо приведенным, т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $H_\Phi(\mathbb{C})$ плотно в $H_{\varphi_m}(\mathbb{C})$ по норме $\|\cdot\|_{\varphi_n}$.*

Утверждение 1), как и классический результат Л. Хермандера, может использоваться для построения целых функций, удовлетворяющих системе весовых оценок. Потребность в подобных построениях возникает в различных задачах. Условие 2) слабой приведенности проективного предела $H_\Phi(\mathbb{C})$ выступает,

в частности, основным предположением общей теоремы из ¹⁷ об описании мультипликаторов проективных весовых пространств. Понятно, что проверить его непосредственно будет достаточно затруднительно. В связи с этим теорема 3.1.1 представляется достаточно ценной, поскольку в ней выделен достаточно обширный класс проективных весовых последовательностей, для которых проверены два указанных утверждения. В частности, этот класс включает в себя весовые последовательности, используемые при определении пространств Румье УДФ, а также последовательности, возникающие при исследовании пространств голоморфных функций, имеющих заданный рост вблизи границы круговой области.

Доказательство теоремы 3.1.1 базируется на общем критерии разрешимости $\bar{\partial}$ -задачи в пространствах функций с системой весовых оценок, установленном О. В. Елифановым в ¹⁸.

На основании утверждения 2) о слабой приведенности проективного предела $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ во втором параграфе главы устанавливается описание всех символов операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа. В свою очередь, утверждение 1) теоремы 3.1.1 о существовании решения $\bar{\partial}$ -задачи, удовлетворяющего системе весовых оценок, будет использовано в третьем параграфе для описания ядра оператора свертки в пространствах УДФ Румье.

Во втором параграфе главы вводятся пространства Румье УДФ и УР, их сопряженные, описываются все мультипликаторы сопряженных пространств и определяются операторы свертки T_{μ} и S_{μ} . Именно, пусть ω — неквазианалитическая весовая функция. *Пространством Румье УДФ типа $p \in [0, \infty)$ на числовой прямой* называется следующее весовое пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций

$$\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : \forall l \in (0, \infty) \quad \exists q \in (p, \infty) : \right. \\ \left. |f|_{\omega, q, l} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leq l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q \varphi_{\omega}^*(j/q)} < \infty \right\}.$$

Данное пространство наделяется естественной смешанной проективно-индуктивной топологией. При $p = 0$ соответствующие пространства $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^0(\mathbb{R})$ называются пространствами Румье УДФ минимального типа, а при $p \in (0, \infty)$ —

¹⁷Abanin A.V., Pham Trong Tien. Continuation of holomorphic functions and some of its applications / A. V. Abanin, P. T. Tien // Studia Math. – 2010. – V. 200. – P. 279–295.

¹⁸Елифанов О. В. О разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов / О. В. Елифанов // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51, № 1. – С. 83–92.

пространствами Румье УДФ нормального типа.

Преобразование Фурье-Лапласа функционалов осуществляет топологический изоморфизм сопряженного пространства $(\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}))'_\beta$ на следующее весовое пространство целых функций:

$$H_{\{\omega\}}^p(\mathbb{C}) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \exists l \in (0, \infty) : \forall q \in (p, \infty) \right. \\ \left. \|f\|_{\omega, q, l} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(q\omega(z) + l|\operatorname{Im} z|)} < \infty \right\}.$$

На основании результатов первого параграфа главы доказывается следующий результат.

Теорема 3.2.1. *Множеством всех мультипликаторов пространства $H_{\{\omega\}}^p(\mathbb{C})$ является*

$$M_{\{\omega\}}^1(\mathbb{C}) := \left\{ \mu \in H(\mathbb{C}) \mid \exists l > 0 : \forall \varepsilon > 0 \quad \|\mu\|_{\omega, \varepsilon, l} < \infty \right\}.$$

Введем пространства пробных УДФ Румье. Именно, для $l \in (0, \infty)$ и $q \in (0, \infty)$ положим

$$D_{\omega, q}[-l, l] := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \subset [-l, l], |f|_{\omega, q, l} < \infty \right\}.$$

Далее, пусть

$$D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}) := \bigcup_{l \in (0, \infty)} \bigcup_{q \in (p, \infty)} D_{\omega, q}[-l, l], \quad 0 \leq p < \infty.$$

Пространство $D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ называется пространством Румье пробных УДФ, а $(D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}))'$ — пространством Румье УР типа p .

Пусть $p \in (0, \infty)$, $\mu \in M_{\{\omega\}}^1(\mathbb{C})$, $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$ — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$, преобразование Фурье-Лапласа которого совпадает с μ . Операторами свертки T_μ и S_μ с символом μ называются операторы, действующие соответственно в $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ и в $(D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}))'$ по правилам:

$$T_\mu f := \psi_\mu * f, \quad f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}); \\ S_\mu \nu := \psi_\mu * \nu, \quad \nu \in (D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}))'.$$

Оператор S_μ является естественным продолжением T_μ с $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ на $(D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}))'$.

В третьем параграфе главы ядро $\ker T_\mu$ оператора T_μ описывается в виде пространства числовых последовательностей. Одновременно доказываемое существование в $\ker T_\mu$ абсолютного базиса, состоящего из линейных комбинаций элементарных решений этого уравнения. Для этого используется построенное в главе 2 специальное открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^\infty$ нулевого множества $N(\check{\mu}) = (\lambda_s)_{s=1}^\infty$ функции $\check{\mu}$.

Итак, пусть $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — нули функции $\check{\mu}$; k_s — кратность нуля λ_s ; $(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}$, $l = 0, \dots, k_s - 1$, $s = 1, 2, \dots$, — элементарные решения уравнения $T_\mu f = 0$, соответствующие нулю λ_s , $s \in \mathbb{N}$. Далее, пусть $m_j = \sum_{\lambda_s \in U_j} k_s$. В главе 2 в каждом множестве U_j определенным образом выбирается некоторая точка z_j . Введем в рассмотрение последовательности $(\alpha_s)_{s=1}^\infty$ и $(\beta_s)_{s=1}^\infty$, которые получены из $(\omega(\operatorname{Re} z_j))_{j=1}^\infty$ и, соответственно, $(|\operatorname{Im} z_j|)_{j=1}^\infty$ повторением m_j раз элемента $\omega(\operatorname{Re} z_j)$ или $|\operatorname{Im} z_j|$. Положим теперь

$$\lambda_0^p := \{x = (x_s)_{s=1}^\infty \subset \mathbb{C} \mid \forall l \in (0, \infty) \exists q \in (p, \infty) :$$

$$|x|_{\omega, q, l}^0 := \sum_{s=1}^\infty |x_s| \exp \{q\alpha_s + l\beta_s\} < \infty\}.$$

Центральными результатами третьего параграфа являются две следующие теоремы.

Теорема 3.3.2. *Если символ μ оператора свертки T_μ в пространстве $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле, то $\ker T_\mu$ топологически изоморфно пространству λ_0^p числовых последовательностей.*

Теорема 3.3.3. *Если символ μ оператора свертки T_μ в пространстве $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле, то в $\ker T_\mu$ имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций элементарных решений, отвечающих нулям λ_s , попавшим в одно и то же множество U_j .*

В четвертом параграфе главы устанавливается критерий сюръективности оператора свертки S_μ на пространстве Румье $(D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}))'$ УР нормального типа $p \in (0, \infty)$. Необходимые и достаточные условия формулируются в терминах фундаментальных решений соответствующего уравнения свертки, а также в терминах медленного убывания символа оператора. *Фундаментальным решением* оператора T_μ или S_μ , естественно, называется решение уравнения $S_\mu \nu = \delta$ в $(D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}))'$. Одновременно данный результат представляет собой критерий локальной сюръективности оператора T_μ . По определению, *локальная сюръектив-*

ность оператора T_μ означает, что

$$\forall g \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}) \quad \forall l > 0 \quad \exists f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}) : T_\mu f|_{[-l,l]} = g.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.4.1. Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $\mu \in M_{\{\omega\}}^1(\mathbb{C})$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $S_\mu : (D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}))' \rightarrow (D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}))'$ сюръективен;
- (ii) T_μ допускает фундаментальное решение;
- (iii) $T_\mu : \mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ локально сюръективен;
- (iv) μ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле.

Центральным результатом пятого параграфа является критерий сюръективности оператора свертки T_μ в пространствах Румье $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа на числовой прямой, представленный в следующей теореме.

Теорема 3.5.1. Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $\mu \in M_{\{\omega\}}^1(\mathbb{C})$. Для сюръективности оператора свертки T_μ в $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- (I) μ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле;
- (II) нулевое множество $N(\mu)$ символа μ допускает представление $N(\mu) = N_1 \cup N_2$ такое, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty, \lambda_j \in N_1} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_j|}{\omega(\operatorname{Re} \lambda_j)} = 0; \quad \liminf_{j \rightarrow \infty, \lambda_j \in N_2} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_j|}{\omega(\operatorname{Re} \lambda_j)} > 0.$$

Для доказательства данного результата используется критерий локальной сюръективности T_μ (теорема 3.4.1), изоморфное описание $\ker T_\mu$ в виде пространства числовых последовательностей (теорема 3.3.2), а также общие результаты из теории проективных спектров Паламодова-Фогта¹⁹.

Результаты главы 3 в определенной степени завершают исследование сюръективности операторов свертки в пространствах УДФ. Поскольку полностью шкала пространств УДФ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{E}_{(\omega)}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_{\{\omega\}}^q(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}^q(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_{\{\omega\}}^0(\mathbb{R}),$$

¹⁹Vogt D. Lectures on projective spectra of (DF)-spaces / D. Vogt. – Universitat Wuppertal, 1987. – 37 p.

то пространство Румье $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^q(\mathbb{R})$ очень плотно зажато между пространствами Берлинга $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}_{(\omega)}^q(\mathbb{R})$. Здесь $0 < q < p$. В связи с этим представляется интересным, на наш взгляд, что критерии сюръективности в пространствах Берлинга и Румье нормального типа разные. Пример оператора T_μ , сюръективного на пространстве $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$, но не сюръективного на пространстве Румье $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ приводится в заключительном параграфе главы. Указанное обстоятельство говорит также о том, что оба вложения

$$\bigcup_{p \in (q, \infty)} \mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_{\{\omega\}}^q(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}^q(\mathbb{R})$$

являются строгими.

Другим интересным обстоятельством является то, что критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Румье нормального и минимального типов в итоге совпали, в то время как в пространствах Берлинга нормального и максимального типов эти критерии различны. С нашей точки зрения, это связано со значительным сужением в шкале пространств при переходе к $\mathcal{E}_{(\omega)}^\infty(\mathbb{R})$ (и с принципиальным расширением $H_{(\omega)}^\infty(\mathbb{C})$).

Четвертая глава диссертации посвящена проблеме существования линейных непрерывных правых обратных (ЛНПО) к операторам свертки в пространствах УДФ нормального типа. Задача о существовании ЛНПО для дифференциальных операторов и операторов свертки также относится к классическим. Впервые она была сформулирована Л. Шварцем в начале 50-х годов для дифференциального оператора конечного порядка с постоянными коэффициентами в классических пространствах $\mathcal{E}(\Omega)$ и $D'(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем вопрос о наличии ЛНПО для дифференциальных операторов и обобщающих их операторов свертки изучался многими авторами в различных пространствах бесконечно дифференцируемых и аналитических функций. В частности, в работах ²⁰ и ²¹ вопрос о существовании ЛНПО решался для операторов свертки в пространствах Берлинга максимального типа и в пространствах Румье минимального типа.

Как известно, данная задача неразрывно связана с задачей о дополнимости ядра оператора свертки в исходном пространстве, а также с задачей о дополни-

²⁰Braun R. W., Meise R., Vogt D. Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultradifferentiable functions / R. W. Braun, R. Meise, D. Vogt // Proc. London Math. Soc. — 1990. — V. 61. — P. 344–370.

²¹Meise R., Vogt D. Characterization of convolution operators on spaces of C^∞ -functions admitting a continuous linear right inverse / R. Meise, D. Vogt // Math. Ann. — 1987. — V. 279. — P. 141–155.

мости в сопряженном пространстве целых функций главного идеала, порождаемого символом рассматриваемого оператора.

Глава состоит из двух параграфов. Центральными результатами являются критерии наличия ЛНПО для сюръективного оператора свертки в пространстве Берлинга $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$ УДФ нормального типа на конечном интервале и, соответственно, в пространстве $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$ на числовой прямой. Основное необходимое и достаточное условие наличия ЛНПО формулируется в терминах нулей λ_s символа μ . Именно, будет доказана следующая теорема (в тексте это теоремы 4.1.1 и 4.2.1).

Теорема 4.1.0. Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $a \in (0, \infty]$; $I = (-a, a)$ — конечный интервал в $\mathbb{R}$ или вся числовая прямая; μ — символ сюръективного оператора свертки в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$; $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — последовательность нулей символа μ ; $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, $z \in \mathbb{C}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) T_μ имеет ЛНПО;
- (ii) ядро $\ker T_\mu$ оператора T_μ дополнимо в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$;
- (iii) главный идеал $J = \text{Im } \Lambda_{\check{\mu}} = \check{\mu}H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$ дополним в $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$;
- (iv) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|\text{Im } \lambda_s|}{\omega(\text{Re } \lambda_s)} = 0$.

Следует заметить, что основное необходимое и достаточное условие наличия ЛНПО — условие (iv) — сильнее соответствующего условия из ²². Именно, в пространствах Берлинга УДФ максимального типа сюръективный оператор свертки имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда нули символа удовлетворяют условию

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{|\text{Im } \lambda_s|}{\omega(\text{Re } \lambda_s)} < \infty.$$

Доказательство теоремы 4.1.0 в случае конечного интервала и в случае всей числовой прямой проводится в целом одними и теми же методами. Оно основано на функциональном критерии наличия ЛНПО для оператора T_μ и на построении специальных семейств целых и субгармонических функций.

Именно, в случае, когда $I = \mathbb{R}$, для существования ЛНПО у оператора T_μ необходимо, чтобы имелось семейство $(g_s)_{s=1}^\infty$ целых функций из $H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C})$ такое,

²²Meise R., Vogt D. Characterization of convolution operators on spaces of C^∞ -functions admitting a continuous linear right inverse / R. Meise, D. Vogt // Math. Ann. — 1987. — V. 279. — P. 141–155.

что $g_s(\lambda_s) = 1$ и

$$(A) \quad \forall q \in (0, p) \quad \forall l \in (0, \infty) \quad \exists \tilde{q} \in (0, p) \quad \exists \tilde{l} \in (0, \infty) \quad \exists C > 0 :$$

$$\ln |g_s(z)| + q\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) + l|\operatorname{Im} \lambda_s| \leq \tilde{q}\omega(\operatorname{Re} z) + \tilde{l}|\operatorname{Im} z| + C, \quad z \in \mathbb{C}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

В свою очередь, достаточным условием является наличие семейства $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ субгармонических в $\mathbb{C}$ функций такое, что $u_j|_{U_j} \geq 0$ и

$$(B) \quad \forall q \in (0, p) \quad \forall l \in (0, \infty) \quad \exists \tilde{q} \in (0, p) \quad \exists \tilde{l} \in (0, \infty) \quad \exists C > 0 :$$

$$u_j(z) + q\omega(z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \leq \tilde{q}\omega(z) + \tilde{l}|\operatorname{Im} z| + C, \quad z \in \mathbb{C}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Здесь $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ — построенное в главе 2 открытое покрытие нулевого множества $N(\check{\mu})$ функции $\check{\mu}$, а z_j — точки из множеств (U_j) , выбранные определенным образом.

Для пространств Берлинга максимального типа в ²³ использовались несколько иные методы, связанные с существованием фундаментальных решений с определенными носителями у рассматриваемого оператора.

В **заключении** кратко резюмируются результаты диссертации и обозначаются открытые вопросы.

Список публикаций по теме диссертации

- [1] Абанин А. В., Абанина (Полякова) Д. А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций / А. В. Абанин, Д. А. Абанина // Владикавказский математический журнал. — 2010. — Т. 12, № 3. — С. 3–20.
- [2] Абанина (Полякова) Д. А. Представление решений уравнений свертки в неквазианалитических классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа / Д. А. Абанина // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2011. — № 6. — С. 3–11.
- [3] Абанина (Полякова) Д. А. Экспоненциально-полиномиальный базис в пространстве решений однородного уравнения свертки на классах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Абанина // Владикавказский математический журнал. — 2011. — Т. 13, № 4. — С. 3–17.

²³Meise R., Vogt D. Characterization of convolution operators on spaces of C^∞ -functions admitting a continuous linear right inverse / R. Meise, D. Vogt // Math. Ann. — 1987. — V. 279. — P. 141–155.

- [4] Абанина (Полякова) Д. А. Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале / Д. А. Абанина // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 3. – С. 477–494.
- [5] Абанина (Полякова) Д. А. О существовании решения уравнения свертки, линейно и непрерывно зависящего от правой части / Д. А. Абанина // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2012. – № 6. – С. 13–15.
- [6] Полякова Д. А. О линейном непрерывном правом обратном к оператору свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 4. – С. 548–566.
- [7] Полякова Д. А. О решениях уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Алгебра и анализ. – 2014. – Т. 26, № 6. – С. 121–142.
- [8] Полякова Д. А. О разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в пространствах функций с системой равномерных весовых оценок / Д. А. Полякова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 10. – С. 77–82.
- [9] Полякова Д. А. О разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в проективных весовых пространствах / Д. А. Полякова // Сибирский математический журнал. – 2017. – Т. 58, № 1. – С. 185–198.
- [10] Полякова Д. А. О частном решении неоднородного уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Владикавказский математический журнал. – 2018. – Т. 20, № 4. – С. 67–75.
- [11] Полякова Д. А. Общее решение однородного уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Алгебра и анализ. – 2019. – Т. 31, № 1. – С. 114–142.
- [12] Polyakova D. A. On continuous linear right inverse to convolution operator / D. A. Polyakova // Operator Theory and Differential Equations. Trends in Mathematics. – Birkhauser, 2021. – P. 163–184.

- [13] Полякова Д. А. Об образе оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Алгебра и анализ. – 2024. – Т. 36, № 2. – С. 108–130.
- [14] Полякова Д. А. Описание ядра оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Румье / Д. А. Полякова // Владикавказский математический журнал. – 2024. – Т. 26, № 3. – С. 72–85.
- [15] Полякова Д. А. Сюръективность операторов свертки в пространствах Румье ультрадифференцируемых функций и ультрараспределений нормального типа / Д. А. Полякова // Алгебра и анализ. – 2025. – Т. 37, № 6. – С. 158–183.