ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
«ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК»

На правах рукописи

Полякова Дарья Александровна

Операторы и уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций нормального типа

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Владикавказ 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию операторов и уравнений свертки в пространствах Берлинга и Румье ультрадифференцируемых функций нормального типа. Теория пространств ультрадифференцируемых функций (УДФ) и ультрараспределений (УР) начала развиваться в 60-х годах 20-го века в работах Ш. Румье [94, 95], Х. Коматсу [73, 74], А. Берлинга и Г. Бьорка [57]. Пространства УДФ — это пространства бесконечно дифференцируемых функций с определенными ограничениями на рост производных. В подходе, предложенном Ш. Румье и Х. Коматсу и называемом обычно подходом Данжуа-Карлемана, указанные ограничения задаются с помощью специальной последовательности положительных чисел. В свою очередь, в подходе Берлинга-Бьорка пространства определяются с помощью весовой функции ω. В дальнейшем подход Берлинга-Бьорка получил серьезное развитие сначала в работах И. Циоранеску и Л. Жидо [66], а затем в многочисленных работах Р. Брауна, Р. Майзе, Б. А. Тейлора, Д. Фогта, М. Лангенбруха, Т. Майера и других. (см, например, [64, 65, 77, 86, 87, 90]). В последние десятилетия подход Берлинга-Бьорка был обобщен А. В. Абаниным в [5, 6], а также Г. Шиндлом и его соавторами в [71] на случай произвольной весовой последовательности и, соответственно, произвольной весовой матрицы.

Изначально вводились два типа пространств УДФ: так называемые пространства УДФ типа Берлинга и типа Румье. Пространства Берлинга представляют собой весовые аналоги классического пространства C^∞ и включают в себя последние при $\omega(t) = \ln(1+t)$. Топологически пространства Берлинга являются пространствами Фреше. Пространства Румье имеют смешанную проективно-индуктивную топологию. В частном случае, когда $\omega(t) = t^\rho$, $\rho \in (0,1)$, они содержат известные классы Жевре.

В начале 2000-х годов шкала пространств УДФ была расширена за счет введения пространств Берлинга и Румье нормального типа (см. [5, 53]). По расширенной шкале первоначальные пространства типа Берлинга и типа Румье являются пространствами Берлинга максимального типа и пространствами Румье минимального типа. Пространства нормального типа, хоть и сохранили структуру исходных пространств Берлинга и Румье, имеют, как оказалось, и существенные отличия. В частности, ни они сами, ни пространства целых функций, представляющие собой изоморфные реализации их сильных сопряженных, не являются алгебрами относительно обычной операции умножения функций. В связи с этим и результаты, получаемые для пространств нормального типа, как правило, отличаются от соответствующих результатов для пространств максимального и минимального типов.

Пространства УДФ и УР исследовались и продолжают исследоваться в настоящее время с различных точек зрения. Здесь можно упомянуть и классические проблемы о продолжении по Борелю и Уитни [48, 53, 62, 63, 68, 93, 82, 99], и аналоги теорем Пэли-Винера и Пэли-Винера-Шварца [7, 8, 9, 34, 35, 36, 80], и вопросы существования абсолютно представляющих систем экспонент с чисто мнимыми показателями [75, 76] и другие проблемы [12, 13, 31, 37, 51, 54, 59].

Одним из главных направлений в теории пространств УДФ и УР является исследование в указанных пространствах операторов и уравнений свертки. Отправной точкой здесь следует считать работы Б. Мальгранжа [79], Л. Эренпрайса [67] и Л. Хермандера [69], посвященные операторам свертки в классических пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций. В дальнейшем операторы свертки и их обобщения рассматривались многими авторами в различных пространствах бесконечно дифференцируемых, обобщенных и аналитических функций (см., например, [25, 26, 38, 41, 49, 56, 85, 86, 90, 92]). В работах [64, 65, 77, 86, 87, 90] операторы свертки были достаточно полно исследованы в пространствах УДФ Берлинга максимального типа и пространствах Румье минимального типа. Как известно, в качестве частных случаев в пространствах УДФ операторы свертки могут включать в себя дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, дифференциально-разностные и интегро-дифференциальные операторы.

Настоящая диссертация посвящена изучению операторов свертки в пространствах УДФ Берлинга и Румье нормального типа. В связи с тем, что указанные пространства были введены относительно недавно, операторы свертки в них еще не исследовались. Таким образом, тема работы представляется достаточно актуальной.

Степень разработанности. Как уже говорилось, операторы свертки в пространствах УДФ Берлинга максимального типа и в пространствах Румье минимального типа изучены к настоящему времени достаточно полно. В связи с этим имеется определенная база методов и подходов к рассматриваемым задачам. В пространствах нормального типа операторы свертки рассматриваются, по-видимому, впервые. В связи с тем, что пространства нормального типа являются гораздо более тонкими в исследовании по сравнению с пространствами максимального и минимального типов, в части задач приходится значительно модифицировать уже имеющиеся методы, а в части — использовать новые методы.

Цели и задачи исследования. Центральными и, можно считать, классическими для операторов свертки являются следующие задачи.

1. Задача о сюръективности, состоящая в получении условий на символ оператора, при которых он сюръективен. Другими словами, это задача о том, при каких условиях соответствующее уравнение свертки имеет решение в рассматриваемом пространстве при любой правой части.

2. Задача о базисе в ядре оператора свертки, т. е., иначе говоря, об общем решении соответствующего однородного уравнения свертки.

3. Задача о наличии у неоднородного уравнения свертки частного решения определенного вида.

4. Задача о существовании линейного непрерывного правого обратного для сюръективного оператора свертки или проблема наличия у уравнения свертки решения, линейно и непрерывно зависящего от правой части.

Следует отметить, что имеется естественная двойственная взаимосвязь данных задач с проблемами замкнутости и дополнимости главных идеалов в весовых пространствах целых функций, представляющих собой изоморфные реализации сопряженных пространств. Это пространства целых функций со смешанными ограничениями на рост: глобально это функции экспоненциального типа, но вблизи вещественной оси их рост значительно меньше. Задачи о замкнутости и дополнимости главных идеалов в указанных пространствах представляют также и самостоятельный интерес.

Основные цели работы — решить перечисленные проблемы для операторов свертки в пространствах УДФ нормального типа. Помимо указанных центральных задач, в работе также будет рассмотрена проблема об образе несюръективного оператора свертки в пространствах УДФ Берлинга нормального типа.

Методы исследования. Перечислим основные методы проводимых исследований.

1. Методы теории двойственности позволяют осуществить переход от имеющейся задачи для оператора свертки в пространстве УДФ к соответствующей задаче в сопряженном весовом пространстве целых функций. Эти методы являются классическими методами функционального анализа и будут использованы при решении каждой из рассматриваемых задач.

2. Методы теории роста целых функций [29, 30, 58] используются для исследования двойственных задач.

3. Классические методы теории обобщенных функций [43, 57] применяются для изучения операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа, поскольку, в отличие от случая пространств Берлинга, в пространствах Румье операторы свертки, как правило, исследуются вместе и с помощью продолжающих их операторов свертки на соответствующих пространствах УР.

4. Важным инструментом исследования операторов свертки в пространствах Румье выступает устанавливаемый в работе аналог классической теоремы Л. Хермандера о разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в пространствах функций с системой весовых оценок.

5. Методы теории проективных спектров, развитые в работах В. П. Паламодова [39] и Д.Фогта [98], позволяют получить окончательный критерий сюръективности операторов свертки в пространствах УДФ Румье нормального типа.

6. Методы теории слабо достаточных множеств и абсолютно представляющих систем [1, 2, 16, 20, 21, 97] будут использованы для построения частного решения неоднородного уравнения свертки, имеющего определенный вид.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты.

1. Критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале.

2. Необходимые и (отдельно) достаточные условия, при которых образ несюръективного оператора свертки в пространстве Берлинга УДФ нормального типа содержит пространство, порождаемое некоторым другим весом и имеющее другой тип.

3. Теорема о существовании абсолютного базиса в ядре оператора свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале, т. е. об общем решении соответствующего однородного уравнения свертки.

4. Построение частного решения неоднородного уравнения свертки, имеющего определенный вид.

5. Теорема о разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в пространствах функций с системой равномерных весовых оценок.

6. Полное описание символов операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале.

7. Изоморфное описание ядра оператора свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа на прямой.

8. Критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа на числовой прямой и в соответствующих пространствах УР.

9. Критерии наличия линейных непрерывных правых обратных (ЛНПО) для сюръективных операторов свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Поскольку пространства УДФ нормального типа в отличие от изучавшихся ранее пространств максимального и минимального типов имеют более тонкую структуру, для исследования операторов свертки в указанных пространствах потребовалась значительная модификация имеющихся методов, а также разработка новых методов и подходов. Основная часть полученных результатов отличается от известных ранее: именно, условия на символ оператора свертки, обеспечивающие ту или иную его характеристику, являются гораздо более жесткими, чем в случаях пространств максимального и минимального типов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях уравнений свертки и, в частности, дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Некоторые результаты диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности «Математика».

Достоверность и апробация результатов. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в рецензируемых научных изданиях. Этим обеспечивается их достоверность.

Результаты неоднократно докладывались и обсуждались на различных конференциях и семинарах:

1. Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2010, 2022, 2023 гг.);

2. Международная конференция молодых ученых «Математический анализ и математическое моделирование» (Владикавказ, 2010 г.)

3. Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 2010, 2021 гг.);

4. Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2011, 2013, 2017 гг.);

5. Десятая международная Казанская летняя научная школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2011 г.);

6. Международная научная конференция «Крымская осенняя математическая школа» (Севастополь, 2011, 2012 гг.);

7. Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» (Ростов-на-Дону, 2012, 2015–2019, 2022–2024 гг.);

8. XX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». VII Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 2012 г.);

9. Крымская международная математическая конференция КММК-2013 (Судак, 2013 г.);

10. Международная научная конференция «Discrete and Continuous Signals: Analysis, Information and Applications» (Санкт-Петербург, 2023 г.);

11. Международная конференция «Комплексный анализ и смежные проблем» (Уфа, 2024 г.);

12. Международная научная конференция «Бесконечномерный анализ и математическая физика» (IDAMPh 2026) (Порхов, 2026 г.);

13. Общеинститутский семинар ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, 2022–2026 гг.);

14. Семинар ИМВЦ УФИЦ РАН «Комплексный и гармонический анализ» (2026 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 15 работах автора [100]–[114]. Все журналы входят в перечень ВАК и индексируются в базах данных RSCI, Scopus и WoS.

Личный вклад автора. В совместной с А. В. Абаниным статье [100] А. В. Абанину принадлежит постановка задачи и формулировка основной теоремы 2. Теорема 1, а также доказательство теоремы 2 принадлежат Д. А Поляковой. Все остальные работы являются личными работами автора диссертации.

Содержание диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы.

Первая глава диссертации посвящена разрешимости уравнений свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале, т. е., иначе говоря, исследованию образов операторов свертки в указанных пространствах.

История задачи о сюръективности операторов свертки восходит к работе Л. Эренпрайса [67], где данная проблема была решена для операторов свертки в классическом пространстве C^∞ всех бесконечно дифференцируемых функций. В дальнейшем проблема сюръективности операторов свертки исследовалась во многих пространствах. В частности, в работах [61, 86] были изучены образы операторов свертки в пространствах УДФ Берлинга максимального типа.

Глава состоит из пяти параграфов. В первом параграфе вводятся пространства Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ УДФ нормального типа p на конечном или бесконечном симметричном интервале I в $\mathbb{R}$, весовые пространства целых функций — изоморфные реализации сильных сопряженных пространств $\left(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\right)'_\beta$, а также операторы свертки в пространствах $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Во втором параграфе рассматриваются частные случаи операторов свертки: дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, дифференциально-разностные и интегро-дифференциальные операторы. Там же устанавливаются условия на символ, при которых оператор свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Кроме того, в случае конечного интервала I выделяется целый класс весов, для которых все операторы свертки в соответствующих пространствах $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ будут дифференциальными операторами бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Приведем основные понятия и формулировки из первых двух параграфов. Пусть ω — весовая функция; φ^*_ω — сопряженная по Юнгу к функции $\varphi_\omega(x) = \omega(e^x)$; $p \in (0,\infty)$; $I = (-a,a)$, $a \in (0,\infty]$. *Пространством Берлинга УДФ типа p на интервале I* называется следующее весовое пространство бесконечно дифференцируемых на I функций

$$\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I) := \Big\{ f \in C^\infty(I) \ : \ \forall l \in (0,a) \quad \forall q \in (0,p) \quad |f|_{\omega,q,l} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\le l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q\varphi^*_\omega(j/q)} < \infty \Big\}.$$

При $p = \infty$ мы получим пространства Берлинга $\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(I)$, изучавшиеся в [61, 86]. При $p \in (0,\infty)$ пространства $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ называются пространствами Берлинга УДФ нормального типа (см. [5, 53]).

Сильное сопряженное пространство $\left(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\right)'_\beta$ изоморфно следующему весовому пространству целых функций

$$H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \exists l \in (0,a) \ \exists q \in (0,p) : \ \|f\|_{\omega,q,l} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\big(q\omega(z) + l|\operatorname{Im} z|\big)} < \infty \Big\}.$$

Изоморфизм осуществляет преобразование Фурье-Лапласа функционалов $F : \psi \mapsto \widehat{\psi}(z) = \psi_x(e^{-ixz})$, $z \in \mathbb{C}$.

Операторы свертки, как обычно, рассматриваются как сопряженные к операторам умножения. В связи с этим под символами операторов свертки удобно понимать мультипликаторы сопряженного пространства. Поскольку в случае $p \in (0,\infty)$ пространство $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ алгеброй не является, то в § 1.1 на основании общего результата из [22] мы описываем множество всех мультипликаторов пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, т. е. всех символов операторов свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Именно, будет установлено, что в случае $a = \infty$ множество всех мультипликаторов пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ совпадает с

$$M^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) \,|\, \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists l > 0 \,:\; \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,l} < \infty \right\}.$$

Если же $a \in (0,\infty)$, то множеством всех мультипликаторов пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ является

$$M^0_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) \,:\, \forall \varepsilon > 0 \;\; \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,\varepsilon} < \infty \right\}.$$

В обоих случаях каждый мультипликатор μ непрерывен, т. е. оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ или, соответственно, в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Перейдем к определению операторов свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Итак, пусть μ — мультипликатор пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, $z \in \mathbb{C}$. Найдем функционал $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$ из $\left(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\right)'$. *Оператором свертки с символом* μ *в* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ называется оператор T_μ, действующий по правилу:

$$T_\mu f := \psi_\mu * f\,,\; f \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\,.$$

Введенный таким образом оператор T_μ представляет собой линейный непрерывный оператор в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. При этом он является сопряженным к оператору $F^{-1} \circ \Lambda_{\check{\mu}} \circ F$, действующему в $\left(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\right)'$.

Мультипликатор μ из $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ или из $M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ будем называть *сильным*, если выполнено условие

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists C_\varepsilon > 0 : \;\; |\mu(z)| \le C_\varepsilon\, e^{\varepsilon\omega(z)}\,,\; z \in \mathbb{C}\,.$$

Установлены две следующие теоремы.

Теорема 1.2.1. *Пусть* ω *— весовая функция;* $p \in (0,\infty)$*;* $a \in (0,\infty]$*. Если целая функция* $\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (iz)^k$ *является сильным мультипликатором пространства* $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$*, то порождаемый ею оператор свертки* T_μ

представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами:

$$T_\mu f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} .$$

Теорема 1.2.2. *Пусть $p \in (0, \infty)$, $a \in (0, \infty)$. Если вес ω строгий [5, 82], т. е. если*

$$\exists K > 1 : \ \limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K,$$

то любой мультипликатор $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ является сильным и, соответственно, все операторы свертки представляют собой дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Центральным параграфом главы является третий параграф, в котором устанавливаются критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале. Получены необходимые и достаточные условия на символ оператора, при которых он сюръективен или, другими словами, при которых уравнение свертки разрешимо в рассматриваемом пространстве при любой правой части. Одновременно установленные критерии представляют собой теоремы деления в сопряженных весовых пространствах целых функций. Приведем их формулировки.

Теорема 1.3.1. *Пусть ω — произвольная весовая функция; $p \in (0, \infty)$. Для оператора свертки T_μ с символом μ в пространстве Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа на числовой прямой следующие утверждения эквивалентны:*

(A_1) *T_μ сюръективен на $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$;*

(B_1) *$\check{\mu}$ — делитель пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, т. е.*

$$f \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})\,,\ \frac{f}{\check{\mu}} \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow \frac{f}{\check{\mu}} \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C});$$

(C_1) *главный идеал $J := \operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}} = \check{\mu} H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ замкнут в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$;*

(D_1) $\forall \varepsilon > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists r_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$ *с* $|x| \geq r_0\ \ \exists w \in \mathbb{C}$*:*

$$|w - x| \leq \delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(w)| \geq e^{-\varepsilon\omega(w)};$$

(E_1) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \exists r_0>0 \,\big|\, \forall x\in\mathbb{R}$ *с* $|x|\ge r_0\ \ \exists t\in\mathbb{R}$ *с* $|t|>|x|$*:*

$$|t-x|\le\delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)|\ge e^{-\varepsilon\omega(t)};$$

(F_1) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_\varepsilon>0 \,\big|\, \forall\delta\in(0,\delta_\varepsilon]\ \ \exists r_0>0\ \ \exists L>0$: *для каждой точки* $z\in\mathbb{C}$ *с* $|z|\ge r_0$ *найдется окружность* S_z*, содержащая точку* z *внутри себя и обладающая свойствами:*

(a) *если* $|\operatorname{Im}z|\le\delta\omega(\operatorname{Re}z)$*, то для всех* $\zeta\in S_z$

$$\|\zeta-z\|\le 6\delta\omega(\operatorname{Re}z)\,,\ \ |\mu(\zeta)|\ge\exp\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta)\}\,;$$

(b) *если* $|\operatorname{Im}z|>\delta\omega(\operatorname{Re}z)$*, то для всех* $\zeta\in S_z$

$$\|\zeta-z\|\le\Big(\frac{3}{4}+4\beta\Big)|\operatorname{Im}z|\,,\ \ |\mu(\zeta)|\ge\exp\{-L|\operatorname{Im}\zeta|\}\,.$$

Здесь $\beta\in\big(0,\frac{1}{32}\big]$ *— произвольно выбранное число.*

Теорема 1.3.2. *Пусть* ω *— произвольная весовая функция;* $p\in(0,\infty)$*;* $a\in(0,\infty)$*;* $I=(-a,a)$*. Для оператора свертки* T_μ *с символом* μ *в пространстве Берлинга* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ *УДФ нормального типа на конечном интервале следующие утверждения эквивалентны:*

(A_2) T_μ *сюръективен на* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$*;*

(B_2) $\check{\mu}$ *— делитель пространства* $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$*, т. е.*

$$f\in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})\,,\ \frac{f}{\check{\mu}}\in H(\mathbb{C})\Rightarrow\frac{f}{\check{\mu}}\in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C});$$

(C_2) *главный идеал* $J:=\operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}=\check{\mu}H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *замкнут в* $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$*;*

(D_2) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \exists r_0>0 \,|\, \forall x\in\mathbb{R}$ с $|x|\ge r_0\ \ \exists w\in\mathbb{C}$:

$$|w-x|\le\delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(w)|\ge e^{-\varepsilon\omega(w)};$$

(E_2) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \exists r_0>0 \,\big|\, \forall x\in\mathbb{R}$ *с* $|x|\ge r_0\ \ \exists t\in\mathbb{R}$ *с* $|t|>|x|$:

$$|t-x|\le\delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)|\ge e^{-\varepsilon\omega(t)};$$

(F_2) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \exists r_0>0$: *для каждой точки* $z\in\mathbb{C}$ *с* $|\operatorname{Re}z|\ge r_0$, $|\operatorname{Im}z|\le\delta|\operatorname{Re}z|$ *найдется окружность* S_z *с радиусом* $R_z\le\delta\omega(\operatorname{Re}z)+\delta|\operatorname{Im}z|$, *содержащая точку z внутри себя, для всех точек ζ которой выполняется неравенство*

$$|\mu(\zeta)| \geq \exp\big\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta) - \varepsilon|\operatorname{Im}\zeta|\big\}.$$

Символы, удовлетворяющие условиям (D_1), (E_1), (F_1) теоремы 1.3.1 (или, соответственно, условиям (D_2), (E_2), (F_2) теоремы 1.3.2) вслед за Л. Эренпрайсом будем называть *медленно убывающими относительно ω в нормальном смысле.* Нетрудно видеть, что введенное условие значительно сильнее условия медленного убывания в максимальном смысле из [86]:

$$\exists C > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq C \;\; \exists w \in \mathbb{C} : \\ |w - x| \leq C\omega(x) \;\; \textit{и} \;\; |\mu(w)| \geq \exp\big\{-C\omega(w)\big\}.$$

Данное обстоятельство естественным образом связано с априорными оценками на символ μ: в случае пространств Берлинга максимального типа на числовой прямой он должен удовлетворять условию

$$\exists C > 0 : \;\; \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp\big(C\omega(\operatorname{Re} z) + C|\operatorname{Im} z|\big)} < \infty\,,$$

а в случае пространств Берлинга нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале — условию

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists l > 0 : \;\; \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp\big(\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|\big)} < \infty$$

и, соответственно, условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp\big(\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon|\operatorname{Im} z|\big)} < \infty.$$

Методика доказательства теорем 1.3.1 и 1.3.2 основана, во-первых, на выметании масс субгармонической функции на границу круга и построении семейства целых функций с максимально возможными по модулю значениями в заданных точках и с подходящими оценками во всей плоскости (доказательство условий (D_1) и (D_2)). Условия (F_1) и (F_2) устанавливаются за счет известной теоремы о минимуме модуля аналитической функции. В отличие от пространств максимального типа, в случае пространств нормального типа приходится отдельно рассматривать точки, близкие к действительной оси относительно ω, и точки с достаточно большой мнимой частью. Связано это с тем, что в случае пространств нормального типа размеры окружностей должны быть малыми относительно ω для сохранения коэффициентов в априорных оценках на функции.

Наиболее сложным при исследовании оказался случай пространств нормального типа на числовой прямой, что обусловлено имеющейся разницей в коэффициентах перед $\omega(\operatorname{Re} z)$ и $|\operatorname{Im} z|$. В пространствах нормального типа на конечном интервале априорные оценки обеспечивают то, что все символы будут целыми функциями вполне регулярного роста. Данный факт делает ненужным рассмотрение в условии (F_2) точек с большой мнимой частью (относительно ω).

Четвертый параграф главы посвящен исследованию образа несюръективного оператора свертки в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$: именно, будет решен вопрос о том, при каких условиях образ оператора $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big)$ содержит некоторое пространство $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, порождаемое другим весом σ и имеющее другой тип q (нормальный или максимальный). Это позволит выделить класс правых частей g, для которых уравнение свертки $T_\mu f = g$ всегда имеет решение в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Основными результатами параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 1.4.1. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0, \infty)$; $p\omega \leq q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ, действующий в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Для того чтобы имело место вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$(A)\ \ \forall r \in (0,p)\ \ \forall \delta \in (0,\infty)\ \ \exists s \in (0,q)\ \ \exists R_0 > 0 | \forall x \in \mathbb{R}\ c\ |x| \geq R_0\ \ \exists w \in \mathbb{C} :$$
$$|w - x| \leq \delta\sigma(x)\ \ u\ \ |\mu(w)| \geq \exp\big\{r\omega(w) - s\sigma(w)\big\}\,.$$

Теорема 1.4.2. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0, \infty)$; $p\omega \leq q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ, действующий в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Если для целой функции μ выполнено условие*

(B) $\forall r \in (0,p)$ $\exists s \in (0,q)$ $|$ $\forall \delta \in (0,\infty)$ $\exists R_0 > 0$: каждую точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \geq R_0$ и $|y| \leq \delta\sigma(x)$ можно погрузить внутрь окружности S_z с $\operatorname{diam} S_z \leq \delta\sigma(x)$, для всех точек ζ которой справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \geq \exp\big\{r\omega(\zeta) - s\sigma(\zeta)\big\}\,,$$

то справедливо вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$.

Теорема 1.4.3. *Пусть* ω, σ *— весовые функции;* $p \in (0, \infty)$*;* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$*;* T_μ *— оператор свертки в* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$*. Следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *имеет место вложение* $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$*;*

(II) $T_\mu : \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ *сюръективен;*

(III) μ *медленно убывает относительно* σ *в максимальном смысле.*

Заметим, что результаты теорем 1.4.1 и 1.4.2 об образе оператора свертки в пространствах Берлинга нормального типа кардинальным образом отличаются от аналогичных результатов из [61] для пространств максимального типа. Именно, в [61] было установлено, что вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$. возможно в том и только в том случае, когда оператор $T_\mu : \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ сюръективен. В случае пространств нормального типа данный факт остается верным только для вложения $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ (теорема 1.4.3). При этом вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ может иметь место и для несюръективного на $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ оператора T_μ (см. пример 1.5.6 в § 1.5).

Заметим также, что, как нетрудно видеть, несмотря на различие необходимых и достаточных условий, установленных в теоремах 1.4.1 и 1.4.2, из полученных результатов в случае $\sigma = \omega$, $q = p$ вытекает критерий сюръективности оператора свертки из теоремы 1.3.1.

В заключительном пятом параграфе главы рассматриваются различные примеры, иллюстрирующие все полученные результаты.

Результаты первой главы опубликованы в работах автора [100, 103, 112].

Вторая глава диссертации посвящена построению общего решения однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$ в пространствах Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале, а также построению частного решения специального вида для неоднородного уравнения $T_\mu f = g$.

Задача об общем решении однородного уравнения свертки, как и задача о разрешимости, относится к классическим. Ее решению в различных пространствах посвящены, в частности, работы [25, 38, 41, 49, 56]. Данная проблема естественным образом связана с задачей спектрального синтеза. Из предшествующих результатов наиболее близкими являются результаты работ [85, 86, 90], в которых рассматривались ядра операторов свертки в пространствах УДФ Берлинга максимального типа и пространствах Румье минимального типа.

Итак, пусть $I = (-a, a)$ — заданный конечный симметричный интервал в $\mathbb{R}$ либо вся числовая прямая; T_μ — сюръективный оператор свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ с символом μ; $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, $z \in \mathbb{C}$. Как известно, если (λ_s) — нули функции $\check{\mu}$ кратностей k_s, то экспоненциальные "мономы"

$$(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}\,, \quad l = 0, \dots, k_s - 1\,, \quad s = 1, 2, \dots\,,$$

являются решениями уравнения $T_\mu f = 0$, т. е. принадлежат $\ker T_\mu$. При этом указанная система функций будет полна в $\ker T_\mu$, так что $\ker T_\mu$ допускает спектральный синтез. Данный факт стандартным образом получается с помощью критерия Банаха о полноте на основании того, что $\check{\mu}$ — делитель $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Естественно возникает вопрос о существовании в $\ker T_\mu$ базиса, состоящего из приведенных элементарных решений, а точнее, из их линейных комбинаций, поскольку, как известно, элементарные решения необходимо группировать, чтобы обеспечить абсолютную сходимость соответствующих рядов. Ясно, что имеет смысл рассматривать лишь случай бесконечного числа нулей, когда $\ker T_\mu$ бесконечномерно.

Для решения данной задачи в пространствах нормального типа мы строим специальные открытые покрытия $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ нулей λ_s функции $\check{\mu}$, после чего группируем элементарные решения, соответствующие нулям λ_s, попавшим в одно и то же множество U_j. Основная содержательная часть первых двух параграфов заключается именно в построении множеств U_j. В случае пространств нормального типа, в отличие от пространств максимального или минимального типов, их размеры должны быть малыми относительно веса ω, чтобы обеспечить впоследствии сохранение коэффициентов в определении пространств. При этом необходимо, чтобы на границах множеств U_j для $|\check{\mu}|$ выполнялись подходящие оценки снизу. Заметим, что построения проводятся по-разному в случае конечного интервала I и в случае, когда $I = \mathbb{R}$.

Построенные покрытия позволяют доказать следующий результат об абсолютном базисе в $\ker T_\mu$ (в тексте диссертации это теоремы 2.1.3 и 2.2.2).

Теорема 2.1.0. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $a \in (0,\infty]$; $I = (-a,a)$; T_μ — сюръективный оператор свертки с символом μ в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$; $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, $z \in \mathbb{C}$; $N(\check{\mu}) = (\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — последовательность нулей функции $\check{\mu}$, $|\lambda_s| \uparrow \infty$; k_s — кратность нуля λ_s; $(U_j)_{j=1}^\infty$ — специальное покрытие множества $N(\check{\mu})$. Тогда в $\ker T_\mu$ имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций элементарных решений, отвечающих нулям λ_s, попавшим в одно и то же множество U_j.*

Заметим также, что в работе будут приведены некоторые ситуации, когда группировать нули λ_s функции $\check{\mu}$ не нужно.

Остальные три параграфа главы посвящены построению частных решений неоднородного уравнения свертки $T_\mu f = g$, имеющих определенный вид. Для этого будет использована теория слабо достаточных множеств, теория абсолютно представляющих систем и связь между ними. Идея поиска частного решения подобным образом была высказана А. Ф. Леонтьевым в работе [27]. Ранее данный метод реализовывался в [20]. Для пространств УДФ максимального и минимального типов, насколько нам известно, подобные результаты не устанавливались.

Именно, на основании условия медленного убывания символа μ мы строим специальное слабо достаточное для пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ множество, состоящее из окружностей, на которых $|\check{\mu}|$ имеет подходящую оценку снизу. Затем на основании известного результата О. В. Епифанова из [16] мы выделяем из этого множества дискретное подмножество $(\nu_j)_{j=1}^\infty$, также слабо достаточное для $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Из общего результата Ю. Ф. Коробейника [21] тогда вытекает, что система $\left\{e^{-i\nu_j x}\right\}_{j=1}^\infty$ будет абсолютно представляющей в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Это позволяет доказать следующий результат.

Теорема 2.3.0. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $a \in (0,\infty]$; $I = (-a,a)$; T_μ — сюръективный оператор свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$; $\left\{e^{-i\nu_j x}\right\}_{j=1}^\infty$ — соответствующая ему абсолютно представляющая система в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Тогда для любой функции $g \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ ряд $\displaystyle\sum_{j=1}^\infty \frac{g_j}{\check{\mu}(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x}$, где $\sum\limits_{j=1}^\infty g_j e^{-i\nu_j x}$ — абсолютно сходящееся в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ разложение g, сходится абсолютно в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$*

и его сумма f является решением уравнения свертки $T_\mu f = g$.

В тексте данный результат формулируется и доказывается отдельно для случая всей числовой прямой (теорема 2.3.1) и для случая конечного интервала I (теорема 2.4.1). Отличия этих двух случаев проявляются в основном на этапе построения нужного слабо достаточного множества. Именно, в ситуации, когда I — конечный интервал, все символы уравнений свертки, как уже говорилось выше, являются целыми функциями вполне регулярного роста, что позволяет включить в искомое слабо достаточное множество участки самой мнимой оси, а не окружности.

Теорема 2.3.0 вместе с теоремой 2.1.0 позволяет выписать общее решение неоднородного уравнения свертки $T_\mu f = g$ в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$.

В связи с тем, что в общем случае система показателей $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ строится неконструктивно, в § 2.5 мы дополнительно исследуем уравнения свертки в пространствах $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$, задаваемых весами $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Здесь I может быть как конечным интервалом, так и всей числовой прямой. В указанных пространствах для медленно убывающих относительно ω в нормальном смысле символов μ, заданных своими простыми нулями, удается провести конструктивное построение абсолютно представляющей системы $\left\{e^{-i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$.

Результаты второй главы опубликованы в работах автора [101, 102, 106, 109, 110].

В **третьей главе** диссертации исследуются операторы свертки в пространствах Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа на числовой прямой. Принципиальным отличием пространств Румье от пространств Берлинга является их топологическая структура: если пространства Берлинга представляют собой пространства Фреше-Шварца, то пространства Румье имеют смешанную проективно-индуктивную топологию. Методика исследования операторов свертки в пространствах Румье, разработанная в [65, 83, 90], принципиально отличается от аналогичной методики для пространств Берлинга. Во-первых, операторы свертки T_μ в пространствах Румье УДФ исследуются вместе и с помощью продолжающих их операторов свертки S_μ на соответствующих пространствах УР. Во-вторых, в пространствах Румье описание ядра оператора свертки является не независимой задачей, а необходимым шагом для решения проблемы о сюръективности оператора свертки T_μ.

Глава состоит из шести параграфов. Первый параграф имеет вспомогательный характер по отношению к настоящей диссертации, но при этом представляет собой и определенную самостоятельную ценность. Именно, в нем устанавливается аналог классической теоремы Л. Хермандера о разрешимости $\overline{\partial}$-задачи в пространствах функций с системой весовых оценок. На основании данного результата затем будут описаны множества всех мультипликаторов проективных и индуктивно-проективных весовых пространств. В частности, это позволит получить полное описание всех символов операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа. Необходимость данного шага вызвана тем, что, как уже говорилось ранее, в случае пространств нормального типа сопряженные пространства не являются алгебрами относительно обычной операции умножения (в отличие от пространств максимального и минимального типов).

Приведем коротко результаты первого параграфа. Начнем с некоторых определений.

Регулярной функцией расстояния (см. [52]) будем называть невозрастающую непрерывно дифференцируемую функцию $\rho : [0,\infty) \to (0,1]$, удовлетворяющую условиям:

$$\rho'(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty\,; \quad \ln \rho(e^x) \text{ вогнута на } \mathbb{R}\,.$$

В частности, регулярными функциями расстояния являются

$$\rho(t) \equiv 1\,; \;\; \rho(t) = \frac{1}{(1+t)^s}\,,\; s > 0\,; \;\; \rho(t) = e^{-at^s}\,,\; a > 0\,,\; s > 0\,.$$

Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$.

Далее, функция $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *ρ-устойчивой*, если при некотором $C_0 > 0$

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \le C_0 \text{ для всех } z, \zeta \in \mathbb{C} \text{ с } |z - \zeta| \le \rho(z)\,.$$

Семейство равномерных весовых оценок будет задаваться с помощью весовой последовательности, состоящей из радиальных и нерадиальной компонент. Именно, пусть $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая по n последовательность непрерывных неубывающих функций $u_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, причем выполнены условия:

($\mathcal{U}_1$) $u_n(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$;

($\mathcal{U}_2$) семейство $U=(u_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно ρ-устойчиво на $[0,\infty)$, т. е. существует $C_0>0$ такое, что

$$|u_n(t)-u_n(s)|\le C_0 \text{ для всех } t,s\in[0,\infty) \text{ с } |t-s|\le\rho(t)\,,\ n\in\mathbb{N}\,;$$

($\mathcal{U}_3$) для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеется $D_n>0$, при котором

$$u_{n+1}(t)+\ln\frac{1+t^2}{\rho(t)}\le u_n(t)+D_n\,,\ t\ge 0\,.$$

Далее, пусть функция $v:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ обладает свойствами

($\mathcal{V}_1$) v субгармонична в $\mathbb{C}$;

($\mathcal{V}_2$) v ρ-устойчива в $\mathbb{C}$.

Положим

$$\Phi=(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\,;\quad \varphi_n(z)=u_n(|z|)+v(z)\,,\ z\in\mathbb{C}\,,\ n\in\mathbb{N}\,.$$

При каждом $n\in\mathbb{N}$ определим банаховы пространства

$$L^{\infty}_{\varphi_n}(\mathbb{C})=\left\{f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \text{ измерима } : \|f\|_{\varphi_n}=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}}<\infty\right\},$$

$$H_{\varphi_n}(\mathbb{C})=\left\{f\in H(\mathbb{C})\,:\,\|f\|_{\varphi_n}<\infty\right\}$$

и образуем проективные пределы

$$L^{\infty}_{\Phi}(\mathbb{C})=\bigcap_{n=1}^{\infty}L^{\infty}_{\varphi_n}(\mathbb{C})\,,\quad H_{\Phi}(\mathbb{C})=\bigcap_{n=1}^{\infty}H_{\varphi_n}(\mathbb{C})\,.$$

Основным результатом параграфа является

Теорема 3.1.1. *Если Φ — проективная весовая последовательность указанного вида, удовлетворяющая условиям ($\mathcal{U}_1$) – ($\mathcal{U}_3$) и ($\mathcal{V}_1$) – ($\mathcal{V}_2$), то*

1) неоднородное уравнение Коши-Римана $\frac{\partial f}{\partial\bar z}=g$ имеет решение в $L^{\infty}_{\Phi}(\mathbb{C})$ при любой правой части $g\in L^{\infty}_{\Phi}(\mathbb{C})$;

2) проективный предел $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ является слабо приведенным, т. е. для любого $n\in\mathbb{N}$ существует $m\in\mathbb{N}$ такое, что $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ плотно в $H_{\varphi_m}(\mathbb{C})$ по норме $\|\cdot\|_{\varphi_n}$.

Обрисуем коротко суть сформулированного результата, а также его место среди предшествующих. Заметим сразу, что оба утверждения 1), 2) имеют большую самостоятельную ценность. Утверждение 1), как и классический результат Хермандера, может использоваться для построения целых функций, удовлетворяющих системе весовых оценок. Потребность в подобных построениях возникает в различных задачах. Условие 2) слабой приведенности проективного предела $H_\Phi(\mathbb{C})$ выступает, в частности, основным предположением общей теоремы из [52] об описании мультипликаторов проективных весовых пространств. Понятно, что проверить его непосредственно будет достаточно затруднительно. В связи с этим теорема 3.1.1 представляется достаточно ценной, поскольку в ней выделен достаточно обширный класс проективных весовых последовательностей, для которых проверены два указанных утверждения. В частности, этот класс включает в себя весовые последовательности, использующиеся при определении пространств Румье УДФ, а также последовательности, возникающие при исследовании пространств голоморфных функций, имеющих заданный рост вблизи границы круговой области (см., например, [50]).

Доказательство теоремы 3.1.1 базируется на общем критерии разрешимости $\overline{\partial}$ -задачи в пространствах функций с системой весовых оценок, установленном О. В. Епифановым в [17]. Именно, в теореме Епифанова в случае произвольной области Ω в $\mathbb{C}$ доказано, что условия 1) и 2) эквивалентны между собой и эквивалентны условию

(iii) для всякой функции $\xi \in L^\infty_\Phi(\Omega)$ найдется функция $l \in L^\infty_\Phi(\Omega)$, $l = \sup\{|f| : f \in I\}$, где I — локально ограниченное семейство аналитических в Ω функций, такая что $|\xi| \le l$.

Данный результат получен для весов φ_n из класса $SH_0(\Omega)$, т. е. имеющих вид $\varphi_n = \sup\{\ln|f| : f \in I\}$, I — локально ограниченное семейство в $H(\Omega)$, при минимальном условии разделенности. В сформулированных выше условиях 1) и 2) пространства $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ и $H_\Phi(\mathbb{C})$, естественно, заменяются на $L^\infty_\Phi(\Omega)$ и $H_\Phi(\Omega)$.

Отметим также, что имеется обобщение теоремы Епифанова, полученное М. Лангенбрухом в [78] для случая, когда Ω — открытое псевдовыпуклое множество в $\mathbb{C}^N$.

В § 3.1 мы проводим единое построение функции $l \in L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ для выделенного класса проективных весовых последовательностей, что позволяет сделать вывод о справедливости утверждений 1) и 2) в соответствующих пространствах.

Теорема 3.1.1 — а именно, утверждение о слабой приведенности проективного предела $H_\Phi(\mathbb{C})$ — вместе с теоремой 5.1 из [52] позволяет, в частности, описать множества всех мультипликаторов проективных и индуктивно-проективных весовых пространств целых функций, задаваемых весовыми последовательностями указанного вида (теоремы 3.1.2 и 3.1.3 в тексте). Кроме того, утверждение 1) теоремы 3.1.1 о существовании решения $\overline{\partial}$-задачи, удовлетворяющего системе весовых оценок, будет использовано для описания ядра оператора свертки в пространствах УДФ Румье (см. доказательство предложения 3.3.1).

Во втором параграфе главы вводятся пространства Румье УДФ и УР, их сопряженные, описываются все мультипликаторы сопряженных пространств и определяются операторы свертки T_μ и S_μ. Именно, пусть ω — неквазианалитическая весовая функция. *Пространством Румье УДФ типа* $p \in [0, \infty)$ *на числовой прямой* называется следующее весовое пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций

$$\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ : \ \forall l \in (0, \infty) \quad \exists q \in (p, \infty) : \\ |f|_{\omega,q,l} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \le l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q\varphi^*_\omega(j/q)} < \infty \Big\}.$$

Данное пространство наделяется естественной смешанной проективно-индуктивной топологией. При $p = 0$ соответствующие пространства $\mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ называются пространствами Румье УДФ минимального типа (см. [65]), а при $p \in (0, \infty)$ — пространствами Румье УДФ нормального типа ([5, 53]).

Преобразование Фурье-Лапласа функционалов осуществляет топологический изоморфизм сопряженного пространства $\big(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'_\beta$ на следующее весовое пространство целых функций:

$$H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \,|\, \exists l \in (0, \infty) : \ \ \forall q \in (p, \infty) \\ \|f\|_{\omega,q,l} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\big(q\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z|\big)} < \infty \Big\}.$$

На основании результатов первого параграфа главы доказывается следующий результат.

Теорема 3.2.1. *Множеством всех мультипликаторов пространства* $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ *является*

$$M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) := \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) \,|\, \exists l > 0 \,:\, \forall \varepsilon > 0 \quad \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,l} < \infty\right\}.$$

Введем пространства пробных УДФ Румье. Именно, для $l \in (0,\infty)$ и $q \in (0,\infty)$ положим

$$D_{\omega,q}[-l,l] := \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,:\, \operatorname{supp} f \subset [-l,l]\,,\ |f|_{\omega,q,l} < \infty\right\}.$$

Далее, пусть

$$D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) := \bigcup_{l\in(0,\infty)} \bigcup_{q\in(p,\infty)} D_{\omega,q}[-l,l]\,,\ 0 \le p < \infty\,.$$

Пространство $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ называется пространством Румье пробных УДФ, а $\left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ — пространством Румье УР типа p.

Пусть $p \in (0,\infty)$, $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$ — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, преобразование Фурье-Лапласа которого совпадает с μ. *Операторами свертки* T_μ *и* S_μ *с символом* μ называются операторы, действующие соответственно в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и в $\left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ по правилам:

$$T_\mu f := \psi_\mu * f\,,\ f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\,;$$
$$S_\mu \nu := \psi_\mu * \nu\,,\ \nu \in \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'.$$

Оператор S_μ является естественным продолжением T_μ с $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ на $\left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$.

В третьем параграфе главы ядро $\ker T_\mu$ оператора T_μ описывается в виде пространства числовых последовательностей. Одновременно доказывается существование в $\ker T_\mu$ абсолютного базиса, состоящего из линейных комбинаций элементарных решений этого уравнения. Для этого используется построенное в § 2.2 специальное открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^\infty$ нулевого множества $N(\check{\mu}) = (\lambda_s)_{s=1}^\infty$ функции $\check{\mu}$.

Итак, пусть $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — нули функции $\check{\mu}$; k_s — кратность нуля λ_s; $(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}\,,\ \ l = 0,\ldots,k_s-1,\ s = 1,2,\ldots,$ — элементарные решения уравнения $T_\mu f = 0$, соответствующие нулю λ_s, $s \in \mathbb{N}$. Далее, пусть $m_j = \sum_{\lambda_s\in U_j} k_s$.

В § 2.2 в каждом множестве U_j была определенным образом выбрана некоторая точка z_j. Введем в рассмотрение последовательности $(\alpha_s)_{s=1}^{\infty}$ и $(\beta_s)_{s=1}^{\infty}$, которые получены из $\big(\omega(\operatorname{Re} z_j)\big)_{j=1}^{\infty}$ и, соответственно, $\big(|\operatorname{Im} z_j|\big)_{j=1}^{\infty}$ повторением m_j раз элемента $\omega(\operatorname{Re} z_j)$ или $|\operatorname{Im} z_j|$. Положим теперь

$$\lambda_0^p := \Big\{x = (x_s)_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \,|\, \forall l \in (0,\infty) \;\; \exists q \in (p,\infty) \; : \\ |x|_{\omega,q,l}^0 := \sum_{s=1}^{\infty} |x_s| \exp\big\{q\alpha_s + l\beta_s\big\} < \infty\Big\} .$$

Центральными результатами третьего параграфа являются две следующие теоремы.

Теорема 3.3.2. *Если символ μ оператора свертки T_μ в пространстве $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле, то* $\ker T_\mu$ *топологически изоморфно пространству λ_0^p числовых последовательностей.*

Теорема 3.3.3. *Если символ μ оператора свертки T_μ в пространстве $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})$ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле, то в* $\ker T_\mu$ *имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций элементарных решений, отвечающих нулям λ_s, попавшим в одно и то же множество U_j.*

В четвертом параграфе главы устанавливается критерий сюръективности оператора свертки S_μ на пространстве Румье $\big(D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})\big)'$ УР нормального типа $p \in (0,\infty)$. Необходимые и достаточные условия формулируются в терминах фундаментальных решений соответствующего уравнения свертки, а также в терминах медленного убывания символа оператора. *Фундаментальным решением* оператора T_μ или S_μ, естественно, называется решение уравнения $S_\mu\nu = \delta$ в $\big(D_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R})\big)'$. Одновременно данный результат представляет собой критерий локальной сюръективности оператора T_μ. По определению, *локальная сюръективность* оператора T_μ означает, что

$$\forall g \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}) \quad \forall l > 0 \quad \exists f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}^p(\mathbb{R}) \; : \;\; T_\mu f|_{[-l,l]} = g .$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.4.1. *Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $\mu \in M_{\{\omega\}}^1(\mathbb{C})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(*i*) $S_\mu : \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)' \to \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ *сюръективен;*

(*ii*) T_μ *допускает фундаментальное решение;*

(*iii*) $T_\mu : \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ *локально сюръективен;*

(*iv*) μ *медленно убывает относительно* ω *в нормальном смысле.*

Центральным результатом пятого параграфа является критерий сюръективности оператора свертки T_μ в пространствах Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа на числовой прямой, представленный в следующей теореме.

Теорема 3.5.1. *Пусть* ω *— неквазианалитическая весовая функция;* $p \in (0,\infty)$*;* $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$*. Для сюръективности оператора свертки* T_μ *в* $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ *необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

(*I*) μ *медленно убывает относительно* ω *в нормальном смысле;*

(*II*) *нулевое множество* $N(\mu)$ *символа* μ *допускает представление* $N(\mu) = N_1 \bigcup N_2$ *такое, что*

$$\lim_{j\to\infty,\lambda_j\in N_1} \frac{|\mathrm{Im}\,\lambda_j|}{\omega(\mathrm{Re}\,\lambda_j)} = 0\,; \quad \liminf_{j\to\infty,\lambda_j\in N_2} \frac{|\mathrm{Im}\,\lambda_j|}{\omega(\mathrm{Re}\,\lambda_j)} > 0\,.$$

Для доказательства данного результата используется критерий локальной сюръективности T_μ (теорема 3.4.1), изоморфное описание $\ker T_\mu$ в виде пространства числовых последовательностей (теорема 3.3.2), а также общие результаты из теории проективных спектров Паламодова-Фогта.

Результаты данной главы в определенной степени завершают исследование сюръективности операторов свертки в пространствах УДФ. Поскольку полностью шкала пространств УДФ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R}),$$

то пространство Румье $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ очень плотно зажато между пространствами Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Здесь $0 < q < p$. В связи с этим представляется интересным, на наш взгляд, что критерии сюръективности в пространствах Берлинга и Румье нормального типа разные. Пример оператора T_μ, сюръективного на пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$, но не сюръективного на пространстве Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ приводится в § 3.6. Указанное обстоятельство говорит также о том, что оба вложения

$$\bigcup_{p\in(q,\infty)} \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R})$$

являются строгими. Доказать данный факт непосредственно, т. е. привести пример соответствующей функции, будет, по нашему мнению, достаточно непросто.

Другим интересным обстоятельством является то, что критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Румье нормального и минимального типов в итоге совпали, в то время как в пространствах Берлинга нормального и максимального типов эти критерии различны. С нашей точки зрения, это связано со значительным сужением в шкале пространств при переходе к $\mathcal{E}_{(\omega)}^{\infty}(\mathbb{R})$ (и с принципиальным расширением $H_{(\omega)}^{\infty}(\mathbb{C})$). Более подробно данные вопросы обсуждаются в § 3.6.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [107, 108, 113, 114].

Четвертая глава диссертации посвящена проблеме существования линейных непрерывных правых обратных (ЛНПО) к операторам свертки в пространствах УДФ нормального типа. Задача о существовании ЛНПО для дифференциальных операторов и операторов свертки также относится к классическим. Впервые она была сформулирована Л. Шварцем в начале 50-х годов для дифференциального оператора конечного порядка с постоянными коэффициентами в классических пространствах $\mathcal{E}(\Omega)$ и $D'(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем вопрос о наличии ЛНПО для дифференциальных операторов и обобщающих их операторов свертки изучался многими авторами в различных пространствах бесконечно дифференцируемых и аналитических функций (см., например, [10, 23, 32, 60, 67, 87, 89]). В частности, в работах [65, 87] вопрос о существовании ЛНПО решался для операторов свертки в пространствах Берлинга максимального типа и в пространствах Румье минимального типа.

Как известно, данная задача неразрывно связана с задачей о дополнимости ядра оператора свертки в исходном пространстве, а также с задачей о дополнимости в сопряженном пространстве целых функций главного идеала, порождаемого символом рассматриваемого оператора.

Глава состоит из двух параграфов. Центральными результатами являются критерии наличия ЛНПО для сюръективного оператора свертки в пространстве Берлинга $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(I)$ УДФ нормального типа на конечном интервале и, соответственно, в пространстве $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(\mathbb{R})$ на числовой прямой. Основное необходимое и достаточное условие наличия ЛНПО формулируется в терминах нулей λ_s символа μ. Именно, будет доказана следующая теорема (в тексте это теоремы 4.1.1 и 4.2.1).

Теорема 4.1.0. *Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $a \in (0, \infty]$; $I = (-a, a)$ — конечный интервал в $\mathbb{R}$ или вся числовая прямая; μ — символ сюрьективного оператора свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$; $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ — последовательность нулей символа μ; $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, $z \in \mathbb{C}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) T_μ имеет ЛНПО;

(ii) ядро $\ker T_\mu$ оператора T_μ дополнимо в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$;

(iii) главный идеал $J = \operatorname{Im} \Lambda_{\check{\mu}} = \check{\mu} H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ дополним в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$;

(iv) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_s|}{\omega(\operatorname{Re} \lambda_s)} = 0$.

Следует заметить, что основное необходимое и достаточное условие наличия ЛНПО — условие (iv) — сильнее соответствующего условия из [87]. Именно, в пространствах Берлинга УДФ максимального типа сюрьективный оператор свертки имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда нули символа удовлетворяют условию

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_s|}{\omega(\operatorname{Re} \lambda_s)} < \infty.$$

Доказательство теоремы 4.1.0 в случае конечного интервала и в случае всей числовой прямой проводится в целом одними и теми же методами. Оно основано на функциональном критерии наличия ЛНПО для оператора T_μ и на построении специальных семейств целых и субгармонических функций. Именно, в случае, когда $I = \mathbb{R}$, для существования ЛНПО у оператора T_μ необходимо, чтобы имелось семейство $(g_s)_{s=1}^{\infty}$ целых функций из $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ такое, что $g_s(\lambda_s) = 1$ и

$$(A)\ \ \forall q \in (0, p)\ \ \forall l \in (0, \infty)\ \ \exists \widetilde{q} \in (0, p)\ \ \exists \widetilde{l} \in (0, \infty)\ \ \exists C > 0 :$$
$$\ln |g_s(z)| + q\omega(\operatorname{Re} \lambda_s) + l|\operatorname{Im} \lambda_s| \le \widetilde{q}\omega(\operatorname{Re} z) + \widetilde{l}|\operatorname{Im} z| + C\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ s \in \mathbb{N}\,.$$

В свою очередь, достаточным условием является наличие семейства $(u_j)_{j=1}^{\infty}$

субгармонических в $\mathbb{C}$ функций такое, что $u_j\big|_{U_j} \geq 0$ и

$$(B)\ \ \forall q \in (0,p)\ \ \forall l \in (0,\infty)\ \ \exists \widetilde{q} \in (0,p)\ \ \exists \widetilde{l} \in (0,\infty)\ \ \exists C > 0:$$
$$u_j(z) + q\omega(z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \leq \widetilde{q}\omega(z) + \widetilde{l}|\operatorname{Im} z| + C\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Здесь $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ — построенное в главе 2 открытое покрытие нулевого множества $N(\check{\mu})$ функции $\check{\mu}$, а z_j — точки из множеств (U_j), выбранные определенным образом. В случае, когда I — конечный интервал, аналогичные условия содержатся в предложениях 4.1.1 и 4.1.2.

Для пространств Берлинга максимального типа в [86] использовались несколько иные методы, связанные с существованием фундаментальных решений с определенными носителями у рассматриваемого оператора.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [104, 105, 111].

ГЛАВА 1
РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРЛИНГА УДФ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

1.1 Пространства Берлинга УДФ нормального типа, их сопряженные и операторы свертки

Как уже говорилось во введении, в подходе Берлинга-Бьорка пространства УДФ задаются с помощью весовой функции. Приведем соответствующее определение.

Определение 1.1.1. *Под весовой функцией будем понимать непрерывную неубывающую функцию* $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$*, удовлетворяющую условиям:*

(α) $\forall p > 1 \;\; \exists C > 0 \,:\; \omega(x+y) \le p\big(\omega(x)+\omega(y)\big) + C,\; x, y \ge 0\,;$

(α') $\omega(t) = o(t)\,,\; t \to \infty\,;$

(γ) $\ln t = o\big(\omega(t)\big)\,,\; t \to \infty\,;$

(δ) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ *выпукла на* $[0, \infty)$.

Заметим, что изначально у А. Берлинга и Г. Бьорка рассматривались только полуаддитивные сверху весовые функции [57]. Затем в работах Р. В. Брауна, Р. Майзе, Б. А. Тейлора и др. (см., напр., [64]) класс весов был расширен: требование полуаддитивности сверху было заменено на более слабое ограничение

$$(\widetilde{\alpha}) \quad \exists K > 1 \,:\; \omega(x+y) \le K\big(\omega(x)+\omega(y)\big) + K\,,\; x, y \ge 0\,.$$

При исследовании пространств УДФ нормального типа в [53] последнее условие было естественным образом заменено на условие (α) почти полуаддитивности сверху. Взаимосвязям между классами полуаддитивных сверху, почти полуаддитивных сверху весов и весов в смысле Брауна-Майзе-Тейлора посвящены работы [11, 51, 96].

Если вес ω удовлетворяет дополнительному условию

$$(\beta) \quad \int_1^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt < \infty\,,$$

то он называется неквазианалитическим. В противном случае вес ω называется квазианалитическим.

Стандартными примерами неквазианалитических весов служат

$$\omega(t) = \ln^{\beta}(1+t), \quad \beta > 1; \qquad \omega(t) = \frac{t}{\ln^{\beta}(e+t)}, \quad \beta > 1;$$
$$\omega(t) = t^{\rho(t)}, \quad \rho(t) \to \rho \in (0,1) \text{ — некоторый уточненный порядок},$$

а квазианалитических —

$$\omega(t) = \frac{t}{\ln^{\beta}(e+t)}\,,\ 0 < \beta \le 1\,.$$

Без ограничения общности всегда можно считать, что $\omega(1) = 0$. Приведем необходимые для дальнейшего свойства весовых функций (их можно найти, например, в монографии [5]). Во-первых, известно, что при некотором $A > 0$ справедливы оценки

$$\omega(t) \le At, \quad t \ge 0\,; \tag{1.1.1}$$

$$\omega(t+1) - \omega(t) \le Ae^2\,,\ t \ge 0\,. \tag{1.1.2}$$

Далее,

$$\lim_{r\downarrow 1} \limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(rt)}{\omega(t)} = 1; \tag{1.1.3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_{\omega}^{*}(x) - r\varphi_{\omega}^{*}(\frac{x}{r})}{x^{\alpha}} = \infty\,,\ \alpha \in (0,1)\,,\ r > 1. \tag{1.1.4}$$

Вес ω можно радиально продолжить во всю комплексную плоскость, положив $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Для неквазианалитического веса ω важную роль играет также его субгармоническое продолжение в $\mathbb{C}$:

$$P_{\omega}(x+iy) := \begin{cases} \dfrac{|y|}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt, & \text{если } y \ne 0, \\ \omega(x), & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Как известно (см, напр., [5, § 1.4]), функция P_ω непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$, гармонична в открытой верхней и открытой нижней полуплоскостях, причем $P_\omega(z) \geq \omega(z)$, $z \in \mathbb{C}$; $P_\omega(iy) = o(y)$ при $y \to \infty$.

В дальнейшем нам понадобятся еще следующие легко проверяемые оценки для $P_\omega(iy)$:

$$P_\omega(iy) \leq \frac{1}{2}\,\omega(y) + \frac{2y}{\pi}\int_y^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\,; \tag{1.1.5}$$

$$P_\omega(iy) \geq \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{\omega(yt)}{t^2}\,dt = \frac{y}{\pi}\int_y^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt. \tag{1.1.6}$$

Кроме того, понятно, что если K — константа из условия $(\widetilde{\alpha})$, то

$$P_\omega(x+iy) \leq K\big(\omega(x) + P_\omega(iy) + 1\big)\,,\ x+iy \in \mathbb{C}\,. \tag{1.1.7}$$

Условие (α) на вес ω вместе с условием $P_\omega(iy) = o(y)$, $y \to \infty$, позволяет естественным образом уточнить предыдущую оценку. Именно, для почти полуаддитивных сверху весов имеет место следующее утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists C > 0:\ \ P_\omega(x+iy) \leq (1+\varepsilon)\omega(x) + \varepsilon|y| + C\,,\ x+iy \in \mathbb{C}\,. \tag{1.1.8}$$

Введем еще функцию $\varphi^*_\omega(y) = \sup\{xy - \varphi_\omega(x) : x \geq 0\}$, $y \geq 0$, сопряженную по Юнгу к функции φ_ω, и перейдем к определению пространств Берлинга УДФ. Пусть $a \in (0,\infty]$; $I = (-a,a)$ — конечный симметричный интервал в $\mathbb{R}$ либо вся числовая прямая; $p \in (0,\infty]$.

Определение 1.1.2. *Пространством Берлинга УДФ типа p на интервале I называется следующее весовое пространство бесконечно дифференцируемых на I функций*

$$\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I) := \Big\{ f \in C^\infty(I)\ :\ \forall l \in (0,a) \quad \forall q \in (0,p) \\ |f|_{\omega,q,l} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\sup_{|x|\leq l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q\varphi^*_\omega(j/q)} < \infty \Big\}.$$

Если ввести полунормированные пространства $E_{\omega,q,l} = \big\{ f \in C^\infty(I) : |f|_{\omega,q,l} < \infty \big\}$, то в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ можно ввести топологию проективного предела $\mathrm{proj}_{l\in(0,a)}\mathrm{proj}_{q\in(0,p)}E_{\omega,q,l}$. Известно, что в этой топологии пространство $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ является (FS)-пространством, т. е. пространством Фреше-Шварца [18].

При $p = \infty$ соответствующее пространство $\mathcal{E}^{\infty}_{(\omega)}(I)$ называется пространством Берлинга максимального типа, а при $p \in (0, \infty)$ — пространством нормального типа. Пространства $\mathcal{E}^{\infty}_{(\omega)}(I)$ включают в себя при $\omega(t) = \ln(1+t)$ классические пространства $C^{\infty}(I)$ всех бесконечно дифференцируемых на I функций.

Имеет место следующее легко проверяемое соотношение

$$\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(\mathbb{R}) = \mathcal{E}^{1}_{(p\omega)}(\mathbb{R})\,,\ p \in (0, \infty), \tag{1.1.9}$$

которое позволяет при изучении пространств нормального типа ограничиваться случаем $p = 1$.

Перейдем к описанию сопряженных пространств. Известно, что преобразование Фурье-Лапласа функционалов

$$F : \varphi \in \left(\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(I)\right)' \mapsto \widehat{\varphi}(z) := \varphi_x(e^{-ixz})\,,\ z \in \mathbb{C},$$

устанавливает топологический изоморфизм между пространством $\left(\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(I)\right)'_{\beta}$, сильным сопряженным к $\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(I)$, и следующим весовым пространством целых функций:

$$H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \exists l \in (0, a)\ \ \exists q \in (0, p) : \\ \|f\|_{\omega,q,l} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\left(q\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z|\right)} < \infty \Big\}.$$

Данное пространство наделяется естественной топологией $\mathrm{ind}_{l\in(0,a)}\mathrm{ind}_{q\in(0,p)}\, H_{\omega,q,l}$ индуктивного предела банаховых пространств $H_{\omega,q,l} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \,:\, \|f\|_{\omega,q,l} < \infty \right\}$ и относится к классу (DFS)-пространств.

Как обычно, операторы свертки будут пониматься как сопряженные к операторам умножения. Соответственно, под символами операторов свертки в $\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(I)$ удобно понимать мультипликаторы сопряженного пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, т. е. те целые функции μ, для которых $\mu H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \subset H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Нетрудно видеть, что в случае, когда $p = \infty$, $I = \mathbb{R}$, пространство $H^{\infty,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ является алгеброй относительно обычной операции умножения функций. Это означает, что символами операторов свертки в $\mathcal{E}^{\infty}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ будут все целые функции из $H^{\infty,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. В остальных случаях это, очевидно, уже не так.

Настоящая глава посвящена изучению операторов свертки в пространствах $\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(I)$ УДФ нормального типа $p \in (0, \infty)$ на всей числовой прямой и на конечном интервале. Опишем соответствующие множества мультипликаторов.

Лемма 1.1.1. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0, \infty)$. Множество всех мультипликаторов пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ совпадает с*

$$M^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) \,|\, \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists l > 0 \, : \, \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,l} < \infty\right\}.$$

Если $a \in (0, \infty)$, то множеством всех мультипликаторов пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ является

$$M^0_{(\omega)}(\mathbb{C}) := \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) \, : \, \forall \varepsilon > 0 \;\; \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,\varepsilon} < \infty\right\}.$$

В обоих случаях каждый мультипликатор μ непрерывен, т. е. оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ или, соответственно, в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Доказательство. Будем одновременно рассматривать оба случая, когда a — положительное число и когда $a = \infty$. Заметим сразу, что если μ — мультипликатор пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то оператор умножения Λ_μ действует непрерывно в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Действительно, так как топология в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ мажорирует топологию поточечной сходимости, то оператор Λ_μ имеет замкнутый график. При этом $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, с одной стороны, является отделимым ультраборнологическим пространством, а с другой — пространством класса $(\mathcal{UF})$. Следовательно, по теореме Гротендика о замкнутом графике [40, Приложение 1 Д. А. Райкова, теорема 2] Λ_μ непрерывен.

Воспользуемся теперь общим результатом Ю. Ф. Коробейника [22, предложение 3] об описании мультипликаторов внутренних индуктивных пределов нормированных пространств. Для этого возьмем последовательности положительных чисел $a_n \uparrow a$ и $p_n \uparrow p$. Положим $f_n(z) := \exp\big(p_n\omega(z) + a_n|\mathrm{Im}\, z|\big)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Функции $\ln f_n(z)$ субгармоничны в $\mathbb{C}$, поскольку $|\mathrm{Im}\, z|$ и $\omega(z)$ субгармоничны в $\mathbb{C}$ (субгармоничность $\omega(z)$ вытекает из условия (δ)). На основании свойства (1.1.2) весовых функций для $f^0_n(z) := \sup\{f_n(z+w) : |w| \leq 1\}$ имеем следующие оценки:

$$f^0_n(z) \leq \exp\left\{p_n\big(\omega(z) + Ae^2\big) + a_n\big(|\mathrm{Im}\, z| + 1\big)\right\} = C_n f_n(z)\,, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Здесь $C_n := \exp(p_n A e^2 + a_n)$. Далее, из условия (γ) вытекает, что при некотором $D_n > 0$

$$(1+|z|^2)^2 \le D_n \, e^{(p_{n+1}-p_n)\omega(z)}\,, \ z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом,

$$(1+|z|^2)^2 f_n^0(z) \le C_n \, D_n \, f_{n+1}(z)\,, \ z \in \mathbb{C}\,, \ n \in \mathbb{N}.$$

Применяя теперь предложения 5 и 3 из [22], получаем, что множеством всех мультипликаторов пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ является

$$\Big\{ \mu \in H(\mathbb{C}) \,\Big|\, \forall n \ \ \exists m \ : \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)| f_n(z)}{f_m(z)} < \infty \Big\}.$$

Нетрудно видеть, что в случае $a = \infty$ данное множество совпадает с $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, а в случае $a \in (0,\infty)$ — с $M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$. $\square$

Следующая лемма и ее следствие носят технический характер и необходимы для дальнейшего.

Лемма 1.1.2. *Для любых положительных чисел q, l и ε найдется константа $C > 0$ такая, что при всех $z \in \mathbb{C}$*

$$q\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z| \le (q+\varepsilon)\omega(\mathrm{Re}\, z) + (l+\varepsilon)|\mathrm{Im}\, z| + C\,. \qquad (1.1.10)$$

Доказательство. Зафиксируем q, l и ε из $(0,\infty)$. В силу (1.1.3) существуют $\delta \in (0,1)$ и $C_1 > 0$, при которых

$$\omega\big((1+\delta)t\big) \le \frac{q+\varepsilon}{q}\,\omega(t) + C_1\,, \ t \ge 0.$$

Далее, из (α') вытекает, что имеется $C_2 > 0$ такое, что

$$\omega(t) \le \frac{\delta\varepsilon}{2q}\, t + C_2\,, \ t \ge 0.$$

Если теперь точка $z \in \mathbb{C}$ такова, что $|\mathrm{Im}\, z| \le \delta|\mathrm{Re}\, z|$, то

$$q\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z| \le q\omega\big((1+\delta)\mathrm{Re}\, z\big) + l|\mathrm{Im}\, z| \le (q+\varepsilon)\omega(\mathrm{Re}\, z) + l|\mathrm{Im}\, z| + qC_1\,.$$

Если же $|\mathrm{Im}\, z| > \delta|\mathrm{Re}\, z|$, то

$$q\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z| \le \frac{\delta\varepsilon}{2}\,|z| + l|\mathrm{Im}\, z| + qC_2 \le \frac{\delta\varepsilon}{2}\Big(\frac{1}{\delta}+1\Big)|\mathrm{Im}\, z| + l|\mathrm{Im}\, z| + qC_2 =$$
$$= \Big(\frac{\delta+1}{2}\,\varepsilon + l\Big)|\mathrm{Im}\, z| + qC_2 \le (l+\varepsilon)|\mathrm{Im}\, z| + qC_2\,.$$

Таким образом, неравенство (1.1.10) выполняется при $C := q(C_1 + C_2)$. $\square$

Следствие. *В определении пространств $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ можно заменить $\omega(z)$ на $\omega(\operatorname{Re} z)$.*

Перейдем к определению оператора свертки, действующего в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Для этого возьмем мультипликатор μ из $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ в случае, когда $I=\mathbb{R}$, и из $M^0_{(\omega)}(\mathbb{R})$, когда $I=(-a,a)$ — конечный интервал. Затем найдем функционал $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$ из $\left(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\right)'$.

Определение 1.1.3. *Оператором свертки с символом μ в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ называется оператор T_μ, действующий по правилу:*

$$T_\mu f := \psi_\mu * f\,,\ f\in\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\,,$$

т. е.

$$(T_\mu f)(x) :=< \psi_\mu, f(x-y) >_y\,,\ f\in\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\,,\ x\in I\,.$$

Следует заметить, что часто под символом оператора свертки понимается функционал ψ_μ (см., напр., [65, 77, 83, 85, 86, 87]). Однако, поскольку все получаемые результаты формулируются в терминах мультипликатора μ (даже, точнее, функции $\check{\mu}(z):=\mu(-z)$, $z\in\mathbb{C}$), то мы понимаем под символом сам мультипликатор μ.

Выпишем действие оператора T_μ на полной в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ системе экспонент $\{f_z=e^{-ixz} : z\in\mathbb{C}\}$:

$$(T_\mu f_z)(x) =< \psi_\mu, e^{-i(x-y)z} >_y= e^{-ixz}\,\widehat{\psi}_\mu(-z) = \check{\mu}(z) f_z(x)\,,\ x\in I\,,\ z\in\mathbb{C}\,.$$

Из этого легко вытекает, что оператор T_μ является сопряженным к линейному непрерывному оператору $F^{-1}\circ\Lambda_{\check{\mu}}\circ F$, действующему в $\left(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\right)'$. Следовательно, T_μ — линейный непрерывный оператор в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$.

Заметим, что в работах [100, 103, 112], где опубликованы результаты данной главы, оператор свертки вводился со знаком плюс:

$$(T_\mu f)(x) :=< \psi_\mu, f(x+y) >_y\,,\ f\in\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\,,\ x\in I\,.$$

Это было удобнее с той точки зрения, что при таком определении оператор свертки будет сопряженным (с точностью до изоморфизмов) к оператору умножения Λ_μ, а не $\Lambda_{\check{\mu}}$. Однако для совпадения с классическим определением свертки, а также для единообразия с последующими главами мы здесь используем определение свертки со знаком минус. Фактически рассматриваемый сейчас оператор T_μ есть оператор $T_{\check{\mu}}$ из [100, 103, 112]. Поскольку все результаты указанных работ инварианты относительно перехода от z к $-z$, данные разночтения несущественны.

1.2 Оператор свертки как дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

Как известно, частными случаями операторов свертки являются дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}(x), \quad a_k \in \mathbb{C};$$

дифференциально-разностные операторы

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} f^{(k)}(x + x_j), \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \quad a_{kj} \in \mathbb{C}, \quad x_j \in \mathbb{R}; \tag{1.2.1}$$

а также интегро-дифференциальные операторы

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x + y) \varphi_j(y)\, d\lambda, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \quad a_{kj} \in \mathbb{C}, \tag{1.2.2}$$

φ_j, $0 \le j \le n$, — интегрируемые по Лебегу функции, обращающиеся в нуль почти всюду вне некоторого отрезка.

Символами операторов (1.2.1) служат целые функции

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} (iz)^k e^{-ix_k z}.$$

Соответствующие функционалы ψ_μ имеют вид: $\psi_\mu = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} \delta_{x_j}^k$. В свою очередь, операторы (1.2.2) порождаются символами

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{-ixz} \varphi_j(x)\, d\lambda.$$

Остановимся более подробно на дифференциальных операторах бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 1.2.1. *Мультипликатор μ из $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ или из $M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ будем называть сильным, если выполнено условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists C_\varepsilon > 0 : \ \ |\mu(z)| \le C_\varepsilon \, e^{\varepsilon \omega(z)} \, , \ z \in \mathbb{C} \, . \tag{1.2.3}$$

Теорема 1.2.1. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $a \in (0, \infty]$. Если целая функция $\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (iz)^k$ является сильным мультипликатором пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то порождаемый ею оператор свертки T_μ представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами:*

$$T_\mu f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} \, .$$

Доказательство. Сначала покажем, что для каждой функции $f \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$ сходится абсолютно в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Зафиксируем $q \in (0, p)$, $l \in (0, a)$ и выберем $\varepsilon \in (0, p - q)$. Так как $f \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$, то при всех $j \in \mathbb{N}_0$ и $|x| \le l$

$$|f^{(j)}(x)| \le |f|_{\omega, q+\varepsilon, l} \exp \left\{ (q+\varepsilon) \varphi^*_\omega \Big(\frac{j}{q+\varepsilon} \Big) \right\}.$$

Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$|f^{(k)}|_{\omega, q, l} = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \le l} \frac{|f^{(k+j)}(x)|}{e^{q \varphi^*_\omega (j/q)}} \le$$

$$\le |f|_{\omega, q+\varepsilon, l} \exp \sup \left\{ (q+\varepsilon) \varphi^*_\omega \Big(\frac{k+j}{q+\varepsilon} \Big) - q \varphi^*_\omega \Big(\frac{j}{q} \Big) \right\} .$$

Как известно, функция φ^*_ω выпукла на $[0, \infty)$, так что

$$\varphi^*_\omega \Big(\frac{k+j}{q+\varepsilon} \Big) = \varphi^*_\omega \Big(\frac{\varepsilon}{q+\varepsilon} \cdot \frac{k}{\varepsilon} + \frac{q}{q+\varepsilon} \cdot \frac{j}{q} \Big) \le \frac{\varepsilon}{q+\varepsilon} \, \varphi^*_\omega \Big(\frac{k}{\varepsilon} \Big) + \frac{q}{q+\varepsilon} \, \varphi^*_\omega \Big(\frac{j}{q} \Big) .$$

Следовательно, $|f^{(k)}|_{\omega, q, l} \le |f|_{\omega, q+\varepsilon, l} \, e^{\varepsilon \varphi^*_\omega (k/\varepsilon)}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Возьмем теперь $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$. Поскольку мультипликатор μ является сильным, то найдется $C_1 > 0$, при котором

$$|\mu(z)| \le C_1 \, e^{\varepsilon_1 \omega(z)} \, , \ z \in \mathbb{C}.$$

Тогда для коэффициентов a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, на основании неравенств Коши имеем:

$$|a_k| \le \inf_{r>0} \Big(\frac{1}{r^k} \max_{|z|=r} |\mu(z)| \Big) \le C_1 \inf_{r>0} \Big(\frac{1}{r^k} \, e^{\varepsilon_1 \omega(r)} \Big) = C_1 \, e^{-\varepsilon_1 \varphi^*_\omega (k/\varepsilon_1)} \, .$$

Итак, при всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$|a_k|\,|f^{(k)}|_{\omega,q,l} \le C_1 |f|_{\omega,q+\varepsilon,l} \exp\left\{\varepsilon\varphi_\omega^*\Big(\frac{k}{\varepsilon}\Big) - \varepsilon_1\varphi_\omega^*\Big(\frac{k}{\varepsilon_1}\Big)\right\}. \tag{1.2.4}$$

В силу (1.1.4) найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\varepsilon_1\varphi_\omega^*\Big(\frac{k}{\varepsilon_1}\Big) - \varepsilon\varphi_\omega^*\Big(\frac{k}{\varepsilon}\Big) \ge 2\ln k\,,\ k \ge k_0.$$

Возвращаясь к (1.2.4), получаем, что

$$|a_k|\,|f^{(k)}|_{\omega,q,l} \le C_1\,|f|_{\omega,q+\varepsilon,l}\,\frac{1}{k^2}\,,\ k \ge k_0.$$

Из этого вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|\,|f^{(k)}|_{\omega,q,l}$ и оценка

$$\Big|\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k f^{(k)}\Big|_{\omega,q,l} \le C_1\frac{\pi^2}{6}\,|f|_{\omega,q+\varepsilon,l}.$$

Таким образом, дифференциальный оператор бесконечного порядка $f \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$ действует непрерывно в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Учитывая, что на полной системе $\{f_z = e^{-ixz} : z \in \mathbb{C}\}$ его действие совпадает с действием оператора свертки T_μ, заключаем, что $T_\mu f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$ для всех $f \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. □

В случае, когда $a \in (0,\infty)$, т. е. когда исходное пространство Берлинга рассматривается на конечном интервале, можно выделить класс весов, для которых все операторы свертки в соответствующем пространстве представляют собой дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Нам понадобится следующее определение из [82].

Определение 1.2.2. *Вес ω называется строгим, если выполнено условие*

$$\exists K > 1\ :\ \limsup_{t\to\infty}\frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K.$$

Как известно (см., напр., [5, п. 1.3.5]), всякий строгий вес является неквазианалитическим, что позволяет определить $P_\omega(z)$. При этом условие строгости равносильно каждому из двух следующих условий [5, п. 1.4.2]:

$$\exists C > 0\ :\ P_\omega(iy) \le C\omega(y) + C\,,\ y \ge 0; \tag{1.2.5}$$

$$\exists C > 0\ :\ P_\omega(z) \le C\omega(z) + C\,,\ z \in \mathbb{C}. \tag{1.2.6}$$

Теорема 1.2.2. *Пусть* $p \in (0,\infty)$, $a \in (0,\infty)$. *Если вес* ω *строгий, то любой мультипликатор* $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *пространства* $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *является сильным.*

Доказательство. Пусть C — константа из условия (1.2.6). Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то найдется $C_1 > 0$, при котором

$$|\mu(z)| \le C_1 \exp\left(\frac{\varepsilon}{C}\,\omega(z) + \frac{\varepsilon}{C}\,|\mathrm{Im}\, z|\right)\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.2.7}$$

По принципу Фрагмена-Линделефа [58, 6.5.4] для любой точки $z = x+iy \in \mathbb{C}$ с $y \ne 0$ справедлива оценка

$$\ln|\mu(x+iy)| \le \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\mu(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt + |y|d\,, \tag{1.2.8}$$

где $d := \limsup_{r\to\infty}\frac{2}{\pi r}\int_0^{\pi}\ln|\mu(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta$.

В силу (1.2.7) тогда имеем:

$$\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\mu(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt \le \ln C_1 + \frac{\varepsilon}{C}\,\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt =$$
$$= \ln C_1 + \frac{\varepsilon}{C}\,P_\omega(x+iy) \le \varepsilon\omega(x+iy) + \varepsilon + \ln C_1\,.$$

С другой стороны, так как

$$\frac{2}{\pi r}\int_0^{\pi}\ln|\mu(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \le \frac{2}{\pi r}\int_0^{\pi}\left(\ln C_1 + \frac{\varepsilon}{C}\,\omega(r) + \frac{\varepsilon}{C}\,r\sin\theta\right)\sin\theta\,d\theta =$$
$$= \frac{4\ln C_1}{\pi r} + \frac{4\varepsilon}{C}\,\frac{\omega(r)}{r} + \frac{\varepsilon}{C}\,,$$

то с учетом условия (α') заключаем, что $d \le \frac{\varepsilon}{C}$. Следовательно, $d \le 0$.

Возвращаясь к (1.2.8), окончательно получим, что

$$|\mu(z)| \le C_1\, e^{\varepsilon}\, e^{\varepsilon\omega(z)},$$

причем это неравенство выполняется для всех $z \in \mathbb{C}$ из-за непрерывности функций. □

Замечание. *В случае* $a = \infty$ *утверждение предыдущей леммы перестает быть верным. Действительно, например, функция* $\mu(z) = \sin z$, *очевидно, принадлежит* $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *при любом весе* ω, *но не является сильным мультипликатором ни при одном из весов.*

Лемма 1.2.1. *Если ω — нестрогий неквазианалитический вес, то в $M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ имеются мультипликаторы, не являющиеся сильными.*

Доказательство. 1) Так как вес ω нестрогий, то условие (1.2.5) нарушено, т. е.

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{P_\omega(iy)}{\omega(y)} = \infty.$$

Учитывая неравенство (1.1.6), заключаем тогда, что

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{y}{\pi\omega(y)} \int_y^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt = \infty\,.$$

Возьмем $y_1 \geq 1$ так, чтобы

$$\frac{y_1}{\pi} \int_{y_1}^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt > \omega(y_1)\,.$$

Затем выберем $y_2 > y_1 + 1$, для которого одновременно

$$\frac{y_1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt > \omega(y_1)\,, \quad \frac{y_2}{\pi} \int_{y_2}^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt > 2^2\omega(y_2)\,.$$

Продолжая этот процесс далее, получим возрастающую последовательность $(y_n)_{n=1}^\infty$ такую, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{y_n}{\pi} \int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt > n^2\omega(y_n)\,. \tag{1.2.9}$$

2) Положим

$$g(t) := \begin{cases} \omega(t)\,, & t \in [0, y_2]\,, \\ \dfrac{1}{n}\,\omega(t)\,, & t \in (y_n, y_{n+1}]\,,\ n \geq 2\,. \end{cases}$$

Так как $g(t) = o\big(\omega(t)\big)$ при $t \to \infty$, то по лемме 1.7 из [64] имеется функция $\sigma(t)$, удовлетворяющая $(\widetilde{\alpha})$, (β), (γ), (δ) и такая, что $g(t) = o\big(\sigma(t)\big)$ и $\sigma(t) = o\big(\omega(t)\big)$, $t \to \infty$.

Рассмотрим функцию $P_\sigma(z)$. Будем для удобства предполагать, что $g(t) \leq \sigma(t)$ при всех $t \geq 0$. Тогда на основании (1.1.6) и (1.2.9) при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$P_\sigma(iy_n) \geq \frac{y_n}{\pi} \int_{y_n}^\infty \frac{\sigma(t)}{t^2}\, dt \geq \frac{y_n}{\pi} \int_{y_n}^\infty \frac{g(t)}{t^2}\, dt \geq \frac{1}{n}\,\frac{y_n}{\pi} \int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt > n\omega(y_n).$$

Поскольку можно считать, что $\omega(y+1) \leq 2\omega(y)$ при всех $y \geq y_1$, то при каждом $n \in \mathbb{N}$ для $w \in [0,1]$

$$P_\sigma\big(i(y_n+w)\big) \geq P_\sigma(iy_n) > n\omega(y_n) \geq \frac{n}{2}\,\omega(y_n+1) \geq \frac{n}{2}\,\omega(y_n+w)\,. \qquad (1.2.10)$$

С другой стороны, так как для P_σ выполняется аналог неравенства (1.1.7) и так как $\sigma(x) = o\big(\omega(x)\big)$, а $P_\sigma(iy) = o(y)$, то

$$P_\sigma(x+iy) = o\big(\omega(x)+y\big)\,,\ x+iy \to \infty\,. \qquad (1.2.11)$$

Итак, $P_\sigma(z)$ — непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, удовлетворяющая (1.2.10) и (1.2.11).

3) В соответствии с известным результатом Р. С. Юлмухаметова о приближении субгармонических функций целыми [47, теорема 5], имеется целая функция $\mu(z)$ такая, что вне некоторого исключительного множества, которое может быть покрыто кружками $e_j = \{z : |z - z_j| < r_j\}$ с конечной общей суммой радиусов $\sum_j r_j$, выполняется оценка

$$\big|P_\sigma(z) - \ln|\mu(z)|\big| \leq C_1 \ln|z|\,.$$

На основании [24, лемма 1, замечание 2] кружки e_j можно считать попарно не пересекающимися.

Покажем, что μ принадлежит $M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$, но не является сильным мультипликатором. Понятно, что содержательным является только случай, когда множество кружков e_j бесконечно и $|z_j| \to \infty$. Имеем, что

$$|\mu(z)| \leq \exp(P_\sigma(z) + C_1 \ln|z|)\,,\ z \notin \bigcup_j e_j.$$

С учетом (1.2.11) и (γ) тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется $C_2 > 0$, при котором

$$|\mu(z)| \leq C_2 \exp(\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon|\operatorname{Im} z|)\,,\ z \notin \bigcup_j e_j.$$

Отсюда с помощью стандартных рассуждений, основанных на малости радиусов r_j кружков e_j и свойстве (1.1.2) функции ω, по принципу максимума модуля получаем, что эта же оценка верна во всей плоскости при соответствующем увеличении C_2. Значит, $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

С другой стороны,

$$|\mu(z)| \geq \exp(P_\sigma(z) - C_1 \ln |z|)\,,\ z \notin \bigcup_j e_j.$$

В силу малости r_j на отрезках $[iy_n, i(y_n+1)]$ имеются точки $i\widetilde{y}_n$, не принадлежащие $\bigcup_j e_j$, так что на основании (1.2.10) тогда

$$|\mu(i\widetilde{y}_n)| \geq \exp\left(\frac{n}{2}\,\omega(\widetilde{y}_n) - C_1 \ln \widetilde{y}_n\right).$$

Очевидно, это означает, что μ не может быть сильным мультипликатором пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. $\square$

1.3 Критерии сюръективности оператора свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа

Основными результатами параграфа, а также центральными результатами главы являются две следующие теоремы — критерии сюръективности оператора свертки T_μ в пространствах Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ УДФ нормального типа $p \in (0,\infty)$. Одновременно они представляют собой теоремы деления в пространствах $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ целых функций.

Здесь и всюду далее $\|z\| = \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\}$, $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$ для $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.3.1. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; μ — нетривиальный мультипликатор из $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$; T_μ — оператор свертки в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ с символом μ. Следующие утверждения эквивалентны:*

(A_1) *T_μ сюръективен на $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$;*

(B_1) *$\check{\mu}$ — делитель пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, т. е.*

$$f \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})\,,\ \frac{f}{\check{\mu}} \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow \frac{f}{\check{\mu}} \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C});$$

(C_1) *главный идеал $J := \operatorname{Im} \Lambda_{\check{\mu}} = \check{\mu} H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ замкнут в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$;*

(D_1) *$\forall \varepsilon > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists r_0 > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R}$ с $|x| \geq r_0\ \ \exists w \in \mathbb{C}$:*

$$|w - x| \leq \delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(w)| \geq e^{-\varepsilon\omega(w)};$$

(E_1) *$\forall \varepsilon > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists r_0 > 0 \,\big|\, \forall x \in \mathbb{R}$ с $|x| \geq r_0\ \exists t \in \mathbb{R}$ с $|t| > |x|$:*

$$|t - x| \leq \delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geq e^{-\varepsilon\omega(t)};$$

(F_1) $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_\varepsilon>0\,\big|\,\forall\delta\in(0,\delta_\varepsilon]$ $\exists r_0>0$ $\exists L>0$: *для каждой точки* $z\in\mathbb{C}$ *с* $|z|\geq r_0$ *найдется окружность* S_z, *содержащая точку* z *внутри себя и обладающая свойствами:*
(a) *если* $|\operatorname{Im} z|\leq\delta\omega(\operatorname{Re} z)$, *то для всех* $\zeta\in S_z$

$$\|\zeta-z\|\leq 6\delta\omega(\operatorname{Re} z)\,,\quad |\mu(\zeta)|\geq\exp\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta)\}\,;$$

(b) *если* $|\operatorname{Im} z|>\delta\omega(\operatorname{Re} z)$, *то для всех* $\zeta\in S_z$

$$\|\zeta-z\|\leq\Big(\frac{3}{4}+4\beta\Big)|\operatorname{Im} z|\,,\quad |\mu(\zeta)|\geq\exp\{-L|\operatorname{Im}\zeta|\}\,. \qquad (1.3.1)$$

Здесь $\beta\in\big(0,\frac{1}{32}\big]$ *— произвольно выбранное число.*

Теорема 1.3.2. *Пусть* ω *— весовая функция;* $p\in(0,\infty)$; $I=(-a,a)$ *— конечный интервал в* $\mathbb{R}$; μ *— нетривиальный мультипликатор из* $M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$; T_μ *— оператор свертки в пространстве* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ *с символом* μ. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(A_2) T_μ *сюръективен на* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$;

(B_2) $\check{\mu}$ *— делитель пространства* $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, *т. е.*

$$f\in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})\,,\ \frac{f}{\check{\mu}}\in H(\mathbb{C})\Rightarrow\frac{f}{\check{\mu}}\in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C});$$

(C_2) *главный идеал* $J:=\operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}=\check{\mu}H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *замкнут в* $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$;

(D_2) $\forall\varepsilon>0$ $\forall\delta>0$ $\exists r_0>0\,|\,\forall x\in\mathbb{R}$ *с* $|x|\geq r_0$ $\exists w\in\mathbb{C}$:

$$|w-x|\leq\delta\omega(x)\quad \text{и}\quad |\mu(w)|\geq e^{-\varepsilon\omega(w)};$$

(E_2) $\forall\varepsilon>0$ $\forall\delta>0$ $\exists r_0>0\,\big|\,\forall x\in\mathbb{R}$ *с* $|x|\geq r_0$ $\exists t\in\mathbb{R}$ *с* $|t|>|x|$:

$$|t-x|\leq\delta\omega(x)\quad \text{и}\quad |\mu(t)|\geq e^{-\varepsilon\omega(t)};$$

(F_2) $\forall\varepsilon>0$ $\forall\delta>0$ $\exists r_0>0$: *для каждой точки* $z\in\mathbb{C}$ *с* $|\operatorname{Re} z|\geq r_0$, $|imz|\leq\delta|\operatorname{Re} z|$ *найдется окружность* S_z *с радиусом* $R_z\leq\delta\omega(\operatorname{Re} z)+\delta|\operatorname{Im} z|$, *содержащая точку* z *внутри себя, для всех точек* ζ *которой выполняется неравенство*

$$|\mu(\zeta)|\geq\exp\big\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta)-\varepsilon|\operatorname{Im}\zeta|\big\}. \qquad (1.3.2)$$

Замечание. *Понятно, что в условии* (F_2) *оценку (1.3.2) можно заменить на следующую*

$$|\mu(\zeta)| \geq \exp\Big\{ -\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) - \varepsilon|\operatorname{Im} z|\Big\}. \tag{1.3.3}$$

Получаемое при этом условие будет эквивалентно (F_2).

Определение 1.3.1. *Символы* μ*, удовлетворяющие условиям* (D_1), (E_1) *и* (F_1) *теоремы 1.3.1 в случае* $I = \mathbb{R}$ *(или, соответственно, условиям* (D_2), (E_2) *и* (F_2) *теоремы 1.3.2 в случае конечного интервала) будем называть медленно убывающими относительно* ω *в нормальном смысле.*

Заметим, что в теореме 1.3.1 в условиях (D_1), (E_1) и (F_1), как и в (B_1), (C_1), конечно, на самом деле фигурирует функция $\check{\mu}$. Однако, поскольку указанные условия инвариантны относительно замены $-z$ на z, мы выписали их для самого символа μ. То же самое касается и теоремы 1.3.2.

Отметим также очевидную разницу в условиях (F_1) и (F_2): если в (F_1) окружности с оценками снизу на $|\mu|$ необходимо отдельно строить для точек, близко расположенных к действительной оси относительно ω, и отдельно для остальных точек, то в (F_2) фигурируют только первые точки. Связано это с тем, что в случае конечного интервала все функции $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ имеют нулевой тип при порядке 1, а значит, являются функциями вполне регулярного роста. Это позволяет сразу получить нужную оценку снизу для точек z с $|\operatorname{Im} z| > \delta\omega(\operatorname{Re} z)$.

Перейдем к доказательству основных результатов. Эквивалентность утверждений (A_1) и (C_1), а также (A_2) и (C_2) вытекает из общих результатов теории двойственности. Именно, в соответствии с [46, теорема 8.6.13, соотношение (с) на с. 705] оператор T_μ сюръективен тогда и только тогда, когда образ его сопряженного отображения $F^{-1} \circ \Lambda_{\check{\mu}} \circ F$ сильно замкнут в $\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)\big)'$. Последнее, очевидно, равносильно тому, что образ оператора $\Lambda_{\check{\mu}}$ замкнут в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Здесь $a \in (0, \infty]$.

Сформулируем функциональный критерий замкнутости образа J оператора $\Lambda_{\check{\mu}}$ в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Предложение 1.3.1. *Пусть* $p \in (0, \infty)$*;* $a \in (0, \infty]$*;* $p_n \uparrow p$*;* $a_n \uparrow a$*. Для нетривиального мультипликатора* μ *пространства* $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *следующие условия равносильны:*

(i_1) *образ J оператора $\Lambda_{\check{\mu}} : H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ замкнут в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$;*

(i_2) *$\Lambda_{\check{\mu}} : H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — топологический изоморфизм "в";*

(i_3) *если семейство $B \subset H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ таково, что множество $\check{\mu}B$ содержится и ограничено в некотором H_{ω,p_n,a_n}, то найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что B содержится и ограничено в H_{ω,p_m,a_m};*

(i_4) *для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{p_m\omega(z)+a_m|\operatorname{Im} z|}} \le C \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\check{\mu}(z) f(z)|}{e^{p_n\omega(z)+a_n|\operatorname{Im} z|}}\,,\ f \in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})\,.$$

Доказательство. $(i_1) \Rightarrow (i_2)$. Из теоремы единственности для аналитических функций следует, что оператор $\Lambda_{\check{\mu}} : H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ инъективен. Поскольку, как уже отмечалось выше, $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ является (DFS)-пространством, то по теореме Гротендника [40, Приложение 1 Д. А. Райкова, теорема 2] отображение $\Lambda_{\check{\mu}} : H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to \Lambda_{\check{\mu}}\big(H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})\big)$ открыто. Из сказанного заключаем, что $\Lambda_{\check{\mu}}$ — топологический изоморфизм "в".

Импликация $(i_2) \Rightarrow (i_1)$ тривиальна.

$(i_2) \Rightarrow (i_3)$. Пусть $\Lambda_{\check{\mu}} : H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — топологический изоморфизм "в". Тогда обратный оператор $\Lambda^{-1}_{\check{\mu}} : \Lambda_{\check{\mu}}\big(H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})\big) \to H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ непрерывен и, следовательно, переводит ограниченные множества в ограниченные. Поскольку $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — (DFS)-пространство, то в нем множество ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится и ограничено в некотором H_{ω,p_m,a_m}. Отсюда легко получаем (i_3).

$(i_3) \Rightarrow (i_2)$. Эта импликация стандартным образом вытекает из леммы А. Баернстейна [55].

Остается заметить, что (i_4) — это лишь другая форма записи условия (i_3). □

Доказательство теоремы 1.3.1 будет проводиться по схеме:

$$(C_1) \Rightarrow (D_1) \Rightarrow (E_1) \Rightarrow (F_1) \Rightarrow (B_1),$$

поскольку импликация $(B_1) \Rightarrow (C_1)$ носит общий характер, а эквивалентность условий (A_1) и (C_1) уже была отмечена выше. Затем аналогично будет доказана и теорема 1.3.2. Для удобства доказательства разбиты на отдельные предложения.

В силу соотношений (1.1.9), доказательства достаточно провести в случае $p = 1$.

Основополагающую роль при доказательстве основных результатов играет следующая лемма.

Лемма 1.3.1. *Пусть* $u(z) := |\operatorname{Im} z|$; $b \in \mathbb{R}$; $R > 0$; $K_{b,R} := \{z \in \mathbb{C} : |z - b| < R\}$. *Тогда функция* $U(z)$, *определяемая равенством*

$$U(z) = \begin{cases} u(z)\,, & \text{если } |z-b| \ge R\,, \\ \dfrac{R^2 - r^2}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{u(b + Re^{i\theta})\,d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)}\,, & \text{если } z = b + re^{i\varphi}, \\ & 0 \le r < R,\ \varphi \in [0, 2\pi), \end{cases}$$

непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$, *гармонична в* $K_{b,R}$ *и обладает следующими свойствами:*

(a) $U(b) = \dfrac{2}{\pi} R$;

(b) $U(b - r) = U(b + r) < \dfrac{2}{\pi} R$ *при всех* $r \in (0, R)$;

(c) $U(z) \le \dfrac{2}{\pi} R + |\operatorname{Im} z|$ *для любых* $z \in K_{b,R}$.

Доказательство. Функция $U(z)$ получена из субгармонической в $\mathbb{C}$ функции $u(z)$ за счет выметания масс на границу круга $K_{b,R}$. Поэтому $U(z)$ субгармонична в $\mathbb{C}$ и гармонична в $K_{b,R}$. Равенство (a) получается прямым подсчетом из определения $U(z)$:

$$U(b) = \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\operatorname{Im}(b + R\,e^{i\theta})|}{R^2}\,d\theta = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin\theta|\,d\theta = \frac{2}{\pi} R.$$

Докажем (b). Пусть $r \in (0, R)$. Легко видеть, что

$$U(b \pm r) = \frac{R^2 - r^2}{\pi r} \ln \frac{R + r}{R - r}.$$

Отсюда, использовав, что $\ln \frac{t+1}{t-1} < \frac{2t}{t^2-1}$ при всех $t > 1$, получаем требуемое.

Чтобы доказать (c), заметим, что на окружности $|z - b| = R$ выполняется равенство $U(z) = |\operatorname{Im} z|$, а на интервале действительной оси $(b - R, b + R)$ — неравенство (b). Следовательно, всюду на границе как верхнего, так и нижнего полукруга $U(z) < \frac{2}{\pi} R + |\operatorname{Im} z|$ или $U(z) - |\operatorname{Im} z| < \frac{2}{\pi} R$. Так как функция $U(z) - |\operatorname{Im} z|$ гармонична в обоих этих полукругах, то по принципу максимума $U(z) - |\operatorname{Im} z| < \frac{2}{\pi} R$ всюду в $K_{b,R}$. □

Для доказательства также потребуется известная теорема об оценке снизу модуля аналитической в круге функции (см. [29, гл. 1, теорема 11]). Приведем ее в удобной для нас форме из [91, лемма 2].

Лемма 1.3.2. *Пусть $0 < r < R$ и $b \in \mathbb{C}$. Предположим, что функция F аналитична в круге $|z - b| \le 2eR$ и $F(b) \ne 0$. Тогда существует ρ с $r < \rho < R$ такое, что*

$$\min_{|\zeta - b| = \rho} |F(\zeta)| \ge |F(b)|^{H+1} \big(\max_{|\zeta - b| = 2eR} |F(\zeta)| \big)^{-H},$$

где $H := 2 + \ln \Big(24e / \big(1 - \frac{r}{R}\big) \Big)$.

Предложение 1.3.2. $(C_1) \Rightarrow (D_1)$.

Доказательство. Как уже говорилось выше, будем рассматривать случай $p = 1$. Возьмем последовательность $0 < p_n \uparrow 1$. Пусть образ оператора $\Lambda_{\check{\mu}} : H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ замкнут. Предположим, что условие (D_1) не выполняется. Тогда, очевидно, найдутся числа $\varepsilon_0, \delta_0 \in (0, 1)$ и последовательность $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ вещественных чисел с $|b_j| \uparrow \infty$ такие, что для каждого $j \in \mathbb{N}$

$$|\mu(w)| < e^{-\varepsilon_0 \omega(w)} \text{ для любого } w \in \mathbb{C} \, : \, |w - b_j| \le \delta_0 \omega(b_j) \, . \tag{1.3.4}$$

Для определенности предположим, что $b_j > 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Будем считать, на ограничивая общности, что $\delta_0 < \frac{1}{2A}$, где постоянная A определяется условием (1.1.1), и что

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\omega(t)}{\omega\big((1 - \frac{\delta_0 A}{2})t\big)} < 1 + \frac{\varepsilon_0}{2}$$

(последнее возможно в силу (1.1.3)). Тогда существует такое $t_0 > 0$, что

$$\omega(t) \le \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\Big) \omega\Big(\Big(1 - \frac{\delta_0 A}{2}\Big)t\Big) \, , \; t \ge t_0 \, .$$

Проредим, если это необходимо, последовательность $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ и, не меняя обозначений, будем предполагать, что $b_1 > t_0$ и $b_{j+1} > 3b_j$ $(j \in \mathbb{N})$. Первое неравенство обеспечит то, что

$$\omega(b_j) \le \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\Big) \omega\Big(\Big(1 - \frac{\delta_0 A}{2}\Big)b_j\Big) \, , \; j \in \mathbb{N} \, , \tag{1.3.5}$$

а второе — то, что круги $|w-b_j| \le \delta_0\omega(b_j)$, $j \in \mathbb{N}$, в которых имеется быстрое относительно ω убывание мультипликатора μ (см. оценки (1.3.4)) не будут пересекаться. Действительно, так как $\delta_0 < \dfrac{1}{2A}$, то

$$b_{j+1} - \delta_0\omega(b_{j+1}) - (b_j + \delta_0\omega(b_j)) \ge b_{j+1} - b_j - \delta_0 A(b_{j+1} + b_j) \ge$$

$$\ge (b_{j+1} - b_j) - \frac{1}{2}\,(b_{j+1} + b_j) = \frac{1}{2}\,(b_{j+1} - 3b_j) > 0\,.$$

1) Осуществляем процедуру выметания масс для субгармонической функции $u(z) = \frac{\pi}{\delta_0}\,|\mathrm{Im}\,z|$ и круга K_{b_j,R_j}, где $R_j = \frac{\delta_0}{2}\,\omega(b_j)$. В результате в соответствии с леммой 1.3.1 получим функцию U_j, непрерывную и субгармоническую в $\mathbb{C}$, гармоническую в K_{b_j,R_j} и удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned}
&U_j(z) = \frac{\pi}{\delta_0}\,|\mathrm{Im}\,z|\,, \quad \text{если } |z-b_j| \ge R_j\,;\\
&U_j(b_j) = \omega(b_j)\,;\\
&U_j(z) \le \omega(b_j) + \frac{\pi}{\delta_0}\,|\mathrm{Im}\,z|\,, \quad \text{если } |z-b_j| < R_j\,.
\end{aligned}$$

Тогда, так как в силу (1.3.5) при всех $z \in \mathbb{C}$ с $|z-b_j| < R_j$

$$\Big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\omega(z) \ge \Big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\omega(b_j - R_j) = \Big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\omega\Big(b_j - \frac{\delta_0}{2}\,\omega(b_j)\Big) \ge$$
$$\ge \Big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\omega\Big(\Big(1-\frac{\delta_0 A}{2}\Big)b_j\Big) \ge \omega(b_j)\,,$$

то

$$U_j(z) \le \Big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}\,|\mathrm{Im}\,z|\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.3.6}$$

2) Использовав лемму 1 из [3] (она является уточнением леммы 4 из [1]), по субгармонической функции $U_j(z)$ и точке b_j построим целую функцию f_j такую, что

$$f_j(b_j) = \exp U_j(b_j) = \exp\omega(b_j)\,; \tag{1.3.7}$$

$$|f_j(z)| \le \widetilde{A}(1+|z|^2)^2 \exp U_j^1(z)\,,\ z \in \mathbb{C}\,, \tag{1.3.8}$$

где $U_j^1(z) := \sup\limits_{|w|\le 1} U_j(z+w)$, а $\widetilde{A}$ — абсолютная постоянная, которая от j не зависит.

Заметим, что в силу условия (γ) на вес ω найдется $\widetilde{C} > 0$ такое, что

$$(1+|z|^2)^2 \le \widetilde{C} \exp\frac{\varepsilon_0}{4}\omega(z)\,,\ z \in \mathbb{C}\,, \tag{1.3.9}$$

и продолжим оценку (1.3.8) отдельно для $z \in K_{b_j,2R_j}$ и $z \notin K_{b_j,2R_j}$. Без ограничения общности будем далее предполагать, что $R_1 = \dfrac{\delta_0}{2}\,\omega(b_1) > 1$. Тогда все $R_j > 1$, и, значит, $K_{b_j,2R_j}$ содержит 1-расширение K_{b_j,R_j}.

а) Если $|z-b_j| \geq 2R_j$, то для всех w с $|w| \leq 1$ точка $z+w$ находится вне K_{b_j,R_j}, так что

$$U_j(z+w) = \frac{\pi}{\delta_0}\,|\mathrm{Im}\,(z+w)| \leq \frac{\pi}{\delta_0}\,(|\mathrm{Im}\,z|+1)$$

и, соответственно, $U_j^1(z) \leq \frac{\pi}{\delta_0}\,(|\mathrm{Im}\,z|+1)$. Подставляя эту оценку и (1.3.9) в (1.3.8), получаем, что

$$|f_j(z)| \leq C_1 \exp\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\,\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}\,|\mathrm{Im}\,z|\right),\ |z-b_j| \geq 2R_j\,, \tag{1.3.10}$$

где $C_1 := \widetilde{A}\,\widetilde{C}\exp\dfrac{\pi}{\delta_0}$.

б) В случае, когда $|z-b_j| < 2R_j$, воспользуемся оценкой (1.3.6) и неравенством (1.1.2). Для $w \in \mathbb{C}$ с $|w| \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} U_j(z+w) \leq & \big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\big)\omega(z+w) + \frac{\pi}{\delta_0}\,|\mathrm{Im}\,(z+w)| \leq \\ \leq & \big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\big)\omega(|z|+1) + \frac{\pi}{\delta_0}\,\big(|\mathrm{Im}\,z|+1\big) \leq \\ \leq & \big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\big)\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}|\mathrm{Im}\,z| + \big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\big)A\,e^2 + \frac{\pi}{\delta_0}\,. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (1.3.8) и снова используя (1.3.9), получаем

$$|f_j(z)| \leq C_2 \exp\left(\Big(1+\frac{3\varepsilon_0}{4}\Big)\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}\,|\mathrm{Im}\,z|\right),\ |z-b_j| < 2R_j\,, \tag{1.3.11}$$

где $C_2 := \widetilde{A}\,\widetilde{C}\exp\left(\Big(1+\dfrac{\varepsilon_0}{2}\Big)A\,e^2 + \dfrac{\pi}{\delta_0}\right)$.

3) Покажем, что для семейства $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ нарушается условие (i_3) критерия замкнутости в $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ образа $\mathrm{Im}\,\Lambda_{\check{\mu}}$ (см. предложение 1.3.1).

В первую очередь, заметим, что из (1.3.10) следует, что $f_j \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Далее, в силу (1.3.7) для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{\omega,p_m,m} = & \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f_j(z)|}{\exp\big(p_m\omega(z)+m|\mathrm{Im}\,z|\big)} \geq \frac{|f_j(b_j)|}{\exp p_m\omega(b_j)} = \\ = & \exp\big((1-p_m)\omega(b_j)\big) \to +\infty \text{ при } j\to\infty\,. \end{aligned}$$

Поэтому семейство $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ не ограничено ни в одном $H_{\omega,p_m,m}$.

Рассмотрим теперь семейство $\{\check{\mu} f_j \,:\, j \in \mathbb{N}\}$. Так как $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то найдутся $C_3 > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|\check{\mu}(z)| \le C_3 \exp\big(\frac{\varepsilon_0}{4}\,\omega(z) + n_0|\mathrm{Im}\, z|\big) \text{ при всех } z \in \mathbb{C}\,.$$

Тогда с учетом (1.3.10)

$$|\check{\mu}(z) f_j(z)| \le C_1\, C_3 \exp\Big(\frac{\varepsilon_0}{2}\,\omega(z) + \Big(n_0 + \frac{\pi}{\delta_0}\Big)|\mathrm{Im}\, z|\Big)\,,\ |z - b_j| \ge 2R_j = \delta_0\omega(b_j)\,,$$

а с учетом (1.3.4) и (1.3.11)

$$|\check{\mu}(z) f_j(z)| \le C_2 \exp\Big(\Big(1 - \frac{\varepsilon_0}{4}\Big)\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}\,|\mathrm{Im}\, z|\Big)\,,\ |z - b_j| < \delta_0\omega(b_j)\,.$$

Выбрав номер n так, чтобы $p_n > 1 - \frac{\varepsilon_0}{4}$ и $n > n_0 + \frac{\pi}{\delta_0}$, получим отсюда, что при каждом $j \in \mathbb{N}$

$$|\check{\mu}(z) f_j(z)| \le C \exp\big(p_n\omega(z) + n|\mathrm{Im}\, z|\big)\,,\ z \in \mathbb{C}\,,$$

где $C := \max\{C_1\, C_3, C_2\}$. Значит, семейство $\big\{\check{\mu} f_j \,:\, j \in \mathbb{N}\big\}$ ограничено в $H_{\omega,p_n,n}$.

Таким образом, не выполнено условие (i_3) предложения 1.3.1, что противоречит замкнутости $\mathrm{Im}\,\Lambda_{\check{\mu}}$ в $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. □

Предложение 1.3.3. $(D_1) \Rightarrow (E_1)$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ и возьмем какое-нибудь $\gamma \in \big(0, \frac{\varepsilon}{8KH}\big)$, где константа K определяется условием $(\widetilde{\alpha})$, а $H := 3 + \ln 48$. Поскольку $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то найдутся $C > 0$ и $l > 0$ такие, что

$$|\mu(z)| \le C\, \exp\big\{\gamma\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z|\big\}\,,\ z \in \mathbb{C}. \tag{1.3.12}$$

Далее, выберем положительные числа ε_1 и δ_1 так, чтобы

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{8(H+1)}\,,\quad \delta_1 < \min\Big\{\frac{\varepsilon}{2Hl(1+4e)}\,, \frac{\delta}{3}\,, \frac{1}{4eA}\Big\}\,.$$

В силу (D_1) для ε_1 и δ_1 найдется такое $r_0 > 0$, что если $x \in \mathbb{R}$ и $|x| \ge r_0$, то имеется $w \in \mathbb{C}$, для которого

$$|w - x| \le \delta_1\omega(x) \text{ и } |\mu(w)| \ge e^{-\varepsilon_1\omega(w)}\,. \tag{1.3.13}$$

Обозначим для удобства $|w-x| =: r$, $r \le \delta_1\omega(x)$.

Применим к функции μ лемму 1.3.2, взяв данное r, $R = 2r$ и точку w в качестве b. Получим, что при некотором ρ, $r < \rho < 2r$,

$$\min_{|\zeta-w|=\rho} |\mu(\zeta)| \ge |\mu(w)|^{H+1}\Big(\max_{|\xi-w|=4er} |\mu(\xi)|\Big)^{-H}.$$

Окружность $|\zeta - w| = \rho$ пересекает действительную ось в двух точках. Обозначим большую из них по модулю через t. Тогда $|t| > |x|$, так что

$$r \le \delta_1\omega(x) \le \delta_1\omega(t).$$

Покажем, что данная точка t является искомой. Действительно, первое из двух нужных в (E_1) неравенств уже выполнено:

$$|t-x| \le |t-w| + |w-x| = \rho + r < 3r \le 3\delta_1\omega(x) < \delta\omega(x).$$

Установим теперь второе неравенство. Имеем, что

$$|\mu(t)| \ge |\mu(w)|^{H+1}\Big(\max_{|\xi-w|=4er} |\mu(\xi)|\Big)^{-H}. \tag{1.3.14}$$

Из геометрических соображений ясно, что $|w| \le |t|$, так что $\omega(w) \le \omega(t)$ и, соответственно,

$$|\mu(w)| \ge e^{-\varepsilon_1\omega(t)}. \tag{1.3.15}$$

Далее, пусть ξ таково, что $|\xi - w| = 4er$. Имеем, что

$$|\xi| \le |w| + |w-\xi| = |w| + 4er \le |t| + 4e\delta_1\omega(t) \le (1 + 4e\delta_1 A)|t| \le 2|t|,$$

а

$$|\operatorname{Im}\xi| \le |\operatorname{Im} w| + 4er \le r + 4er \le (1+4e)\delta_1\omega(t).$$

Поэтому

$$\omega(\xi) \le 2K\omega(t) + K,$$

так что из (1.3.12) следует, что

$$|\mu(\xi)| \le C_1 \exp\big\{(2K\gamma + (1+4e)\delta_1 l)\omega(t)\big\},$$

где $C_1 := Ce^{K\gamma}$. Подставляя последнюю оценку и (1.3.15) в (1.3.14), заключаем, что

$$|\mu(t)| \ge C_2 \exp\big\{-(\varepsilon_1(H+1) + 2K\gamma H + (1+4e)\delta_1 l H)\omega(t)\big\},$$

где $C_2 := C_1^{-H}$. В силу выбора чисел ε_1, δ_1 и γ,

$$\varepsilon_1(H+1) < \frac{\varepsilon}{8}\,,\ \ 2K\gamma H < \frac{\varepsilon}{4}\,,\ \ (1+4e)\delta_1 lH < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$|\mu(t)| \geq C_2 e^{-\frac{7\varepsilon}{8}\omega(t)}.$$

Увеличив при необходимости r_0, получаем тогда, что $|\mu(t)| \geq e^{-\varepsilon\omega(t)}$. □

Предложение 1.3.4. *Если мультипликатор $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (E_1), то*

$(\widetilde{F}_1)$ $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta_\varepsilon > 0 \,|\, \forall\delta \in (0,\delta_\varepsilon)\ \ \exists r_0 > 0\ \ \exists L > 0\ \ \exists c > 0:$ *для любого $z \in \mathbb{C}$ с $|z| \geq r_0$ найдется окружность S_z, содержащая точку z внутри себя и обладающая следующими свойствами:*

(a) если $|\operatorname{Im} z| \leq \delta\omega(\operatorname{Re} z)$, то для всех $\zeta \in S_z$

$$|\operatorname{Re}\zeta - \operatorname{Re} z| \leq 6\delta\omega(\operatorname{Re} z)\,,\ |\operatorname{Im}\zeta| \leq 6\delta\omega(\operatorname{Re} z) \quad \textit{и} \quad |\mu(\zeta)| \geq ce^{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta)}; \tag{1.3.16}$$

(b) если $|\operatorname{Im} z| > \delta\omega(\operatorname{Re} z)$, то для всех $\zeta \in S_z$

$$|\operatorname{Re}\zeta - \operatorname{Re} z| \leq |\operatorname{Im} z|\,,\ |\operatorname{Im}\zeta - \operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Im} z| \quad \textit{и} \quad |\mu(\zeta)| \geq ce^{-L|\operatorname{Im}\zeta|}. \tag{1.3.17}$$

Здесь β — произвольно выбранное число из $\left(0, \frac{1}{16}\right]$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть, как и выше, $H := 3 + \ln 48$, а константы A и K определяются условиями (1.1.1) и $(\widetilde{\alpha})$. Возьмем γ так, чтобы $0 < \gamma < \frac{\varepsilon}{4H(2K^2+K)}$ и найдем для мультипликатора μ числа C и l такие, что

$$|\mu(w)| \leq C\, \exp\left\{\gamma\omega(\operatorname{Re} w) + l|\operatorname{Im} w|\right\}\,,\ w \in \mathbb{C}\,. \tag{1.3.18}$$

Пусть $\delta_\varepsilon := \min\left\{\frac{\varepsilon}{64KHel}\,,\, \frac{1}{8eA}\right\}$, а $\delta < \delta_\varepsilon$. Далее, выберем ε_1 так, чтобы $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{8K(H+1)}$, и в соответствии с (E_1) найдем по ε_1 и δ такое r_0, что для любого $x \in \mathbb{R}$ с $|x| \geq r_0$ существует $t \in \mathbb{R}$ с $|t| > |x|$, для которого

$$|t - x| \leq \delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geq e^{-\varepsilon_1\omega(t)}\,. \tag{1.3.19}$$

Зафиксируем произвольное $z = x + iy \in \mathbb{C}$ и предположим сначала, что $|x| \geq r_0$. Тогда для этого x имеется $t \in \mathbb{R}$ с $|t| > |x|$, для которого выполняется (1.3.19). Обозначив $r := |z - t|$, получим, что

$$r \leq |y| + |t - x| \leq |y| + \delta\omega(x).$$

Рассмотрим отдельно два случая.

I. $|y| \le \delta\omega(x)$. Тогда

$$r \le 2\delta\omega(x) \le 2\delta\omega(t) \le 2\delta A|t| \le \frac{1}{4e}\,|t|\,. \tag{1.3.20}$$

Применив лемму 1.3.2 к функции μ, данному r, $R = 2r$ и точке t в качестве b, найдем ρ, $r < \rho < 2r$, такое, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta - t| = \rho$ справедливо неравенство

$$|\mu(\zeta)| \ge |\mu(t)|^{H+1}\Big(\max_{|\xi-t|=4er}|\mu(\xi)|\Big)^{-H}. \tag{1.3.21}$$

Покажем, что в данной ситуации в качестве S_z можно взять окружность $\{\zeta : |\zeta - t| = \rho\}$. Ясно, что z лежит внутри нее. Рассмотрим любое $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta - t| = \rho$. Заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Re}\,\zeta - x| \le |\mathrm{Re}\,\zeta - t| + |t - x| \le \rho + r \le 3r \le 6\delta\omega(x)\,,\\
&|\mathrm{Im}\,\zeta| \le \rho \le 2r \le 4\delta\omega(x) \le 6\delta\omega(x)\,,
\end{aligned}$$

т. е. первые два неравенства в $(\widetilde{F}_1)(a)$ выполнены. Остается доказать третье неравенство в $(\widetilde{F}_1)(a)$.

Сначала оценим $|\mu(t)|$ через $\omega(\mathrm{Re}\,\zeta)$. Так как с учетом (1.3.20)

$$|\mathrm{Re}\,\zeta| \ge |t| - \rho \ge |t| - 2r \ge |t| - \frac{|t|}{2} = \frac{|t|}{2}\,,$$

то $|t| \le 2|\mathrm{Re}\,\zeta|$ и $\omega(t) \le 2K\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) + K$. Поэтому из второго неравенства в (1.3.19) получаем, что

$$|\mu(t)| \ge C_1 e^{-2\varepsilon_1 K\omega(\mathrm{Re}\,\zeta)}\,, \tag{1.3.22}$$

где $C_1 := e^{-\varepsilon_1 K}$.

Теперь оценим $|\mu(\xi)|$, когда $|\xi - t| = 4er$. Используя (1.3.20) и оценку $|t| \le 2|\mathrm{Re}\,\zeta|$, имеем:

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Re}\,\xi| \le |t| + 4er \le 2|t| \le 4|\mathrm{Re}\,\zeta|\,,\\
&|\mathrm{Im}\,\xi| \le 4er \le 8e\delta\omega(t) \le 8e\delta\omega(2\mathrm{Re}\,\zeta) \le 8e\delta K\big(2\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) + 1\big)\,.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega(\mathrm{Re}\,\xi) \le \omega(4\mathrm{Re}\,\zeta) \le 4K^2\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) + 2K^2 + K\,,$$

так что из (1.3.18) получаем, что

$$|\mu(\xi)| \le C_2 \exp\left\{4K(\gamma K + 4e\delta l)\omega(\operatorname{Re}\zeta)\right\}, \tag{1.3.23}$$

где $C_2 := C\ \exp\{\gamma(2K^2+K)+8e\delta Kl\}$.

Подставляя (1.3.22) и (1.3.23) в (1.3.21), приходим к окончательной оценке для $|\mu(\zeta)|$ снизу

$$|\mu(\zeta)| \ge C_3 \exp\left\{-2K((H+1)\varepsilon_1 + 2\gamma KH + 8e\delta lH)\omega(\operatorname{Re}\zeta)\right\},$$

где $C_3 := C_1^{H+1}C_2^{-H}$. Поскольку

$$2K(H+1)\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{4},\ \ 4\gamma K^2 H < \frac{\varepsilon}{2},\ \ 16e\delta KlH < \frac{\varepsilon}{4},$$

получаем, что

$$|\mu(\zeta)| \ge C_3 e^{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta)}.$$

II. $|y| > \delta\omega(x)$. В этом случае нам придется применять лемму об оценке снизу минимума модуля аналитической функции дважды. Связано это с тем, что в первый раз окружность получается слишком большого радиуса (из-за большого $|y|$), так что для точек ζ этой окружности $|\operatorname{Re}\zeta|$ и $|\operatorname{Re}z|$ могут сильно отличаться. Поскольку это недопустимо в случае пространств нормального типа, приходится применять лемму второй раз и строить другую окружность.

Заметим, что в данном случае

$$r \le |y| + \delta\omega(x) \le 2|y|. \tag{1.3.24}$$

Возьмем какое-нибудь β с $0 < \beta \le \dfrac{1}{32}$. По лемме 1.3.2 для функции μ, чисел r, $R = (1+\beta)r$ и точки t найдем ρ, $r < \rho < (1+\beta)r$, такое, что для всех $Z \in \mathbb{C}$ с $|Z-t| = \rho$ выполняется неравенство

$$|\mu(Z)| \ge |\mu(t)|^{H_1+1}\left(\max_{|\xi-t|=2e(1+\beta)r}|\mu(\xi)|\right)^{-H_1}, \tag{1.3.25}$$

где $H_1 = 3 + \ln\dfrac{24(1+\beta)}{\beta}$.

На окружности $|Z-t| = \rho$ возьмем точку w такую, что $\arg(w-t) = \arg(z-t)$. Для нее, в частности, выполняется (1.3.25). Кроме того,

$$|y| < |\operatorname{Im}w| < (1+\beta)|y|,\ \ |\operatorname{Re}w| \le |x| \tag{1.3.26}$$

(последнее неравенство следует из того, что $|x| \leq |t|$ и элементарных геометрических соображений). Применив лемму 1.3.2 к функции μ, числам $r_1 = \beta r$, $R_1 = 2r_1$ и точке w, найдем ρ_1, $r_1 < \rho_1 < 2r_1$, такое, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta - w| = \rho_1$ имеет место неравенство

$$|\mu(\zeta)| \geq |\mu(w)|^{H+1} \Big(\max_{|\xi - w| = 4er_1} |\mu(\xi)| \Big)^{-H}.$$

Подставляя сюда оценку (1.3.25) с $Z = w$, имеем для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta - w| = \rho_1$

$$|\mu(\zeta)| \geq |\mu(t)|^{(H+1)(H_1+1)} \cdot A_1^{-H_1(H+1)} \cdot A_2^{-H}, \tag{1.3.27}$$

где

$$A_1 := \max_{|\xi - t| = 2e(1+\beta)r} |\mu(\xi)|, \ \ A_2 := \max_{|\xi - w| = 4er_1} |\mu(\xi)|.$$

Покажем, что окружность $S_z = \{\zeta : |\zeta - w| = \rho_1\}$ является искомой в рассматриваемом случае. Во-первых,

$$|z - w| = \rho - r < \beta r = r_1 < \rho_1.$$

Поэтому z лежит внутри S_z. Во-вторых, из-за (1.3.24) и выбора β при всех $\zeta \in S_z$

$$|\zeta - z| \leq |\zeta - w| + |w - z| < \rho_1 + r_1 < 3r_1 = 3\beta r \leq 6\beta|y| < |y|,$$

так что оба первых неравенства в $(\widetilde{F}_1)(b)$ выполняются. Остается получить из (1.3.27) третье неравенство в $(\widetilde{F}_1)(b)$.

Сначала оценим $|\mu(t)|$ снизу. Так как в силу (1.3.19), (1.1.1) и выбора δ

$$|t| \leq |x| + |t - x| \leq |x| + \delta\omega(x) \leq (1 + A\delta)|x| \leq 2|x|,$$

то с учетом $(\widetilde{\alpha})$ в рассматриваемом случае

$$\omega(t) \leq \omega(2x) \leq 2K\omega(x) + K \leq \frac{2K}{\delta}|y| + K.$$

С другой стороны, если $\zeta \in S_z$, то, использовав (1.3.24) и выбор β, получим

$$|\operatorname{Im}\zeta| \geq |\operatorname{Im} w| - \rho_1 \geq |y| - 2r_1 = |y| - 2\beta r \geq |y| - 4\beta|y| \geq \frac{|y|}{2}.$$

Следовательно,

$$\omega(t) \leq \frac{4K}{\delta}|\operatorname{Im}\zeta| + K.$$

Отсюда и из (1.3.19) заключаем, что

$$|\mu(t)| \geq C_4 \exp\Big\{-\frac{4K\varepsilon_1}{\delta}\,|\mathrm{Im}\,\zeta|\Big\}, \tag{1.3.28}$$

где $C_4 = e^{-\varepsilon_1 K}$.

Теперь оценим $|\mu(\xi)|$ при $|\xi - t| = 2e(1+\beta)r$. Использовав установленные выше неравенства $|t| \leq 2|x|$, $r \leq 2|y|$ и $|y| \leq 2|\mathrm{Im}\,\zeta|$, получим, что

$$|\mathrm{Re}\,\xi| \leq |t| + 2e(1+\beta)r \leq 2|x| + 4e(1+\beta)|y| \leq 2|x| + 8e|y|, \tag{1.3.29}$$

$$|\mathrm{Im}\,\xi| \leq 2e(1+\beta)r \leq 8e|y| \leq 16e|\mathrm{Im}\,\zeta|. \tag{1.3.30}$$

Пусть константа K_1 такова, что

$$\omega(2s+8e\eta) \leq K_1\big(\omega(s)+\omega(\eta)+1\big)\,,\ \ s,\eta \geq 0.$$

Существование K_1 следует из $(\widetilde{\alpha})$. Тогда в силу (1.3.29) и (1.1.1)

$$\omega(\mathrm{Re}\,\xi) \leq K_1\big(\omega(x)+\omega(y)+1\big) \leq K_1\Big(\frac{1}{\delta}\,|y|+A|y|+1\Big) \leq 2K_1\Big(\frac{1}{\delta}+A\Big)|\mathrm{Im}\,\zeta|+K_1\,.$$

Подставив эту оценку и (1.3.30) в (1.3.18), будем иметь, что

$$|\mu(\xi)| \leq C\exp\big\{\gamma\omega(\mathrm{Re}\,\xi)+l|\mathrm{Im}\,\xi|\big\} \leq C_5\exp\big\{(2\gamma K_1(1/\delta+A)+16el)|\mathrm{Im}\,\zeta|\big\}\,,$$

где $C_5 := Ce^{K_1}$. Поэтому

$$A_1 \leq C_5\exp\{(2\gamma K_1(1/\delta+A)+16el)|\mathrm{Im}\,\zeta|\}. \tag{1.3.31}$$

Наконец, рассмотрим $|\mu(\xi)|$, если $|\xi - w| = 4er_1 = 4e\beta r$. Используя оценки (1.3.26), имеем:

$$|\mathrm{Re}\,\xi| \leq |\mathrm{Re}\,w| + 4e\beta r \leq |x| + 4e\beta r \leq |x| + e|y|\,,$$

$$|\mathrm{Im}\,\xi| \leq |\mathrm{Im}\,w| + 4e\beta r \leq (1+\beta)|y| + 8e\beta|y| \leq 4|y| \leq 8|\mathrm{Im}\,\zeta|\,.$$

Отсюда, учитывая выбор K_1, аналогично предыдущему получаем, что

$$\omega(\mathrm{Re}\,\xi) \leq 2K_1\Big(\frac{1}{\delta}+A\Big)|\mathrm{Im}\,\zeta| + K_1\,,$$

и (1.3.18) дает, что

$$|\mu(\xi)| \leq C\,\exp\big\{\gamma\omega(\mathrm{Re}\,\xi)+l|\mathrm{Im}\,\xi|\big\} \leq C_5\,\exp\big\{(2\gamma K_1(1/\delta+A)+8l)|\mathrm{Im}\,\zeta|\big\}\,.$$

Значит,

$$A_2 \leq C_5 \, \exp\left\{(2\gamma K_1(1/\delta + A) + 8l)|\mathrm{Im}\,\zeta|\right\}. \tag{1.3.32}$$

Подставляя (1.3.31), (1.3.32) и (1.3.28) в (1.3.27), окончательно получаем:

$$|\mu(\zeta)| \geq C_6 \, e^{-L|\mathrm{Im}\,\zeta|}, \tag{1.3.33}$$

где

$$C_6 = C_4^{(H+1)(H_1+1)} \cdot C_5^{-H_1 H - H - H_1},$$

$$L = \frac{4K\varepsilon_1}{\delta}\,(H+1)(H_1+1) + 2\gamma K_1\Big(\frac{1}{\delta} + A\Big)(H_1 H + H + H_1) + 16elH_1(H+1) + 8lH\,.$$

Заметим, что C_6 и L зависят от ε и δ, но не зависят от z.

Итак, мы доказали выполнение условия $(\widetilde{F}_1)$ для $z = x + iy$ с $|x| \geq r_0$. Остается проверить его для достаточно больших по модулю z с $|x| < r_0$.

Пусть $z = x + iy$, $|x| < r_0$, $|z| \geq 5r_0$. Тогда $|y| \geq 4r_0$ и

$$\delta\omega(x) \leq \delta A x \leq \delta_\varepsilon A x \leq \frac{1}{8e}\, r_0 < |y|\,,$$

так что для данной точки z мы должны строить такую окружность, как в $(\widetilde{F}_1)(b)$. Положим $z_0 := r_0 \mathrm{sgn}\, x + iy$. Для нее также

$$\delta\omega(\mathrm{Re}\, z_0) \leq \frac{1}{8e}\, r_0 < |y| = |\mathrm{Im}\, z_0|\,,$$

причем $|\mathrm{Re}\, z_0| = r_0$. Следовательно, для z_0 применимы все рассуждения из пункта II. На первом шаге, как и выше, по $x_0 := r_0 \mathrm{sgn}\, x$ находится точка t, а по ней, в свою очередь, — точка w. Второй шаг мы несколько модифицируем, применив лемму 1.3.2 к функции μ, числам $r_2 := r_0 + \beta r$, $R_2 = 2r_2$ и точке w (здесь $r = |z_0 - t|$). В результате получим число ρ_2, $r_2 < \rho_2 < 2r_2$, такое, что при всех ζ с $|\zeta - w| = \rho_2$

$$|\mu(\zeta)| \geq |\mu(w)|^{H+1} \Big(\max_{|\xi - w| = 4er_2} |\mu(\xi)| \Big)^{-H}.$$

С учетом (1.3.25) тогда имеем, что для любых ζ с $|\zeta - w| = \rho_2$ справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \geq |\mu(t)|^{(H+1)(H_1+1)} A_1^{-H_1(H+1)} A_3^{-H}\,,$$

где A_1 — то же, что и выше, а $A_3 := \max\limits_{|\xi - w| = 4er_2} |\mu(\xi)|$.

Покажем, что окружность $S_z := \{\zeta : |\zeta - w| = \rho_2\}$ является искомой для точки z. Во-первых,

$$|z - w| \le |z - z_0| + |z_0 - w| \le r_0 + \beta r = r_2 < \rho_2 ,$$

так что z лежит внутри S_z. Далее, как и выше в пункте II, учитывая (1.3.24) и оценку $r_0 \le |y|/4$, для $\zeta \in S_z$ имеем:

$$|\zeta - z| \le |\zeta - z_0| + |z_0 - z| \le \rho_2 + r_0 < 2r_2 + r_0 = 3r_0 + 2\beta r < \frac{3}{4}\,|y| + 4\beta|y| < |y| .$$

Значит, оба первых неравенства в $(\widetilde{F}_1)(b)$ выполнены. Проверка аналога неравенства (1.3.33), т. е. третьего неравенства в $(\widetilde{F}_1)(b)$, проводится так же, как в заключительной части пункта II, и даже с некоторыми упрощениями, поскольку в данном случае $|x| < r_0$ и за ростом $|x|$ и $\omega(x)$ следить не приходится. □

Предложение 1.3.5. $(\widetilde{F}_1) \Rightarrow (F_1)$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что если точка z расположена как в пункте $(F_1)(a)$, то $|\mathrm{Re}\, z|$ и, соответственно, $|\mathrm{Re}\, \zeta|$ достаточно велики, что позволяет опустить константу c в последнем неравенстве (1.3.16), увеличив при необходимости r_0.

Покажем, что то же самое можно сделать в неравенстве (1.3.17). Сначала уточним размеры окружности S_z для точек $z = x + iy$ с $|z| \ge r_0$, расположенных как в пункте $(F_1)(b)$. Как только что было показано в доказательстве предыдущего предложения, в этом случае для всех $\zeta \in S_z$ выполняется оценка:

$$|\zeta - z| \le \max\Big\{6\beta|y|, \Big(\frac{3}{4} + 4\beta\Big)|y|\Big\} \le |y| ,$$

где β — произвольно выбранное число из $\big(0, \frac{1}{16}\big]$. Взяв $\beta \in \big(0, \frac{1}{32}\big]$, мы, соответственно, получим, что

$$|\zeta - z| \le \Big(\frac{3}{4} + 4\beta\Big)|y| \le \frac{7}{8}\,|y| ,\ \zeta \in S_z .$$

Обоснуем, что при этом $|y|$ достаточно велик. Действительно, если $|y| \ge |x|$, то $r_0 \le |z| \le |y| \cdot \sqrt{2}$, так что $|y| \ge \frac{r_0}{\sqrt{2}}$. Если $|y| < |x|$, то аналогично

$|x| \geq \frac{r_0}{\sqrt{2}}$. Учитывая условие (γ) на вес ω, число r_0 можно считать настолько большим, что $\omega(t) \geq \frac{1}{\delta} \ln t$ при $t \geq \frac{r_0}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$|y| > \delta\omega(x) \geq \ln|x| \geq \ln\frac{r_0}{\sqrt{2}}\,.$$

Таким образом, в любом случае $|y| \geq \ln\frac{r_0}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$|\operatorname{Im}\zeta| \geq \frac{1}{8}\,|y| \geq \frac{1}{8}\,\ln\frac{r_0}{\sqrt{2}}\,,\ \zeta \in S_z\,,$$

т. е. $|\operatorname{Im}\zeta|$ также достаточно большой. Это позволяет убрать константу c из последнего неравенства (1.3.17), увеличив, если нужно, r_0. $\square$

Предложение 1.3.6. $(F_1) \Rightarrow (B_1)$.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия (F_1) целая функция $\breve{\mu}$ является делителем пространства $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Возьмем $f \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ такую, что $\frac{f}{\breve{\mu}} \in H(\mathbb{C})$. Проверим, что тогда $\frac{f}{\breve{\mu}} \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Для функции f найдем $q \in (0,1)$, $l > 0$ и $C_f > 0$ такие, что

$$|f(z)| \leq C_f \exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|\right\},\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Далее, возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $(q+\varepsilon)(1+\varepsilon) < 1$. Для него в силу (F_1) имеется соответствующее δ_ε. Кроме того, из (1.1.3) вытекает, что существует $\delta > 0$, $\delta < \min\left\{\delta_\varepsilon\,,\ \frac{1}{6l}\big(1-(q+\varepsilon)(1+\varepsilon)\big)\right\}$, для которого

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\omega\big((1+6A\delta)t\big)}{\omega(t)} < 1+\varepsilon\,,$$

и значит, при некотором $M > 0$

$$\omega\big((1+6A\delta)t\big) \leq (1+\varepsilon)\omega(t) + M\,,\ t \geq 0\,.$$

Для данного δ, используя (F_1), находим соответствующие r_0 и L.

Пусть теперь $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $|z| \geq r_0$, а S_z — окружность, обладающая свойствами $(F_1)(a)$ или $(F_1)(b)$. Оценим $\left|\frac{f(\zeta)}{\breve{\mu}(\zeta)}\right|$ для $\zeta \in S_z$.

I. Если $|y| \leq \delta\omega(x)$, то при всех $\zeta \in S_z$ получаем:

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\breve{\mu}(\zeta)}\right| \leq C_f\ \exp\left\{(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}\zeta) + l|\operatorname{Im}\zeta|\right\}.$$

Поскольку при этом $|\mathrm{Re}\,\zeta - x| \le 6\delta\omega(x) \le 6A\delta|x|$, то $|\mathrm{Re}\,\zeta| \le (1+6A\delta)|x|$. Поэтому

$$(q+\varepsilon)\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) \le (q+\varepsilon)\omega\big((1+6A\delta)x\big) \le (q+\varepsilon)(1+\varepsilon)\omega(x) + M\,.$$

Кроме того, $|\mathrm{Im}\,\zeta| \le 6\delta\omega(x)$. Следовательно,

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \le C_1 e^{q_1\omega(x)}\,,$$

где $C_1 := C_f\, e^M$, а $q_1 = (q+\varepsilon)(1+\varepsilon) + 6\delta l < 1$.

II. Если же $|y| > \delta\omega(x)$, то из $(F_1)(b)$ для любого $\zeta \in S_z$ имеем, что

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\mu(\zeta)}\right| \le C_f\, \exp\{q\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) + (l+L)|\mathrm{Im}\,\zeta|\}\,.$$

При этом, во-первых, $|\mathrm{Re}\,\zeta| \le |x| + |y|$, так что с учетом (1.1.1) и $(\widetilde{\alpha})$

$$\begin{aligned} q\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) \le& q\omega(|x|+|y|) \le qK\big(\omega(x)+\omega(y)+1\big) \le qK\Big(\frac{1}{\delta}\,|y| + A|y| + 1\Big) \le \\ \le& qK\Big(\frac{1}{\delta} + A\Big)|y| + K\,. \end{aligned}$$

Во-вторых, $|\mathrm{Im}\,\zeta| \le 2|y|$. Отсюда имеем, что

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \le \widetilde{C_1}\, e^{l_1|y|}\,,$$

где $\widetilde{C_1} := C_f\, e^K$, а $l_1 := qK\Big(\dfrac{1}{\delta} + A\Big) + l + L$.

Объединяя случаи I и II, окончательно получаем, что для всех $\zeta \in S_z$

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \le C\exp\big\{q_1\omega(x) + l_1|y|\big\}\,,$$

где $C = C_1 + \widetilde{C_1}$. Тогда по принципу максимума аналитических функций

$$\left|\frac{f(z)}{\check{\mu}(z)}\right| \le C\exp\big\{q_1\omega(\mathrm{Re}\,z) + l_1|\mathrm{Im}\,z|\big\}\,.$$

При этом C не зависит от z. Значит, $\frac{f}{\check{\mu}} \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. $\square$

Таким образом, теорема 1.3.1 полностью доказана. Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.3.2. Нам необходимо установить лишь три импликации: $(C_2) \Rightarrow (D_2)$, $(E_2) \Rightarrow (F_2)$ и $(F_2) \Rightarrow (B_2)$, поскольку условия (D_2) и (E_2) совпадают с (D_1) и (E_1), эквивалентность последних уже доказана для всех $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, а $M^0_{(\omega)}(\mathbb{C}) \subset M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Предложение 1.3.7. $(C_2) \Rightarrow (D_2)$.

Доказательство. Пусть $a \in (0, \infty)$, $p = 1$ и пусть оператор $\Lambda_{\check{\mu}}$ имеет замкнутый образ в $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Если условие (D_2) нарушено, то имеются числа $\varepsilon_0 \in \bigl(0, \min\bigl\{1, \frac{a}{4\pi}\bigr\}\bigr)$, $\delta_0 \in \bigl(0, \frac{1}{2}\bigr)$ и последовательность $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ вещественных чисел с $|b_j| \uparrow \infty$ такие, что для каждого $j \in \mathbb{N}$

$$|\check{\mu}(w)| < e^{-\varepsilon_0 \omega(w)} \text{ при всех } w \in \mathbb{C} \,:\, |w - b_j| \le \delta_0 \omega(b_j)\,. \tag{1.3.34}$$

Для определенности будем считать, что все $b_j > 0$. Кроме того, в силу (1.1.3) можно предполагать, что

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\omega(t)}{\omega((1-\delta_0)t)} < 1 + \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Тогда найдется $t_0 > 0$, при котором

$$\omega(t) \le \Bigl(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\Bigr)\, \omega\bigl((1-\delta_0)t\bigr)\,,\ t \ge t_0\,. \tag{1.3.35}$$

За счет условия (α') можно также считать, что

$$\omega(t) \le \delta_0 t\,,\ t \ge t_0. \tag{1.3.36}$$

Проредим, если это необходимо, последовательность $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы $b_1 > t_0$ и $b_{j+1} > 2b_j$. При этом круги $|w - b_j| \le \delta_0\omega(b_j)$ не будут пересекаться, поскольку на основании (1.3.36)

$$b_{j+1} - \delta_0\omega(b_{j+1}) - \bigl(b_j + \delta_0\omega(b_j)\bigr) \ge b_{j+1} - b_j - \delta_0^2(b_{j+1} + b_j) \ge \frac{1}{4}\,(3b_{j+1} - 5b_j) > 0\,.$$

1) Для субгармонической функции $u(z) = \pi\varepsilon_0|\mathrm{Im}\, z|$ и круга $K_{b_j,R_j} = \{z : |z - b_j| < R_j\}$, где $R_j = \frac{\delta_0}{2}\,\omega(b_j)$, построим функцию $U_j(z)$, как в лемме 1.3.1. Функция $U_j(z)$ непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$, гармонична в K_{b_j,R_j} и, как проверено в лемме 1.3.1, удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}
&U_j(z) = \pi\varepsilon_0|\mathrm{Im}\, z|\,,\ |z - b_j| \ge R_j\,;\\
&U_j(b_j) = \varepsilon_0\delta_0\omega(b_j)\,;\\
&U_j(z) \le \varepsilon_0\delta_0\omega(b_j) + \pi\varepsilon_0|\mathrm{Im}\, z|\,,\ |z - b_j| < R_j\,.
\end{aligned}$$

Так как $R_j = \frac{\delta_0}{2}\,\omega(b_j) \le \frac{\delta_0^2}{2}\,b_j < \delta_0 b_j$, то из (1.3.35) вытекает, что для всех $z \in \mathbb{C}$ с $|z - b_j| < R_j$

$$\Bigl(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Bigr)\,\omega(z) \ge \Bigl(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Bigr)\,\omega(b_j - R_j) \ge \Bigl(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Bigr)\,\omega\bigl((1-\delta_0)b_j\bigr) \ge \omega(b_j)\,.$$

Значит, при этих z

$$U_j(z) \le \varepsilon_0\delta_0\,\Bigl(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Bigr)\,\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\mathrm{Im}\,z| \le \frac{3}{2}\,\varepsilon_0\delta_0\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\mathrm{Im}\,z|\,.$$

2) Положим $V_j(z) := (1-\varepsilon_0\delta_0)\omega(z) + U_j(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда функция $V_j(z)$ непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$ и удовлетворяет условиям:

$$V_j(z) = (1-\varepsilon_0\delta_0)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\mathrm{Im}\,z|\,,\ |z-b_j| \ge R_j\,; \tag{1.3.37}$$

$$V_j(a_j) = \omega(a_j)\,;$$

$$V_j(z) \le \Bigl(1+\frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\Bigr)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\mathrm{Im}\,z|\,,\ z \in \mathbb{C}. \tag{1.3.38}$$

3) С помощью леммы 1 из [3] по функции $V_j(z)$ и точке b_j построим целую функцию f_j такую, что

$$f_j(b_j) = e^{V_j(b_j)} = e^{\omega(b_j)}\,; \tag{1.3.39}$$

$$|f_j(z)| \le \widetilde{A}(1+|z|^2)^2 \exp V_j^1(z)\,,\ z \in \mathbb{C}\,, \tag{1.3.40}$$

где $\widetilde{A}$ — абсолютная постоянная, которая от j не зависит, а $V_j^1(z) := \sup\{V_j(z+w) : |w| \le 1\}$. Заметим сразу, что в силу условия (γ) на вес ω найдется $\widetilde{C} > 0$ такое, что

$$(1+|z|^2)^2 \le \widetilde{C}\exp\frac{\varepsilon_0\delta_0}{4}\,\omega(z)\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.3.41}$$

Оценим $V_j^1(z)$. Будем предполагать, что $R_1 = \frac{\delta_0}{2}\,\omega(b_1) > 1$. Тогда все $R_j > 1$, так что круг $K_{b_j,2R_j}$ содержит 1-расширение круга K_{b_j,R_j}. Рассмотрим отдельно два случая. Если $|z-b_j| \ge 2R_j$, то для всех $w \in \mathbb{C}$ с $|w| \le 1$ точка $z+w$ находится вне K_{b_j,R_j}. Значит, на основании (1.3.37) и (1.1.2)

$$V_j(z+w) \le (1-\varepsilon_0\delta_0)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\mathrm{Im}\,z| + (1-\varepsilon_0\delta_0)Ae^2 + \pi\varepsilon_0\,.$$

Если же $|z-b_j| < 2R_j$, то, воспользовавшись неравенствами (1.3.38) и (1.1.2), получим, что для любого w с $|w| \le 1$

$$V_j(z+w) \le \Bigl(1+\frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\Bigr)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\mathrm{Im}\,z| + \Bigl(1+\frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\Bigr)Ae^2 + \pi\varepsilon_0\,.$$

Таким образом,

$$V_j^1(z) \le \begin{cases} (1-\varepsilon_0\delta_0)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z| + C_1\,, & |z-b_j| \ge 2R_j\,,\\ \left(1+\frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z| + C_1\,, & |z-b_j| < 2R_j\,, \end{cases}$$

где $C_1 := (1+\frac{\varepsilon_0\delta_0}{2})Ae^2 + \pi\varepsilon_0$.

Возвращаясь к (1.3.40), учитывая (1.3.41) и полагая $C_2 := \widetilde{A}\widetilde{C}e^{C_1}$, окончательно получим:

$$|f_j(z)| \le \begin{cases} C_2\exp\left\{\left(1-\frac{3\varepsilon_0\delta_0}{4}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right\}, & |z-b_j| \ge 2R_j\,,\\ C_2\exp\left\{\left(1+\frac{3\varepsilon_0\delta_0}{4}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right\}, & |z-b_j| < 2R_j\,. \end{cases} \tag{1.3.42}$$

4) Покажем, что для построенного семейства $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ нарушается условие (i_3) предложения 1.3.1. Заметим, во-первых, что из первого неравенства в (1.3.42) вытекает, что $f_j \in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, $j \in \mathbb{N}$. Далее, в силу (1.3.39)

$$\|f_j\|_{\omega,p_m,a-\delta_m} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f_j(z)|}{e^{p_m\omega(z)+(a-\delta_m)|\operatorname{Im} z|}} \ge \frac{|f_j(b_j)|}{e^{p_m\omega(b_j)}} = e^{(1-p_m)\omega(b_j)} \to \infty \text{ при } j\to\infty\,.$$

Следовательно, семейство $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ не ограничено ни в одном $H_{\omega,p_m,a-\delta_m}$.

Рассмотрим теперь функции $\check{\mu}f_j$, $j \in \mathbb{N}$. Так как $\check{\mu} \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то найдется $C_3 \ge 1$ такое, что

$$|\check{\mu}(z)| \le C_3\exp\left(\frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}\,\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right),\ z\in\mathbb{C}.$$

Тогда, используя в случае $|z-b_j| \ge 2R_j$ эту оценку вместе с первым неравенством из (1.3.42), а в случае $|z-b_j| < 2R_j$ — второе неравенство из (1.3.42) и (1.3.34), получим, что

$$|\check{\mu}(z)f_j(z)| \le \begin{cases} C_2C_3\exp\left\{\left(1-\frac{\varepsilon_0\delta_0}{4}\right)\omega(z) + 2\pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right\}, & |z-b_j| \ge 2R_j\,,\\ C_2\exp\left\{\left(1-\frac{\varepsilon_0}{4}\right)\omega(z) + \pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right\}, & |z-b_j| < 2R_j\,. \end{cases}$$

Значит,

$$|\check{\mu}(z)f_j(z)| \le C_2C_3\exp\left\{\left(1-\frac{\varepsilon_0\delta_0}{4}\right)\omega(z) + 2\pi\varepsilon_0|\operatorname{Im} z|\right\},\ z\in\mathbb{C},$$

так что семейство $\{\check{\mu} f_j : j \in \mathbb{N}\}$ содержится и ограничено в $H_{\omega,p_n,a-\delta_n}$, где n выбрано так, чтобы $p_n > 1 - \frac{\varepsilon_0\delta_0}{4}$, $a - \delta_n > 2\pi\varepsilon_0$.

Таким образом, не выполняется условие (i_3) предложения 1.3.1, что противоречит замкнутости $\operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}$ в $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. □

Предложение 1.3.8. $(E_2) \Rightarrow (F_2)$.

Доказательство. Пусть имеет место (E_2). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta \in \left(0, \frac{1}{7}\right)$. Будем, кроме того, считать δ настолько маленьким, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega((1+25\delta)t)}{\omega(t)} < 2.$$

Положим $H := 3 + \ln 48$, $H_1 := 3 + \ln \frac{24(2+\delta)}{\delta}$ и возьмем γ:

$$0 < \gamma < \frac{\varepsilon}{16(H+1)(H_1+1)+3H}.$$

Так как $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то существует $C > 0$, при котором

$$|\mu(u)| \le C \exp\left\{\gamma\omega(\operatorname{Re} u) + \gamma|\operatorname{Im} u|\right\}, \ u \in \mathbb{C}. \tag{1.3.43}$$

Далее, в силу (E_2) для γ, выступающего сейчас в роли ε, и δ имеется подходящее r_0. Можно сразу предполагать r_0 настолько большим, что $\omega(t) \le t$ для всех $t \ge r_0$ и

$$\omega\big((1+25\delta)t\big) \le 2\omega(t)\,, \ t \ge r_0\,. \tag{1.3.44}$$

Зафиксируем произвольную точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|x| \ge r_0$, $|y| \le \delta|x|$. В соответствии с (E_2) для x существует $t \in \mathbb{R}$ с $|t| > |x|$ такое, что $|t-x| \le \delta\omega(x)$ и $|\mu(t)| \ge e^{-\gamma\omega(t)}$. Так как $|t| \le |x| + |t-x| \le |x| + \delta\omega(x) \le (1+\delta)|x|$, то $\omega(t) \le \omega\big((1+\delta)x\big) \le 2\omega(x)$. Следовательно,

$$|\mu(t)| \ge e^{-2\gamma\omega(x)}\,. \tag{1.3.45}$$

Обозначим $r := |z-t|$ ($r > 0$, так как $|t| > |x|$). При этом

$$r \le |y| + |t-x| \le |y| + \delta\omega(x) \le \delta|x| + \delta\omega(x) \le 2\delta|x|\,. \tag{1.3.46}$$

1) Применим сначала лемму 1.3.2 о минимуме модуля аналитической функции к функции μ, радиусам r и $R = (1+\frac{\delta}{2})r$ и точке t. Получим, что

при некотором ρ, $r < \rho < \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)r$, для всех Z с $|Z - t| = \rho$ выполняется оценка

$$|\mu(Z)| \geq |\mu(t)|^{H_1+1}\left(\max\left\{|\mu(\xi)| : |\xi - t| = 2e\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)r\right\}\right)^{-H_1}. \qquad (1.3.47)$$

На окружности $|Z-t| = \rho$ выберем точку w такую, что $\arg(w-t) = \arg(z-t)$. Тогда

$$|\operatorname{Re} w| \leq |x|\,,\ |y| \leq |\operatorname{Im} w| \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)|y|\,. \qquad (1.3.48)$$

Оценим $|\mu(\xi)|$ для ξ с $|\xi - t| = 2e\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)r$. Имеем, что

$$|\operatorname{Im}\xi| \leq 2e\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)r \leq 12r \leq 12\big(|y| + \delta\omega(x)\big)\,,$$

$$|\operatorname{Re}\xi| \leq |t| + 2e\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)r \leq |t| + 12r \leq (1+\delta)|x| + 24\delta|x| = (1+25\delta)|x|\,.$$

Поэтому на основании (1.3.43) и (1.3.44)

$$|\mu(\xi)| \leq C\exp\Big(\gamma\omega\big((1+25\delta)x\big) + \gamma 12\big(|y| + \delta\omega(x)\big)\Big) \leq$$
$$\leq C\exp\big(14\gamma\omega(x) + 12\gamma|y|\big)\,.$$

Подставляя эту оценку и (1.3.45) в (1.3.47) с $Z = w$, получаем:

$$|\mu(w)| \geq C^{-H_1}\exp\big(-16\gamma(H_1+1)\omega(x) - 12\gamma H_1|y|\big)\,. \qquad (1.3.49)$$

2) Теперь применим ту же лемму к μ, $r_1 := |w - z|$, $R_1 = 2r_1$ и точке w. В результате найдем ρ_1, $r_1 < \rho_1 < 2r_1$, такое, что для всех ζ с $|\zeta - w| = \rho_1$

$$|\mu(\zeta)| \geq |\mu(w)|^{H+1}\big(\max_{|\xi-w|=4er_1}|\mu(\xi)|\big)^{-H}. \qquad (1.3.50)$$

Проверим, что окружность $S_z := \big\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - w| = \rho_1\big\}$ является искомой. Ясно, во-первых, что она содержит точку z внутри себя. Далее, так как $r_1 = |w - z| < \frac{\delta}{2}\,r$, то

$$\rho_1 < 2r_1 < \delta r \leq \delta\big(|y| + \delta\omega(x)\big) \leq \delta\omega(x) + \delta|y|.$$

Для того чтобы продолжить оценку (1.3.50) до требуемой в (F_2), рассмотрим $|\mu(\xi)|$, где $|\xi - w| = 4er_1$. Для всех таких ξ с учетом (1.3.48) и (1.3.46)

$$|\operatorname{Re}\xi| \leq |\operatorname{Re} w| + 4er_1 \leq |x| + 2e\delta r \leq |x| + r \leq (1+2\delta)|x|\,,$$

$$|\operatorname{Im}\xi| \leq |\operatorname{Im} w| + 4er_1 \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)|y| + 2e\delta r \leq (1+\delta)|y| + 6\delta\big(|y| + \delta\omega(x)\big) \leq$$
$$\leq 6\delta\omega(x) + (1+7\delta)|y| \leq \omega(x) + 2|y|\,.$$

Поэтому в силу (1.3.43)

$$|\mu(\xi)| \le C\exp\Big(\gamma\omega\big((1+2\delta)x\big)+\gamma\big(\omega(x)+2|y|\big)\Big) \le C\exp\big(3\gamma\omega(x)+2\gamma|y|\big)\,.$$

Возвращаясь к (1.3.50) и учитывая (1.3.49), имеем, что

$$|\mu(\zeta)| \ge C^{-H_1(H+1)-H}\exp\big\{-\varepsilon_1\omega(x)-l_1|y|\big\},$$

где $\varepsilon_1 := \gamma\big(16(H_1+1)(H+1)+3H\big) < \varepsilon$, $l_1 := \gamma\big(12H_1(H+1)+2H\big) < \varepsilon$. Увеличив при необходимости r_0 так, чтобы $(\varepsilon-\varepsilon_1)\omega(t) \ge (H_1(H+1)+H)\ln C$, $t \ge r_0$, окончательно получаем, что

$$|\mu(\zeta)| \ge \exp\big(-\varepsilon\omega(x)-\varepsilon|y|\big)\,,\ \zeta\in S_z.$$

Таким образом, мы доказали условие (F_2) с оценкой (1.3.3). □

Предложение 1.3.9. $(F_2) \Rightarrow (B_2)$.

Доказательство. Покажем, что если для μ выполнено условие (F_2), то $\check{\mu}$ является делителем пространства $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Допустим, что $f\in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $\frac{f}{\check{\mu}}\in H(\mathbb{C})$. Тогда для функции f найдутся числа $q\in(0,1)$ и $C\ge 1$ такие, что

$$|f(w)| \le C\ \exp\big\{q\omega(\operatorname{Re} w)+qa|\operatorname{Im} w|\big\}\,,\ w\in\mathbb{C}\,. \tag{1.3.51}$$

Возьмем $\varepsilon\in(0,1)$ так, чтобы $q_1 := q+2\varepsilon\big(1+a+\frac{1}{a}\big) < 1$. Пользуясь условием (1.1.3), выберем $\delta\in(0,\varepsilon)$, при котором

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\omega((1+4\delta)t)}{\omega(t)} < 1+\varepsilon.$$

По ε и δ найдем r_0 в соответствии с условием (F_2). Считаем его настолько большим, что $\omega(t)\le t$, $t\ge r_0$, и

$$\omega\big((1+4\delta)t\big) \le (1+\varepsilon)\omega(t)\,,\ t\ge r_0\,. \tag{1.3.52}$$

Далее, как уже говорилось выше, μ имеет нулевой тип при порядке 1. Значит, $\check{\mu}$ — функция вполне регулярного роста при порядке 1. Следовательно, индикаторы h_f и $h_{\frac{f}{\check{\mu}}}$ целых функций f и $\frac{f}{\check{\mu}}$ совпадают. При этом в силу (1.3.51) и (α')

$$h_f(\theta) = \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r} \le \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln C+q\omega(r\cos\theta)+qar|\sin\theta|}{r} = qa|\sin\theta|.$$

Поэтому $h_{\frac{f}{\check\mu}}(\theta) \le qa|\sin\theta|$, $\theta\in[0,2\pi)$. Тогда, увеличив, если это необходимо, r_0, получим, что

$$\ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{\check\mu(re^{i\theta})}\right| \le (qa|\sin\theta| + \varepsilon\delta)r\,,\ r\ge r_0\,,\ \theta\in[0,2\pi)\,. \tag{1.3.53}$$

Зафиксируем произвольную точку $z = x+iy\in\mathbb{C}$ с $\max\{|x|,|y|\}\ge r_0$ и рассмотрим два возможных случая.

1. Если $|y|\ge\delta|x|$, то $|z|\le|x|+|y|\le(1+\frac{1}{\delta})|y|$, так что на основании (1.3.53)

$$\ln\left|\frac{f(z)}{\check\mu(z)}\right| \le qa|y| + \varepsilon\delta|z| \le \big(qa+\varepsilon(\delta+1)\big)|y| \le a\left(q+\frac{2\varepsilon}{a}\right)|y| \le q_1a|y|\,. \tag{1.3.54}$$

2. Если $|y|<\delta|x|$, то $\max\{|x|,|y|\} = |x|\ge r_0$, так что точку z можно окружить окружностью S_z из (F_2). Для всех $\zeta\in S_z$

$$|\check\mu(\zeta)| \ge e^{-\varepsilon\omega(x)-\varepsilon|y|}\,. \tag{1.3.55}$$

Далее, так как $|\zeta - z|\le 2R_z\le 2\delta\omega(x)+2\delta|y|$, $\zeta\in S_z$, то

$$|\mathrm{Re}\,\zeta| \le |x| + 2\delta\omega(x) + 2\delta|y| \le |x| + 2\delta|x| + 2\delta^2|x| \le (1+4\delta)|x|\,,$$
$$|\mathrm{Im}\,\zeta| \le |y| + 2\delta\omega(x) + 2\delta|y| \le 2\varepsilon\omega(x) + (1+2\varepsilon)|y|\,.$$

С учетом (1.3.52) тогда

$$q\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) + qa|\mathrm{Im}\,\zeta| \le (q+\varepsilon+2a\varepsilon)\omega(x) + a(q+2\varepsilon)|y|\,.$$

Подставляя эту оценку в (1.3.51) и используя (1.3.55), получим, что для всех $\zeta\in S_z$

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check\mu(\zeta)}\right| \le C\exp\left((q+2\varepsilon+2a\varepsilon)\omega(x) + a\left(q+2\varepsilon+\frac{\varepsilon}{a}\right)|y|\right) \le$$
$$\le C\exp\left\{q_1\omega(x)+q_1a|y|\right\}.$$

Следовательно, по принципу максимума модуля

$$\left|\frac{f(z)}{\check\mu(z)}\right| \le C\exp\left\{q_1\omega(x)+q_1a|y|\right\}. \tag{1.3.56}$$

Объединяя случаи 1 и 2, заключаем, что оценка (1.3.56) верна для всех $z = x+iy$ с $\max\{|x|,|y|\}\ge r_0$. Значит, $\frac{f}{\check\mu}\in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, что завершает доказательство предложения. □

Итак, теорема 1.3.2 полностью доказана.

1.4 Образ несюръективного оператора свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа

Данный параграф посвящен исследованию образа несюръктивного оператора свертки T_μ, определенного на пространстве Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа. Мы рассмотрим некоторое другое пространство $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, задаваемое весом σ и имеющее тип $q \in (0, \infty]$, и изучим вопрос о том, когда

$$T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})\,. \tag{1.4.1}$$

Иначе говоря, будут установлены условия, при которых уравнение $T_\mu f = g$ имеет решение в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любой правой части из $g \in \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$. Естественно, априори предполагается, что $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

Центральными результатами параграфа являются три следующие теоремы.

Теорема 1.4.1. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0, \infty)$; $p\omega \le q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ, действующий в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Для того чтобы имело место вложение (1.4.1), необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$(A)\ \ \forall r \in (0,p)\ \ \forall \delta \in (0,\infty)\ \ \exists s \in (0,q)\ \ \exists R_0 > 0 | \,\forall x \in \mathbb{R}\ c\ |x| \ge R_0\ \ \exists w \in \mathbb{C}:$$
$$|w - x| \le \delta\sigma(x)\ \ \text{и}\ \ |\mu(w)| \ge \exp\big\{r\omega(w) - s\sigma(w)\big\}\,.$$

Теорема 1.4.2. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0, \infty)$; $p\omega \le q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ, действующий в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Если для целой функции μ выполнено условие*

(B) $\forall r \in (0,p)$ $\exists s \in (0,q)$ $|$ $\forall \delta \in (0,\infty)$ $\exists R_0 > 0$: каждую точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \ge R_0$ и $|y| \le \delta\sigma(x)$ можно погрузить внутрь окружности S_z с $\operatorname{diam} S_z \le \delta\sigma(x)$, для всех точек ζ которой справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \ge \exp\big\{r\omega(\zeta) - s\sigma(\zeta)\big\}\,,$$

то справедливо вложение (1.4.1).

Теорема 1.4.3. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p \in (0, \infty)$; $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$; T_μ — оператор свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(I) имеет место вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$*;*

(II) $T_\mu : \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ *сюръективен;*

(III) μ *медленно убывает относительно* σ *в максимальном смысле (см. [65]), т. е.*

$$\exists C > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq C \;\; \exists w \in \mathbb{C} \;: \qquad |w - x| \leq C\sigma(x) \;\text{ и }\; |\mu(w)| \geq \exp\big\{-C\sigma(w)\big\}\,.$$

Замечание 1.4.1. *Заметим, во-первых, что, несмотря на различие необходимых и достаточных условий, установленных в теоремах 1.4.1 и 1.4.2, из них в случае* $\sigma = \omega$, $q = p$ *вытекает критерий сюръективности оператора* $T_\mu : \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$*, т. е. теорема 1.3.1. В общей ситуации при наличии двух весовых функций получить необходимые и одновременно достаточные условия, обеспечивающие вложение (1.4.1), на наш взгляд, не представляется технически возможным.*

Замечание 1.4.2. *Ранее в работе [61] решалась задача о том, при каких условиях будет иметь место вложение* $T_\mu\big(\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$*. Было установлено, что данное вложение возможно в том и только в том случае, когда оператор* $T_\mu : \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ *сюръективен. В связи с этим представляется интересным, что в случае пространств нормального типа вложение (1.4.1) может иметь место и в случае, когда* T_μ *не сюръективен на* $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$*. Соответствующий пример будет приведен в § 1.5. Таким образом, результаты теорем 1.4.1 и 1.4.2 для пространств нормального типа принципиально отличаются от результатов из [61] для пространств максимального типа. Результат теоремы 1.4.3, наоборот, аналогичен результату из [61].*

Следующее замечание понадобится в дальнейшем.

Замечание 1.4.3. *Поскольку система экспонент* $\big\{f_z := e^{-ixz} : z \in \mathbb{C}\big\}$ *полна в* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$*, всякое подпространство* $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ *пространства* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ *будет плотно в нем. Равенство* $T_\mu f_z = \check{\mu}(z) f_z$, $z \in \mathbb{C}$, *обеспечивает также, что образ* $\operatorname{Im} T_\mu$ *оператора* T_μ *является плотным подпространством в* $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$, $p \in (0, \infty)$.

Перейдем к доказательству сформулированных теорем. Как и в § 1.3, равенство (1.1.9) позволяет ограничиться рассмотрением случая $p = q = 1$.

Отметим сразу тот факт, что образ $T_{\check{\mu}}\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big)$ всегда содержит в себе пространство $A(\mathbb{R})$ всех вещественно аналитических функций. Это вытекает из очевидного соотношения $T_{\check{\mu}}\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset T_{\check{\mu}}\big(\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})\big)$ и теоремы 1 из [61], в силу которой $T_{\check{\mu}}\big(\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset A(\mathbb{R})$.

Начнем с функциональных условий вложения $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R})$.

Выпишем ряд утверждений:

(i) $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R})$;

(ii) оператор $\Lambda^{-1}_{\check{\mu}} : \operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}} \to H^{1,\infty}_{(\sigma)}(\mathbb{C})$ непрерывен;

(iii) $\forall f \in \overline{\operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}}^{H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})}$ $\exists g \in H^{1,\infty}_{(\sigma)}(\mathbb{C})$: $\check{\mu}g = f$;

(iv) $f \in H^1_{(\omega)}(\mathbb{C})\,,\ \frac{f}{\check{\mu}} \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow \frac{f}{\check{\mu}} \in H^1_{(\sigma)}(\mathbb{C})$;

(v) $\forall p \in (0,1)\ \forall l \in (0,\infty)\ \exists q \in (0,1)\ \exists m \in (0,\infty)\ \exists C > 0 : \forall f \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\big\{q\sigma(z) + m|\operatorname{Im} z|\big\}} \le C \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\check{\mu}(z)f(z)|}{\exp\big\{p\omega(z) + l|\operatorname{Im} z|\big\}}. \tag{1.4.2}$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1.4.1. *Пусть ω, σ — весовые функции; $\omega \le \sigma$; $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$.*

1) Утверждения $(i) - (iii)$ эквивалентны.

2) Утверждение (iv) достаточно для каждого из утверждений $(i) - (iii)$.

3) Утверждение (v) необходимо для каждого из утверждений $(i) - (iii)$, причем в случае, когда образ $\operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}$, снабженный индуцированной из $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ топологией, борнологичен, условие (v) также и достаточно для каждого из условий $(i) - (iii)$.

Доказательство. Справедливость 1) и 3) прямо вытекает из общего результата, приведенного в [61, лемма 2]. Достаточно применить его для $E = \mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, $T = T_\mu : \mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, $j = \mathrm{id} : \mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, $S = T_\mu\big|_{\mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R})}$ и учесть замечание 1.4.3.

Докажем 2). Пусть выполнено (iv). Возьмем произвольную функцию $f \in \overline{\operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}}^{H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})}$. Тогда найдутся функции $g_n \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ такие, что $\check{\mu}g_n \to f$ в $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и, тем более, $\check{\mu}g_n \to f$ в $H(\mathbb{C})$. Из этого вытекает, что $g := \frac{f}{\check{\mu}} \in$

$H(\mathbb{C})$. В силу (iv), $g \in H^{1,\infty}_{(\sigma)}(\mathbb{C})$. Таким образом, выполнено (iii). Лемма доказана. $\square$

Аналогично, для того чтобы исследовать вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, нам понадобятся утверждения:

$\widetilde{(i)}$ $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$;

$\widetilde{(ii)}$ оператор $\Lambda^{-1}_{\check{\mu}} : \operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}} \to H^{\infty,\infty}_{(\sigma)}(\mathbb{C})$ непрерывен;

$\widetilde{(iii)}$ $\forall f \in \overline{\operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}}^{H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})}$ $\exists g \in H^{\infty,\infty}_{(\sigma)}(\mathbb{C}) \ : \ \check{\mu}g = f$;

$\widetilde{(iv)}$ $f \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, $\frac{f}{\check{\mu}} \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow \frac{f}{\check{\mu}} \in H^{\infty,\infty}_{(\sigma)}(\mathbb{C})$;

$\widetilde{(v)}$ $\forall p \in (0,1)$ $\forall l \in (0,\infty)$ $\exists m \in (0,\infty)$ $\exists C > 0 \ : \ \forall f \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\big\{m\sigma(z) + m|\operatorname{Im} z|\big\}} \le C \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\check{\mu}(z)f(z)|}{\exp\big\{p\omega(z) + l|\operatorname{Im} z|\big\}}\,. \tag{1.4.3}$$

Лемма 1.4.2. *Пусть ω, σ — весовые функции; $\omega \le \sigma$; $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$.*

1) Утверждения $\widetilde{(i)} - \widetilde{(iii)}$ эквивалентны.

2) Утверждение $\widetilde{(iv)}$ достаточно для каждого из утверждений $\widetilde{(i)} - \widetilde{(iii)}$.

3) Утверждение $\widetilde{(v)}$ необходимо для каждого из утверждений $\widetilde{(i)} - \widetilde{(iii)}$, причем в случае, когда образ $\operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}$, снабженный индуцированной из $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ топологией, борнологичен, условие $\widetilde{(v)}$ также и достаточно для каждого из условий $\widetilde{(i)} - \widetilde{(iii)}$.

Переформулируем теорему 1.4.1 для случая $p = q = 1$.

Теорема 1.4.4. *Пусть ω, σ — весовые функции; $\omega \le \sigma$; $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Если $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R})$, то выполняется условие*

$$(A_0) \ \forall p \in (0,1) \ \forall \delta \in (0,\infty) \ \exists q \in (0,1) \ \exists R_0 > 0 | \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \ge R_0 \ \exists w \in \mathbb{C} : \\ |w - x| \le \delta\sigma(x) \ \text{ и } \ |\mu(w)| \ge \exp\big\{p\omega(w) - q\sigma(w)\big\}\,.$$

Доказательство. Заметим сразу, что метод доказательства данной теоремы во многом повторяет метод доказательства предложения 1.3.2. Однако имеются и существенные изменения, обусловленные наличием двух весов ω и σ.

Итак, пусть $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R})$. Предположим, что утверждение (A_0) не выполняется. Это означает, что имеются $p_0 \in (0,1)$ и $\delta_0 \in (0,1)$, при которых для всех $q \in (0,1)$ и $R_0 > 0$ существует $x \in \mathbb{R}$ с $|x| \ge R_0$ такое, что

$$|\check{\mu}(w)| < \exp\big\{p_0\omega(w) - q\sigma(w)\big\} \text{ для всех } w \in \mathbb{C} \,:\, |w - x| \le \delta_0\sigma(x)\,.$$

Покажем, что тогда будет нарушено утверждение (v). В соответствии с леммой 1.4.1 это будет означать, что вложение $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ не может иметь места.

Возьмем произвольное $q \in (0,1)$. Выберем вспомогательные числа q_1, q_2 и q_3 так, чтобы $q < q_1 < q_2 < q_3 < 1$. В силу свойств весовых функций, имеются $\delta = \delta(q) \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$ и $t_0 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} &q_1\sigma(t) \le q_2\sigma\big((1-\delta)t\big)\,,\ t \ge t_0\,;\\ &\sigma(t) \le \delta t\,,\ t \ge t_0\,. \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Поскольку утверждение (A_0) нарушено, по величине q_3 можно найти последовательность $(b_j) \subset \mathbb{R}$ с $|b_j| \uparrow \infty$ такую, что при всех $j \in \mathbb{N}$

$$|\mu(z)| < \exp\big\{p_0\omega(z) - q_3\sigma(z)\big\}\,,\ |z - b_j| \le \delta_0\sigma(b_j)\,. \tag{1.4.5}$$

Не ограничивая общность, будем для удобства предполагать, что $b_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$; $b_1 \ge t_0$; $b_{j+1} > 3b_j$, $j \in \mathbb{N}$. Последнее неравенство, как и в предложении 1.3.2, обеспечивает то, что круги $|w - b_j| \le \delta_0\sigma(b_j)$, $j \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются.

1) Пользуясь леммой 1.3.1, по субгармонической функции $u_j(z) = \frac{\pi}{\delta_0}q_1|\operatorname{Im} z|$ и кругу $K_{b_j,R_j} = \{z \in \mathbb{C} : |z - b_j| < R_j\}$, где $R_j = \frac{\delta_0}{2}\sigma(b_j)$, построим функцию $U_j(z)$, непрерывную и субгармоническую в $\mathbb{C}$, гармоническую в K_{b_j,R_j} и такую, что

$$U_j(b_j) = q_1\sigma(b_j)\,;$$

$$U_j(z) = \frac{\pi}{\delta_0}q_1|\operatorname{Im} z|\,,\ |z - b_j| \ge R_j\,; \tag{1.4.6}$$

$$U_j(z) \le q_1\sigma(b_j) + \frac{\pi}{\delta_0}q_1|\operatorname{Im} z|\,,\ |z - b_j| < R_j\,. \tag{1.4.7}$$

Так как из (1.4.4) вытекает, что $R_j \le \sigma(b_j) \le \delta b_j$, то с учетом (1.4.5) для всех $z \in K_{b_j,R_j}$ получаем, что

$$q_2\sigma(z) \ge q_2\sigma(b_j - R_j) \ge q_2\sigma\Big(b_j - \frac{\delta}{2}b_j\Big) \ge q_2\sigma\big((1-\delta)b_j\big) \ge q_1\sigma(b_j)\,.$$

На основании (1.4.6) и (1.4.7) тогда заключаем, что

$$U_j(z) \le q_2\sigma(z) + \frac{\pi}{\delta_0} q_1 |\mathrm{Im}\, z|\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.4.8}$$

2) Применяя лемму 1 из [3], по субгармонической функции $U_j(z)$ и точке b_j строим целую функцию $f_j(z)$ такую, что

$$f_j(b_j) = \exp U_j(b_j) = \exp q_1\sigma(b_j)\,; \tag{1.4.9}$$

$$|f_j(z)| \le \widetilde{A}(1+|z|^2)^2 \exp U_j^1(z)\,,\ z \in \mathbb{C}\,, \tag{1.4.10}$$

где $\widetilde{A}$ — абсолютная постоянная, от j не зависящая, а $U_j^1(z) := \sup\big\{U_j(z+w) : |w| \le 1\big\}$.

Продолжим оценку (1.4.10). Для простоты будем предполагать, что $R_1 = \frac{\delta_0}{2}\,\sigma(b_1) > 1$. Рассмотрим отдельно два случая.

Пусть сначала $|z - b_j| \ge 2R_j$. Так как $R_j > 1$, то для всех $w \in \mathbb{C}$ с $|w| \le 1$ точка $z + w$ будет находиться вне K_{b_j,R_j}. Следовательно,

$$U_j(z+w) = \frac{\pi}{\delta_0}\, q_1 |\mathrm{Im}\,(z+w)| \le \frac{\pi}{\delta_0}|\mathrm{Im}\, z| + \frac{\pi}{\delta_0}\,.$$

Далее, возьмем какое-нибудь $\varepsilon_0 \in \big(0, \frac{p_0}{2}\big)$ и, пользуясь свойством (γ) весовых функций, найдем $C_0 > 0$ такое, что

$$(1+|z|^2)^2 \le C_0 \exp \varepsilon_0\omega(z)\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.4.11}$$

На основании (1.4.10) тогда в данном случае получаем, что

$$|f_j(z)| \le C_1 \exp\left\{\varepsilon_0\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}|\mathrm{Im}\, z|\right\},\ |z - b_j| \ge 2R_j\,, \tag{1.4.12}$$

где $C_1 := \widetilde{A} C_0 \exp \frac{\pi}{\delta_0}$. Из этого, очевидно, сразу вытекает, что $f_j \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, $j \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь $|z - b_j| < 2R_j$ и A — константа из условий (1.1.1) и (1.1.2). С помощью (1.1.2) из (1.4.8) получаем, что для всех $w \in \mathbb{C}$ с $|w| \le 1$

$$U_j(z+w) \le q_2\sigma(|z|+1) + \frac{\pi}{\delta_0} q_1\big(|\mathrm{Im}\, z| + 1\big) \le q_2\sigma(z) + \frac{\pi}{\delta_0}|\mathrm{Im}\, z| + Ae^2 + \frac{\pi}{\delta_0}\,.$$

Воспользуемся еще раз свойством (γ) весовых функций и найдем константу $C_2 = C_2(q) > 0$, при которой

$$(1+|z|^2)^2 \le C_2 \exp\big\{(q_3 - q_2)\sigma(z)\big\}\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае неравенство (1.4.10) продолжается следующим образом:

$$|f_j(z)| \le C_3 \exp\left\{q_3\sigma(z) + \frac{\pi}{\delta_0}|\mathrm{Im}\, z|\right\},\ |z-b_j| < 2R_j\,, \tag{1.4.13}$$

где $C_3 := \widetilde{A}C_2 \exp\left\{Ae^2 + \frac{\pi}{\delta_0}\right\}$.

3) Изучим теперь семейства $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ и $\{\check{\mu} f_j : j \in \mathbb{N}\}$. Из (1.4.9) имеем, что при любом $m \in (0, \infty)$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f_j(z)|}{\exp\left\{q\sigma(z) + m|\mathrm{Im}\, z|\right\}} \ge \frac{|f_j(b_j)|}{\exp q\sigma(b_j)} \ge \exp\left\{(q_1 - q)\sigma(b_j)\right\} \to \infty\,,\ j \to \infty\,.$$

Оценим $|\check{\mu}(z) f_j(z)|$, $z \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$. Для всех $z \in \mathbb{C}$ с $|z - b_j| < 2R_j = \delta_0\sigma(b_j)$ из (1.4.5) и (1.4.13) получаем, что

$$|\check{\mu}(z) f_j(z)| \le C_3 \exp\left\{p_0\omega(z) + \frac{\pi}{\delta_0}|\mathrm{Im}\, z|\right\}. \tag{1.4.14}$$

Для того чтобы оценить $|\check{\mu}(z) f_j(z)|$ для $z : |z - b_j| \ge 2R_j$, вспомним, что $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Соответственно, по величине ε_0 (зависящей только от p_0) найдутся $l_0 > 0$ и $C_4 > 0$, при которых

$$|\check{\mu}(z)| \le C_4 \exp\left\{\varepsilon_0\omega(z) + l_0|\mathrm{Im}\, z|\right\},\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.4.15}$$

С учетом (1.4.12) тогда имеем, что

$$|\check{\mu}(z) f_j(z)| \le C_5 \exp\left\{2\varepsilon_0\omega(z) + \left(\frac{\pi}{\delta_0} + l_0\right)|\mathrm{Im}\, z|\right\},\ |z - b_j| \ge 2R_j\,,$$

где $C_5 := C_1 C_4$.

Объединяя последнюю оценку с (1.4.14), окончательно заключаем, что

$$|\check{\mu}(z) f_j(z)| \le (C_3 + C_5) \exp\left\{p_0\omega(z) + \left(\frac{\pi}{\delta_0} + l_0\right)|\mathrm{Im}\, z|\right\},\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Итак, имеются $p_0 \in (0, 1)$ и $\widetilde{l} := \frac{\pi}{\delta_0} + l_0 \in (0, \infty)$, зависящие только от μ и такие, что для всех $q \in (0, 1)$ и $m \in (0, \infty)$ удается построить семейство функций $f_j \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, $j \in \mathbb{N}$, на котором нарушается условие (1.4.2). Таким образом, не выполняется утверждение (v), что, в силу леммы 1.4.1, противоречит условию $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R})$. Теорема доказана. $\square$

Теми же методами доказывается и теорема 1.4.3, а именно ее необходимая часть, поскольку достаточная часть очевидна.

Доказательство. Итак, докажем импликацию $(I) \Rightarrow (III)$ теоремы 1.4.1. Снова будем рассматривать случай $p = 1$. Поскольку идеи доказательства в целом те же, что и в предыдущей теореме, мы приведем лишь краткую схему, делая упор на отличительные моменты. Начнем с того, что выберем константы $M > 1$ и $t_0 > 0$, при которых

$$\sigma(t) \le M\sigma\Big(\frac{t}{2}\Big)\,,\ t \ge t_0\,; \tag{1.4.16}$$

$$\sigma(t+1) \le M\sigma(t)\,,\ t \ge t_0\,. \tag{1.4.17}$$

Предположим, что утверждение (III) теоремы 1.4.3 нарушено. Тогда имеется последовательность $(b_j) \subset \mathbb{R}$ с $|b_j| \uparrow \infty$ такая, что

$$|\check{\mu}(z)| < \exp\big\{-(M^2 j+1)\sigma(z)\big\}\,,\ |z-b_j| \le j\sigma(b_j)\,. \tag{1.4.18}$$

Как и ранее, считаем для удобства, что $b_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$; $b_1 \ge t_0$; $b_{j+1} > 3b_j$, $j \in \mathbb{N}$. Кроме того, свойство (α') веса σ позволяет выбрать b_j настолько большими, что

$$\sigma(b_j) \le \frac{1}{j}\, b_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Применим лемму 1.3.1 к функции $u_j(z) = \pi|\operatorname{Im} z|$ и кругу K_{b_j,R_j}, где $R_j := \frac{j}{2}\sigma(b_j)$. В результате получаем функцию $U_j(z)$, непрерывную и субгармоническую в $\mathbb{C}$, гармоническую в K_{b_j,R_j} и такую, что

$$\begin{aligned} &U_j(b_j) = j\sigma(b_j)\,;\\ &U_j(z) \le Mj\sigma(z) + \pi|\operatorname{Im} z|\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

Последняя оценка установлена с помощью неравенства (1.4.16).

Как и в доказательстве предыдущей теоремы, по функции $U_j(z)$ и точке b_j с помощью [3, лемма 1] строим целую функцию $f_j(z)$ с $f_j(b_j) = \exp j\sigma(b_j)$ и глобальной оценкой (1.4.10). Далее, берем какое-нибудь $\varepsilon_0 \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$ и находим константу $C_0 > 0$, при которой выполняется оценка (1.4.12) и оценка

$$(1+|z|^2)^2 \le C_0 \exp\big\{\varepsilon_0\sigma(z)\big\}\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.4.20}$$

Тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ с $|z-b_j| \ge 2R_j$ получаем, что

$$|f_j(z)| \le \widetilde{C_1} \exp\big\{\varepsilon_0\omega(z) + \pi|\operatorname{Im} z|\big\}\,,$$

где $\widetilde{C_1} := \widetilde{A}C_0 e^{\pi}$. Естественно, отсюда сразу получаем, что $f_j \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Для $z \in \mathbb{C}$ с $|z - b_j| < 2R_j$ на основании (1.4.20), (1.4.19) и (1.4.17) имеем, что

$$|f_j(z)| \le \widetilde{C_1} \exp\left\{(M^2 j + 1)\sigma(z) + \pi|\mathrm{Im}\, z|\right\}.$$

Установленные оценки вместе с неравенствами (1.4.18) и (1.4.15) обеспечивают то, что

$$|\check{\mu}(z) f_j(z)| \le \begin{cases} \widetilde{C_1} \exp \pi|\mathrm{Im}\, z|\,, & |z - b_j| < 2R_j\,; \\ 2\varepsilon_0\omega(z) + (\pi + l_0)|\mathrm{Im}\, z|\,, & |z - b_j| \ge 2R_j\,. \end{cases}$$

Таким образом, нам удалось найти $p_0 = 2\varepsilon_0 \in (0,1)$ и $\widetilde{l_0} := \pi + l_0$, для которых на семействе $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ при любых положительных m и C нарушается условие (1.4.3). В силу леммы 1.4.2 это противоречит тому, что $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^\infty_{(\sigma)}(\mathbb{R})$. $\square$

Перейдем к доказательству достаточных условий, сформулированных в теореме 1.4.2. Для этого понадобится вспомогательное утверждение.

Предложение 1.4.1. *Пусть ω, σ — весовые функции; $\omega \le \sigma$. Если целая функция $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (A_0), то справедливо утверждение*

(C) $\forall \delta \in (0,\infty)$ $\exists L > 0$ $\exists R_0 > 0\,|$ *каждую точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \ge R_0$ и $|y| \ge \delta\sigma(x)$ можно погрузить внутрь окружности S_z с $\mathrm{diam}\, S_z \le \frac{5}{8}|y|$, причем*

$$|\mu(\zeta)| \ge \exp\left\{-L|\mathrm{Im}\,\zeta|\right\},\ \zeta \in S_z\,. \tag{1.4.21}$$

Доказательство. Сначала выпишем некоторые априорные оценки. Напомним, что A — константа из условий (1.1.1) и (1.1.2). Величину $K > 1$ будем считать такой, что

$$\sigma(2s) \le K\sigma(s) + K\,,\ s \ge 0\,;$$
$$\omega(2s + 9ev) \le K\big(\omega(s) + \omega(v)\big) + K\,,\ s, v \ge 0\,.$$

Возьмем произвольные $p \in (0,1)$, $\delta \in \left(0, \frac{1}{A}\right)$ и, пользуясь условием (A_0), найдем по ним соответствующие $q \in (0,1)$ и $R_0 > 0$. Будем сразу предполагать, что $\omega(t) \le \sigma(t)$, $t \ge R_0$. Рассмотрим произвольную точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \ge 5R_0$ и $|y| \ge \delta\sigma(x)$.

1) Допустим сначала, что $|x| \geq R_0$. Тогда в силу (A_0) имеется $t \in \mathbb{C}$ с $|t-x| \leq \delta\sigma(x)$ такое, что

$$|\mu(t)| \geq \exp\left\{p\omega(t) - q\sigma(t)\right\}. \tag{1.4.22}$$

Положим $r := |z-t|$. Тогда

$$r \leq |y| + \delta\sigma(x) \leq 2|y|. \tag{1.4.23}$$

Возьмем произвольное $\beta \in \left(0, \frac{1}{16}\right]$ и применим лемму 1.3.2 к функции μ, точке t и радиусам r и $R := (1+\beta)r$. В результате получим окружность $|Z-t| = \rho$ с $\rho \in (r, R)$, на которой $|\mu|$ имеет определенную оценку снизу. На этой окружности выберем точку w с $\arg(w-t) = \arg(z-t)$. Для $|\mu(w)|$ имеем неравенство

$$|\mu(w)| \geq |\mu(t)|^{H_1+1}\Big(\max_{|\xi-t|=2e(1+\beta)r} |\mu(\xi)|\Big)^{-H_1}, \tag{1.4.24}$$

где $H_1 = 3 + \ln\frac{24(1+\beta)}{\beta}$.

Воспользуемся еще раз леммой 1.3.2 для функции μ, точки w и радиусов $r_1 := \beta r$ и $R_1 := 2r_1$. Получим окружность с центром в точке w радиуса $\rho_1 \in (r_1, R_1)$, для всех точек ζ которой справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \geq |\mu(w)|^{H+1}\Big(\max_{|\xi-w|=4er_1} |\mu(\xi)|\Big)^{-H}, \tag{1.4.25}$$

где $H := 3 + \ln 48$. Обозначим данную окружность через S_z и покажем, что она является искомой. Очевидно, что точка z находится внутри S_z. Далее, в силу (1.4.23), $\operatorname{diam} S_z \leq 2\rho_1 \leq 4\beta r \leq \frac{|y|}{2}$. Остается установить для $|\mu(\zeta)|$, $\zeta \in S_z$, нужную оценку снизу. Из (1.4.22), (1.4.24) и (1.4.25) вытекает, что

$$|\mu(\zeta)| \geq A_1 \cdot A_2 \cdot A_3\,,\ \zeta \in S_z,$$

где

$$A_1 := |\mu(t)|^{(H+1)(H_1+1)},\ A_2 := \Big(\max_{|\xi-t|=2e(1+\beta)r} |\mu(\xi)|\Big)^{-H_1(H+1)},$$

$$A_3 := \Big(\max_{|\xi-w|=4er_1} |\mu(\xi)|\Big)^{-H}.$$

Оценим сомножитель A_1. Поскольку $|t-x| \le \delta\sigma(x)$, то $|t| \le (1+\delta A)|x| \le 2|x|$. Следовательно,

$$p\omega(t) - q\sigma(t) \ge -q\sigma(2x) \ge -qK\sigma(x) - qK \ge -\frac{K}{\delta}|y| - K\,.$$

Таким образом, на основании (1.4.22) получаем, что $A_1 \ge C_1 \exp\{-L_1|y|\}$, где $C_1 := \exp\big\{-K(H+1)(H_1+1)\big\}$, $L_1 := \frac{K}{\delta}(H+1)(H_1+1)$.

Рассмотрим A_2. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то имеются $C > 0$ и $l > 0$, при которых

$$|\mu(\xi)| \le C \exp\big\{\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\xi) + l|\operatorname{Im}\xi|\big\}\,,\ \xi \in \mathbb{C}\,. \tag{1.4.26}$$

Для произвольной точки $\xi \in \mathbb{C}$ с $|\xi - t| = 2e(1+\beta)r$ с учетом (1.4.23) и оценок $|t| \le 2|x|$, $|\operatorname{Im} t| \le \delta\sigma(x)$ имеем, что

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Re}\xi| \le |\operatorname{Re} t| + 2e(1+\beta)r \le 2|x| + 8e|y|\,,\\ &|\operatorname{Im}\xi| \le |\operatorname{Im} t| + 2e(1+\beta)r \le \delta\sigma(x) + 8e|y| \le (8e+1)|y|\,.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\omega(\operatorname{Re}\xi) \le \omega(2|x| + 8e|y|) \le K\big(\omega(x) + \omega(y)\big) + K \le\\ \le K\sigma(x) + KA|y| + K \le K\Big(\frac{1}{\delta} + A\Big)|y| + K\,.\end{aligned}$$

На основании (1.4.26) тогда получаем, что $A_2 \ge C_2 \exp\{-L_2|y|\}$, где $C_2 := c^{-H_1(H+1)} \exp\big\{-\varepsilon K H_1(H+1)\big\}$, $L_2 := H_1(H+1)\big\{\varepsilon K\big(\frac{1}{\delta} + A\big) + (8e+1)l\big\}$.

В заключение оценим A_3. Пусть $\xi \in \mathbb{C}$ и $|\xi - w| = 4er_1$. Поскольку точка z находится внутри соответствующей окружности, то $|\xi - z| \le 8er_1 = 8e\beta r \le e|y|$. Соответственно,

$$|\operatorname{Re}\xi| \le |x| + e|y|\,,\ \ |\operatorname{Im}\xi| \le (e+1)|y|\,.$$

Точно так же, как в предыдущем случае, получаем, что $A_3 \ge C_3 \exp\{-L_3|y|\}$, где $C_3 := C^{-H} \exp\big\{-\varepsilon K H\big\}$, $L_3 := H\big\{\varepsilon K\big(\frac{1}{\delta} + A\big) + (e+1)l\big\}$.

Объединяя установленные оценки и учитывая, что $|\operatorname{Im}\zeta| \ge |y| - \operatorname{diam} S_z \ge \frac{|y|}{2}$ для всех $\zeta \in S_z$, заключаем, что

$$|\mu(\zeta)| \ge C_0 \exp\{-L_0|y|\}\,,\ \zeta \in S_z\,,$$

где $C_0 := C_1 \cdot C_2 \cdot C_3$, $L_0 := 2(L_1 + L_2 + L_3)$.

2) Допустим теперь, что $|x| < R_0$. В этом случае введем в рассмотрение точку $z_0 := x_0 + iy_0$ с $x_0 := R_0 \operatorname{sgn} x$, $y_0 := y$. При этом $|x_0| = R_0$, $|y_0| \geq \delta\sigma(x_0)$. Как в пункте 1), для точки z_0 найдем близкую к ней относительно σ точку $t \in \mathbb{C}$, в которой $|\mu|$ имеет подходящую оценку снизу. Далее точно так же построим окружность с центром в точке t радиуса ρ и на ней найдем точку w. Второй шаг — построение искомой окружности S_z будет несколько отличаться от пункта 1). Именно, мы применим лемму 1.3.2 к функции μ, точке w и радиусам $r_2 := R_0 + \beta r$, где $r := |z_0 - t|$, и $R_2 := \frac{10}{9} r_2$. В результате получим окружность S_z с центром в точке w радиуса $\rho_2 \in (r_2, R_2)$, на которой $|\mu|$ имеет оценку снизу. Нетрудно видеть, что точка z находится внутри этой окружности, поскольку

$$|z - w| \leq |z - z_0| + |z_0 - w| \leq R_0 + \beta r = r_2 < \rho_2 \,.$$

Далее, так как для r по-прежнему имеет место неравенство (1.4.23) и так как $|y| \geq |z| - |x| \geq 4R_0$, получаем, что

$$\operatorname{diam} S_z = 2\rho_2 \leq \frac{20}{9}(R_0 + \beta r) \leq \frac{20}{9}\Big(\frac{|y|}{4} + \frac{|y|}{32}\Big) = \frac{5}{8}\,|y| \,.$$

Оценка снизу для $|\mu|$ на окружности S_z получается практически так же, как в пункте 1). Предложение доказано. $\square$

Теперь сформулируем и докажем результат, из которого с учетом соотношений (1.1.9) будет прямо вытекать справедливость теоремы 1.4.2.

Теорема 1.4.5. *Пусть ω, σ — весовые функции; $\omega \leq \sigma$; $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Если для целой функции μ выполнено условие*

(B_0) $\forall p \in (0,1)$ $\exists q \in (0,1) \mid \forall \delta \in (0,\infty)$ $\exists R_0 > 0$: *каждую точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \geq R_0$ и $|y| \leq \delta\sigma(x)$ можно погрузить внутрь окружности S_z с $\operatorname{diam} S_z \leq \delta\sigma(x)$, для всех точек ζ которой справедлива оценка*

$$|\mu(\zeta)| \geq \exp\big\{p\omega(\operatorname{Re}\zeta) - q\sigma(\operatorname{Re}\zeta)\big\}\,, \tag{1.4.27}$$

то $T_\mu\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^1_{(\sigma)}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить справедливость утверждения (iv). Возьмем произвольную функцию $f \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ такую, что $\frac{f}{\check{\mu}} \in H(\mathbb{C})$, и покажем, что тогда $\frac{f}{\check{\mu}} \in H^{1,\infty}_{(\sigma)}(\mathbb{C})$.

Поскольку $f \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то имеются $p \in (0,1)$, $l \in (0,\infty)$ и $C \in (0,\infty)$ такие, что

$$|f(\zeta)| \le C \exp\left\{p\omega(\operatorname{Re}\zeta) + l|\operatorname{Im}\zeta|\right\}, \ \zeta \in \mathbb{C}\,. \tag{1.4.28}$$

Пользуясь условием (B_0), находим по величине p соответствующее $q \in (p,1)$. Выберем вспомогательное число $q_1 \in (q,1)$. Свойство (1.1.3) весовых функций позволяет найти $\delta = \delta(q) \in \left(0, \frac{1-q_1}{l}\right)$ и $C_1 > 0$, при которых

$$q\sigma\big((1+\delta A)t\big) \le q_1\sigma(t) + C_1\,, \ t \ge 0\,.$$

По условию, для μ справедливо утверждение (B_0). Так как это утверждение, очевидно, сильнее, чем утверждение (A), то, в силу предложения 1.4.1, для μ выполняется еще и условие (C). Используя оба утверждения (B_0) и (C), находим по величине δ подходящие $R_0 > 0$ и $L > 0$. Рассмотрим теперь произвольную точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \ge R_0$.

1) Если $|y| \le \delta\sigma(x)$, то, в силу (B_0), точку z можно погрузить внутрь окружности S_z с $\operatorname{diam} S_z \le \delta\sigma(x)$, для всех точек ζ которой имеет место оценка (1.4.27). С учетом (1.4.28) тогда получаем, что

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \le C \exp\left\{q\sigma(\operatorname{Re}\zeta) + l|\operatorname{Im}\zeta|\right\}, \ \zeta \in S_z\,.$$

При этом

$$\begin{aligned} &q\sigma(\operatorname{Re}\zeta) \le q\sigma(|x| + \operatorname{diam} S_z) \le q\sigma\big((1+\delta A)x\big) \le q_1\sigma(x) + C_1\,;\\ &|\operatorname{Im}\zeta| \le |y| + \operatorname{diam} S_z \le |y| + \delta\sigma(x)\,. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \le C_2 \exp\left\{q_2\sigma(x) + l|y|\right\}, \ \zeta \in S_z\,,$$

где $C_2 := Ce^{C_1}$, $q_2 := q_1 + \delta l < 1$.

2) Если $|y| > \delta\sigma(x)$, то, в силу (C), точку z можно погрузить внутрь окружности S_z с $\operatorname{diam} S_z \le \frac{5}{8}|y|$, на которой выполняется неравенство (1.4.21).

Соответственно,

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \le C \exp\left\{p\omega(\operatorname{Re}\zeta) + (l+L)|\operatorname{Im}\zeta|\right\}, \ \zeta \in S_z \,. \tag{1.4.29}$$

Пользуясь свойством (α) веса ω, найдем константу $C_0 > 0$, при которой

$$p\omega(s+t) \le q\big(\omega(s)+\omega(t)\big) + C_0\,, \ s,t \ge 0\,.$$

Тогда для всех $\zeta \in S_z$

$$\begin{aligned} p\omega(\operatorname{Re}\zeta) + (l+L)|\operatorname{Im}\zeta| &\le p\omega\big(|x| + \operatorname{diam} S_z\big) + (l+L)\big(|y| + \operatorname{diam} S_z\big) \le \\ &\le q\big(\omega(x)+\omega(y)\big) + 2(l+L)|y| + C_0 \le q\omega(x) + l_1|y| + C_0\,, \end{aligned}$$

где $l_1 := 2(l+L) + qA$. Предполагая константу $C_3 > 0$ такой, что $\omega(t) \le \sigma(t) + C_3$, $t \ge 0$, и возвращаясь к (1.4.29), окончательно получаем, что

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \le C_4 \exp\left\{q\sigma(x) + l_1|y|\right\}, \ \zeta \in S_z\,,$$

где $C_4 := C\exp C_0 + qC_3$.

Объединяя оба случая, заключаем, что

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \le (C_2 + C_4)\exp\left\{q_2\sigma(x) + l_1|y|\right\}, \ \zeta \in S_z\,.$$

По принципу максимума модуля аналитической функции тогда данная оценка выполняется и для точки z. Таким образом, $\frac{f}{\check{\mu}} \in H^{1,\infty}_{(\sigma)}(\mathbb{C})$. □

1.5 Примеры операторов свертки

Заключительный параграф главы содержит некоторые примеры операторов и уравнений свертки в пространствах Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ УДФ нормального типа, иллюстрирующие результаты из параграфов § 1.3 и § 1.4.

Пример 1.5.1. Пусть $I = \mathbb{R}$; $p \in (0,\infty)$; ω — произвольная весовая функция; $\mu(z) = \sin z$. Оператор свертки T_μ с символом μ в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ представляет собой разностный оператор

$$(T_\mu f)(x) = \frac{1}{2i}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)\,, \ x \in \mathbb{R},$$

причем данный оператор сюръективен на $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

Действительно, во-первых, поскольку для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|\mu(z)| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right| \le \frac{1}{2}\Big(e^{-\operatorname{Im} z} + e^{\operatorname{Im} z}\Big) \le e^{|\operatorname{Im} z|},$$

то $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, т. е. μ является символом оператора свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

Далее, проверим, что μ представляет собой делитель пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Возьмем $r_0 > 0$ так, чтобы $\omega(r_0) \ge 1$. Для каждого $\delta \in (0, \pi/2)$ положим $C_\delta := \sin\delta$. Легко видеть, что

$$\max\Big\{|\sin t| : |t - x| \le \delta\Big\} \ge C_\delta\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, если $|x| \ge r_0$, то найдется $t \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|t - x| \le \delta \le \delta\omega(x) \text{ и } |\mu(t)| = |\sin t| \ge C_\delta \ge C_\delta\, e^{-\varepsilon\omega(t)}\,,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Выпишем явно действие оператора T_μ на функции $f_z(x) = e^{-ixz}$, $z \in \mathbb{C}$:

$$(T_\mu f_z)(x) = f_z(x) \cdot \check{\mu}(z) = e^{-ixz} \cdot \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{-i(x+1)z} - e^{-i(x-1)z}\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\big(f_z(x+1) - f_z(x-1)\big)\,.$$

Поскольку оператор сдвига, как и оператор T_μ, действует непрерывно в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$, то для всех $f \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$

$$(T_\mu f)(x) = \frac{1}{2i}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

На основании теоремы 1.3.1 тогда заключаем, что оператор T_μ сюръективен на $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$, так что разностное уравнение

$$\frac{1}{2i}\big(f(x+1) - f(x-1)\big) = g(x)$$

имеет решение в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

Пример 1.5.2. Пусть $\omega(t) = t^\rho$, $0 < \rho < 1$; $p \in (0, \infty)$; $a \in (0, \infty]$; $I = (-a, a)$ — конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$; $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ — возрастающая последовательность положительных чисел такая, что

$$\frac{n}{\lambda_n^\rho} \to 0\,,\ n \to \infty.$$

Например, можно взять $\lambda_n = n^{\frac{2}{\rho}}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию

$$\mu(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \ z \in \mathbb{C}.$$

В силу наложенного условия на $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, μ имеет нулевой тип при порядке ρ, а значит, является сильным мультипликатором пространств $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$. Поскольку $|\mu(t)| \geq 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$, μ — делитель пространств $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$ при любом $a \in (0, \infty]$. Следовательно, оператор свертки T_μ с символом μ (дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) сюръективен на $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$.

Пример 1.5.3. Пусть ω — произвольная весовая функция такая, что $\ln^2 t = o(\omega(t))$, $t \to \infty$; $p \in (0, \infty)$; $a \in (0, \infty]$; $I = (-a, a)$ — конечный интервал в $\mathbb{R}$ либо вся числовая прямая. Далее, пусть $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая лакунарная последовательность положительных чисел, т. е. такая, что

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1 .$$

Положим

$$\mu(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \ z \in \mathbb{C}. \tag{1.5.1}$$

Нетрудно проверить, что при некотором $C > 0$

$$\ln \max\{|\mu(z)| : |z| = r\} \leq C \ln^2 r\,, \ r \geq e\,,$$

причем пример последовательности $\lambda_n = e^n$, $n \in \mathbb{N}$, показывает, что данная оценка является точной. Следовательно, μ будет сильным мультипликатором пространства $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$. С другой стороны, для всех x с $\lambda_n + 1 \leq |x| \leq \lambda_{n+1} - 1$

$$\ln |\mu(x)| \geq -2 \ln x - C\,,$$

откуда вытекает, что μ — делитель $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$. Значит, соответствующий оператор свертки T_μ сюръективен на $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(I)$.

Заметим также, что канонические произведения вида (1.5.1) с симметричными вещественными нулями рассматривались, в частности, в работах [44, 45], посвященных проблеме полной регулярности роста таких произведений.

Пример 1.5.4. Пусть $\omega(t) = t^\rho$, $0 < \rho < 1$; $a \in (0, \infty]$; $I = (-a, a)$ —

конечный интервал в $\mathbb{R}$ либо вся числовая прямая; $p \in (0,\infty)$. Пусть

$$\mu(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{x_j}\Big)^{p_j}, \ z \in \mathbb{C}\,, \tag{1.5.2}$$

где $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ и $(p_j)_{j=1}^{\infty}$ — возрастающие последовательности соответственно положительных и натуральных чисел, удовлетворяющие условиям:

$$x_1 \ge 2^{\frac{1}{1-\rho}} + 1\,;\ \ x_j^{\rho} \le p_j \ln x_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,; \tag{1.5.3}$$

$$x_j \ge 2^{j+1} p_j x_k\,,\ j \ge k+1\,,\ k \in \mathbb{N}\,; \tag{1.5.4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{x_k^{\rho}} = 0\,;\ \lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{k-1} p_j}{p_k} = 0\,. \tag{1.5.5}$$

Покажем, что при этом указанная функция μ будет являться сильным мультипликатором пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, но не будет делителем $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Это будет означать, что μ порождает в $\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(I)$ оператор свертки — дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, который не является сюръективным.

Из условий (1.5.5) сразу же вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} p_j}{x_k^{\rho}} = 0\,.$$

Следовательно, функция μ имеет при порядке ρ минимальный тип, так что оценка (1.2.3) для $\omega(t) = t^{\rho}$ выполнена.

Чтобы проверить нарушение условий (D_1) и (D_2) теорем 1.3.1 и 1.3.2, зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, возьмем $w \in \mathbb{C}$ с $|w - x_k| \le x_k^{\rho}$ и рассмотрим

$$\ln|\mu(w)| = \sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\Big|1 - \frac{w}{x_j}\Big| + p_k \ln\Big|1 - \frac{w}{x_k}\Big| + \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \ln\Big|1 - \frac{w}{x_j}\Big|\,. \tag{1.5.6}$$

Во-первых,

$$p_k \ln\Big|1 - \frac{w}{x_k}\Big| = p_k \ln \frac{|w - x_k|}{x_k} \le p_k(\rho - 1)\ln x_k\,.$$

Во-вторых,

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\left|1-\frac{w}{x_j}\right| \le \sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\left(1+\frac{|w|}{x_j}\right) \le \sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\left(1+\frac{2x_k}{x_j}\right) \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{k-1} p_j \cdot \ln\left(1+\frac{2}{x_1}\,x_k\right) \le \sum_{j=1}^{k-1} p_j \cdot \ln x_k\,.$$

В силу условия (1.5.5) найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k \ge k_0$

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j < \frac{1-\rho}{2}\,p_k\,.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\left|1-\frac{w}{x_j}\right| < \frac{1-\rho}{2}\,p_k \ln x_k\,.$$

Наконец, пользуясь условием (1.5.4), получаем, что

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \ln\left|1-\frac{w}{x_j}\right| \le \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \ln\left(1+\frac{|w|}{x_j}\right) \le \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \frac{|w|}{x_j} \le$$
$$\le \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \cdot \frac{2x_k}{x_j} \le \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \le 1\,.$$

Возвращаясь к (1.5.6) и применяя второе условие (1.5.3), при $k \ge k_0$ тогда имеем:

$$\ln|\mu(w)| < -\frac{1-\rho}{2}\,p_k \ln x_k + 1 \le -\frac{1-\rho}{2}\,x_k^{\rho} + 1\,.$$

Следовательно, увеличив, если это необходимо, k_0, можно считать, что

$$\ln|\mu(w)| < -\frac{1-\rho}{3}\,x_k^{\rho} \le -\frac{1-\rho}{3}\left(\frac{|w|}{2}\right)^{\rho},\ k \ge k_0\,.$$

Итак, при $k \ge k_0$ для всех w с $|w-x_k| \le x_k^{\rho}$

$$|\mu(w)| < e^{-\varepsilon_0 |w|^{\rho}}\,,$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1-\rho}{3\cdot 2^{\rho}}$. Значит, условия (D_1) и (D_2) нарушены.

Таким образом, для данной функции μ оператор свертки T_μ уже не будет сюръективно отображать $\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(I)$ на $\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(I)$, а значит, существуют функции

$g \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$, для которых дифференциальное уравнение бесконечного порядка $T_\mu f = g$ не имеет решений в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$.

В заключение укажем конкретные примеры последовательностей $(x_j)_{j=1}^\infty$ и $(p_j)_{j=1}^\infty$, удовлетворяющих условиям (1.5.3)–(1.5.5). Пусть

$$x_1 = 2^{\frac{1}{1-\rho}} + 1\,,\ x_{j+1} = \left(2^{j+2} x_j\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\,,\ j \in \mathbb{N}\,; \tag{1.5.7}$$

$$p_j = \left[\frac{x_j^\rho}{\sqrt{\ln x_j}}\right] + 1\,,\ j \in \mathbb{N}\,. \tag{1.5.8}$$

Условие (1.5.3) и первое условие (1.5.5), очевидно, выполнены.

Проверим (1.5.4). Пусть $j \ge k+1$. Тогда

$$x_k \le x_{j-1} = \frac{x_j^{1-\rho}}{2^{j+1}}\,,$$

так что

$$\frac{x_j}{2^{j+1} p_j x_k} \ge \frac{x_j \sqrt{\ln x_j} \cdot 2^{j+1}}{2^{j+1} \cdot x_j^\rho \cdot x_j^{1-\rho}} = \sqrt{\ln x_j} \ge 1\,.$$

Наконец,

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k-1} p_j}{p_k} \le \frac{(k-1)p_{k-1}}{p_k} \le \frac{(k-1)\cdot 2x_{k-1}^\rho}{x_k^\rho} \sqrt{\frac{\ln x_k}{\ln x_{k-1}}} =$$

$$= (k-1) 2^{1-\frac{k}{1-\rho}} \cdot x_{k-1}^{-\frac{\rho^2-\rho+1}{1-\rho}} \cdot \sqrt{\frac{k\ln 2 + \ln x_{k-1}}{(1-\rho)\ln x_{k-1}}} \to 0\,,\ k \to \infty\,.$$

Пример 1.5.5. Пусть $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t)$ — некоторый уточненный порядок, $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$; I — конечный интервал либо $I = \mathbb{R}$. Допустим, что мультипликатор μ задан своими простыми нулями:

$$\mu(z) = \prod_{s=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{\lambda_s}\right),\ |\lambda_s| \uparrow \infty\,. \tag{1.5.9}$$

Будем предполагать, что

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s}{|\lambda_s|^{\rho(|\lambda_s|)}} = 0\,. \tag{1.5.10}$$

Далее, допустим, что нули (λ_s) функции μ образуют R-множество, т. е. удовлетворяют условию (C') (см. [29, с. 126]): точки λ_s расположены внутри углов с общей вершиной в начале координат, не имеющих других общих точек, причем если перенумеровать точки множества (λ_s) внутри любого из этих углов в порядке возрастания их модулей, то для точек, попавших внутрь одного угла,

$$|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| > d|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)} \tag{1.5.11}$$

при некотором $d > 0$. Тогда, в силу [30, с. 9–10], вне некоторого исключительного множества кружков $\widetilde{C}$ с конечной суммой радиусов $\sum_j r_j < \infty$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\ln|\mu(z)|}{|z|^{\rho(|z|)}} = 0\,. \tag{1.5.12}$$

Из (1.5.12) (как и из (1.5.10)) вытекает, что μ имеет нулевой тип при порядке $\rho(r)$ и, соответственно, является сильным мультипликатором пространств $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Значит, порождаемый данным символом оператор T_μ также представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Кроме того, (1.5.12) обеспечивает, что для μ выполнены условия (F_1) и (F_2) теорем 1.3.1 и 1.3.2, так что T_μ будет сюръективен на каждом из пространств $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Отметим, что идея рассмотреть подобные операторы свертки принадлежит профессору А. Ю. Попову.

Пример 1.5.6. Пусть $\omega(t) = \sigma(t) = t^\rho$, $\rho \in (0,1)$; $p, q \in (0,\infty)$; последовательности $(x_j)_{j=1}^\infty$ и $(p_j)_{j=1}^\infty$ удовлетворяют условиям (1.5.3)–(1.5.5) и дополнительным условиям

$$p_k \ln x_k \le B x_k^\rho\,,\ k\in\mathbb{N}\,; \tag{1.5.13}$$

$$x_{k+1} \le B\big(2^{k+2}x_k\big)^{\frac{1}{1-\rho}}\,,\ k\in\mathbb{N}\,. \tag{1.5.14}$$

Здесь B — некоторая константа, большая 1. Заметим сразу, что последовательности (1.5.7), (1.5.8), как нетрудно видеть, удовлетворяют (1.5.13) и (1.5.14).

Далее, пусть целая функция μ определяется равенством (1.5.2), а T_μ — порождаемый ею оператор свертки. Как вытекает из Примера 1.5.4, он не будет сюръективным ни в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$, ни в $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$.

Покажем, что если для чисел p и q выполняется неравенство

$$q - p \ge B\big(2^\rho(2-\rho) + 4\big)\,, \tag{1.5.15}$$

то $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$. Для этого проверим справедливость утверждения (B) теоремы 1.4.2. Возьмем произвольное $\delta\in(0,1)$.

а) Сначала оценим $|\mu(\zeta)|$ на окружностях $|\zeta - x_k| = \frac{\delta}{2}x_k^\rho$, $k \in \mathbb{N}$. Имеем, что

$$\ln|\mu(\zeta)| = \sum_{j=1}^{k-1} p_j \ln\frac{|\zeta - x_j|}{x_j} + p_k \ln\frac{|\zeta - x_k|}{x_k} + p_{k+1}\ln\frac{|\zeta - x_{k+1}|}{x_{k+1}} + \\ + \sum_{j=k+2}^{\infty} p_j \ln\frac{|\zeta - x_j|}{x_j}\,. \quad (1.5.16)$$

Обозначим для краткости слагаемые в правой части равенства через A_1, A_2, A_3 и A_4. Оценим их по отдельности.

В силу (1.5.4), при всех $1 \le j \le k-1$

$$|\zeta - x_j| \ge x_k - \frac{\delta}{2}x_k^\rho - x_j \ge \frac{1}{2}x_k - x_j \ge 2^k p_k x_j - x_j \ge 2^k x_j\,,$$

так что $A_1 \ge k\ln 2\sum_{j=1}^{k-1} p_j$.

Далее, поскольку $|\zeta - x_j| \ge x_j - x_{k+1} \ge x_j - \frac{1}{2^{j+1}p_j}x_j$, $j \ge k+2$, то на основании вспомогательного неравенства $\ln(1-x) \ge -4x$, $x \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$, получаем, что $A_4 \ge -\sum_{j=k+2}^{\infty}\frac{1}{2^{j-1}} = -\frac{1}{2^k}$.

При $j = k+1$ имеем следующую оценку:

$$|\zeta - x_{k+1}| \ge x_{k+1} - \left(x_k + \frac{\delta}{2}x_k^\rho\right) \ge x_{k+1} - 2x_k \ge \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}p_{k+1}}\right)x_k\,.$$

Значит, $A_3 \ge -\frac{1}{2^{k-1}}$.

Наконец, рассмотрим случай $j = k$ и слагаемое A_2. Можно, очевидно, считать k настолько большим, что $\frac{1}{x_k} \le \frac{\delta}{2}$. Тогда в силу (1.5.13),

$$A_2 = p_k \ln\left(\frac{\delta}{2}x_k^{\rho-1}\right) \ge -(2-\rho)p_k\ln x_k \ge -(2-\rho)Bx_k^\rho\,.$$

Так как при этом $|\zeta| \ge x_k - \frac{\delta}{2}x_k^\rho \ge \frac{1}{2}x_k$, то $A_2 \ge -(2-\rho)2^\rho B|\zeta|^\rho$.

Возвращаясь к равенству (1.5.16) и объединяя все полученные оценки, заключаем, что

$$\ln|\mu(\zeta)| \ge -(2-\rho)2^\rho B|\zeta|^\rho + k\ln 2\sum_{j=1}^{k-1}p_j - \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} \ge -(2-\rho)2^\rho B|\zeta|^\rho\,.$$

б) Оценим теперь $|\mu(\zeta)|$ для произвольной точки $\zeta = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|y| \le \delta|x|^\rho$ и $|\zeta - x_k| \ge \frac{\delta}{4}x_k^\rho$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть сначала $x \ge x_1$. Найдем $k \in \mathbb{N}$

такое, что $\frac{x_{k-1}+x_k}{2} < x \le \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$. Нетрудно видеть, что при предположении $\frac{1}{x_k} \le \frac{\delta}{4}$ для A_1, A_2 и A_4 будут справедливы те же оценки, что в пункте а). Остается рассмотреть A_3. Очевидно, что

$$\frac{x}{x_{k+1}} < \frac{1}{2} + \frac{x_k}{2x_{k+1}} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+3}p_{k+1}} < \frac{3}{4}.$$

На основании приведенного выше вспомогательного неравенства и оценки (1.5.4) тогда получаем, что

$$A_3 \ge p_{k+1} \ln\Big(1 - \frac{x}{x_{k+1}}\Big) \ge -\frac{4p_{k+1}x}{x_{k+1}} \ge -\frac{4x}{2^{k+2}x_k}\,.$$

Далее, в силу (1.5.14), $x < B\big(2^{k+2}x_k\big)^{\frac{1}{1-\rho}}$, откуда $\frac{x}{2^{k+2}x_k} < Bx^\rho$. Таким образом, $A_3 \ge -4Bx^\rho \ge -4B|\zeta|^\rho$. В целом, $\ln|\mu(\zeta)| \ge -B\big(2^\rho(2-\rho)+4\big)|\zeta|^\rho$.

Если $x \le 0$, то $\ln|\mu(\zeta)| > 0$.

Понятно, что при выполнении неравенства (1.5.15) из установленных оценок вытекает справедливость утверждения (B) теоремы 1.4.2.

Пример 1.5.7. Пусть теперь

$$\omega(t) = t^\rho\,,\ \rho \in \Big(0, \frac{1}{3}\Big)\,; \quad \sigma(t) = t^{\rho_1}\,,\ \rho_1 \in \Big(\frac{2\rho}{1-\rho}, 1\Big).$$

В качестве символа оператора свертки возьмем целую функцию $\mu(z)$, задаваемую равенством (1.5.2), где $(x_j)_{j=1}^\infty$ и $(p_j)_{j=1}^\infty$ удовлетворяют условиям (1.5.3–1.5.5), (1.5.13) и (1.5.14). Соответствующий оператор свертки T_μ не является сюръективным ни в одном пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$, $p \in (0,\infty)$. Покажем, что при этом он будет сюръективным в $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ при любом $q \in (0,\infty)$. Для этого, в соответствии с теоремой 1.3.1, достаточно проверить справедливость утверждения

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \forall\delta > 0\ \ \exists R_0 > 0\,|\,\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists t \in \mathbb{R}:\ |t-x| \le \delta x^{\rho_1} \text{ и } |\mu(t)| \ge \exp\big\{-\varepsilon t^{\rho_1}\big\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ произвольны. Если $x \in \mathbb{R}$ и $|x - x_k| \le \frac{\delta}{2}x_k^{\rho_1}$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, то в качестве искомой точки t возьмем $t = x_k + \frac{\delta}{2}x_k^{\rho_1}$. Точно так же, как в пункте а) примера 1.5.6, получаем, что при достаточно больших k

$$\ln|\mu(t)| \ge -B(2-\rho_1)x_k^\rho \ge -B(2-\rho_1)t^\rho \ge -\varepsilon t^{\rho_1}\,.$$

Если $x \in (x_1, \infty)$ и $|x - x_k| \geq \frac{\delta}{2} x_k^{\rho_1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то берем $t := x$. Рассуждая по аналогии с пунктом б) примера 1.5.6, заключаем, что

$$\ln|\mu(t)| \geq -B\big((2-\rho_1)+4\big)t^{\rho} \geq -\varepsilon t^{\rho_1}\,.$$

Наконец, если $x < 0$, то $\ln|\mu(x)| > 0$ так что в качестве точки t можно снова взять саму точку x.

Итак, мы доказали, что T_μ действует сюръективно в $\mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ при любом $q \in (0, \infty)$, так что $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{(\sigma)}(\mathbb{R})$.

ГЛАВА 2
ОБЩИЕ И ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРЛИНГА УДФ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

2.1 Общее решение однородного уравнения свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$

Пусть ω — произвольная весовая функция; $a \in (0, \infty)$; $I = (-a, a)$ — конечный интервал в $\mathbb{R}$; $p \in (0, \infty)$; $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Тогда соответствующий оператор свертки T_μ будет сюръективен на $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Как известно, если $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — последовательность нулей функции $\check{\mu}$, $|\lambda_s| \uparrow \infty$; k_s — кратность нуля λ_s, то экспоненциальные "мономы"

$$(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}\,, \quad l = 0, \dots, k_s - 1\,, \quad s = 1, 2, \dots\,, \tag{2.1.1}$$

принадлежат $\ker T_\mu$, т. е. являются решениями однородного уравнения свертки

$$T_\mu f = 0. \tag{2.1.2}$$

При этом система функций (2.1.1) будет полна в $\ker T_\mu$. Это означает, что $\ker T_\mu$ допускает спектральный синтез. Данный факт стандартным образом получается с помощью критерия Банаха о полноте на основании того, что μ — делитель $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Естественно возникает вопрос о существовании в $\ker T_\mu$ базиса, состоящего из приведенных элементарных решений, а точнее, из их линейных комбинаций, поскольку, как установил А. Ф. Леонтьев в [26], элементарные решения необходимо группировать, чтобы обеспечить абсолютную сходимость соответствующих рядов. Ясно, что имеет смысл рассматривать лишь случай бесконечного числа нулей, когда $\ker T_\mu$ бесконечномерно.

В настоящем параграфе мы строим специальное открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^\infty$ нулевого множества $N(\check{\mu})$ функции $\check{\mu}$: именно, в окрестностях границ ∂U_j множеств U_j для $|\check{\mu}|$ должны выполняться определенные оценки снизу. Именно поэтому близко расположенные нули приходится группировать. После этого мы группируем соответствующие элементарные решения и устанавливаем следующий основной результат параграфа.

Теорема 2.1.1. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $a \in (0,\infty)$; $I=(-a,a)$; $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; $\check{\mu}(z)=\mu(-z)$, $z\in\mathbb{C}$; $N(\check{\mu})=(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — последовательность нулей функции $\check{\mu}$, $|\lambda_s|\uparrow\infty$; k_s — кратность нуля λ_s; $(U_j)_{j=1}^\infty$ — специальное покрытие множества $N(\check{\mu})$. Тогда в $\ker T_\mu$ имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций элементарных решений (2.1.1), отвечающих нулям λ_s, попавшим в одно и то же множество U_j.*

Построение покрытия $(U_j)_{j=1}^\infty$ множества $N(\check{\mu})$, естественно, базируется на условии (F_2), которому по предположению удовлетворяет символ μ, а также том факте, что в случае конечного интервала все символы операторов свертки имеют нулевой тип при порядке 1, а значит, являются функциями вполне регулярного роста.

Сделаем предварительно несколько замечаний. Из полной регулярности роста функции μ вытекает, что имеется исключительное множество кружков $\mathcal{E}_j=\{z\in\mathbb{C}: |z-\zeta_j|<\rho_j\}$ нулевой линейной плотности $\Big(\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r}\sum\limits_{|\zeta_j|<r}\rho_j=0\Big)$ такое, что

$$\lim_{|z|\to\infty, z\notin\mathcal{E}_j}\frac{\ln|\check{\mu}(z)|}{|z|}=0\,.$$

При этом в силу [24, лемма 1] кружки $\mathcal{E}_j$ можно считать попарно не пересекающимися.

Для произвольного $\varepsilon>0$ введем в рассмотрение следующее открытое в $\mathbb{C}$ множество

$$U_\varepsilon=\Big\{z\in\mathbb{C}\,:\,\ln|\check{\mu}(z)|<-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}z)-\varepsilon|\operatorname{Im}z|\Big\}\,,$$

содержащее в себе нулевое множество $N_(\check{\mu})$ функции $\check{\mu}$. Для дальнейшего нам необходимо оценить размеры связных компонент множества U_ε. С этой целью возьмем $\delta\in\big(0,\frac{1}{4}\big)$ и, пользуясь условием (F_2) теоремы 1.3.2, по ε и δ найдем соответствующее r_0. Будем сразу предполагать r_0 настолько большим, что

$$\frac{1}{r}\sum_{|\zeta_j|<r}\rho_j<\delta^2\,,\ r\ge r_0\,; \tag{2.1.3}$$

$$\frac{\ln|\check{\mu}(z)|}{|z|}>-\frac{\varepsilon\delta}{\delta+1}\,,\ |z|\ge r_0\,,\ z\notin\bigcup_j\mathcal{E}_j\,.$$

Заметим сразу, что для всех z с $|z|\ge r_0$ и $|\mathrm{Im}\,z|>\delta|\mathrm{Re}\,z|$, не попадающих в исключительные кружки $\mathcal{E}_j$,

$$\ln|\check{\mu}(z)|>-\frac{\varepsilon\delta}{\delta+1}\,|z|\ge-\frac{\varepsilon\delta}{\delta+1}\Big(\frac{1}{\delta}\,|\mathrm{Im}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|\Big)=-\varepsilon|\mathrm{Im}\,z|\,,$$

так что эти z не принадлежат U_ε.

Докажем вспомогательную лемму. Как и ранее, $\|z\|=\max\{|\mathrm{Re}\,z|,|\mathrm{Im}\,z|\}$.

Лемма 2.1.1. *Пусть V — произвольная связная компонента множества U_ε, целиком лежащая вне квадрата $\|z\|\le r_0$. Если в V имеется точка z с $|\mathrm{Im}\,z|\le\delta|\mathrm{Re}\,z|$, то $\mathrm{diam}\,V\le 2\delta\omega(\mathrm{Re}\,z)+2\delta|\mathrm{Im}\,z|$. В противном случае $\mathrm{diam}\,V\le 8\delta|\mathrm{Im}\,z|$, где z — произвольная точка из V.*

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай, когда V содержит в себе точку z с $|\mathrm{Im}\,z|\le\delta|\mathrm{Re}\,z|$. При этом $\|z\|=|\mathrm{Re}\,z|>r_0$, так что на основании (F_2) существует окружность S_z, содержащая z внутри себя, для всех точек ζ которой выполняется неравенство

$$|\check{\mu}(\zeta)|\ge\exp\big\{-\varepsilon\omega(\mathrm{Re}\,\zeta)-\varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta|\big\}. \tag{2.1.4}$$

Значит, S_z не пересекается с V, так что V целиком лежит внутри S_z. Поэтому $\mathrm{diam}\,V\le 2R_z\le 2\delta\omega(\mathrm{Re}\,z)+2\delta|\mathrm{Im}\,z|$.

2) Разберем теперь ситуацию, когда $|\mathrm{Im}\,z|>\delta|\mathrm{Re}\,z|$ для всех $z\in V$. Приведенные перед леммой рассуждения показывают, что тогда V целиком содержится в каком-то исключительном кружке $\mathcal{E}_j$, так что $\mathrm{diam}\,V\le 2\rho_j$. Так как $|\zeta_j|+\rho_j>r_0$, то из (2.1.3) при $r=|\zeta_j|+\rho_j$ получаем, что $\rho_j<\delta^2(|\zeta_j|+\rho_j)$, откуда $|\zeta_j|>\frac{1-\delta^2}{\delta^2}\,\rho_j$. Если теперь z — произвольно выбранная точка из V, то

$$|z|\ge|\zeta_j|-\rho_j>\frac{1-2\delta^2}{\delta^2}\,\rho_j>\frac{1}{2\delta^2}\,\rho_j\,.$$

Следовательно,

$$\mathrm{diam}\,V\le 2\rho_j\le 4\delta^2|z|\le 4\delta^2(|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|)<8\delta|\mathrm{Im}\,z|\,.$$

$\square$

Приступим к построению искомого покрытия $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ множества $N(\check{\mu})$. Для этого возьмем две числовые последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$ и $\delta_k \downarrow 0$. Положим

$$U^{(k)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \ln|\mu(z)| < -\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - \varepsilon_k |\operatorname{Im} z| \right\}, \ k \in \mathbb{N}\,.$$

Ясно, что $N(\check{\mu}) \subset U^{(1)} \subset U^{(2)} \subset \ldots$. Далее, в соответствии с (F_2) для ε_k и δ_k найдем подходящие r_k, $r_k \uparrow \infty$. В дальнейшем нам понадобится предполагать r_k настолько большими, что

$$\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon_k |\operatorname{Im} z| > 2\,, \ |z| \geq r_k\,; \tag{2.1.5}$$

$$\omega(t) < \delta_k^2 t\,, \ t \geq r_k\,; \tag{2.1.6}$$

$$\ln|\check{\mu}(z)| < \varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon_k |\operatorname{Im} z|\,, \ |z| > r_k - 2\,. \tag{2.1.7}$$

В силу (α) можно также считать выполненным неравенство

$$\omega(t+2) + 2 \leq 2\omega(t)\,, \ t \geq r_1\,. \tag{2.1.8}$$

Наконец, понятно, что r_{k+1} можно при необходимости увеличить так, чтобы ни одна из компонент множества $U^{(k+1)}$, пересекающихся с $\|z\| = r_k$, не выходила за пределы множества $\|z\| < r_{k+1}$.

Выберем те связные компоненты множества $U^{(1)}$, которые пересекаются с квадратом $\|z\| \leq r_1$ и содержат внутри себя нули функции $\check{\mu}$. Занумеруем их $U_1, \ldots, U_{j_1-1}$. Тем самым покрыты все нули в квадрате $\|z\| \leq r_1$ и даже, возможно, некоторые дополнительные нули.

Рассмотрим теперь компоненты множества $U^{(2)}$, пересекающиеся с $r_1 < \|z\| \leq r_2$ и имеющие внутри себя нули, не покрытые на предыдущем шаге. Возьмем находящиеся в них компоненты $U^{(1)}$, содержащие указанные нули. Обозначим их $U_{j_1}, \ldots, U_{j_2-1}$. Они автоматически содержатся в области $\|z\| > r_1$. На данном шаге точно покрыты все нули в $\|z\| \leq r_2$ и, возможно, еще часть.

Проведем еще один этап построения. Выберем связные компоненты множества $U^{(3)}$, пересекающиеся с $r_2 < \|z\| \leq r_3$ и содержащие еще не покрытые нули функции $\check{\mu}$. Эти нули попадают в какие-то компоненты множества $U^{(2)}$, которые не рассматривались на предыдущем шаге, а значит, во-первых, не пересекаются с $U_1, \dots, U_{j_2-1}$, а во-вторых, целиком находятся в области $\|z\| > r_2$. Занумеруем их $U_{j_2}, \dots, U_{j_3-1}$.

Продолжая этот процесс далее, получим открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ множества $N(\check{\mu})$, обладающее следующими свойствами. Во-первых, при каждом $k \in \mathbb{N}$ для $j_k \le j < j_{k+1}$

$$\ln|\check{\mu}(z)| < -\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - \varepsilon_k |\operatorname{Im} z|\,,\ z \in U_j\,. \tag{2.1.9}$$

Во-вторых, $U_j \subset \{z \in \mathbb{C} : \|z\| > r_k\}$ при тех же j и k, а для $\operatorname{diam} U_j$ имеют место оценки:

а) если в U_j есть точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j| \le \delta_k |\operatorname{Re} z_j|$, то

$$\operatorname{diam} U_j \le 2\delta_k \omega(\operatorname{Re} z_j) + 2\delta_k |\operatorname{Im} z_j|\,; \tag{2.1.10}$$

б) если же в U_j таких точек нет, то

$$\operatorname{diam} U_j \le 8\delta_k |\operatorname{Im} z_j|\,, \tag{2.1.11}$$

где z_j — произвольно взятая точка из U_j.

Обозначим $m_j := \sum_{\lambda_s \in U_j} k_s$, $j \in \mathbb{N}$.

В следующей лемме для $|\check{\mu}|$ устанавливается оценка снизу в некоторой окрестности границы множества U_j. Для $j_k \le j < j_{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) положим

$$\sigma_j := \min_{z \in \overline{U}_j} \exp\big(-4\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - 4\varepsilon_k |\operatorname{Im} z|\big)\,. \tag{2.1.12}$$

Через $(\partial U_j)(\sigma_j)$ будем обозначать σ_j-окрестность границы ∂U_j множества U_j, т. е. $(\partial U_j)(\sigma_j) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \partial U_j) < \sigma_j\}$, где $d(z, \partial U_j)$ — расстояние от z до ∂U_j.

Лемма 2.1.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $j_k \le j < j_{k+1}$. Тогда для всех $z \in (\partial U_j)(\sigma_j)$*

$$\ln|\check{\mu}(z)| \ge -3\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - 3\varepsilon_k |\operatorname{Im} z|\,. \tag{2.1.13}$$

Доказательство. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $j_k \le j < j_{k+1}$ и $z \in (\partial U_j)(\sigma_j)$. Найдем точку $\zeta \in \partial U_j$ с $|z - \zeta| < \sigma_j$, а затем точку η, лежащую между z и ζ и такую, что $\check{\mu}(z) = \check{\mu}(\zeta) + \check{\mu}'(\eta)(z - \zeta)$. Введем для краткости обозначение $B := \varepsilon_k \omega(\operatorname{Re}\zeta) + \varepsilon_k |\operatorname{Im}\zeta|$. Так как $\zeta \in \partial U_j$, то $|\zeta| \ge r_k$, так что $B > 2$ на основании (2.1.5). Кроме того, $|\check{\mu}(\zeta)| \ge e^{-B}$.

Оценим $|\check{\mu}'(\eta)|$. Имеем, что

$$|\check{\mu}'(\eta)| \le \max\{|\check{\mu}(\xi)| : |\xi-\eta| \le 1\} \le \max\{|\check{\mu}(\xi)| : |\xi-\zeta| \le 2\}.$$

Так как для всех ξ с $|\xi-\zeta| \le 2$ выполняется неравенство $|\xi| \ge |\zeta|-2 \ge r_k-2$, то в силу (2.1.7) и (2.1.8)

$$|\check{\mu}(\xi)| \le \exp\left\{\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\xi)+\varepsilon_k|\operatorname{Im}\xi|\right\} \le \exp\left\{\varepsilon_k\omega(|\operatorname{Re}\zeta|+2)+\varepsilon_k(|\operatorname{Im}\zeta|+2)\right\} \le e^{2B}.$$

Значит, $|\check{\mu}'(\eta)| \le e^{2B}$.

Таким образом,

$$|\check{\mu}(z)| \ge |\check{\mu}(\zeta)| - |\check{\mu}'(\eta)|\,\sigma_j \ge e^{-B} - e^{2B}e^{-4B} = e^{-B} - e^{-2B} > e^{-\frac{3B}{2}}\,.$$

Снова применяем оценку (2.1.8), которая обеспечивает, что

$$\frac{3B}{2} \le \frac{3}{2}\big(\varepsilon_k\omega(|\operatorname{Re}z|+1)+\varepsilon_k(|\operatorname{Im}z|+1)\big) \le 3\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}z)+3\varepsilon_k|\operatorname{Im}z|\,,$$

и получаем нужное неравенство (2.1.13). □

Докажем еще две полезные технические леммы, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 2.1.3. *Для любых положительных чисел q, l и ε найдется постоянная $C>0$ такая, что при всех $j\in\mathbb{N}$ и $z\in U_j$*

$$q\omega(\operatorname{Re}z)+l|\operatorname{Im}z| \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}z_j)+(l+\varepsilon)|\operatorname{Im}z_j|+C\,, \tag{2.1.14}$$

$$q\omega(\operatorname{Re}z_j)+l|\operatorname{Im}z_j| \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}z)+(l+\varepsilon)|\operatorname{Im}z|+C\,. \tag{2.1.15}$$

Доказательство. 1) Установим сначала неравенство (2.1.14). Зафиксируем q, l и ε. Используя условие (1.1.3) и то, что $\delta_k\downarrow 0$, находим $\widetilde{k}\in\mathbb{N}$ и $C_1>0$ такие, что

$$q\omega\big((1+4\delta_{\widetilde{k}})t\big) \le \left(q+\frac{\varepsilon}{2}\right)\omega(t)+C_1\,,\ t\ge 0\,; \tag{2.1.16}$$

$$2l\delta_{\widetilde{k}} < \frac{\varepsilon}{2}\,; \tag{2.1.17}$$

$$(l+q\delta_{\widetilde{k}})(1+8\delta_{\widetilde{k}}) < l+\varepsilon\,. \tag{2.1.18}$$

Пусть $j\ge j_{\widetilde{k}}$ и пусть $k\ge\widetilde{k}$ таково, что $j_k\le j<j_{k+1}$. Рассмотрим отдельно случаи а) и б) расположения множества U_j.

а) Если U_j позволяет выбрать точку $z_j \in U_j$ с $|\operatorname{Im} z_j| \le \delta_k |\operatorname{Re} z_j|$, то для $\operatorname{diam} U_j$ справедлива оценка (2.1.10), так что для произвольной точки $z \in U_j$ с учетом (2.1.6) имеем:

$$|\operatorname{Re} z| \le |\operatorname{Re} z_j| + \operatorname{diam} U_j \le (1+4\delta_k)|\operatorname{Re} z_j|\,; \tag{2.1.19}$$
$$|\operatorname{Im} z| \le |\operatorname{Im} z_j| + \operatorname{diam} U_j \le 2\delta_k \omega(\operatorname{Re} z_j) + (1+2\delta_k)|\operatorname{Im} z_j|\,.$$

Следовательно, на основании (2.1.16)–(2.1.18)

$$\begin{aligned} q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| &\le q\omega\big((1+4\delta_k)\operatorname{Re} z_j\big) + l\big(2\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j) + (1+2\delta_k)|\operatorname{Im} z_j|\big) \le \\ &\le \left(q + \frac{\varepsilon}{2} + 2l\delta_k\right)\omega(\operatorname{Re} z_j) + l(1+2\delta_k)|\operatorname{Im} z_j| + C_1 < \\ &< (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j| + C_1\,. \end{aligned}$$

б) Пусть теперь $|\operatorname{Im} z| > \delta_k|\operatorname{Re} z|$ для всех $z \in U_j$. Зафиксируем $z \in U_j$. Если $\|z\| = |\operatorname{Re} z|$, то $|\operatorname{Re} z| > r_k$ и в силу (2.1.6)

$$q\omega(\operatorname{Re} z) \le q\delta_k^2\,|\operatorname{Re} z| < q\delta_k|\operatorname{Im} z|\,.$$

А если $\|z\| = |\operatorname{Im} z|$, то $|\operatorname{Im} z| > r_k$, так что снова на основании (2.1.6)

$$q\omega(\operatorname{Re} z) \le q\omega\left(\frac{1}{\delta_k}\,|\operatorname{Im} z|\right) \le q\delta_k^2\frac{1}{\delta_k}\,|\operatorname{Im} z| = q\delta_k|\operatorname{Im} z|\,.$$

Таким образом, для всех $z \in U_j$

$$\begin{aligned} q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| &\le (l+q\delta_k)|\operatorname{Im} z| \le (l+q\delta_k)\big(|\operatorname{Im} z_j| + \operatorname{diam} U_j\big) \le \\ &\le (l+q\delta_k)(1+8\delta_k)|\operatorname{Im} z| < (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\,. \end{aligned}$$

Объединяя теперь случаи а) и б) и полагая

$$C := C_1 + \max\{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| : z \in \overline{U}_j, 1 \le j \le j_{\tilde{k}}\},$$

получим неравенство (2.1.14).

2) Докажем неравенство (2.1.15). Заметим, что если множество U_j расположено как в пункте б), то точки z и z_j равноправны (обе — произвольные точки U_j), так что в (2.1.14) их можно просто поменять местами и получить (2.1.15). Соответственно, (2.1.15) нужно установить лишь для U_j из пункта а).

В данном случае выберем $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$ так, чтобы

$$(q + 4l\delta_{\widetilde{k}})\omega\Big(\frac{1}{1-4\delta_{\widetilde{k}}}\,t\Big) < (q+\varepsilon)\omega(t) + C_1\,; \tag{2.1.20}$$

$$\frac{l}{1-2\delta_{\widetilde{k}}} < l + \varepsilon\,. \tag{2.1.21}$$

Для $j \geq j_{\widetilde{k}}$ находим $k \in \mathbb{N}$ такое, что $j_k \leq j < j_{k+1}$. Тогда аналогично (2.1.19)

$$|\operatorname{Re} z_j| \leq |\operatorname{Re} z| + \operatorname{diam} U_j \leq |\operatorname{Re} z| + 4\delta_k |\operatorname{Re} z_j|\,,$$

откуда $|\operatorname{Re} z_j| \leq \frac{1}{1-4\delta_k}\,|\operatorname{Re} z|$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|\operatorname{Im} z_j| &\leq |\operatorname{Im} z| + \operatorname{diam} U_j \leq |\operatorname{Im} z| + 2\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j) + 2\delta_k|\operatorname{Im} z_j| \leq \\ &\leq |\operatorname{Im} z| + 2\delta_k\omega\Big(\frac{1}{1-4\delta_k}\operatorname{Re} z\Big) + 2\delta_k|\operatorname{Im} z_j|\,,\end{aligned}$$

так что

$$|\operatorname{Im} z_j| \leq \frac{1}{1-2\delta_k}\left(|\operatorname{Im} z| + 2\delta_k\omega\Big(\frac{1}{1-4\delta_k}\operatorname{Re} z\Big)\right).$$

Тогда окончательно на основании (2.1.20) и (2.1.21) имеем:

$$\begin{aligned}q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| &\leq \left(q + \frac{2l\delta_k}{1-2\delta_k}\right)\omega\Big(\frac{1}{1-4\delta_k}\operatorname{Re} z\Big) + \frac{l}{1-2\delta_k}\,|\operatorname{Im} z| < \\ &< (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C_1\,.\end{aligned}$$

Полагая

$$C := C_1 + \max\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| : 1 \leq j \leq j_{\widetilde{k}}\},$$

получаем (2.1.15). $\square$

Лемма 2.1.4. *Имеют место соотношения*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{j}{|z_j|} = 0\,,\ \lim_{j\to\infty}\frac{m_j}{|z_j|} = 0\,.$$

Доказательство. Как обычно, через $n_{\check{\mu}}(r)$ будем обозначать считающую функцию нулей целой функции $\check{\mu}$, т. е. $n_{\check{\mu}}(r) = \sum_{|\lambda_s|\leq r} k_s$. Поскольку $\check{\mu}$ имеет нулевой тип при порядке 1, то $n_{\check{\mu}}(r) = o(r)$ при $r \to \infty$. Если теперь подобрать $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ так, чтобы $A\delta_{\widetilde{k}} < 1$ (где A — константа из условий (1.1.1) и (1.1.2)), то для $j \geq j_{\widetilde{k}}$ получим:

$$|z_j| + \operatorname{diam} U_j \leq |z_j| + 2\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j) + 8\delta_k|\operatorname{Im} z_j| \leq (1 + 10A\delta_k)|z_j| \leq 11|z_j|\,.$$

Так как множества U_j попарно не пересекаются, причем в каждом U_j содержится хотя бы один нуль функции $\check{\mu}$, то $j \le n_{\check{\mu}}(|z_j|+\operatorname{diam} U_j) \le n_{\check{\mu}}(11|z_j|)$ при $j \ge j_{\widetilde{k}}$. Отсюда вытекает, что

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{j}{|z_j|} \le \limsup_{j\to\infty} \frac{n_{\check{\mu}}(11|z_j|)}{|z_j|} \le 11 \limsup_{r\to\infty} \frac{n_{\check{\mu}}(r)}{r} = 0\,.$$

Таким образом первое соотношение доказано.

Аналогично

$$m_j = \sum_{\lambda_s \in U_j} k_s \le n_{\check{\mu}}(|z_j| + \operatorname{diam} U_j) \le n_{\check{\mu}}(11|z_j|)\,,\ j \ge j_{\widetilde{k}}\,,$$

так что выполнено и второе доказываемое равенство. □

Перейдем к изоморфному описанию $\ker T_\mu$, на основании которого будет установлен основной результат параграфа о базисе в $\ker T_\mu$. Для удобства будем рассматривать случай $p = 1$ (напомним, что это возможно благодаря соотношениям (1.1.9)).

Рассмотрим в $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ замкнутый главный идеал, порожденный функцией $\check{\mu}$:

$$J = \check{\mu} H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) = \big\{ g \in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})\ :\ g^{(l)}(\lambda_s) = 0\,,\ l = 0, \dots, k_s - 1\,,\ s = 1, 2, \dots \big\},$$

и соответствующее факторпространство $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$, которое, как и само $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, относится к классу (DFS)-пространств. Для $[f] \in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ положим

$$|||\,[f]|||_{\omega,q,l} = \inf_{f \in [f]} \|f\|_{\omega,q,l} = \inf_{h \in J} \|f + h\|_{\omega,q,l}\,,\ q \in (0,1)\,,\ l \in (0,a)\,.$$

Тогда фактортопология в $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ — это топология индуктивного предела семейства банаховых пространств $\{[f]:\ |||\,[f]|||_{\omega,q,l} < \infty\}$, $q \in (0,1)$, $l \in (0,a)$.

Из общей теории двойственности с учетом свойств (FS) и (DFS)-пространств стандартным образом вытекает

Предложение 2.1.1. *Отображение* $\Phi : \ker T_\mu \to \big(H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\big)'$, *действующее по правилу*

$$< \Phi f, [g] >=< f, F^{-1}(g) >\,,\ f \in \ker T_\mu\,,\ [g] \in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\,,$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\ker T_\mu$ *и* $\big(H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\big)'_\beta$.

Установим изоморфную реализацию факторпространства $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ и, как следствие, его сильного сопряженного $\big(H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\big)'_{\beta}$. Пусть $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ — построенное выше покрытие нулевого множества функции $\check{\mu}$. Как обычно, через $H^{\infty}(U_j)$ будем обозначать пространство всех ограниченных аналитических в U_j функций с нормой $\|g\|_{\infty,j} = \sup_{z\in U_j}|g(z)|$. Рассмотрим замкнутые подпространства этих пространств

$$J_j = \big\{g \in H^{\infty}(U_j) \ :\ g^{(l)}(\lambda_s) = 0\,,\ l = 0,\dots,k_s - 1\,,\ \lambda_s \in U_j\big\}$$

и соответствующие факторпространства $X_j := H^{\infty}(U_j)/J_j$, $j \in \mathbb{N}$. По построению $|\check{\mu}|$ отграничен от нуля в некоторой окрестности ∂U_j, так что в X_j класс $[f]$, $f \in H^{\infty}(U_j)$, совпадает с $\{f + \check{\mu}g : g \in H^{\infty}(U_j)\}$. Норма класса $[f]$ равна

$$\begin{aligned}|||\,[f]|||_{\infty,j} = \inf_{f\in[f]}\|f\|_{\infty,j} = \inf_{g\in H^{\infty}(U_j)}\|f+\mu g\|_{\infty,j} = \\ = \inf_{g\in H^{\infty}(U_j)}\sup_{z\in U_j}|f(z)+\mu(z)g(z)|\,.\end{aligned}$$

Понятно, что все X_j конечномерны, причем $\dim X_j = m_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Обозначим $X := \prod_{j=1}^{\infty} X_j$ и введем в рассмотрение следующий весовой подкласс класса X:

$$\begin{aligned}k^{p,a} = \Big\{\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in X \mid \exists q \in (0,p)\,,\ \exists l \in (0,a)\ :\\ \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} = \sup_{j\geq 1}\frac{|||\,[\varphi_j]|||_{\infty,j}}{\exp\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\}} < \infty\Big\}\,.\end{aligned}$$

Пространство $k^{p,a}$ наделяется естественной индуктивной топологией и является в ней (DFS)-пространством.

Предложение 2.1.2. *Отображение*

$$\rho : [f] \in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J \mapsto \big([f|_{U_j}]\big)_{j=1}^{\infty}$$

устанавливает топологический изоморфизм между $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ *и* $k^{p,a}$.

Доказательство. Доказательство, как обычно, проведем для $p = 1$. Инъективность отображения ρ очевидна. Далее, зафиксируем $q \in (0,1)$, $l \in (0,a)$ и возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q + \varepsilon < 1$, $l + \varepsilon < a$. В силу леммы 2.1.3 найдется

$C > 0$, при котором выполнено неравенство (2.1.14). Для $[f] \in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ имеем:

$$\begin{aligned} |||\,[f|_{U_j}]|||_{\infty,j} &= \inf_{g\in H^\infty(U_j)} \sup_{z\in U_j} |f(z)+\check{\mu}(z)g(z)| \le \inf_{h\in J}\sup_{z\in U_j}|f(z)+h(z)| \le \\ &\le |||\,[f]|||_{\omega,q,l} \sup_{z\in U_j} \exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z)+l|\operatorname{Im} z|\right\} \le \\ &\le e^C\,|||\,[f]|||_{\omega,q,l} \exp\left\{(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j)+(l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|\right\}, \end{aligned}$$

откуда $|\widetilde{\rho([f])}|_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \le e^C\,|||\,[f]|||_{\omega,q,l}$. Это означает, что ρ действует непрерывно из $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ в $k^{1,a}$.

Поскольку для (DFS)-пространств справедлива теорема об открытом отображении, остается проверить лишь сюръекивность ρ. Зафиксируем $\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^\infty \in k^{1,a}$. Тогда имеются $q\in(0,1)$ и $l\in(0,a)$, при которых $|\widetilde{\varphi}|_{\omega,q,l} < \infty$. Функции $\varphi_j \in H^\infty(U_j)$, представителей классов $[\varphi_j]$, будем считать такими, что $\|\varphi_j\|_{\infty,j} = |||\,[\varphi_j]|||_{\infty,j}$. Тогда

$$|\varphi_j(z)| \le |\widetilde{\varphi}|_{\omega,q,l}\, \exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z_j)+l|\operatorname{Im} z_j|\right\},\ z\in U_j\,,\ j\in\mathbb{N}\,. \qquad (2.1.22)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q+9\varepsilon<1$, $l+9\varepsilon<a$. Найдем $\widetilde{k}\in\mathbb{N}$ такое, что $\varepsilon_{\widetilde{k}} < \varepsilon$.

1) Для $j\in\mathbb{N}$ введем в рассмотрение множества $V_j = \{z\in U_j : d(z,\partial U_j) \ge \sigma_j\}$, где, как и выше, $\sigma_j = \min\left\{\exp\big(-4\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 4\varepsilon_k|\operatorname{Im} z|\big) : z\in \overline{U}_j\right\}$. В соответствии с леммой 2.1.2 для всех $z\in U_j\setminus V_j$ выполняется неравенство (2.1.13), из чего, во-первых, следует, что $N(\check{\mu}) \subset \bigcup_j V_j$, а во-вторых, что

$$\ln|\check{\mu}(z)| \ge -3\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) - 3\varepsilon|\operatorname{Im} z|\,,\ z\in U_j\setminus V_j\,,\ j\ge j_{\widetilde{k}}\,. \qquad (2.1.23)$$

Как известно, существует бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция g, обладающая свойствами:

$$g(z)\equiv 1 \text{ на } \bigcup_j V_j\,;\quad \operatorname{supp} g \subset \bigcup_j U_j\,;\quad 0\le g(z)\le 1 \text{ в } \mathbb{C}\,.$$

При этом

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \le \frac{C_0}{\sigma_j}\,,\ z\in U_j\setminus V_j\,,$$

где C_0 от j не зависит. В силу выбора чисел σ_j найдется точка $\widetilde{z}_j \in \overline{U_j}$ такая, что $\sigma_j = \exp\big(-4\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\widetilde{z}_j) - 4\varepsilon_k|\operatorname{Im}\widetilde{z}_j|\big)$. Значит, при $j \geq j_{\widetilde{k}}$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leq C_0 \exp\left\{4\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\widetilde{z}_j) + 4\varepsilon|\operatorname{Im}\widetilde{z}_j|\right\}, \ z \in U_j \setminus V_j\,.$$

Выбрав теперь в соответствии с леммой 2.1.3 константу $C_1 > 0$, при которой

$$4\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + 4\varepsilon|\operatorname{Im} z| < 5\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + 5\varepsilon|\operatorname{Im} z_j| + C_1\,, \ z \in U_j\,, \ j \in \mathbb{N}\,,$$

окончательно получим, что

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leq C_0 e^{C_1} \exp\left\{5\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + 5\varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\right\}. \qquad (2.1.24)$$

2) Положим теперь

$$\Phi(z) := \begin{cases} \varphi_j(z)\,, & z \in U_j\,, \, j \in \mathbb{N}\,, \\ 0\,, & z \notin \bigcup_j U_j\,; \end{cases} \qquad h(z) := -\frac{\Phi(z)}{\check{\mu}(z)} \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\,, \ z \in \mathbb{C}\,.$$

Функция h бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$ и $h(z) = 0$ при $z \notin \bigcup_j (U_j \setminus V_j)$. Снова пользуясь леммой 2.1.3, найдем $C_2 > 0$ такое, что для всех $j \in \mathbb{N}$

$$(q+5\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + (l+5\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j| < (q+6\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+6\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C_2\,, \ z \in U_j\,.$$

Тогда, объединяя (2.1.22)–(2.1.24) и полагая $C := C_0\, e^{C_1+C_2}$, заключаем, что при $z \in U_j \setminus V_j$, $j \geq j_{\widetilde{k}}$

$$|h(z)| \leq C \exp\left\{(q+9\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+9\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\right\}. \qquad (2.1.25)$$

3) Находим теперь бесконечно дифференцируемую в $\mathbb{R}^2$ функцию v, являющуюся решением $\overline{\partial}$-задачи $\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = h$. При этом $\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = 0$, $z \in V_j$, $j \in \mathbb{N}$, так что v аналитична в каждой из областей V_j.

В качестве искомой функции f возьмем $f(z) = v(z)\check{\mu}(z) + \Phi(z)g(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ в $\mathbb{C}$, т. е. $f \in H(\mathbb{C})$. Более того, из (2.1.25) стандартным образом вытекает, что $f \in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. При этом в областях V_j, $j \in \mathbb{N}$, функция f совпадает с $v(z)\check{\mu}(z) + \varphi_j(z)$, так что $f^{(l)}(\lambda_s) = \varphi_j^{(l)}(\lambda_s)$, $l = 0, \ldots, k_s - 1$, $\lambda_s \in V_j$. Это означает, что $[f|_{U_j}] = [\varphi_j]$ в X_j, $j \in \mathbb{N}$, т. е. $\rho([f]) = \varphi$. Предложение доказано. $\square$

Следствие. *Отображение*

$$R:\psi\in\big(H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\big)'\mapsto\psi\circ\rho^{-1}$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\big(H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\big)'_\beta$ *и* $(k^{p,a})'_\beta$.

Установим теперь изоморфное описание $(k^{p,a})'_\beta$. Пусть X'_j ($j\in\mathbb{N}$) — сопряженное к банахову пространству X_j с сопряженной нормой

$$|||\,\nu|||'_{\infty,j}=\sup\big\{|\nu([\varphi])|\;:\;[\varphi]\in X_j\,,\;|||\,[\varphi]|||_{\infty,j}\le 1\big\}\,.$$

X'_j само является банаховым пространством размерности m_j. Положим теперь $X':=\prod_{j=1}^\infty X'_j$ и рассмотрим в X' весовой подкласс

$$\lambda^{p,a}=\big\{\nu=(\nu_j)_{j=1}^\infty\in X'\mid\forall q\in(0,p)\,,\;\forall l\in(0,a)\\ \widetilde{|\nu|}'_{\omega,q,l}=\sup_{j\ge1}|||\,\nu_j|||'_{\infty,j}\exp\big\{q\omega(\operatorname{Re}z_j)+l|\operatorname{Im}z_j|\big\}<\infty\big\}\,.$$

Понятно, что $\lambda^{p,a}$ относится к классу (FS)-пространств.

Наконец, определим еще следующие естественные отображения:

$$s_j:\;[\varphi_j]\in X_j\mapsto(0,\dots,0,\underset{j}{[\varphi_j]},0,\dots)\in k^{p,a}\,;$$

$$t_j:\;\nu_j\in X'_j\mapsto(0,\dots,0,\underset{j}{\nu_j},0,\dots)\in\lambda^{p,a}\,.$$

Предложение 2.1.3. *Отображение*

$$S:\nu\in(k^{p,a})'\mapsto(\nu\circ s_j)_{j=1}^\infty$$

устанавливает топологический изоморфизм между $(k^{p,a})'_\beta$ *и* $\lambda^{p,a}$.

Доказательство. Пусть $p=1$. В силу свойств веса ω и достаточно быстрого стремления $|z_j|$ к ∞ (см. лемму 2.1.4) получаем, что $\ln j=o\big(\gamma\omega(\operatorname{Re}z_j)+\gamma|\operatorname{Im}z_j|\big)$ при $j\to\infty$ для произвольного $\gamma>0$. Из этого легко следует, что для любого $\varphi=\big([\varphi_j]\big)_{j=1}^\infty\in k^{1,a}$ ряд $\sum_{j=1}^\infty s_j\big([\varphi_j]\big)$ сходится абсолютно к φ в $k^{1,a}$. А тогда

$$\nu(\varphi)=\sum_{j=1}^\infty(\nu\circ s_j)\big([\varphi_j]\big)\,,\;\nu\in(k^{1,a})'\,,$$

откуда вытекает инъективность отображения S.

Сюръективность S получается из тех же соображений. Достаточно лишь положить для $(\nu_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda^{1,a}$

$$\nu(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j\big([\varphi_j]\big)\,,\ \varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in k^{1,a}\,.$$

Наконец, поскольку сильная топология в $(k^{1,a})'$ задается набором преднорм

$$\widetilde{|\nu|}''_{\omega,q,l} = \sup\big\{|\nu(\varphi)|\ :\ \varphi \in k^{1,a}\,,\ \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} \le 1\big\}\,,\ q \in (0,1)\,,\ l \in (0,a)\,,$$

и так как для любого $\nu \in (k^{1,a})'$

$$\widetilde{|S\nu|}'_{\omega,q,l} = \sup_{j\ge 1} e^{q\omega(\operatorname{Re} z_j)+l|\operatorname{Im} z_j|} \sup\big\{|(\nu\circ s_j)([\varphi_j])| : [\varphi_j] \in X_j, |||\,[\varphi_j]|||_{\infty,j} \le 1\big\} =$$
$$= \sup\big\{|\nu(\varphi)|\ :\ \varphi \in k^{1,a}\,,\ \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} \le 1\big\} = \widetilde{|\nu|}''_{\omega,q,l}\,,$$

то S взаимно непрерывно. □

Из предложений 2.1.1–2.1.3 вытекает

Теорема 2.1.2. *Отображение $L := S\circ R\circ\Phi$ есть топологический изоморфизм $\ker T_\mu$ на $\lambda^{p,a}$.*

Перейдем к основным результатам параграфа. Построенное покрытие $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ множества $N(\check{\mu})$ разбило нули функции $\check{\mu}$ и соответствующие им элементарные решения (2.1.1) однородного уравнения свертки (2.1.2) на группы. Введем в рассмотрение линейные оболочки этих групп решений

$$E_j := \operatorname{span}\big\{(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}\ :\ l = 0,\dots,k_s-1\,;\ \lambda_s \in U_j\big\}\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Множество E_j является подпространством размерности m_j в $\ker T_\mu$.

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2.1.5. *Для отображения L из теоремы 2.1.2 справедливы равенства $L(E_j) = t_j(X_j')$, $j \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Отображение $\delta^l_{\lambda_s} : [g] \mapsto g^{(l)}(\lambda_s)$, $s \in \mathbb{N}$, $l = 0,\dots,k_s-1$, является линейным непрерывным функционалом на $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$. Для тех $s \in \mathbb{N}$, при которых $\lambda_s \in U_j$, можно рассмотреть "сужение" $\delta^l_{\lambda_s}|_{X_j}$ этого отображения на пространство X_j. Непосредственно легко проверяется, что в пространстве λ^∞ при каждом $j \in \mathbb{N}$ для $s \in \mathbb{N}$ с $\lambda_s \in U_j$ и $l = 0, \dots, k_s - 1$ выполняется равенство $L\big((-ix)^l e^{-i\lambda_s x}\big) = t_j \circ \delta^l_{\lambda_s}|_{X_j}$. Из этого следует, что $L(E_j) \subset t_j(X'_j)$. Учитывая еще, что, как нетрудно видеть, $\dim L(E_j) = \dim E_j = m_j$ и $\dim t_j(X'_j) = \dim X'_j = m_j$, заключаем, что имеет место равенство $L(E_j) = t_j(X'_j)$. □

Лемма 2.1.6. *В пространстве $\lambda^{p,a}$ имеется абсолютный базис вида*

$$\big\{t_j(\nu_{j,n}) \,:\, n = 1, \dots, m_j\,;\; j \in \mathbb{N}\big\}\,, \tag{2.1.26}$$

где $\{\nu_{j,n} : n = 1, \dots, m_j\}$ — некоторый базис в X'_j, $j \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. В соответствии с леммой Ауэрбаха (см. [88, 10.5]) в X_j и X'_j можно выбрать базисы $\{[\varphi_{j,n}] : n = 1, \dots, m_j\}$ и $\{\nu_{j,n} : n = 1, \dots, m_j\}$ такие, что

$$|||\,[\varphi_{j,n}]|||_{\infty,j} = 1\,,\ |||\,\nu_{j,n}|||'_{\infty,j} = 1\,,\ n = 1, \dots, m_j\,;$$

$$< [\varphi_{j,n}], \nu_{j,m} >= \delta_{nm} = \begin{cases} 1\,,\ n = m\,,\\ 0\,,\ n \neq m\,.\end{cases}$$

При этом разложение произвольного элемента $\nu_j \in X'_j$ по базису $\{\nu_{j,n} : n = 1, \dots, m_j\}$ имеет вид:

$$\nu_j = \sum_{n=1}^{m_j} < [\varphi_{j,n}], \nu_j > \nu_{j,n}\,.$$

В пространстве $\lambda^{p,a}$ теперь для произвольного элемента $\nu = (\nu_j)_{j=1}^\infty$ рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^{m_j} < [\varphi_{j,n}], \nu_j >\ t_j(\nu_{j,n})\,. \tag{2.1.27}$$

Возьмем какие-нибудь $q \in (0, p)$ и $l \in (0, a)$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $q + \varepsilon < p$, $l + \varepsilon < a$. Для всех $j \in \mathbb{N}$ и $n = 1, \dots, m_j$

$$|\widetilde{t_j(\nu_{j,n})}|'_{\omega,q,l} = \exp\big\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\big\}\,, \tag{2.1.28}$$

$$| < [\varphi_{j,n}], \nu_j > | \le |\widetilde{\nu}|'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \exp\big\{ -(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) - (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|\big\}\,.$$

Далее, в силу свойства (γ) веса ω найдется $C > 0$ такое, что

$$\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + \varepsilon|\operatorname{Im} z_j| \geq 3\ln(1 + |z_j|) - C\,,\ j \in \mathbb{N}.$$

В свою очередь, из леммы 2.1.4 вытекает, что $A := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{(1+|z_j|)^3} < \infty$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m_j} \big| < [\varphi_{j,n}], \nu_j > \big| \cdot \left|\widetilde{t_j(\nu_{j,n})}\right|'_{\omega,q,l} \leq$$

$$\leq \left|\widetilde{\nu}\right|'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} m_j \frac{\exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\right\}}{\exp\left\{(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|\right\}} \leq Ae^C \left|\widetilde{\nu}\right|'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon}.$$

Таким образом, ряд (2.1.27) сходится абсолютно в $\lambda^{p,a}$. Понятно, что его сумма совпадает с ν. Ясно также, что разложение элемента ν по системе (2.1.26) обязательно имеет вид (2.1.27), а значит, оно единственно. □

В качестве следствия теперь легко получаем основной результат параграфа.

Теорема 2.1.3. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $a \in (0,\infty)$; $I = (-a,a)$. Если символ $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ однородного уравнения свертки (2.1.2) в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ удовлетворяет условию (F_2), то в пространстве решений этого уравнения имеется абсолютный базис*

$$\left\{e_{j,n}\,:\ n = 1,\ldots,m_j\,,\ j \in \mathbb{N}\right\}, \tag{2.1.29}$$

состоящий из элементов $e_{j,n}$ $(n = 1,\ldots,m_j)$ подпространств E_j, натянутых на элементарные решения $(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}$, $l = 0,\ldots,k_s-1$, $\lambda_s \in U_j$.

Доказательство. Положим $e_{j,n} := L^{-1}\big(t_j(\nu_{j,n})\big)$, $n = 1,\ldots,m_j$, $j \in \mathbb{N}$, где $\big\{t_j(\nu_{j,n}) : n = 1,\ldots,m_j\,,\ j \in \mathbb{N}\big\}$ — абсолютный базис в $\lambda^{p,a}$ из леммы 2.1.6. В силу леммы 2.1.5 тогда $e_{j,n} \in E_j$, $n = 1,\ldots,m_j$, $j \in \mathbb{N}$. Поскольку L — топологический изоморфизм $\ker T_\mu$ на $\lambda^{p,a}$, то (2.1.29) — абсолютный базис в $\ker T_\mu$. □

Полученные результаты позволяют также отождествить $\ker T_\mu$ с некоторым пространством степенных рядов конечного типа, что может быть полезно в различных вопросах (по поводу пространств степенных рядов см. [81]). Пусть m_j, $j \in \mathbb{N}$, те же, что и выше, а $m_0 := 0$. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$.

Для k: $\sum_{l=0}^{j-1} m_l < k \leq \sum_{j=0}^{j} m_l$ положим $\alpha_k := \omega(\operatorname{Re} z_j) + |\operatorname{Im} z_j|$. Рассмотрим пространство степенных рядов конечного типа, порожденных последовательностью $\alpha = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$:

$$\Lambda(\alpha) = \left\{\xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \, : \, \forall n \in \mathbb{N} \quad \|\xi\|_n = \sup_{k\geq 1} |\xi_k| e^{-\frac{\alpha_k}{n}} < \infty \right\}.$$

Теорема 2.1.4. *Пространства* $\ker T_\mu$ *и* $\Lambda(\alpha)$ *изоморфны.*

Доказательство. Из тех же соображений, которые использовались в конце доказательства леммы 2.1.6, вытекает, что единичные орты e_k образуют абсолютный базис пространства $\Lambda(\alpha)$. При этом для $\sum_{l=0}^{j-1} m_l < k \leq \sum_{j=0}^{j} m_l$

$$\|e_k\|_n = e^{-\frac{\alpha_k}{n}} = \exp\left\{ -\frac{1}{n}\,\omega(\operatorname{Re} z_j) - \frac{1}{n}\,|\operatorname{Im} z_j| \right\}. \qquad (2.1.30)$$

Установим взаимно однозначное соответствие Q между абсолютным базисом $\{t_j(\nu_{j,n}) \,:\, n = 1, \ldots, m_j; j \in \mathbb{N}\}$ пространства $\lambda^{p,a}$ и абсолютным базисом $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ пространства $\Lambda(\alpha)$, положив для $j \in \mathbb{N}$ и $n = 1, \ldots, m_j$

$$Q\big(t_j(\nu_{j,n})\big) = e_{m_0+\ldots+m_{j-1}+p} \exp\left\{\omega(\operatorname{Re} z_j) + |\operatorname{Im} z_j|\right\}.$$

Топология в $\lambda^{p,a}$ может быть задана набором норм $\big(\widetilde{|\cdot|}'_{\omega,p-\frac{1}{n},a-\frac{1}{n}}\big)_{n=n_0}^{\infty}$ ($n_0 \geq 2$: $\min\{p,a\} - \frac{1}{n} > 0$). Из (2.1.28) и (2.1.30) вытекает, что при всех n

$$\|Q\big(t_j(\nu_{j,k})\big)\|_n = \widetilde{|t_j(\nu_{j,k})|}'_{\omega,p-\frac{1}{n},a-\frac{1}{n}}$$

Значит, отображение Q взаимно непрерывно, т. е. Q — топологический изоморфизм $\lambda^{p,a}$ на $\Lambda(\alpha)$. Соответственно, $L \circ Q$ — топологический изоморфизм $\ker T_\mu$ на $\Lambda(\alpha)$. □

В заключение параграфа приведем несколько примеров, когда группировать нули λ_s функции $\check{\mu}$ не нужно.

Пример 2.1.1. Пусть ω — произвольная весовая функция; μ — делитель пространства$H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$. Рассмотрим сначала ситуацию, когда все нули функции $\check{\mu}$ простые и вещественные. Занумеруем отдельно неотрицательные нули: $\lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \ldots$ и отрицательные нули: $\lambda_1^- > \lambda_2^- > \ldots$. Если обе последовательности $(\lambda_s^{\pm})_{s=1}^{\infty}$ являются лакунарными, т. е. если выполнены условия

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{\lambda_{s+1}^+}{\lambda_s^+} > 1\,, \quad \liminf_{s\to\infty} \frac{\lambda_{s+1}^-}{\lambda_s^-} > 1\,, \qquad (2.1.31)$$

то группировать нули не нужно. Действительно, пусть множество U_j содержит, например, нуль λ_s^+. Тогда в качестве z_j можно взять саму точку λ_s^+. Следовательно, для действительных точек x множества U_j при достаточно больших s и j имеем:

$$x \leq \lambda_s^+ + \operatorname{diam} U_j \leq \lambda_s^+ + 12\delta_k \omega(\lambda_s^+) \leq (1 + 12\delta_k A)\lambda_s^+ < \lambda_{s+1}^+ .$$

Таким образом, λ_{s+1}^+ лежит вне U_j. Аналогичные рассуждения справедливы и для отрицательных нулей. Поскольку группировка нулей функции $\check{\mu}$ и соответствующих им элементарных решений производится с целью обеспечить абсолютную сходимость рядов и поскольку конечное число слагаемых на сходимость не влияет, делаем вывод, что в данном случае группировать нули $\check{\mu}$ не нужно.

Пример 2.1.2. Пусть $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Рассмотрим целую функцию μ из примера 1.5.5 главы 1. Как было отмечено в примере 1.5.5, условие (C') обеспечивает то, что вне некоторого исключительного множества кружков с конечной суммой радиусов выполняется равенство

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\ln|\check{\mu}(z)|}{|z|^{\rho(|z|)}} = 0 .$$

Из этого, очевидно, следует, что при достаточно больших j построенные множества U_j будут лежать внутри исключительных кружков. Поскольку радиусы кружков стремятся к 0, а величина $|\lambda_{s+1}| - |\lambda_s|$ достаточно велика, то в U_j может быть только один нуль λ_s.

Таким образом, в обеих приведенных ситуациях общее решение однородного уравнения свертки имеет вид

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{-i\lambda_j x} ,\ \alpha_j \in \mathbb{C} ,\ j \in \mathbb{N}.$$

2.2 Общее решение однородного уравнения свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$

В настоящем параграфе общее решение однородного уравнения свертки строится в пространстве Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа на числовой прямой.

Напомним, что символами операторов и уравнений свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ служат все целые функции, принадлежащие $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Это означает, что для μ выполнено условие

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists l > 0 \ : \ \ \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp\big\{\varepsilon\omega(z) + l|\operatorname{Im} z|\big\}} < \infty\,. \tag{2.2.1}$$

Таким образом, в данной оценке имеется разница в коэффициентах перед $\omega(z)$ и $|\operatorname{Im} z|$, которой не было в случае пространств Берлинга максимального типа (см. [86]), а также в случае пространств нормального типа на конечном интервале (см. § 2.1). В связи с этим провести построение требуемого открытого покрытия при априорной оценке (2.2.1) не удалось. Преодолеть возникшие трудности получилось лишь после замены условия (2.2.1) на формально более жесткое требование

$$\exists l_0 > 0 \ : \ \forall \varepsilon > 0 \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp\big\{\varepsilon\omega(z) + l_0|\operatorname{Im} z|\big\}} < \infty\,. \tag{2.2.2}$$

Соответствующее множество будем обозначать через $\widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Как будет установлено ниже, для всех неквазианалитических весов ω условия (2.2.1) и (2.2.2) эквивалентны, т. е. $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C}) = \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Построить пример веса ω и целой функции μ, удовлетворяющей условию (2.2.1), но не удовлетворяющей условию (2.2.2), к настоящему времени не удалось, так что вопрос о полном совпадении или, наоборот, несовпадении $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $\widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ остается открытым.

Приступим к построению требуемого открытого покрытия нулевого множества $N(\check{\mu})$ функции $\check{\mu}$. Напомним, что мы рассматриваем сюръективные операторы T_μ, так что μ должен удовлетворять условию (F_1) теоремы 1.3.1.

В следующей основополагающей лемме для символов $\mu \in \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ снимается зависимость константы L в условии (F_1) от ε и δ.

Пусть A — константа из условий (1.1.1) и (1.1.2), а K определяется условием $(\widetilde{\alpha})$. Далее, пусть $K_1 \geq 1$ таково, что

$$\omega(2s + 8e\eta) \leq K_1\big(\omega(s) + \omega(\eta) + 1\big)\,, \ \ s, \eta \geq 0\,.$$

Положим $H := 3 + \ln 48$, $H_1 := 3 + \ln\frac{24(1+\beta)}{\beta}$, где β — произвольно выбранное число из $\left(0, \frac{1}{32}\right]$. Наконец, обозначим $L_0 := 112KK_1H(H+1)(H_1+1)el_0$, где l_0 — константа из условия (2.2.2).

Лемма 2.2.1. *Пусть целая функция μ удовлетворяет условиям (2.2.2) и (F_1). Тогда справедливо утверждение:*

(F_0) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{64KHel_0} > 0$ $\exists r_0 > 0$: *каждую точку $z \in \mathbb{C}$ с $|z| \geq r_0$ можно погрузить внутрь окружности S_z, обладающей свойствами:*

(a) *если $|\operatorname{Im} z| \leq \delta\omega(\operatorname{Re} z)$, то для всех $\zeta \in S_z$*

$$\|\zeta - z\| \leq 6\delta\omega(\operatorname{Re} z)\,, \quad |\mu(\zeta)| \geq \exp\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta)\}\,;$$

(b) *если $|\operatorname{Im} z| > \delta\omega(\operatorname{Re} z)$, то для всех $\zeta \in S_z$*

$$\|\zeta - z\| \leq \left(\frac{3}{4} + 4\beta\right)|\operatorname{Im} z|\,, \quad |\mu(\zeta)| \geq \exp\{-L_0|\operatorname{Im}\zeta|\}\,.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Будем для удобства считать ε настолько малым, что $\frac{\varepsilon}{64KHl_0} < \frac{1}{8A}$. Из доказательства предложения 1.3.5 вытекает, что константа δ_ε, фигурирующая в условии $(\widetilde{F}_1)$ или (F_1), определяется равенством $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{64KHel_0}$. Положим $\delta := \delta_\varepsilon$. Далее, в соответствии с (F_1), для δ найдутся нужные $r_0 > 0$ и $L > 0$. Константа L выписывается явно (см. там же):

$$\begin{aligned} L = \frac{4K\varepsilon_1}{\delta}(H+1)(H_1+1) + 2\gamma K_1\Big(\frac{1}{\delta} + A\Big)(H_1H + H + H_1)& \\ +16(H+1)H_1el_0 + 8Hl_0\,,& \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

где ε_1 и γ — произвольно выбранные числа из интервалов $\left(0, \frac{\varepsilon}{8K(H+1)}\right)$ и $\left(0, \frac{\varepsilon}{4H(2K^2+K)}\right)$, соответственно. Взяв $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{16K(H+1)}$ и $\gamma = \frac{\varepsilon}{8H(2K^2+K)}$ и подставив в (2.2.3) значение δ, получим:

$$\begin{aligned} L = 16KH(H_1+1)el_0 + \frac{K_1}{4H(2K^2+K)}(64KHel_0 + \varepsilon A)(H_1H + H + H_1)& \\ + 16(H+1)H_1el_0 + 8Hl_0\,.& \end{aligned}$$

Для того чтобы упростить выражение для L, оценим его сверху. Так как $\varepsilon A < 8KHl_0$, то

$$L \leq 16K(H+1)(H_1+1)el_0 + 72K_1KHe(H+1)(H_1+1)l_0 +$$
$$+16(H+1)(H_1+1)el_0 + 8Hl_0 \leq 112KK_1H(H+1)(H_1+1)el_0 = L_0\,.$$

Тем самым лемма доказана. □

Итак, рассмотрим целую функцию $\mu \in \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, удовлетворяющую условию (F_1) и, как следствие, условию (F_0).

Возьмем $\varepsilon_k \downarrow 0$ $\left(\varepsilon_1 < \frac{1}{A}\right)$. Пользуясь леммой 2.2.1, найдем соответствующие $\delta_k = \frac{\varepsilon_k}{64KHel_0}$ и $r_k \uparrow \infty$. Числа r_k и C_0 можно считать такими, что

$$\omega(t+2) \leq \frac{3}{2}\,\omega(t) + C_0\,,\ t \geq 0\,; \tag{2.2.4}$$

$$\frac{\varepsilon_k}{2}\,\omega(\operatorname{Re} z) + \frac{L_0}{2}\,|\operatorname{Im} z| \geq C_0\varepsilon_k + 2L_0\,,\ |z| \geq r_k - 2\,; \tag{2.2.5}$$

$$|\check{\mu}(z)| \leq \exp\left\{\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) + l_0|\operatorname{Im} z|\right\},\ |z| \geq r_k - 2\,. \tag{2.2.6}$$

Введем в рассмотрение множества

$$U^{(k)} = \left\{z \in \mathbb{C} :\ \ln|\check{\mu}(z)| < -\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - L_0|\operatorname{Im} z|\right\},\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Понятно, что $N(\check{\mu}) \subset U^{(1)} \subset U^{(2)} \subset \ldots$.

Рассмотрим квадрат $\|z\| \leq r_1$, где по-прежнему $\|z\| = \max\left\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\right\}$. Возьмем все связные компоненты множества $U^{(1)}$, которые пересекаются с данным квадратом и содержат внутри себя нули функции $\check{\mu}$. Обозначим их $U_1, \ldots, U_{j_1-1}$. Таким образом, на данном шаге покрыты все нули функции $\check{\mu}$, лежащие во множестве $\|z\| \leq r_1$, и, возможно, некоторые дополнительные нули.

Пусть теперь $r_1 < \|z\| \leq r_2$. Рассмотрим связные компоненты множества $U^{(2)}$, пересекающиеся с указанным множеством и имеющие внутри себя нули функции $\check{\mu}$, не покрытые на предыдущем шаге. Выберем находящиеся внутри них связные компоненты $U_{j_1}, \ldots, U_{j_2-1}$ множества $U^{(1)}$, содержащие указанные нули. Тогда они автоматически не пересекаются с множествами $U_1, \ldots, U_{j_1-1}$ и полностью лежат в области $\|z\| > r_1$. В силу условия (F_0), если в U_j, $j_1 \leq j < j_2$, есть точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j| \leq \delta_1\omega(\operatorname{Re} z_j)$, то $\operatorname{diam} U_j \leq 12\delta_1\omega(\operatorname{Re} z_j)$. Здесь и всюду далее под $\operatorname{diam} U_j$ понимается $\max\{\|z - t\| : z, t \in U_j\}$. Если в U_j указанных точек нет, то

$$\operatorname{diam} U_j \leq \left(\frac{3}{2} + 8\beta\right)|\operatorname{Im} z_j| \leq 2|\operatorname{Im} z_j|,$$

где z_j — произвольная точка из U_j. Напомним, что $\beta \in \left(0, \frac{1}{32}\right]$ может быть выбрано произвольно. При этом для $|\check{\mu}(z)|$, $z \in U_j$, $j_1 \leq j < j_2$, выполняется оценка $\ln|\check{\mu}(z)| < -\varepsilon_1\omega(\operatorname{Re} z) - L_0|\operatorname{Im} z|$.

Далее, рассмотрим множество $r_2 < \|z\| \le r_3$. Возьмем связные компоненты множества $U^{(3)}$, пересекающиеся с этим множеством и имеющие внутри себя еще не покрытые нули функции $\check{\mu}$. Занумеруем находящиеся в них компоненты множества $U^{(2)}$, содержащие указанные нули: $U_{j_2}, \dots, U_{j_3-1}$. Заметим, что эти компоненты множества $U^{(2)}$ отличаются от компонент множества $U^{(2)}$, фигурировавших на предыдущем шаге. Следовательно, множества $U_{j_2}, \dots, U_{j_3-1}$ не пересекаются с $U_1, \dots, U_{j_2-1}$. Кроме того, U_j, $j_2 \le j < j_3$, целиком лежат в области $\|z\| > r_2$. При этом для $\operatorname{diam} U_j$, $j_2 \le j < j_3$, выполняются оценки: $\operatorname{diam} U_j \le 12\delta_2\omega(\operatorname{Re} z_j)$, если в U_j есть точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j| \le \delta_2\omega(\operatorname{Re} z_j)$, и $\operatorname{diam} U_j \le \left(\frac{3}{2} + 8\beta\right)|\operatorname{Im} z_j| \le 2|\operatorname{Im} z_j|$, если в U_j таких точек нет, а $z_j \in U_j$ выбрано произвольно. Наконец, $\ln|\check{\mu}(z)| < -\varepsilon_2\omega(\operatorname{Re} z) - L_0|\operatorname{Im} z|$, $z \in U_j$, $j_2 \le j < j_3$.

Продолжая этот процесс далее, получим открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ нулей функции $\check{\mu}$. Множества U_j попарно не пересекаются. При $j_k \le j < j_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, множества U_j полностью лежат в области $\|z\| > r_k$. Размеры множеств U_j, $j_k \le j < j_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, оцениваются следующим образом: если в U_j есть точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j| \le \delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j)$, то $\operatorname{diam} U_j \le 12\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j)$; если таких точек нет, то $\operatorname{diam} U_j \le \left(\frac{3}{2} + 8\beta\right)|\operatorname{Im} z_j| \le 2|\operatorname{Im} z_j|$, где z_j — произвольная точка из U_j. Для $|\check{\mu}|$ на множествах U_j выполняется следующая оценка сверху:

$$\ln|\check{\mu}(z)| < -\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - L_0|\operatorname{Im} z|\,,\ z \in U_j\,,\ j_k \le j < j_{k+1}\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения, нужные для дальнейшего.

Лемма 2.2.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $j_k \le j < j_{k+1}$. Если в U_j есть точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j| \le \delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j)$, то для всех $z \in U_j$ справедливы неравенства*

$$(1 - 12\delta_k A)|\operatorname{Re} z_j| \le |\operatorname{Re} z| \le (1 + 12\delta_k A)|\operatorname{Re} z_j|\,,\quad |\operatorname{Im} z| \le 13\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j)\,. \tag{2.2.7}$$

Если в U_j таких точек нет, то для всех $z \in U_j$

$$|\operatorname{Re} z| \le |\operatorname{Re} z_j| + 2|\operatorname{Im} z_j|\,,\quad |\operatorname{Im} z| \le 3|\operatorname{Im} z_j|\,, \tag{2.2.8}$$

причем в неравенствах (2.2.8) точки z и z_j можно поменять местами.

Доказательство. Неравенства (2.2.7) прямо получаются из соответствующей оценки на $\operatorname{diam} U_j$ с учетом оценки (1.1.1) и условия $|\operatorname{Im} z_j| \le \delta_k \omega(\operatorname{Re} z_j)$. Неравенства (2.2.8) — следствия оценки $\operatorname{diam} U_j \le 2|\operatorname{Im} z_j|$. В силу того, что в последнем случае точки z и z_j равноправны, их можно поменять местами. $\square$

Лемма 2.2.3. *Для любых положительных чисел q, l и ε найдется постоянная $C > 0$ такая, что при всех $j \in \mathbb{N}$ и $z \in U_j$*

$$q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + \widetilde{l}|\operatorname{Im} z_j| + C\,, \tag{2.2.9}$$

$$q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + \widetilde{l}|\operatorname{Im} z| + C\,, \tag{2.2.10}$$

где $\widetilde{l} = 2A(q+\varepsilon) + 3l$.

Доказательство. 1) Докажем неравенство (2.2.9). Зафиксируем q, l и ε. Пользуясь предположениями (α) и (1.1.3) на вес ω, находим $C_1 > 0$ и $\delta > 0$, при которых

$$q\omega(x+y) \le (q+\varepsilon)\big(\omega(x)+\omega(y)\big) + C_1\,,\ x,y \ge 0\,; \tag{2.2.11}$$

$$q\omega\big((1+\delta)t\big) \le \Big(q + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega(t) + C_1\,,\ t \ge 0\,. \tag{2.2.12}$$

Так как $\delta_k \downarrow 0$, то имеется $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ такое, что $12\delta_k A < \delta$ и $13l\delta_k < \frac{\varepsilon}{2}$ при $k \ge \widetilde{k}$. Здесь, напомним, константа A определяется условием (1.1.1).

Пусть $k \ge \widetilde{k}$, $j_k \le j < j_{k+1}$. Рассмотрим сначала случай, когда в U_j есть точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j| \le \delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j)$. Тогда на основании (2.2.7) и (2.2.12) для $z \in U_j$ получаем:

$$\begin{aligned} q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| &\le q\omega\big((1+12\delta_k A)\operatorname{Re} z_j\big) + 13l\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j) \le \\ &\le q\omega\big((1+\delta)\operatorname{Re} z_j\big) + 13l\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j) \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + C_1\,. \end{aligned}$$

Если в U_j указанных точек нет, то, используя (2.2.8), (2.2.11) и (1.1.1), имеем:

$$\begin{aligned} q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| &\le q\omega\big(|\operatorname{Re} z_j| + 2|\operatorname{Im} z_j|\big) + 3l|\operatorname{Im} z_j| \le \\ &\le (q+\varepsilon)\big(\omega(\operatorname{Re} z_j) + \omega(2|\operatorname{Im} z_j|)\big) + 3l|\operatorname{Im} z_j| + C_1 \le \\ &\le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + \big(2A(q+\varepsilon)+3l\big)|\operatorname{Im} z_j| + C_1\,. \end{aligned}$$

Остается положить $C := C_1 + \max\big\{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| : z \in U_j, 1 \le j < j_{\widetilde{k}}\big\}$, и неравенство (2.2.9) доказано.

2) Установим теперь неравенство (2.2.10). Найдем $\delta > 0$ и $C_2 > 0$, при которых
$$\Big(q+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega\big((1+\delta)t\big) \le (q+\varepsilon)\omega(t)+C_2\,,\ t\ge 0\,.$$
Далее, пусть $\widetilde{k}\in\mathbb{N}$ таково, что $l\delta_{\widetilde{k}} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\frac{1}{1-12\delta_{\widetilde{k}}A} < 1+\delta$. Тогда если во множестве U_j, $j_k\le j<j_{k+1}$, $k\ge\widetilde{k}$, есть точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j|\le\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j)$, то для произвольной точки $z\in U_j$ на основании (2.2.7) получаем:
$$\begin{aligned}q\omega(\operatorname{Re} z_j)+l|\operatorname{Im} z_j| \le (q+l\delta_k)\omega(\operatorname{Re} z_j) \le \Big(q+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega\Big(\frac{1}{1-12\delta_k A}\operatorname{Re} z\Big) \le \\ \le \Big(q+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega\big((1+\delta)\operatorname{Re} z\big) \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z)+C_2\,.\end{aligned}$$
Из этого, очевидно, вытекает справедливость неравенства (2.2.10) для всех множеств U_j, расположенных указанным образом.

Если множество U_j расположено так, что для всех $z\in U_j$ выполняется условие $|\operatorname{Im} z|>\delta_k\omega(\operatorname{Re} z)$, то, напомним, z_j — произвольно выбранная точка из U_j. Поэтому в неравенстве (2.2.9) можно просто поменять местами точки z и z_j и получить неравенство (2.2.10). □

Лемма 2.2.4. *Пусть* $m_j=\sum_{\lambda_s\in U_j}k_s$, $j\in\mathbb{N}$. *Справедливы соотношения*
$$\limsup_{j\to\infty}\frac{j}{|z_j|}<\infty\,,\quad \limsup_{j\to\infty}\frac{m_j}{|z_j|}<\infty\,.$$
Доказательство. Пусть $k\in\mathbb{N}$, $j_k\le j<j_{k+1}$. Если во множестве U_j есть точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j|\le\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j)$, то $\operatorname{diam} U_j\le 12\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j)$. Учитывая еще неравенство (1.1.1) и оценку $\delta_1\le\frac{\varepsilon_1}{64}\le\frac{1}{64A}$, в данном случае получаем:
$$|z_j|+\operatorname{diam} U_j\le|z_j|+12\delta_k A|\operatorname{Re} z_j|\le 2|z_j|.$$
Если в U_j указанных точек нет, то $\operatorname{diam} U_j\le 2|\operatorname{Im} z_j|$, так что $|z_j|+\operatorname{diam} U_j\le 3|z_j|$. В целом, всегда $|z_j|+\operatorname{diam} U_j\le 3|z_j|$, $j\ge j_1$.

Так как целая функция $\check{\mu}$ имеет конечный тип при порядке 1, то $\limsup_{r\to\infty}\frac{n_{\check{\mu}}(r)}{r}<\infty$, где $n_{\check{\mu}}(r)$ — считающая функция нулей функции $\check{\mu}$. По построению, в каждом множестве U_j содержится хотя бы один нуль функции $\check{\mu}$. Следовательно, $j\le n_{\check{\mu}}\big(|z_j|+\operatorname{diam} U_j\big)\le n_{\check{\mu}}\big(3|z_j|\big)$, $j\ge j_1$. Значит,
$$\limsup_{j\to\infty}\frac{j}{|z_j|}\le\limsup_{j\to\infty}\frac{n_{\check{\mu}}\big(3|z_j|\big)}{|z_j|}\le 3\limsup_{r\to\infty}\frac{n_{\check{\mu}}(r)}{r}<\infty\,.$$

Поскольку для чисел m_j также выполняется оценка

$$m_j \le n_{\check{\mu}}\big(|z_j| + \operatorname{diam} U_j\big) \le n_{\check{\mu}}\big(3|z_j|\big),$$

то совершенно аналогично получаем второе требуемое соотношение. $\square$

Следствие 2.2.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ числовой ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_j \exp\big\{ -\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\big\}$$

сходится.

Доказательство. Обозначим для краткости

$$\alpha_j := m_j \exp\big\{ -\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\big\}\,,\ j \in \mathbb{N}.$$

В силу предыдущей леммы найдется константа $D > 0$, при которой $j \le D\|z_j\|$ и $m_j \le D\|z_j\|$, $j \ge \widetilde{j}$. Здесь, как и ранее, $\|z_j\| = \max\big\{|\operatorname{Re} z_j|, |\operatorname{Im} z_j|\big\}$. Далее, поскольку $\ln t = o\big(\omega(t)\big)$ при $t \to \infty$, то D можно предполагать настолько большим, что $3\ln t \le \varepsilon\omega(t) + D$, $t \ge 0$.

В случае, когда $\|z_j\| = |\operatorname{Re} z_j|$, при $j \ge \widetilde{j}$ имеем:

$$\alpha_j \le D\|z_j\| \exp\big\{ -\varepsilon\omega(\|z_j\|)\big\} \le D \cdot e^D \cdot \frac{1}{\|z_j\|^2} \le D^3 \cdot e^D \cdot \frac{1}{j^2}\,.$$

Пусть теперь $\|z_j\| = |\operatorname{Im} z_j|$, а $j' \ge \widetilde{j}$ таково, что $\|z_j\| \le \exp\big\{\frac{\varepsilon}{2}\|z_j\|\big\}$ при $j \ge j'$. Тогда

$$\alpha_j \le D\|z_j\| \exp\big\{ -\varepsilon\|z_j\|\big\} \le D\exp\Big\{ -\frac{\varepsilon}{2}\|z_j\|\Big\} \le D\exp\Big\{ -\frac{\varepsilon}{2D}\, j\Big\}\,,\ j \ge j'\,.$$

Из полученных оценок, очевидно, вытекает, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j$ сходится. $\square$

Лемма 2.2.5. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $j_k \le j < j_{k+1}$. Положим*

$$\sigma_j := \min_{z\in\overline{U_j}} \exp\big\{ -4\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 4L_0|\operatorname{Im} z|\big\}\,.$$

Тогда для всех $z \in (\partial U_j)(\sigma_j) = \big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, \partial U_j) < \sigma_j\big\}$ выполняется оценка

$$\ln|\check{\mu}(z)| \ge -3\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 3L_0|\operatorname{Im} z|\,.$$

Доказательство. Зафиксируем $z \in (\partial U_j)(\sigma_j)$. Найдем точку $\zeta \in \partial U_j$ с $|z - \zeta| < \sigma_j$ и точку η на отрезке, соединяющем z и ζ, такую, что $\breve{\mu}(z) = \breve{\mu}(\zeta) + \breve{\mu}'(\eta)(z - \zeta)$. Тогда

$$|\breve{\mu}(z)| \geq |\breve{\mu}(\zeta)| - |\breve{\mu}'(\eta)| \cdot |z - \zeta| \,. \tag{2.2.13}$$

Поскольку $\zeta \in \partial U_j$, то

$$|\breve{\mu}(\zeta)| \geq \exp\Big\{ -\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re}\zeta) - L_0 |\operatorname{Im}\zeta| \Big\} \,. \tag{2.2.14}$$

Оценим сверху $|\breve{\mu}'(\eta)|$. Имеем, что

$$\begin{aligned}|\breve{\mu}'(\eta)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\eta|=1} \frac{\breve{\mu}(t)}{(t-\eta)^2}\, dt \right| &\leq \\ \leq \max\Big\{ |\breve{\mu}(t)| : |t - \eta| = 1 \Big\} &\leq \max\Big\{ |\breve{\mu}(t)| : |t - \zeta| \leq 2 \Big\} \,.\end{aligned}$$

Пусть $t \in \mathbb{C}$, $|t - \zeta| \leq 2$. По построению множество U_j целиком лежит в области $|w| \geq r_k$, так что $|\zeta| \geq r_k$, и, соответственно, $|t| \geq r_k - 2$. Следовательно, для $|\breve{\mu}(t)|$ справедлива оценка (2.2.6), которая с учетом неравенств (2.2.4), $l_0 \leq L_0$ и (2.2.5) продолжается следующим образом:

$$|\breve{\mu}(t)| \leq \exp\Big\{ \varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} t) + l_0 |\operatorname{Im} t| \Big\} \leq \exp\Big\{ \varepsilon_k \omega\big(|\operatorname{Re}\zeta| + 2\big) + l_0\big(|\operatorname{Im}\zeta| + 2\big) \Big\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{ \frac{3\varepsilon_k}{2}\, \omega(\operatorname{Re}\zeta) + \frac{3L_0}{2}\, |\operatorname{Im}\zeta| + C_0\varepsilon_k + 2L_0 \right\} \leq \exp\Big\{ 2\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re}\zeta) + 2L_0 |\operatorname{Im}\zeta| \Big\} \,.$$

Значит,

$$|\breve{\mu}'(\eta)| \leq \exp\Big\{ 2\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re}\zeta) + 2L_0 |\operatorname{Im}\zeta| \Big\} \,. \tag{2.2.15}$$

Обозначим для краткости $B := \varepsilon_k \omega(\operatorname{Re}\zeta) + L_0 |\operatorname{Im}\zeta|$. Естественно, можно считать, что $B \geq 2 \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. На основании (2.2.13) с учетом неравенств (2.2.14), (2.2.15) и определения величины σ_j заключаем, что

$$|\breve{\mu}(z)| \geq e^{-B} - e^{-2B} \geq e^{-\frac{3B}{2}} \,.$$

Снова используя условия (2.2.4) и (2.2.5), имеем:

$$\begin{aligned}\frac{3B}{2} \leq \frac{3\varepsilon_k}{2}\, \omega\big(|\operatorname{Re} z| + 1\big) + \frac{3L_0}{2}\, \big(|\operatorname{Im} z| + 1\big) &\leq \\ \leq \frac{9\varepsilon_k}{4}\, \omega(\operatorname{Re} z) + \frac{3L_0}{2}\, |\operatorname{Im} z| + \frac{3}{2}\, (C_0\varepsilon_k + L_0) &\leq 3\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + 3L_0 |\operatorname{Im} z| \,.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

На этом основные свойства множеств U_j, которые будут использоваться в дальнейшем, доказаны.

Построенное покрытие $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ разбило нули (λ_s) функции $\check{\mu}$ на группы: в j-ую группу объединяются нули λ_s, содержащиеся во множестве U_j. Введем в рассмотрение подпространства E_j пространства всех решений уравнения (2.1.2), натянутые на элементарные решения, отвечающие нулям, входящим в j-ую группу:

$$E_j = \operatorname{span}\left\{(-ix)^l e^{-i\lambda_s x} \;:\; l = 0, \dots, k_s - 1\,,\; \lambda_s \in U_j\right\}, \; j \in \mathbb{N}\,.$$

Ясно, что все E_j конечномерны и $\dim E_j = \sum_{\lambda_s \in U_j} k_s = m_j$.

Перейдем теперь к изоморфному описанию $\ker T_\mu$. Для этого рассмотрим в пространстве $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ замкнутый главный идеал, порожденный функцией $\check{\mu}$:

$$J = \check{\mu} H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C}) = \left\{g \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \;:\; g^{(l)}(\lambda_s) = 0\,,\; l = 0, \dots, k_s - 1\,,\; s = 1, 2, \dots\right\}.$$

Введем в рассмотрение факторпространство $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$. Как и само пространство $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, оно является (DFS)-пространством. Фактортопология в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ — это топология индуктивного предела банаховых пространств $\{[f] \;:\; |||\,[f]\,|||_{\omega,q,l} < \infty\}$, $q \in (0, p)$, $l \in (0, \infty)$. Здесь для $q \in (0, p)$ и $l \in (0, \infty)$

$$|||\,[f]\,|||_{\omega,q,l} = \inf_{f \in [f]} \|f\|_{\omega,q,l} = \inf_{h \in J} \|f + h\|_{\omega,q,l}\,,\; f \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})\,.$$

Так же, как в § 2.1, из общей теории двойственности с учетом свойств (FS) и (DFS)-пространств вытекает

Предложение 2.2.1. *Отображение* $\Phi : \ker T_\mu \to \left(H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\right)'$, *действующее по правилу*

$$< \Phi f, [g] > = < f, F^{-1}(g) >\,,\; f \in \ker T_\mu\,,\; [g] \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\,,$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\ker T_\mu$ *и* $\left(H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\right)'_\beta$.

Пусть, как в § 2.1, $H^\infty(U_j)$ — пространство всех аналитических ограниченных в U_j функций с нормой $\|g\|_{\infty,j} = \sup_{z \in U_j} |g(z)|$, $j \in \mathbb{N}$. Рассмотрим замкнутые подпространства этих пространств

$$J_j = \left\{g \in H^\infty(U_j) \;:\; g^{(l)}(\lambda_s) = 0\,,\; l = 0, \dots, k_s - 1\,,\; \lambda_s \in U_j\right\}$$

и соответствующие факторпространства $X_j := H^\infty(U_j)/J_j$, $j \in \mathbb{N}$. Поскольку по лемме 2.2.5 величина $|\check{\mu}|$ отграничена от нуля в некоторой окрестности ∂U_j, то в X_j

$$[f] = \left\{f + \check{\mu} g : g \in H^\infty(U_j)\right\}, \ f \in H^\infty(U_j)\,.$$

Соответственно, факторнорма класса $[f] \in X_j$ равна

$$|||\,[f]\,|||_{\infty,j} = \inf_{f \in [f]} \|f\|_{\infty,j} = \inf_{g \in H^\infty(U_j)} \sup_{z \in U_j} |f(z) + \check{\mu}(z) g(z)|\,.$$

Пространство X_j, $j \in \mathbb{N}$, конечномерно, причем $\dim X_j = \sum_{\lambda_s \in U_j} k_s = m_j$.

Пусть $X := \prod_{j=1}^\infty X_j$. Введем в рассмотрение весовое подпространство пространства X:

$$k^{p,\infty} = \Big\{\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^\infty \in X \mid \exists q \in (0,p) \ \ \exists l \in (0,\infty) \ : \\ \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} = \sup_{j \geq 1} \frac{|||\,[\varphi_j]\,|||_{\infty,j}}{\exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\right\}} < \infty\Big\}\,.$$

Пространство $k^{p,\infty}$ наделяется естественной индуктивной топологией и является в ней (DFS)-пространством.

Предложение 2.2.2. *Отображение*

$$\rho : [f] \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J \mapsto \big([f|_{U_j}]\big)_{j=1}^\infty$$

устанавливает топологический изоморфизм между $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ *и* $k^{p,\infty}$.

Доказательство. Пусть $p = 1$. Сначала проверим непрерывность отображения ρ. Пусть $q \in (0,1)$ и $l \in (0,\infty)$ произвольны. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q + \varepsilon < 1$. Пользуясь леммой 2.2.3, найдем $\widetilde{l} \in (0,\infty)$ и $C > 0$, при которых выполняются неравенства (2.2.9) и (2.2.10). Тогда для $[f] \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ при всех $j \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\begin{aligned} |||\,[f|_{U_j}]\,|||_{\infty,j} &= \inf_{g \in H^\infty(U_j)} \sup_{z \in U_j} |f(z) + \check{\mu}(z) g(z)| \leq \\ &\leq |||\,[f]\,|||_{\omega,q,l} \cdot \sup_{z \in U_j} \exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|\right\} \leq \\ &\leq e^C \cdot |||\,[f]\,|||_{\omega,q,l} \cdot \exp\left\{(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + \widetilde{l}|\operatorname{Im} z_j|\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $|\widetilde{\rho([f])}|_{\omega,q+\varepsilon,\widetilde{l}} \leq e^C \cdot |||\,[f]\,|||_{\omega,q,l}$. Понятно, из этого вытекает непрерывность ρ.

Далее, поскольку инъективность ρ очевидна и поскольку для (DFS)-пространств справедлива теорема об открытом отображении, то нам остается проверить лишь сюръективность отображения ρ.

Зафиксируем $\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in k^{1,\infty}$. Тогда найдутся $q \in (0,1)$ и $l \in (0,\infty)$ такие, что $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} < \infty$. Функции $\varphi_j \in H^\infty(U_j)$, представителей классов $[\varphi_j]$, выберем так, чтобы $|||\,[\varphi_j]\,|||_{\infty,j} = \|\varphi_j\|_{\infty,j}$. Для них будет справедлива оценка

$$|\varphi_j(z)| \leq \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} \cdot \exp\big\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\big\}\,,\ z \in U_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,. \tag{2.2.16}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q + 11\varepsilon < 1$, и найдем $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$, при котором $\varepsilon_{\widetilde{k}} < \varepsilon$. Оставшееся доказательство для удобства разбито на три этапа, в результате которых строится искомая функция f из $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и соответствующий класс $[f] = \rho^{-1}(\varphi)$ из $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$.

1) При каждом $j \in \mathbb{N}$ введем в рассмотрение множество $V_j = \{z \in U_j : \operatorname{dist}(z, \partial U_j) \geq \sigma_j\}$, где числа σ_j, $j \geq j_1$, были определены в лемме 2.2.5, а для $1 \leq j < j_1$ можно положить $\sigma_j := \min_{z\in\overline{U_j}} \exp\big\{-4\varepsilon_1\omega(\operatorname{Re} z) - 4L_0|\operatorname{Im} z|\big\}$. Очевидно, $N(\check{\mu}) \subset \bigcup_j V_j$. Кроме того, в силу леммы 2.2.5

$$\ln|\check{\mu}(z)| \geq -3\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) - 3L_0|\operatorname{Im} z|\,,\ z \in U_j \setminus V_j\,,\ j \geq j_{\widetilde{k}}\,. \tag{2.2.17}$$

Как известно, существует бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция g, обладающая свойствами:

$$g(z) \equiv 1 \text{ на } \bigcup_j V_j\,; \quad \operatorname{supp} g \subset \bigcup_j U_j\,; \quad 0 \leq g(z) \leq 1 \text{ в } \mathbb{C}\,;$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leq \frac{\widetilde{C}}{\sigma_j}\,,\ z \in U_j \setminus V_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,,$$

где $\widetilde{C}$ от j не зависит.

Из последнего неравенства и определения величины σ_j получим, что при $j \geq j_{\widetilde{k}}$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leq \widetilde{C}\exp\big\{4\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + 4L_0|\operatorname{Im} z|\big\}\,,\ z \in U_j \setminus V_j\,. \tag{2.2.18}$$

2) Положим

$$\Phi(z) := \begin{cases} \varphi_j(z)\,, & z \in U_j\,,\, j \in \mathbb{N}\,, \\ 0\,, & z \notin \bigcup_j U_j\,; \end{cases} \qquad h(z) := -\frac{\Phi(z)}{\check{\mu}(z)} \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\,,\; z \in \mathbb{C}\,.$$

При этом $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $h(z) = 0$ для $z \notin \bigcup_j (U_j \setminus V_j)$.

Оценим $|h(z)|$ сверху для $z \in U_j \setminus V_j$, $j \geq j_{\widetilde{k}}$. Из неравенств (2.2.16) с учетом леммы 2.2.3 вытекает, что

$$|\varphi_j(z)| \leq e^C \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} \cdot \exp\left\{(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + \widetilde{l}|\operatorname{Im} z|\right\}\,,\; z \in U_j\,,\; j \in \mathbb{N}\,, \quad (2.2.19)$$

где $\widetilde{l} = 2A(q+\varepsilon) + 3l$, а C — некоторая постоянная, от j не зависящая. Объединяя неравенства (2.2.17)–(2.2.19), для $z \in U_j \setminus V_j$, $j \geq j_{\widetilde{k}}$, получим следующую оценку:

$$|h(z)| \leq C_1 \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} \cdot \exp\left\{(q+8\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + L_1|\operatorname{Im} z|\right\}\,, \qquad (2.2.20)$$

где $C_1 := e^C \cdot \widetilde{C} + \sup\left\{|h(z)| : z \in U_j \setminus V_j\,,\; 1 \leq j < j_1\right\}$, $L_1 := \widetilde{l} + 7L_0$.

Установим для функции h еще специальную интегральную оценку. В силу свойства (γ) веса ω, при некотором $C_3 > 0$ выполняется неравенство

$$2\ln(1+|z|^2) \leq \varepsilon\omega(z) + C_3\,,\; z \in \mathbb{C}\,. \qquad (2.2.21)$$

Обозначим $\psi(z) := (q+9\varepsilon)\omega(z) + L_1|\operatorname{Im} z|$. Функция $\psi(z)$ субгармонична в $\mathbb{R}^2$, причем из оценок (2.2.20) и (2.2.21) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{C}} |h(z)|^2 \cdot \exp\left\{-2\psi(z)\right\} d\lambda \leq e^{C_3}\left(C_1 \cdot M \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}\right)^2,$$

где $M^2 := \int_{\mathbb{C}} \frac{d\lambda}{(1+|z|^2)^2}$.

Применяя известный результат Хермандера [69, теорема 4.4.2], находим решение $\overline{\partial}$-задачи $\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = h$, удовлетворяющее оценке

$$\int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2 \cdot \exp\left\{-2\psi(z) - 2\ln(1+|z|^2)\right\} d\lambda \leq \frac{1}{2}\, e^{C_3}\left(C_1 \cdot M \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}\right)^2. \quad (2.2.22)$$

3) Наконец, полагаем $f(z) = v(z)\check{\mu}(z) + \Phi(z)g(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Поскольку $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ всюду в $\mathbb{C}$, то $f \in H(\mathbb{C})$.

Проверим, что $f \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Для этого сначала получим на $|f(z)|^2$ интегральную весовую оценку. Имеем, что $|f|^2 \le 2\big(|v|^2 \cdot |\check{\mu}|^2 + |\Phi|^2\big)$ в $\mathbb{C}$. Так как по предположению μ принадлежит $\widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то найдется $C_2 > 0$, при котором

$$|\check{\mu}(z)| \le C_2 \cdot \exp\left\{\varepsilon\omega(z) + l_0|\operatorname{Im} z|\right\},\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{2.2.23}$$

Пусть $\psi_1(z) := \psi(z) + 2\varepsilon\omega(z) + l_0|\operatorname{Im} z|$. Из неравенств (2.2.22), (2.2.23) и (2.2.21) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2 \cdot |\check{\mu}(z)|^2 \cdot \exp\big\{-2\psi_1(z)\big\}\, d\lambda \le \frac{1}{2}\, e^{2C_3}\big(C_1 \cdot C_2 \cdot M \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}\big)^2\,.$$

Далее, из неравенств (2.2.19) с учетом оценки (2.2.21) и того, что $L_1 + l_0 - \widetilde{l} = l_0 + 7L_0 > 0$, получаем:

$$\int_{\mathbb{C}} |\Phi(z)|^2 \exp\big\{-2\psi_1(z)\big\}\, d\lambda \le e^{2C+C_3}\big(M \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}\big)^2\,.$$

Окончательно тогда имеем, что

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \cdot \exp\big\{-2\psi_1(z)\big\}\, d\lambda \le \big(C_4 \cdot M \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}\big)^2\,,$$

где $C_4^2 = (C_1C_2)^2 e^{2C_3} + 2e^{2C+C_3}$.

Для того чтобы получить теперь на функцию f равномерную оценку, используем ее субгармоничность:

$$|f(z)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{|t-z|=1} |f(t)|^2\, dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t-z|=1} |f(t)|^2 \exp\big\{-2\psi_1(t)\big\}\, d\lambda \cdot \sup_{|t-z|=1} \exp 2\psi_1(t) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\big(C_4 \cdot M \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}\big)^2 \cdot \exp\big\{2(q+11\varepsilon)\omega(|z|+1) + 2(L_1+l_0)\big(|\operatorname{Im} z|+1\big)\big\}\,.$$

Из этого, очевидно, следует, что $f \in H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Наконец, так как $f(z) = v(z)\check{\mu}(z) + \varphi_j(z)$, $z \in V_j$, $j \in \mathbb{N}$, то $f^{(l)}(\lambda_s) = \varphi_j^{(l)}(\lambda_s)$, $l = 0, \ldots, k_s - 1$, $\lambda_s \in V_j$. Таким образом, $[f|_{U_j}] = [\varphi_j]$ в X_j, $j \in \mathbb{N}$, т. е. $\rho([f]) = \varphi$. Предложение доказано. □

Следствие 2.2.2. *Отображение*

$$R : \psi \in \big(H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\big)' \mapsto \psi \circ \rho^{-1}$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\big(H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J\big)'_\beta$ *и* $(k^{p,\infty})'_\beta$.

Итак, для получения изоморфной реализации $\ker T_\mu$ остается описать пространство $(k^{p,\infty})'_\beta$. С этой целью рассмотрим банаховы пространства X'_j, $j \in \mathbb{N}$, сопряженные с пространствами X_j. Норма в X'_j имеет вид

$$|||\,\nu\,|||'_{\infty,j} = \sup\left\{|\nu([\varphi])| \;:\; [\varphi] \in X_j\,,\; |||\,[\varphi]\,|||_{\infty,j} \le 1\right\}.$$

Все пространства X'_j конечномерны, причем $\dim X'_j = m_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Положим $X' := \prod_{j=1}^{\infty} X'_j$ и определим следующее весовое подпространство пространства X':

$$\lambda^{p,\infty} = \Big\{\nu = (\nu_j)_{j=1}^{\infty} \in X' \mid \forall q \in (0,p)\;\; \forall l \in (0,\infty)$$
$$\widetilde{|\nu|}'_{\omega,q,l} = \sup_{j\ge 1} |||\,\nu_j\,|||'_{\infty,j} \exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\right\} < \infty\Big\}.$$

Ясно, что $\lambda^{p,\infty}$ является (FS)-пространством.

Как и в § 2.1, введем в рассмотрение отображения

$$s_j \,:\; [\varphi_j] \in X_j \mapsto (0,\ldots,0,\underset{j}{[\varphi_j]},0,\ldots) \in k^{p,\infty}\,;$$

$$t_j \,:\; \nu_j \in X'_j \mapsto (0,\ldots,0,\underset{j}{\nu_j},0,\ldots) \in \lambda^{p,\infty}\,.$$

Предложение 2.2.3. *Отображение*

$$S : \nu \in (k^{p,\infty})' \mapsto (\nu \circ s_j)_{j=1}^{\infty}$$

устанавливает топологический изоморфизм между $(k^{p,\infty})'_\beta$ *и* $\lambda^{p,\infty}$.

Доказательство. Сначала покажем, что каждый элемент $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^{\infty}$ из пространства k^{∞} раскладывается в этом пространстве в абсолютно сходящийся ряд $\sum_{j=1}^{\infty} s_j([\varphi_j])$. Зафиксируем $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^{\infty} \in k^{\infty}$. Тогда найдутся $q \in (0,1)$ и $l \in (0,\infty)$ такие, что $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} < \infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q + \varepsilon < 1$. Имеем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{|s_j([\varphi_j])|}_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} = \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\right\}.$$

Учитывая неравенство $m_j \ge 1$ и применяя следствие 2.2.1 из леммы 2.2.4, заключаем, что последний числовой ряд сходится. Значит, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} s_j([\varphi_j])$ сходится абсолютно в k^{∞}.

Из указанных соображений вытекает инъективность отображения S. Действительно, если $S(\nu)=0$, $\nu\in(k^\infty)'$, то $\nu\circ s_j=0$ в X_j', $j\in\mathbb{N}$. Следовательно, для любого $\varphi=([\varphi_j])_{j=1}^\infty\in k^\infty$ получаем, что $\nu(\varphi)=\sum_{j=1}^\infty(\nu\circ s_j)([\varphi_j])=0$, т. е. $\nu=0$.

Теперь установим сюръективность отображения S. Возьмем произвольную последовательность функционалов $\Theta=(\nu_j)_{j=1}^\infty\in\lambda^{p,\infty}$. Определим функционал ν на пространстве $k^{p,\infty}$ по правилу $\nu(\varphi)=\sum_{j=1}^\infty\nu_j([\varphi_j])$ для $\varphi=([\varphi_j])_{j=1}^\infty\in k^{p,\infty}$. Проверим, что $\nu\in(k^{p,\infty})'$. Пусть $\varphi=([\varphi_j])_{j=1}^\infty\in k^{p,\infty}$ и $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}<\infty$. Тогда

$$|\nu(\varphi)|\le\sum_{j=1}^\infty|\nu_j([\varphi_j])|\le\widetilde{|\Theta|}'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon}\cdot\sum_{j=1}^\infty\frac{|||\,[\varphi_j]\,|||}{\exp\big\{(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}z_j)+(l+\varepsilon)|\operatorname{Im}z_j|\big\}}$$
$$\le\widetilde{|\Theta|}'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon}\cdot\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}\cdot\sum_{j=1}^\infty\exp\big\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}z_j)-\varepsilon|\operatorname{Im}z_j|\big\}\,.$$

Снова пользуемся следствием 2.2.1 из леммы 2.2.4 и получаем, что $\nu\in(k^{p,\infty})'$. При этом, очевидно, $S(\nu)=\Theta$.

Заметим, что из последних оценок вытекает также, что отображение S^{-1} действует непрерывно из $\lambda^{p,\infty}$ в $(k^{p,\infty})'$. Учитывая, что для (FS)-пространств справедлива теорема об открытом отображении, заключаем, что S взаимно непрерывно. □

Объединяя предложение 2.2.1, следствие 2.2.2 из предложения 2.2.2 и предложение 2.2.3, получаем следующий результат.

Теорема 2.2.1. *Отображение* $L:=S\circ R\circ\Phi$ *является топологическим изоморфизмом* $\ker T_\mu$ *на* $\lambda^{p,\infty}$.

Равенства
$$L(E_j)=t_j(X_j')\,,\ j\in\mathbb{N},\tag{2.2.24}$$
проверяемые так же, как в лемме 2.1.5, позволяют теперь сформулировать основные результаты параграфа.

Теорема 2.2.2. *Пусть* ω *— весовая функция;* $p\in(0,\infty)$*;* $\mu\in\widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ *является делителем пространства* $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$*. В пространстве решений однородного уравнения свертки (2.1.2) имеется абсолютный базис*
$$\big\{e_{j,k}\,:\ k=1,\dots,m_j\,,\ j\in\mathbb{N}\big\}\,.\tag{2.2.25}$$

При каждом $j \in \mathbb{N}$ элементы $e_{j,k}$, $k = 1,\dots,m_j$, принадлежат подпространству E_j, натянутому на элементарные решения $(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}$, $l = 0,\dots,k_s-1$, $\lambda_s \in U_j$.

Доказательство. Сначала построим абсолютный базис в пространстве $\lambda^{p,\infty}$.

Напомним, что $\dim X_j = \dim X_j' = m_j$. Воспользуемся леммой Ауэрбаха [88, лемма 10.5] и выберем в пространствах X_j и X_j' базисы $\{[\varphi_{j,k}] : k = 1,\dots,m_j\}$ и $\{\nu_{j,k} : k = 1,\dots,m_j\}$ такие, что

$$||| \, [\varphi_{j,k}] \, |||_{\infty,j} = ||| \, \nu_{j,k} \, |||'_{\infty,j} = 1 \, , \; k = 1,\dots,m_j \, ;$$

$$< [\varphi_{j,k}], \nu_{j,m} >= \delta_{km} = \begin{cases} 1 \, , \; k = m \, , \\ 0 \, , \; k \neq m \, . \end{cases}$$

При этом $\nu_j = \sum_{k=1}^{m_j} < [\varphi_{j,k}], \nu_j > \nu_{j,k}$, $\nu_j \in X_j'$, $j \in \mathbb{N}$.

Покажем, что система

$$\big\{ t_j(\nu_{j,k}) \; : \; k = 1,\dots,m_j \, ; \; j \in \mathbb{N} \big\} \tag{2.2.26}$$

образует абсолютный базис в пространстве $\lambda^{p,\infty}$. Зафиксируем произвольный элемент $\nu = (\nu_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda^{p,\infty}$. Ясно, что если ν раскладывается по системе (2.2.26), то его разложение имеет вид $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} < [\varphi_{j,k}], \nu_j > \; t_j(\nu_{j,k})$. Проверим, что данный ряд сходится абсолютно в $\lambda^{p,\infty}$.

Пусть $q \in (0,p)$, $l \in (0,\infty)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q + \varepsilon < p$. Имеем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} \big| < [\varphi_{j,k}], \nu_j > \big| \cdot \big|\widetilde{t_j(\nu_{j,k})}\big|'_{\omega,q,l} \leq$$
$$\leq \big|\widetilde{\nu}\big|'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} m_j \exp\big\{ -\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j| \big\} \, .$$

По следствию 2.2.1 из леммы 2.2.4 последний числовой ряд сходится, откуда вытекает нужное.

Итак, в пространстве $\lambda^{p,\infty}$ имеется абсолютный базис (2.2.26).

Положим теперь $e_{j,k} := L^{-1}\big(t_j(\nu_{j,k})\big)$, $k = 1,\dots,m_j$, $j \in \mathbb{N}$. В силу равенств (2.2.24), $e_{j,k} \in E_j$, $k = 1,\dots,m_j$, $j \in \mathbb{N}$. Так как L — топологический изоморфизм $\ker T_\mu$ на $\lambda^{p,\infty}$, то система (2.2.25) образует абсолютный базис в $\ker T_\mu$. □

В заключение параграфа докажем теорему о совпадении $M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $\widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ для неквазианалитических весов ω.

Теорема 2.2.3. *Если ω — неквазианалитический вес, то условия (2.2.1) и (2.2.2) эквивалентны.*

Доказательство. Пусть целая функция μ удовлетворяет условию (2.2.1). Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда найдутся $l, C > 0$, при которых

$$|\mu(z)| \le C \exp\left\{\frac{\varepsilon}{K}\,\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|\right\},\ z \in \mathbb{C}, \tag{2.2.27}$$

где K — константа из условия $(\widetilde{\alpha})$. Далее, пусть $l_1, C_1 > 0$ таковы, что

$$|\mu(z)| \le C_1 \exp\big\{\omega(z) + l_1|\operatorname{Im} z|\big\},\ z \in \mathbb{C}. \tag{2.2.28}$$

Как известно [58, 6.5.4], для всех $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $y \ne 0$ справедлива оценка:

$$\ln|\mu(x+iy)| \le \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\mu(t)|}{(t-x)^2 + y^2}\,dt + |y| \cdot d\,, \tag{2.2.29}$$

где $d := \limsup_{r\to\infty} \frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\mu(re^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta$.

Оценим величину d, используя неравенство (2.2.28). Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\mu(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta &\le \frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \big(\ln C_1 + \omega(r) + l_1\, r\sin\theta\big)\sin\theta\,d\theta \\ &= \frac{4}{\pi r}\,\ln C_1 + \frac{4}{\pi r}\,\omega(r) + l_1\,.\end{aligned}$$

Поскольку в случае неквазианалитического веса $\frac{\omega(r)}{r} \to 0$ при $r \to \infty$, то заключаем, что $d \le l_1$.

Рассмотрим теперь первое слагаемое в (2.2.29). Напомним, что гармоническое продолжение P_ω веса ω удовлетворяет условию $P_\omega(iy) = o(y)$, $y \to \infty$. Следовательно, найдется $C_2 > 0$, при котором $P_\omega(iy) \le |y| + C_2$, $y \ne 0$. Применяя неравенства (2.2.27), $(\widetilde{\alpha})$ и последнюю оценку, получим:

$$\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\mu(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt \le \ln C + \frac{\varepsilon}{K}\cdot\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt \le$$

$$= \ln C + \frac{\varepsilon}{K}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(x+ty)}{t^2+1}\,dt \le \ln C + \varepsilon\big(\omega(x) + P_\omega(iy) + 1\big) \le$$

$$\le \ln C + \varepsilon\big(\omega(x) + |y| + C_2 + 1\big) \le \ln C + \varepsilon\omega(x) + |y| + C_2 + 1\,.$$

Возвращаясь к (2.2.29), окончательно имеем, что для всех $x + iy \in \mathbb{C}$ с $y \neq 0$

$$\ln|\mu(x+iy)| \le \varepsilon\omega(x) + l_0|y| + \ln C_0\,,$$

где $l_0 := l_1 + 1$, $\ln C_0 := \ln C + C_2 + 1$. Таким образом,

$$|\mu(x+iy)| \le C_0 \exp\big\{\varepsilon\omega(x) + l_0|y|\big\}\,,\ y \neq 0\,.$$

В силу непрерывности функций данное неравенство выполнено во всей плоскости. Значит, μ удовлетворяет условию (2.2.2), и теорема доказана. $\square$

2.3 Частное решение неоднородного уравнения свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$

Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0,\infty)$; T_μ — сюръективный оператор свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Тогда уравнение свертки

$$T_\mu f = g \tag{2.3.1}$$

имеет решение в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

В настоящем параграфе будет доказано существование у уравнения (2.3.1) частного решения специального вида. Для этого будет использована теория слабо достаточных множеств и абсолютно представляющих систем. Напомним определение слабо достаточного множества, введенное Д. М. Шнайдером в [97]. Для удобства приведем его сразу для обоих случаев $a = \infty$ и $a \in (0,\infty)$.

Определение 2.3.1. *Множество $S \subset \mathbb{C}$ называется слабо достаточным для $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, если топология $\operatorname*{ind}_{q\in(0,p)} \operatorname*{ind}_{l\in(0,a)} H_{\omega,q,l;S}$, где*

$$H_{\omega,q,l;S} = \left\{ f \in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) :\ \|f\|_{\omega,q,l;S} = \sup_{z\in S} \frac{|f(z)|}{\exp\big(q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|\big)} < \infty \right\},$$

совпадает с исходной $\operatorname*{ind}_{q\in(0,p)} \operatorname*{ind}_{l\in(0,a)} H_{\omega,q,l}$ в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Далее в настоящем параграфе будем рассматривать случай $a = \infty$, т. е. пространства $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Докажем следующее утверждение.

Предложение 2.3.1. *Множество $S_0 := \mathbb{R}\times(i\mathbb{R})$, состоящее из вещественной и мнимой оси, слабо достаточно для $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Доказательство проведем для $p = 1$. Пусть $q_n \uparrow 1$. Как известно [1, теорема 1], S_0 будет слабо достаточно для $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что для всех $f \in H_{\omega,q_n,n;S_0}$

$$\|f\|_{\omega,q_m,m} \leq C\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0}\,.$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Для любой функции f из $H_{\omega,q_n,n;S_0}$ справедливы оценки:

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\omega,q_n,n;S_0}\cdot e^{q_n\omega(x)}\,,\ x\in\mathbb{R}\,; \tag{2.3.2}$$

$$|f(iy)| \leq \|f\|_{\omega,q_n,n;S_0}\cdot e^{n|y|}\,,\ y\in\mathbb{R}\,. \tag{2.3.3}$$

По принципу Фрагмена-Линделефа [58, 6.5.4] для произвольной точки $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $y \neq 0$ выполняется неравенство

$$\ln|f(x+iy)| \leq \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f(t)|}{(x-t)^2+y^2}\,dt + |y|\,d\,, \tag{2.3.4}$$

где $d = \limsup\limits_{r\to\infty}\frac{2}{\pi r}\int\limits_0^\pi \ln|f(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta$.

Сначала рассмотрим первое слагаемое в правой части (2.3.4). Пользуясь условием (α), найдем для веса ω константу $D = D(n) > 0$ такую, что

$$q_n\omega(u+v) \leq q_{n+1}\big(\omega(u)+\omega(v)\big) + D\,,\ u,v\geq 0\,.$$

Тогда на основании (2.3.2) получаем следующее:

$$\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f(t)|}{(x-t)^2+y^2}\,dt \leq \ln\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0} + q_n\frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(x+t)}{t^2+y^2}\,dt \leq$$

$$\leq \ln\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0} + q_{n+1}\omega(x) + q_{n+1}\frac{2|y|}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega(t)}{t^2+y^2}\,dt + D =$$

$$= \ln\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0} + q_{n+1}\omega(x) + q_{n+1}\frac{2|y|}{\pi}\int_1^\infty\frac{\omega(t)}{t^2+y^2}\,dt + D \leq$$

$$\leq \ln\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0} + q_{n+1}\omega(x) + C_\omega|y| + D\,.$$

Теперь оценим d. Поскольку $f \in H_{\omega,q_n,n;S_0} \subset H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то f — целая функция экспоненциального типа. Из (2.3.2) и (2.3.3) вытекают следующие оценки для индикатора $h_f(\theta)$ функции f:

$$h_f(0) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(r)|}{r} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0} + q_n\omega(r)}{r} = 0\,;$$

$$h_f(\pi) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(-r)|}{r} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0} + q_n\omega(r)}{r} = 0\,;$$

$$h_f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(ir)|}{r} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0} + nr}{r} = n\,.$$

Учитывая тригонометрическую выпуклость индикатора,заключаем, что $h_f(\theta) \le n\sin\theta$ при всех $\theta \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ и $\theta \in \big(\frac{\pi}{2}, \pi\big)$. Значит,

$$h_f(\theta) \le n\sin\theta\,,\ \theta \in [0,\pi]\,.$$

Отсюда следует, что, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, можно найти $r_\varepsilon > 0$ такое, что при всех $r \ge r_\varepsilon$ и $\theta \in [0,\pi]$

$$\ln|f(re^{i\theta})| \le \big(h_f(\theta) + \varepsilon\big)r \le (n\sin\theta + \varepsilon)r\,.$$

Поэтому при $r \ge r_\varepsilon$

$$\frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|f(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \le \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (n\sin\theta + \varepsilon)\sin\theta\,d\theta = n + \frac{4\varepsilon}{\pi}\,,$$

так что $d \le n + \frac{4\varepsilon}{\pi}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $d \le n$.

Возвращаясь теперь к (2.3.4), окончательно имеем, что для всех $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $y \ne 0$

$$\ln|f(x+iy)| \le \ln\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0} + q_{n+1}\omega(x) + (C_\omega + n)|y| + D\,.$$

Положив $m := n + [C_\omega] + 1$, $C := e^D$, получим, что

$$|f(x+iy)| \le C\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0} e^{q_m\omega(x)+m|y|}\,,$$

причем последняя оценка справедлива всюду в $\mathbb{C}$ из-за непрерывности функций. Таким образом,

$$\|f\|_{\omega,q_m,m} \le C\|f\|_{\omega,q_n,n;S_0}\,,$$

что завершает доказательство. □

Положим теперь $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. Поскольку по предположению $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (F_1) теоремы 1.3.1, то найдутся положительные числа δ_k, r_k и L_k такие, что каждую точку $z \in \mathbb{C}$ с $|z| \geq r_k$ можно окружить окружностью S_z со свойствами $(F_1)(a)$ или $(F_1)(b)$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta_k \downarrow 0$, $r_k \uparrow \infty$, $c_{k+1} \leq c_k$, $k \in \mathbb{N}$, и что r_1 настолько велико, что

$$\omega(t) \leq t\,,\ t \geq r_1. \tag{2.3.5}$$

Тогда, во-первых, каждую точку $z = i \operatorname{Im} z$ мнимой оси можно окружить окружностью S_z^{Im}, для произвольной точки ζ которой выполняются неравенства

$$|\operatorname{Re}\zeta| \leq |\operatorname{Im} z|\,,\ |\operatorname{Im}\zeta - \operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Im} z|\,, \tag{2.3.6}$$

$$|\check{\mu}(\zeta)| \geq e^{-L_1|\operatorname{Im}\zeta|}\,. \tag{2.3.7}$$

Во-вторых, каждую точку $z = \operatorname{Re} z$ вещественной оси с $r_k \leq |\operatorname{Re} z| < r_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, можно окружить окружностью S_z^{Re}, для всех точек ζ которой справедливы оценки

$$|\operatorname{Re}\zeta - \operatorname{Re} z| \leq 6\delta_k\omega(\operatorname{Re} z)\,,\ |\operatorname{Im}\zeta| \leq 6\delta_k\omega(\operatorname{Re} z)\,, \tag{2.3.8}$$

$$|\check{\mu}(\zeta)| \geq e^{-\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\zeta)}\,. \tag{2.3.9}$$

Предложение 2.3.2. *Множество*

$$S = [-r_1, r_1] \cup [-ir_1, ir_1] \cup \Big(\bigcup_{\substack{z = i\operatorname{Im} z \\ |z| \geq r_1}} S_z^{\mathrm{Im}} \Big) \cup \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{z = \operatorname{Re} z \\ r_k \leq |z| < r_{k+1}}} S_z^{\mathrm{Re}} \Big)$$

слабо достаточно для $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Доказательство. Снова рассматриваем $p = 1$. Поскольку в соответствии с предложением 2.3.1, множество S_0 слабо достаточно для $H^{1,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, нам достаточно проверить, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$\|f\|_{\omega,q_m,m;S_0} \leq C\|f\|_{\omega,q_n,n;S}\,,\ f \in H_{\omega,q_n,n;S}.$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть f — произвольная функция из $H_{\omega,q_n,n;S}$. Тогда

$$|f(\zeta)| \leq \|f\|_{\omega,q_n,n;S} \exp\big(q_n\omega(\operatorname{Re}\zeta) + n|\operatorname{Im}\zeta|\big)\,,\ \zeta \in S\,. \tag{2.3.10}$$

В силу (1.1.3), можно найти $k_0 = k_0(n) \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k \geq k_0$

$$q_n\omega\bigl((1+6\delta_k)t\bigr) \leq q_{n+1}\omega(t)\,,\ t \geq r_k\,; \tag{2.3.11}$$

$$q_{n+1} + 6n\delta_k \leq q_{n+2}\,. \tag{2.3.12}$$

Пусть z — произвольная точка вещественной или мнимой оси. Рассмотрим возможные случаи расположения точки z и оценим в каждом их них $|f(z)|$.

1. Если $z \in [-r_1, r_1] \cup [-ir_1, ir_1]$, то $z \in S$, так что для $f(z)$ справедлива оценка (2.3.10) с $\zeta = z$.

2. Пусть $z = i\,\mathrm{Im}\,z$, $|z| \geq r_1$. Тогда точка z находится внутри соответствующей окружности S_z^{Im}, на которой выполнены неравенства (2.3.6) и (2.3.7). По принципу максимума модуля аналитической функции имеется точка $\zeta \in S_z^{\mathrm{Im}}$ такая, что $|f(\zeta)| = \sup\{|f(w)| : w$ внутри $S_z^{\mathrm{Im}}\}$. Поэтому на основании (2.3.10), (2.3.6) и (2.3.5) получаем:

$$\begin{aligned} |f(z)| \leq |f(\zeta)| \leq \|f\|_{\omega,q_n,n;S} \exp\bigl(q_n\omega(\mathrm{Im}\,z) + 2n|\mathrm{Im}\,z|\bigr) \leq \\ \leq \|f\|_{\omega,q_n,n;S} \exp\bigl((2n+q_n)|\mathrm{Im}\,z|\bigr)\,. \end{aligned}$$

3. Для точки $z = \mathrm{Re}\,z$ с $|z| \geq r_1$ найдем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $r_k \leq |z| < r_{k+1}$. Аналогично предыдущему существует точка $\zeta \in S_z^{\mathrm{Re}}$ с $|f(\zeta)| = \sup\{|f(w)| :$ w внутри $S_z^{\mathrm{Re}}\}$. При этом из (2.3.8) и (2.3.5) вытекает, что

$$|\mathrm{Re}\,\zeta| \leq |\mathrm{Re}\,z| + 6\delta_k\omega(\mathrm{Re}\,z) \leq (1+6\delta_k)|\mathrm{Re}\,z|\,.$$

Значит, в силу (2.3.10) и второго неравенства (2.3.8)

$$|f(z)| \leq |f(\zeta)| \leq \|f\|_{\omega,q_n,n;S} \exp\Bigl(q_n\omega\bigl((1+6\delta_k)\mathrm{Re}\,z\bigr) + 6n\delta_k\omega(\mathrm{Re}\,z)\Bigr)\,. \tag{2.3.13}$$

С учетом (2.3.11) и (2.3.12) эта оценка продолжается при $k \geq k_0$ следующим образом:

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\omega,q_n,n;S} \exp\bigl((q_{n+1}+6n\delta_k)\omega(\mathrm{Re}\,z)\bigr) \leq \|f\|_{\omega,q_n,n;S}\, e^{q_{n+2}\omega(\mathrm{Re}\,z)}\,.$$

Положив еще $C := \exp\Bigl(q_n\omega\bigl((1+6\delta_1)r_{k_0}\bigr) + 6n\delta_1\omega(r_{k_0})\Bigr)$, на основании (2.3.13) при $k < k_0$ имеем, что $|f(z)| \leq C\|f\|_{\omega,q_n,n;S}$. Таким образом, для всех рассматриваемых в данном случае z

$$|f(z)| \leq C\|f\|_{\omega,q_n,n;S}\, e^{q_{n+2}\omega(\mathrm{Re}\,z)}\,.$$

Объединяя случаи 1–3, заключаем, что при всех $z \in S_0$

$$|f(z)| \le C\|f\|_{\omega,q_n,n;S} \exp\left(q_m\omega(\operatorname{Re} z) + m|\operatorname{Im} z|\right),$$

где $m := 2n+1$. Предложение доказано. $\square$

Воспользуемся теперь результатом О. В. Епифанова [16, теорема 1] о дискретизации слабо достаточных множеств и выделим из S подмножество $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$, $|\nu_j| \uparrow \infty$, также слабо достаточное для $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Отметим, что, проанализировав неравенства (2.3.8), легко увидеть, что множество

$$[-r_1, r_1] \cup [-ir_1, ir_1] \cup \left(\bigcup_{k=1}^{k_0} \bigcup_{\substack{z=\operatorname{Re} z \\ r_k \le |z| < r_{k+1}}} S_z^{\operatorname{Re}}\right),\ k_0 \in \mathbb{N},$$

может содержать лишь конечное число ν_j.

Завершающий этап основан на применении результата Ю. Ф. Коробейника о связи между слабо достаточными множествами и абсолютно представляющими системами (АПС). Напомним определение АПС, которое было введено в [19].

Определение 2.3.2. *Последовательность $X = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ элементов локально выпуклого пространства H называется АПС в H, если любой элемент $x \in H$ допускает представление вида $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j x_j$ и ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j x_j$ сходится абсолютно в H.*

Из теоремы К работы [21] вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.3.3. *Пусть $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$ — построенное выше слабо достаточное множество для $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Тогда система экспонент $\left\{e^{-i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$.*

Основным результатом параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.3.1. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $\mu \in M^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; $\left\{e^{-i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ — соответствующая ему АПС в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Тогда для любой функции $g \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{g_j}{\check{\mu}(\nu_j)} e^{-i\nu_j x}$, где $\sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j e^{-i\nu_j x}$ — абсолютно сходящееся в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ разложение g, сходится абсолютно в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и его сумма f является решением уравнения свертки $T_\mu f = g$.*

Доказательство. Пусть $p = 1$, $q_n \uparrow 1$. Предположим, что правая часть g рассматриваемого уравнения свертки $T_\mu f = g$ разложена по АПС $\left\{e^{-i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ в абсолютно сходящийся в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ ряд: $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j e^{-i\nu_j x}$.

Покажем, что ряд $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\check{\mu}(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x}$ сходится абсолютно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и обозначим для краткости

$$a_j := \frac{|g_j|}{|\check{\mu}(\nu_j)|} \cdot \left|e^{-i\nu_j x}\right|_{\omega, q_n, n}.$$

Заметим, что в соответствии с [9, лемма 3] при всех $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1+|\nu_j|}\, e^{q_n \omega(\nu_j) + n|\operatorname{Im}\nu_j|} \le \left|e^{-i\nu_j x}\right|_{\omega, q_n, n} \le e^{q_n \omega(\nu_j) + n|\operatorname{Im}\nu_j|}. \tag{2.3.14}$$

По номеру n найдем $k_0 \in \mathbb{N}$, при котором $\varepsilon_{k_0} < q_{n+1} - q_n$, а затем $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $j \ge j_0$

$$\nu_j \in \Bigg(\bigcup_{\substack{z = i\operatorname{Im} z\\ |z| \ge r_1}} S_z^{\operatorname{Im}}\Bigg) \cup \Bigg(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \bigcup_{\substack{z = \operatorname{Re} z\\ r_k \le |z| < r_{k+1}}} S_z^{\operatorname{Re}}\Bigg).$$

Оценим a_j, $j \ge j_0$. Если $\nu_j \in S_z^{\operatorname{Im}}$, $z = i\operatorname{Im} z$, $|z| \ge r_1$, то в силу правой части (2.3.14) и неравенства (2.3.7) получаем, что

$$a_j \le \frac{1}{c_1}\, |g_j| \exp\left(q_n \omega(\nu_j) + (n + L_1)|\operatorname{Im}\nu_j|\right).$$

Если же $\nu_j \in S_z^{\operatorname{Re}}$, $z = \operatorname{Re} z$, $r_k \le |z| < r_{k+1}$, $k \ge k_0$, то из (2.3.14) и (2.3.9) вытекает, что

$$a_j \le |g_j| \exp\left((q_n + \varepsilon_k)\omega(\nu_j) + n|\operatorname{Im}\nu_j|\right) \le |g_j| \exp\left(q_{n+1}\omega(\nu_j) + n|\operatorname{Im}\nu_j|\right).$$

Значит, при всех $j \ge j_0$

$$a_j \le \frac{1}{c_1}\, |g_j| \exp\left(q_p \omega(\nu_j) + p|\operatorname{Im}\nu_j|\right), \tag{2.3.15}$$

где $p := n + [L_1] + 1$.

Ограничение (γ) на вес ω влечет существование константы $C > 0$, при которой

$$\ln(1+t) \le (q_{p+1} - q_p)\omega(t) + C\,,\ t \ge 0\,.$$

Тогда на основании (2.3.15) и левой части (2.3.14) при $j \ge j_0$ имеем, что

$$a_j \le \frac{1}{c_1}\,|g_j|\cdot\left|e^{-i\nu_j x}\right|_{\omega,q_{p+1},p+1}\cdot\frac{\exp\big(q_p\omega(\nu_j)+p|\operatorname{Im}\nu_j|\big)}{\left|e^{-i\nu_j x}\right|_{\omega,q_{p+1},p+1}} \le$$

$$\le \frac{1}{c_1}\,|g_j|\cdot\left|e^{-i\nu_j x}\right|_{\omega,q_{p+1},p+1}\cdot\exp\Big(\ln(1+|\nu_j|)-(q_{p+1}-q_p)\omega(\nu_j)-|\operatorname{Im}\nu_j|\Big) \le$$

$$\le \frac{e^C}{c_1}\,|g_j|\cdot\left|e^{-i\nu_j x}\right|_{\omega,q_{p+1},p+1}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}|g_j|\cdot\left|e^{-i\nu_j x}\right|_{\omega,q_{p+1},p+1}<\infty,$$

заключаем, что числовой ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится. Так как пространство $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ полно, то из этого следует, что ряд $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{\check{\mu}(\lambda_j)}\,e^{-i\nu_j x}$ сходится абсолютно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ к некоторой функции f. При этом

$$T_\mu f=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{\check{\mu}(\nu_j)}\,T_\mu(e^{-i\nu_j x})=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{\check{\mu}(\nu_j)}\,\check{\mu}(\nu_j)\,e^{-i\nu_j x}=g\,,$$

т. е. f является решением рассматриваемого уравнения свертки $T_\mu f = g$. Теорема доказана. □

2.4 Частное решение неоднородного уравнения свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$

В настоящем параграфе неоднородное уравнение свертки (2.3.1) рассматривается в пространстве Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ УДФ нормального типа на конечном интервале. В целом методика построения частного решения остается такой же, как в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ на числовой прямой. Имеются два отличительных момента: во-первых, при доказательства аналога предложения 2.3.1 приходится проводить более точные оценки с использованием свойства (1.1.8) функции P_ω; во-вторых, в искомое слабо достаточное множество (на котором имеют место оценки снизу на $|\check{\mu}|$) войдут участки самой мнимой оси, а не окружности S_z^{Im}. Последнее возможно благодаря полной регулярности роста функции $\check{\mu}$.

Итак, прежде всего, по аналогии с предложением 2.3.1 с использованием оценки (1.1.8) доказывается

Предложение 2.4.1. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $a \in (0,\infty)$. Множество $S_0 := \mathbb{R} \times (i\mathbb{R})$, состоящее из вещественной и мнимой оси, слабо достаточно для $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$.*

Доказательство мы здесь повторять не будем.

По предположению, $\mu \in M_{(\omega)}^0(\mathbb{C})$ является делителем пространства $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$. Следовательно, взяв произвольные последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$, $\delta_k \downarrow 0$, можно найти, пользуясь условием (F_2), соответствующие $r_k \uparrow \infty$. Будем считать числа r_k настолько большими, что $\omega(t) \le t$ при $t \ge r_1$ и $2\delta_k r_k \ge r_1$.

В силу условия (F_2), каждую точку $z = \operatorname{Re} z$ действительной оси с $r_k \le |\operatorname{Re} z| < r_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, можно поместить внутрь окружности S_z^{Re} радиуса $R_z \le \delta_k \omega(\operatorname{Re} z)$, для всех точек ζ которой выполняется неравенство

$$|\check{\mu}(\zeta)| \ge \exp\Big\{ -\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re}\zeta) - \varepsilon_k |\operatorname{Im}\zeta| \Big\}. \tag{2.4.1}$$

При этом для $\zeta \in S_z^{\mathrm{Re}}$ имеем также:

$$|\operatorname{Re}\zeta| \le |\operatorname{Re} z| + 2R_z \le |\operatorname{Re} z| + 2\delta_k \omega(\operatorname{Re} z) \le (1+2\delta_k)|\operatorname{Re} z|; \tag{2.4.2}$$

$$|\operatorname{Im}\zeta| \le 2R_z \le 2\delta_k \omega(\operatorname{Re} z). \tag{2.4.3}$$

Далее, целая функция $\check{\mu}$ имеет нулевой тип при порядке 1, так что $\check{\mu}$ — функция вполне регулярного роста. Следовательно, вне некоторого исключительного множества кружков $\bigcup_j E_j$, $E_j = \{z : |z-\xi_j| < \rho_j\}$, нулевой линейной плотности выполняется условие

$$\frac{\ln|\check{\mu}(z)|}{|z|} \to 0, \ |z| \to \infty.$$

Как известно, кружки E_j можно считать попарно не пересекающимися. Это позволяет предполагать, что r_k, $k \in \mathbb{N}$, выбраны таким образом, что

$$|\check{\mu}(z)| \ge e^{-\varepsilon_k |z|}, \ |z| \ge r_k, \ z \notin \bigcup_j E_j.$$

В частности, для всех точек $z = i\,\mathrm{Im}\,z$ мнимой оси с $r_k \le |\mathrm{Im}\,z| < r_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, $z \notin \bigcup_j E_j$, справедлива оценка

$$|\breve{\mu}(i\,\mathrm{Im}\,z)| \ge e^{-\varepsilon_k|\mathrm{Im}\,z|}\,. \tag{2.4.4}$$

Пусть теперь $z \in \bigcup_j E_j$. Через $j(z)$ обозначим номер кружка, в который попадает точка z. Так как множество кружков E_j имеет нулевую линейную плотность, то

$$\lim_{z\to\infty, z\in\bigcup_j E_j} \frac{\rho_{j(z)}}{|z|} = 0\,.$$

Поэтому можно считать, что

$$\rho_{j(z)} \le \delta_k|z|\,,\ |z| \ge r_k\,,\ z \in E_{j(z)}\,. \tag{2.4.5}$$

Аналогом предложения 2.3.2 из § 2.3 является

Предложение 2.4.2. *Пусть $a \in (0,\infty)$. Множество*

$$S = [-r_1, r_1]\bigcup[-ir_1, ir_1]\bigcup\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{\substack{z=\mathrm{Re}\,z\\ r_k\le|z|<r_{k+1}}} S_z^{\mathrm{Re}}\Big)\bigcup\Big(i\mathbb{R}\setminus\bigcup_j E_j\Big)$$

слабо достаточно для $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Доказательство. Пусть $p = 1$. С учетом предложения 2.4.1 нам достаточно доказать, что для любых $q \in (0,1)$, $l \in (0,a)$ найдутся $\widetilde{q} \in (0,1)$, $\widetilde{l} \in (0,a)$ и $C > 0$ такие, что

$$\|f\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l};S_0} \le C\cdot\|f\|_{\omega,q,l;S}\,,\ f \in H_{\omega,q,l;S}\,.$$

Зафиксируем $q \in (0,1)$ и $l \in (0,a)$. Пусть f — произвольная функция из $H_{\omega,q,l;S}$. Тогда

$$|f(\zeta)| \le \|f\|_{\omega,q,l;S}\cdot\exp\big\{q\omega(\mathrm{Re}\,\zeta) + l|\mathrm{Im}\,\zeta|\big\}\,,\ \zeta \in S\,. \tag{2.4.6}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $q+2\varepsilon < 1$ и $l+2\varepsilon < a$. Далее, найдем $k_0 = k_0(q,l)$ такое, что при всех $k \ge k_0$

$$2l\delta_k \le \varepsilon\,, \tag{2.4.7}$$

$$2q\delta_k + l(1+2\delta_k) \le l + \varepsilon\,, \tag{2.4.8}$$

$$q\omega\big((1+2\delta_k)t\big) \le (q+\varepsilon)\omega(t) + C_1\,,\ t \ge 0\,. \tag{2.4.9}$$

Пусть z — произвольная точка из S_0, т. е. произвольная точка действительной или мнимой оси. Если $z \in [-r_1, r_1] \bigcup [-ir_1, ir_1] \bigcup \big(i\mathbb{R} \setminus \bigcup_j E_j\big)$, то $z \in S$, так что для $|f(z)|$ справедлива оценка (2.4.6) с $\zeta = z$.

Рассмотрим оставшиеся случаи.

1) Пусть $z = \operatorname{Re} z$, $|z| > r_1$. Найдем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $r_k \le |\operatorname{Re} z| < r_{k+1}$. На соответствующей окружности S_z^{Re} выберем точку ζ такую, что $|f(\zeta)| = \sup\big\{|f(w)| : w \text{ внутри } S_z^{\mathrm{Re}}\big\}$. Тогда на основании (2.4.6), (2.4.2) и (2.4.3) имеем:

$$|f(z)| \le |f(\zeta)| \le \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\big\{q\omega\big((1+2\delta_k)\operatorname{Re} z\big) + 2l\delta_k\omega(\operatorname{Re} z)\big\}\,.$$

При $k \ge k_0$ с учетом (2.4.7) и (2.4.9) эта оценка может быть продолжена следующим образом:

$$|f(z)| \le \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot e^{C_1} \cdot e^{(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z)}\,.$$

Положив $C_2 := \exp\big(C_1 + q\omega\big((1+2\delta_1)r_{k_0}\big) + 2l\delta_1\omega(r_{k_0})\big)$, получим, что

$$|f(z)| \le C_2 \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot e^{(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z)}\,,\ z = \operatorname{Re} z\,,\ |z| > r_1\,. \tag{2.4.10}$$

2) Если $z = i\operatorname{Im} z$, $|z| > r_1$, $z \in \bigcup_j E_j$, то, как и выше, найдем $j(z) \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ такие, что $z \in E_{j(z)}$ и $r_k \le |z| < r_{k+1}$. На границе кружка $E_{j(z)}$ выберем точку ζ, для которой $|f(\zeta)| = \sup\{|f(w)| : w \in E_{j(z)}\}$. При этом

$$|\operatorname{Re}\zeta| \le 2\rho_{j(z)}\,,\ |\operatorname{Im}\zeta| \le |\operatorname{Im} z| + 2\rho_{j(z)}\,.$$

В силу (2.4.6) и (2.4.5) тогда

$$\begin{aligned} |f(z)| \le |f(\zeta)| &\le \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\big\{q\omega\big(2\rho_{j(z)}\big) + l\big(|\operatorname{Im} z| + 2\rho_{j(z)}\big)\big\} \le \\ &\le \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\big\{q\omega(2\delta_k\operatorname{Im} z) + l(1+2\delta_k)|\operatorname{Im} z|\big\} \le \\ &\le \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\big\{\big(2q\delta_k + l(1+2\delta_k)\big)|\operatorname{Im} z|\big\}\,. \end{aligned}$$

При $k \ge k_0$ на основании (2.4.8) имеем:

$$|f(z)| \le \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot e^{(l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|}\,.$$

Положив $\rho_0 := \sup\{\rho_{j(z)} : |z| < r_{k_0}\}$, $C_3 := \exp\{q\omega(2\rho_0) + l(r_{k_0} + 2\rho_0)\}$, окончательно заключаем, что

$$|f(z)| \le C_3 \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot e^{(l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|}\,,\ z = i\operatorname{Im} z\,,\ |z| \ge r_1\,,\ z \in \bigcup_j E_j\,. \tag{2.4.11}$$

Объединяя (2.4.10) и (2.4.11), получаем, что для $z \in S_0 \setminus S$

$$|f(z)| \le C \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\left\{(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\right\},$$

где $C = \max\{C_2, C_3\}$ не зависит от f.

Положим $\widetilde{q} = q+2\varepsilon$, $\widetilde{l} = l+\varepsilon$. Тогда $\|f\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l};S_0} \le C\cdot\|f\|_{\omega,q,l;S}$. Предложение доказано. □

Далее, как и в § 2.3, применяем результат О. В. Епифанова из [16, Теорема 1] и выделяем из множества S дискретное подмножество $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$, $|\nu_j| \uparrow \infty$, слабо достаточное для $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. При этом из неравенств (2.4.1) и (2.4.4) вытекает, что

$$|\check{\mu}(\nu_j)| \ge \exp\left\{ -\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\nu_j) - \varepsilon_k|\operatorname{Im}\nu_j|\right\},\ j \ge j(k), \tag{2.4.12}$$

где $j(k)$ выбрано так, что $|\nu_{j(k)}| \ge r_k$.

Тогда на основании теоремы Ю. Ф. Коробейника из [21] система $\left\{e^{-i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

Основным результатом параграфа является

Теорема 2.4.1. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $I = (-a,a)$; $a \in (0,\infty)$; $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; $\left\{e^{-i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ — соответствующая ему АПС в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Если правая часть g уравнения свертки (2.3.1) разложена в абсолютно сходящийся в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ ряд $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j\, e^{-i\nu_j x}$, то функция*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\check{\mu}(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x} \tag{2.4.13}$$

является частным решением уравнения свертки (2.3.1) в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ (последний ряд сходится абсолютно в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$).

Доказательство в целом аналогично доказательству теоремы 2.3.1, поэтому мы здесь его опустим.

2.5 Частное и общее решение уравнений свертки в случае $\omega(t) = t^{\rho(t)}$

В § 2.3 и § 2.4 для символа μ сюръективного оператора свертки T_μ было доказано существование специальной АПС $\left\{e^{-i\nu_j x} : j \in \mathbb{N}\right\}$ в пространствах

Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ УДФ нормального типа $p \in (0, \infty)$ на числовой прямой и на конечном интервале: именно, для $|\check{\mu}(\nu_j)|$, $j \in \mathbb{N}$, должны выполняться подходящие оценки снизу.

Настоящий параграф посвящен конструктивному построению показателей ν_j в случае, когда $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0, 1)$ — некоторый уточненный порядок, причем точки ν_j будут выбираться симметрично на действительной оси.

Мы будем рассматривать символы μ из примеров 1.5.5 и 2.1.2. Именно, пусть

$$\mu(z) = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\lambda_s}\right), \ |\lambda_s| \uparrow \infty \,, \tag{2.5.1}$$

где последовательность нулей $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (1.5.10) и (C'). Для удобства мы только изменили сейчас знак в определении символа μ, чтобы нулями функции $\check{\mu}$ были сами точки λ_s, а не $-\lambda_s$.

Символ μ имеет нулевой тип при порядке $\rho(r)$ и, значит, соответствующий оператор свертки T_μ представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Оператор T_μ сюръективен на каждом из пространств $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ как в случае конечного интервала I, так и в случае $I = \mathbb{R}$.

Как было отмечено в примере 2.1.2, в данном случае группировку нулей проводить не нужно, так что общее решение однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$ в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{-i\lambda_j x} \,, \ \alpha_j \in \mathbb{C} \,, \ j \in \mathbb{N}.$$

Перейдем к построению искомой последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Построение будет проводиться отдельно для конечного интервала $I = (-a, a)$ и для $I = \mathbb{R}$.

Предварительно напомним, что для рассматриваемой функции $\check{\mu}$ вне некоторого исключительного множества кружков $C_s = \{z : |z - \lambda_s| < r_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, справедливо равенство

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\ln |\check{\mu}(z)|}{|z|^{\rho(z)}} = 0 \,. \tag{2.5.2}$$

Заметим также, что, в силу [28, Замечание после Теоремы 1.2.6], в качестве радиусов r_s исключительных кружков можно взять любое фиксированное число $\gamma > 0$. При достаточно малом γ кружки C_s будут попарно не пересекающимися.

1. Построение для случая конечного интервала $I = (-a, a)$.

Выберем достаточно малое $\gamma < \frac{1}{4a}$. Пусть $C_s = \{z : |z - \lambda_s| < \gamma\}$ — соответствующие исключительные кружки, вне которых выполняется условие (2.5.2).

Положительные нули $\frac{\pi n}{a}$, $n \in \mathbb{N}$, функции $\sin az$ разобьем на две возрастающие последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ по правилу: точки $\pm\eta_j$ не попадают в исключительные кружки C_s, а ξ_j или $-\xi_j$ попадают в C_s. Мы будем рассматривать наиболее сложный случай, когда точек ξ_j бесконечно много. Положим $K_j^{\pm} = \{z : |z \mp \xi_j| < \gamma\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Далее, пользуясь [28, Теорема 1.2.3], из последовательности $\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi n}{a}\right)_{n=1}^{\infty}$ выделяем подпоследовательность $(\zeta_k)_{k=1}^{\infty}$, лежащую вне $\bigcup_s C_s$, такую, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\zeta_k^{\rho(\zeta_k)}} = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi\rho}{2}\,; \tag{2.5.3}$$

$$\zeta_{k+1} - \zeta_k > d_1 \zeta_k^{1-\rho(\zeta_k)}\,,\ k \in \mathbb{N}\,,\ \text{при некотором } d_1 > 0\,. \tag{2.5.4}$$

При этом автоматически $\zeta_k \notin \bigcup_j K_j^{\pm}$, $k \in \mathbb{N}$.

В качестве искомой последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ берем объединение последовательностей $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(\zeta_k)_{k=1}^{\infty}$.

2. Построение для случая $I = \mathbb{R}$.

При каждом $q \in \mathbb{N}$ возьмем число $\gamma^{(q)}$ так, чтобы выполнялись следующие условия: $\gamma^{(q)} < \frac{1}{4\cdot 2^q}$; $\gamma^{(q+1)} < \gamma^{(q)}$; исключительные кружки $C_s^{(q)} = \big\{z : |z - \lambda_s| < \gamma^{(q)}\big\}$, $s = 1, 2, \ldots$, вне которых выполняется равенство (2.5.2), попарно не пересекаются. Рассмотрим функцию $\sin 2^q z$ и ее положительные нули $\frac{\pi n}{2^q}$, $n \in \mathbb{N}$. Разобьем их на две возрастающие последовательности $\xi_1^{(q)}, \xi_2^{(q)}, \ldots$ и $\eta_1^{(q)}, \eta_2^{(q)}, \ldots$ по правилу: точки $\pm\eta_j^{(q)}$ не попадают в исключительные кружки $C_s^{(q)}$, а $\xi_j^{(q)}$ или $-\xi_j^{(q)}$ попадают в $C_s^{(q)}$. Будем считать, что точек $\xi_j^{(q)}$ бесконечно много, поскольку это наиболее сложная ситуация. Положим $K_{j,\pm}^{(q)} = \big\{z : |z \mp \xi_j^{(q)}| < \gamma^{(q)}\big\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Далее, на основании [28, теорема 1.2.3] выделим из последовательности $\left(\frac{\pi}{2\cdot 2^q}+\frac{\pi n}{2^q}\right)_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $(\zeta_k^{(q)})_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\pm\zeta_k^{(q)}\notin\bigcup_s C_s^{(q)}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\left(\zeta_k^{(q)}\right)^{\rho(\zeta_k^{(q)})}}=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\rho}{2}\,;$$

$$\zeta_{k+1}^{(q)}-\zeta_k^{(q)}>d_q\big(\zeta_k^{(q)}\big)^{1-\rho(\zeta_k^{(q)})}\,,\ k\in\mathbb{N}\,,\ \text{при некотором } d_q>0\,.$$

При этом $\zeta_k^{(q)}\notin\bigcup_j K_{j,\pm}^{(q)}$, $k\in\mathbb{N}$.

Построенные последовательности $\big(\eta_k^{(q)}\big)_{k=1}^{\infty}$ и $\big(\zeta_k^{(q)}\big)_{k=1}^{\infty}$ объединяем в одну возрастающую последовательность $\big(\nu_j^{(q)}\big)_{j=1}^{\infty}$. Все точки $\pm\nu_j^{(q)}$ лежат вне исключительных кружков $C_s^{(q)}$.

Отметим некоторые очевидные свойства последовательностей $\big(\nu_j^{(q)}\big)_{j=1}^{\infty}$, $q\in\mathbb{N}$. Во-первых, понятно, что $\big(\nu_j^{(q)}\big)_{j=1}^{\infty}\subset\big(\nu_j^{(q+1)}\big)_{j=1}^{\infty}$, $q\in\mathbb{N}$. Далее, если обозначить через $n^{(q)}(r)$, $r>0$, количество элементов последовательности $\big(\nu_j^{(q)}\big)_{j=1}^{\infty}$ на промежутке $(0,r]$, то

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{n^{(q)}(r)}{r}<\infty\,,\ q\in\mathbb{N}\,.$$

Действительно, на любом полуинтервале длиной π количество элементов последовательности $\big(\nu_j^{(q)}\big)_{j=1}^{\infty}$ не превышает 2^{q+1}. Следовательно, если $l\pi<r\le(l+1)\pi$, $l\in\mathbb{N}$, то $n^{(q)}(r)\le(l+1)2^{q+1}\le\big(\frac{r}{\pi}+1\big)2^{q+1}$. Таким образом, $\limsup_{r\to\infty}\frac{n^{(q)}(r)}{r}\le\frac{2^{q+1}}{\pi}<\infty$.

Перейдем, наконец, к построению искомой последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Возьмем элементы последовательности $\big(\nu_j^{(1)}\big)_{j=1}^{\infty}$, лежащие на промежутке $(0,l_1\pi]$ (натуральные числа $l_1<l_2<\ldots$ будут выбраны ниже). Занумеруем их по возрастанию $\nu_1,\ldots,\nu_{j_1}$. Затем выберем элементы последовательности $\big(\nu_j^{(2)}\big)_{j=1}^{\infty}$, попадающие на промежуток $\big(l_1\pi,(l_1+l_2)\pi\big]$, и обозначим их $\nu_{j_1+1},\ldots,\nu_{j_2}$. Далее, пусть $\nu_{j_2+1},\ldots,\nu_{j_3}$ — занумерованные по возрастанию элементы последовательности $\big(\nu_j^{(3)}\big)_{j=1}^{\infty}$ из промежутка $\big((l_1+l_2)\pi,(l_1+l_2+l_3)\pi\big]$. Продолжая этот процесс далее, получим возрастающую последовательность $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел. При этом по построению каждая последовательность $\big(\nu_j^{(p)}\big)_{j=1}^{\infty}$, $p\in\mathbb{N}$, за исключением конечного числа элементов будет подпоследовательностью последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Кроме того, все точки $\pm\nu_j$ будут находиться вне исключительных кружков функции $\check{\mu}$.

Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$|\check{\mu}(\pm\nu_j)| \geq \exp\left\{ -\varepsilon\nu_j^{\rho(\nu_j)} \right\}, \ j \geq j(\varepsilon)\,. \tag{2.5.5}$$

Отметим еще одно полезное свойство последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Именно, оценим величину $n(r)$ — количество элементов последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ на промежутке $(0, r]$. Зафиксируем $r > l_1\pi$ и найдем $q \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{j=1}^{q-1} l_j\pi < r \leq \sum_{j=1}^{q} l_j\pi$. Тогда $n(r) \leq \sum_{j=1}^{q} l_j \cdot 2^{j+1} \leq q \cdot l_l \cdot 2^{q+1}$. При этом $r > \sum_{j=1}^{q-1} l_j\pi > l_{q-1}\cdot\pi > l_{q-1}$. Исходя из полученных оценок, числа l_q подберем так, чтобы

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{1+\varepsilon}} = 0 \ \text{ для любого } \ \varepsilon > 0\,. \tag{2.5.6}$$

Возьмем, например, $l_q = 2^{q^2}$. Тогда

$$\frac{n(r)}{r^{1+\varepsilon}} \leq \frac{q\cdot 2^{q^2}\cdot 2^{q+1}}{2^{(1+\varepsilon)(q-1)^2}} = q\cdot 2^{-\varepsilon q^2+3q+2q\varepsilon-\varepsilon} \to 0\,,\ q\to\infty\,,$$

так что условие (2.5.6) выполнено.

Основными результатами параграфа являются две следующие теоремы.

Теорема 2.5.1. *Пусть $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок; $I = (-a, a)$; $a \in (0,\infty]$; $p \in (0,\infty)$. Пусть символ μ задан равенством (2.5.1), где последовательность $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (1.5.10) и (C'), и пусть $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ — построенная в пункте 1 в случае $a \in (0,\infty)$ или в пункте 2 в случае $a = \infty$ последовательность положительных чисел. Тогда система $\{1, e^{\mp i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(I)$, а множество $S = \{\pm\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ слабо достаточно для $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$.*

Теорема 2.5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1. Если правая часть уравнения $T_\mu f = g$ разложена в абсолютно сходящийся ряд $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{+} e^{-i\nu_j x} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{-} e^{i\nu_j x}$, то функция*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^{+}}{\check{\mu}(\nu_j)} e^{-i\nu_j x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^{-}}{\check{\mu}(-\nu_j)} e^{i\nu_j x}$$

является частным решением этого уравнения в пространстве $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(I)$. Общее решение рассматриваемого уравнения в $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(I)$ имеет вид

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s e^{-i\lambda_s x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^{+}}{\check{\mu}(\nu_j)} e^{-i\nu_j x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^{-}}{\check{\mu}(-\nu_j)} e^{i\nu_j x}\,,\ \ \alpha_s \in \mathbb{C}\,,\ s \in \mathbb{N}\,.$$

Все ряды сходятся абсолютно в $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(I)$.

Прежде чем доказывать сформулированные результаты, сделаем одно полезное замечание.

Замечание 2.5.1. *Если нули символа μ отграничены от действительной оси, т. е. если*

$$|\mathrm{Im}\,\lambda_s| \geq \delta_0\,,\ s \geq s_0\,, \tag{2.5.7}$$

то в качестве точек η_k в случае конечного интервала $I = (-a, a)$ можно взять $\eta_k = \frac{\pi k}{a}$, $k \in \mathbb{N}$. В случае $I = \mathbb{R}$ при каждом $q \in \mathbb{N}$ в качестве точек $\eta_k^{(q)}$ можно взять $\eta_k^{(q)} = \frac{\pi k}{2^q}$, $k \in \mathbb{N}$.

Приведем также сразу следующий конкретный пример.

Пример 2.5.1. Пусть $\omega(t) = t^{1/2}$. Если $I = (-a, a)$ — конечный интервал, то в качестве последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ можно взять объединение последовательностей

$$\eta_k = \frac{\pi k}{a}\,,\ k = 1, \ldots,\ \text{ и }\ \zeta_k = \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi[a\pi k^2]}{a}\,, k = 1, \ldots\,.$$

Если же $I = \mathbb{R}$, то можно положить

$$\eta_k^{(q)} = \frac{\pi k}{2^q}\,,\ \ \zeta_k^{(q)} = \frac{\pi}{2\cdot 2^q} + \frac{\pi[2^q\pi k^2]}{2^q}\,,\ \ k \in \mathbb{N}\,,\ q \in \mathbb{N}\,.$$

После этого последовательность $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ строится из точек $\eta_k^{(q)}$ и $\zeta_k^{(q)}$, $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, указанным в пункте 2 способом. Здесь, как обычно, через $[x]$ обозначена целая часть числа x.

Перейдем к доказательству основных результатов. Докажем теорему 2.5.1. Теорема 2.5.2 будет прямо вытекать из теоремы 2.5.1, априорных оценок на $|\check{\mu}(\pm\nu_j)|$, $j \in \mathbb{N}$, и результатов параграфов 2.3 и 2.4.

Как обычно, не ограничивая общность, будем для удобства рассматривать $p = 1$. Сначала проведем доказательство для случая конечного интервала I.

Из теоремы 3 работы [4] вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.5.1. *Если существует целая функция $L(z)$, имеющая простые нули в точках $\mp\nu_j$, $j \in \mathbb{N}$, и только в них, для которой выполнены условия:*

(A) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C > 0$ такое, что

$$|L(z)| \leq C \cdot \exp\left\{(1+\varepsilon)|z|^{\rho(z)} + (a+\varepsilon)|\mathrm{Im}\,z|\right\},\ z \in \mathbb{C}\,;$$

(*B*) *имеется последовательность* $R_n \uparrow \infty$, *обладающая свойством: для каждого* $\varepsilon > 0$ *имеется номер* $n_0(\varepsilon)$ *такой, что*

$$|L(z)| \geq \exp\left\{(1-\varepsilon)|z|^{\rho(z)} + (a-\varepsilon)|\mathrm{Im}\, z|\right\}, \ |z| = R_n\,, \ n \geq n_0(\varepsilon)\,;$$

(Г) *при всех* $q \in (0,1)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\nu_j)|} \exp q\nu_j^{\rho(\nu_j)} < \infty\,,$$

то система $\{e^{\mp i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ *является АПС в* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$

Доказательство теоремы 2.5.1 в случае конечного интервала I. Целую функцию $L(z)$ с перечисленными свойствами будем строить в виде $L(z) = L_1(z) \cdot L_2(z)$, где

$$L_1(z) = az\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{\eta_k^2}\Big)\,, \ \ L_2(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{\zeta_k^2}\Big)$$

(точки η_k и ζ_k, $k \in \mathbb{N}$, были выбраны выше в пункте 1).

Покажем, что для функции $L(z)$ выполняются условия (*A*), (*B*) и (Г).

Начнем с изучения свойств функции $L_1(z)$. По построению $L_1(z) = \frac{\sin az}{\varphi(z)}$, где $\varphi(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\big(1 - \frac{z^2}{\xi_j^2}\big)$; ξ_j, $j \in \mathbb{N}$, — положительные нули $\sin az$ такие, что ξ_j или $-\xi_j$ попадают в исключительные кружки C_s функции $\check{\mu}$. Так как диаметр кружка C_s равен $2\gamma < \frac{1}{a}$, то в каждом C_s может оказаться лишь одна из точек ξ_j. Из этого, очевидно, следует, что, как и $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$, последовательность $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ образует R-множество и что $\lim_{j\to\infty} \frac{j}{\xi_j^{\rho(\xi_j)}} = 0$. Значит, φ имеет нулевой тип при порядке $\rho(r)$ и является функцией вполне регулярного роста при этом порядке. Соответственно, вне кружков $K_j^{\pm} = \{z : |z \mp \xi_j| < \gamma\}$ выполняется условие

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\ln|\varphi(z)|}{|z|^{\rho(z)}} = 0\,.$$

Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|\varphi(z)| \leq \exp\left\{\varepsilon|z|^{\rho(z)}\right\}, \ |z| \geq r_0(\varepsilon)\,; \tag{2.5.8}$$

$$|\varphi(z)| \geq \exp\left\{-\varepsilon|z|^{\rho(z)}\right\}, \ |z| \geq r_0(\varepsilon)\,, \ z \notin \bigcup_j K_j^{\pm}\,. \tag{2.5.9}$$

Пусть номер $k_0(\varepsilon)$ выбран так, что $\eta_k \geq r_0(\varepsilon)$ и $\zeta_k \geq r_0(\varepsilon)$, $k \geq k_0(\varepsilon)$. Тогда на основании (2.5.8)

$$|L_1'(\eta_k)| = \frac{a}{|\varphi(\eta_k)|} \geq a \exp\big\{-\varepsilon \eta_k^{\rho(\eta_k)}\big\}\,,\ k \geq k_0(\varepsilon)\,. \tag{2.5.10}$$

Далее, из (2.5.8) и выбора точек ζ_k вытекает, что

$$|L_1(\zeta_k)| = \frac{1}{|\varphi(\zeta_k)|} \geq \exp\big\{-\varepsilon \zeta_k^{\rho(\zeta_k)}\big\}\,,\ k \geq k_0(\varepsilon)\,. \tag{2.5.11}$$

Остальные свойства функции $L_1(z)$ представлены в следующих леммах.

Лемма 2.5.2. *Функция $L_1(z)$ удовлетворяет следующей оценке сверху*

$$|L_1(z)| \leq e^{a\gamma} \cdot \exp\big\{2\varepsilon |z|^{\rho(z)} + a|\mathrm{Im}\, z|\big\}\,,\ |z| \geq r_0(\varepsilon)\,. \tag{2.5.12}$$

Доказательство. Так как $|\sin az| \leq e^{a|\mathrm{Im}\, z|}$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то в силу (2.5.9)

$$|L_1(z)| \leq \exp\big\{\varepsilon |z|^{\rho(z)} + a|\mathrm{Im}\, z|\big\}\,,\ |z| \geq r_0(\varepsilon)\,,\ z \notin K_j^{\pm}\,.$$

Пусть теперь точка z попадает в какой-то из исключительных кружков $K_j^{\pm}$ — например, в $K_j^{+} = \{t : |t - \xi_j| < \gamma\}$ — и пусть $|z| \geq r_0(\varepsilon)$. На окружности $|t - \xi_j| = \gamma$ найдем точку w такую, что $|L_1(w)| = \max\{|L_1(t)| : |t - \xi_j| \leq \gamma\}$. При этом $|w| \leq |z| + 2\gamma$, $|\mathrm{Im}\, w| \leq |\mathrm{Im}\, z| + \gamma$. Увеличив при необходимости $r_0(\varepsilon)$, будем считать, что

$$(t + 2\gamma)^{\rho(t+2\gamma)} \leq 2t^{\rho(t)}\,,\ t \geq r_0(\varepsilon)\,.$$

Значит,

$$|L_1(z)| \leq |L_1(w)| \leq \exp\big\{\varepsilon |w|^{\rho(w)} + a|\mathrm{Im}\, w|\big\} \leq e^{a\gamma} \cdot \exp\big\{2\varepsilon |z|^{\rho(z)} + a|\mathrm{Im}\, z|\big\}\,.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.5.3. *На окружностях $|z| = R_n$, где $R_n = \frac{\pi}{4a} + \frac{\pi n}{a}$, $n \in \mathbb{N}$, выполняются оценки*

$$|L_1(z)| \geq M \cdot \exp\big\{-\varepsilon |z|^{\rho(z)} + a|\mathrm{Im}\, z|\big\}\,,\ n \geq n_0(\varepsilon)\,, \tag{2.5.13}$$

где $M := \frac{1}{2}\big(1 - e^{-\frac{\pi}{4}}\big)$.

Доказательство. Пусть $n_0(\varepsilon)$ таково, что $R_n \geq r_0(\varepsilon)$ при $n \geq n_0(\varepsilon)$. Тогда для $|\varphi(z)|$ на окружностях $|z| = R_n$, $n \geq n_0(\varepsilon)$, справедлива оценка (2.5.8).

Оценим $|\sin are^{i\theta}|$ при $r = R_n$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, достаточно рассмотреть $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем, что

$$|\sin are^{i\theta}| = \frac{1}{2}\, A(r,\theta) \cdot e^{ar\sin\theta}\,,\ r \geq 0\,,\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

где $A(r,\theta) = \left|1 - e^{-2ar(\sin\theta - i\cos\theta)}\right|$. Для $A(r,\theta)$ выполняются следующие неравенства:

$$A(r,\theta) \geq 1 - e^{-2ar\sin\theta}\,; \quad A(r,\theta) \geq \sqrt{1 - \cos^2(2ar\cos\theta)}\,.$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Если $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ таково, что $2aR_n \sin\theta \leq \frac{\pi}{4}$, то

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n = 2aR_n - \frac{\pi}{4} \leq 2aR_n\cos\theta \leq 2aR_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\,,$$

так что $A(R_n,\theta) \geq \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ для этих θ. Если же $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ таково, что $2aR_n\sin\theta > \frac{\pi}{4}$, то $A(R_n,\theta) \geq 1 - e^{-\frac{\pi}{4}}$. В целом, $A(R_n,\theta) \geq 2M$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом,

$$|\sin az| \geq M\, e^{a|\operatorname{Im} z|}\,,\ |z| = R_n\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Объединяя последнюю оценку с оценкой (2.5.8), получаем (2.5.13). $\square$

Перейдем к изучению свойств функции $L_2(z)$. В силу (2.5.4), $L_2(z)$ является функцией вполне регулярного роста при порядке $\rho(r)$. Далее, учитывая равенство (2.5.3) и [28, Теорема 1.2.7], заключаем, что ее индикатор при этом порядке равен

$$H_2(\theta) = \frac{\cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}}\,,\ \theta \in (0,\pi)\,.$$

Поэтому, увеличив при необходимости $r_0(\varepsilon)$, можно считать, что

$$|L_2(re^{i\theta}| \leq \exp\left\{\Big(\frac{\cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} + \varepsilon\Big) r^{\rho(r)}\right\},\ r \geq r_0(\varepsilon)\,,\ \theta \in [0,\pi]\,; \qquad (2.5.14)$$

$$|L_2(re^{i\theta}| \geq \exp\left\{\Big(\frac{\cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} - \varepsilon\Big) r^{\rho(r)}\right\},\ r \geq r_0(\varepsilon)\,, \theta \in [0,\pi]\,,\ re^{i\theta} \notin \bigcup_l B_l^{\pm}\,, \qquad (2.5.15)$$

где $B_l^{\pm} = \{z : |z \mp \zeta_l| < \gamma\}$, $l \in \mathbb{N}$, — исключительные кружки функции $L_2(z)$. В частности, поскольку точки η_k не попадают в $B_l^{\pm}$, $k, l \in \mathbb{N}$, то

$$|L_2(\eta_k)| \geq e^{(1-\varepsilon)\eta_k^{\rho(\eta_k)}}\,,\ k \geq k_0(\varepsilon)\,. \tag{2.5.16}$$

Далее, известно [28, Теорема 1.2.8], что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{|L_2'(\zeta_k)|}}{\zeta_k^{\rho(\zeta_k)}} = -1\,.$$

Поэтому $k_0(\varepsilon)$ можно считать настолько большим, что

$$|L_2'(\zeta_k)| > e^{(1-\varepsilon)\zeta_k^{\rho(\zeta_k)}}\,,\ k \geq k_0(\varepsilon)\,. \tag{2.5.17}$$

Установим, наконец, что функция $L(z) = L_1(z) \cdot L_2(z)$ является искомой.

Предложение 2.5.1. *Функция $L(z) = L_1(z) \cdot L_2(z)$ обладает свойствами (А), (В) и (Г).*

Доказательство. (А): Объединяя неравенства (2.5.12) и (2.5.14), получаем, что при всех $r \geq r_0(\varepsilon)$ и $\theta \in [0, \pi]$

$$|L(re^{i\theta}| \leq e^{a\gamma} \cdot \exp\left\{\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} + 3\varepsilon\Big)r^{\rho(r)} + ar\sin\theta\right\}.$$

Найдем $\theta_0(\varepsilon) \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ такое, что

$$1 - \varepsilon < \frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} < 1 + \varepsilon\,,\ \theta \in [0, \theta_0(\varepsilon)] \cup [\pi - \theta_0(\varepsilon), \pi]\,. \tag{2.5.18}$$

Тогда при этих θ

$$|L(re^{i\theta}| \leq e^{a\gamma} \cdot \exp\big\{(1 + 4\varepsilon)r^{\rho(r)} + ar\sin\theta\big\}\,,\ r \geq r_0(\varepsilon)\,.$$

Если же $\theta \in [\theta_0(\varepsilon), \pi - \theta_0(\varepsilon)]$, то, опять же увеличив при необходимости $r_0(\varepsilon)$, имеем, что при $r \geq r_0(\varepsilon)$

$$\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} + 3\varepsilon\Big)r^{\rho(r)} \leq \Big(\frac{1}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} + 3\varepsilon\Big)r^{\rho(r)} \leq \varepsilon r\sin\theta_0(\varepsilon) \leq \varepsilon r\sin\theta\,.$$

Значит, в этом случае

$$|L(re^{i\theta})| \leq e^{a\gamma} \cdot e^{(a+\varepsilon)r\sin\theta}\,,\ r \geq r_0(\varepsilon)\,.$$

Учитывая, что $L(-z)=L(z)$, $z\in\mathbb{C}$, окончательно получаем, что

$$|L(z)|\le e^{a\gamma}\exp\left\{(1+4\varepsilon)|z|^{\rho(z)}+(a+\varepsilon)|\mathrm{Im}\, z|\right\},\ |z|\ge r_0(\varepsilon)\,.$$

Таким образом, условие (A) выполнено.

(B): Рассмотрим окружности $|z|=R_n$, $R_n=\frac{\pi}{4a}+\frac{\pi n}{a}$, $n\in\mathbb{N}$. Очевидно, они не пересекаются с исключительными кружками $B_l^{\pm}$, $l\in\mathbb{N}$. Следовательно, в силу (2.5.13) и (2.5.15) на этих окружностях при $n\ge n_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$|L(R_ne^{i\theta})|\ge M\exp\left\{\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta-\frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}}-2\varepsilon\Big)R_n^{\rho(R_n)}+aR_n\sin\theta\right\},\ \theta\in[0,\pi]\,.$$

Использую левую часть неравенства (2.5.18), получаем, что при $\theta\in[0,\theta_0(\varepsilon)]\bigcup[\pi-\theta_0(\varepsilon),\pi]$ и $n\ge n_0(\varepsilon)$

$$|L(R_ne^{i\theta})|\ge M\exp\left\{(1-3\varepsilon)R_n^{\rho(R_n)}+aR_n\sin\theta\right\}.$$

Если же $\theta\in[\theta_0(\varepsilon),\pi-\theta_0(\varepsilon)]$, то, считая $n_0(\varepsilon)$ настолько большим, что

$$(1+2\varepsilon)R_n^{\rho(R_n)}<\varepsilon R_n\sin\theta_0(\varepsilon)\,,\ n\ge n_0(\varepsilon)\,,$$

заключаем, что

$$\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta-\frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}}-2\varepsilon\Big)R_n^{\rho(R_n)}+aR_n\sin\theta\ge-2\varepsilon R_n^{\rho(R_n)}+aR_n\sin\theta\ge$$

$$\ge R_n^{\rho(R_n)}+(a-\varepsilon)R_n\sin\theta-(1+2\varepsilon)R_n^{\rho(R_n)}+\varepsilon R_n\sin\theta_0(\varepsilon)\ge R_n^{\rho(R_n)}+(a-\varepsilon)R_n\sin\theta\,.$$

Объединяя оба рассмотренных случая, учитывая снова равенство $L(-z)=L(z)$, $z\in\mathbb{C}$, окончательно получаем, что на окружностях $|z|=R_n$, $n\ge n_0(\varepsilon)$, справедлива оценка

$$|L(z)|\ge M\exp\left\{(1-3\varepsilon)|z|^{\rho(z)}+(a-\varepsilon)|\mathrm{Im}\, z|\right\}.$$

Значит, $L(z)$ удовлетворяет условию (B).

(Г): Наконец, оценим $|L'(\eta_k)|$ и $|L'(\zeta_k)|$, $k\in\mathbb{N}$. Имеем, что

$$L'(\eta_k)=L_1'(\eta_k)\cdot L_2(\eta_k)\,,\quad L'(\zeta_k)=L_1(\zeta_k)\cdot L_2'(\zeta_k)\,,\ k\in\mathbb{N}\,.$$

На основании (2.5.10) и (2.5.16)

$$|L'(\eta_k)| \geq a \cdot e^{(1-2\varepsilon)\eta_k^{\rho(\eta_k)}}\,,\ k \geq k_0(\varepsilon)\,.$$

Аналогично, в силу (2.5.11) и (2.5.17)

$$|L'(\zeta_k)| \geq e^{(1-2\varepsilon)\zeta_k^{\rho(\zeta_k)}}\,,\ k \geq k_0(\varepsilon)\,.$$

Очевидно, из этих неравенств вытекает справедливость условия (Г). Предложение доказано. □

Таким образом, мы показали, что система $\{1, e^{\mp i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(I)$. В силу теоремы K из [21] тогда множество $S = \{\pm\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ слабо достаточно для $H_{(\omega)}^{p,a}(\mathbb{C})$, так что теорема 2.5.1 в случае конечного интервала I полностью доказана.

Доказательство теоремы 2.5.1 в случае $I = \mathbb{R}$. При каждом фиксированном $q \in \mathbb{N}$ положим $I^{(q)} = \big(-2^q, 2^q\big)$. Рассмотрим целую функцию $L^{(q)}(z) = L_1(z) \cdot L_2(z)$, где

$$L_1(z) = 2^q z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\big(\eta_k^{(q)}\big)^2}\right),\ \ L_2(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\big(\zeta_k^{(q)}\big)^2}\right),$$

а $\big(\eta_k^{(q)}\big)_{k=1}^{\infty}$ и $\big(\zeta_k^{(q)}\big)_{k=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, построенные выше в пункте 2.

Из проведенного доказательства в случае конечного интервала вытекает, что эта функция обладает свойствами (A), (B) и (Г) леммы 2.5.1 для $a = 2^q$. Следовательно, система $\big\{1, e^{\mp i\nu_j^{(q)} x}\big\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(I^{(q)})$, $q \in \mathbb{N}$.

Нетрудно видеть, что свойства (A), (B) и (Г) функции $L(z)$ инварианты относительно деления на многочлен. Другими словами, если этими свойствами обладает функция $L(z)$, то ими же будет обладать и функция $\widetilde{L}(z) = \frac{L(z)}{P(z)}$, $P(z)$ — многочлен (естественно, при условии, что $\widetilde{L}(z)$ — целая функция). Это означает, что если из системы $\big\{1, e^{\mp i\nu_j^{(q)} x}\big\}_{j=1}^{\infty}$ отбросить любое конечное число элементов, то она останется АПС в $\mathcal{E}_{(\omega)}^{p}(I^{(q)})$.

Учитывая только что сделанное замечание и тот факт, что каждая последовательность $\big(\nu_j^{(q)}\big)_{j=1}^{\infty}$, $q \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера, является подпоследовательностью последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$, делаем вывод, что система

$\left\{e^{\mp i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в каждом пространстве $\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(I^{(q)})$, $p \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу [21, теорема K], множество $S = \{\pm\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ является слабо достаточным для каждого пространства $H^{p,2^q}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, $q \in \mathbb{N}$.

На основании свойства устойчивости СДМ (см. [2, теорема 2]) заключаем, что множество S слабо достаточно для $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Действительно, как нетрудно видеть, если положить в теореме 2 из [2]

$$h_k(z) = p_k\big(\omega(z) + |\mathrm{Im}\, z|\big)\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ 0 < p_k \uparrow 1\,;$$
$$b_m(z) = (2^m - 2^{m-1})|\mathrm{Im}\, z|\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ m \in \mathbb{N}\,;$$

то все условия указанной теоремы будут выполнены (даже в случае произвольного веса ω; и, в частности, для $\omega(t) = t^{\rho(t)}$).

В заключение снова применяем теорему K из [21] о связи слабо достаточных множеств и АПС и получаем, что система $\left\{e^{\mp i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в пространстве $\mathcal{E}^{p}_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Это завершает доказательство теоремы 2.5.1 для случая $I = \mathbb{R}$.

ГЛАВА 3
УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ РУМЬЕ УДФ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

3.1 Разрешимость неоднородного уравнения Коши-Римана в проективных весовых пространствах

Данный параграф носит по отношению к теме диссертации вспомогательный характер. В нем устанавливается аналог классического результата Л. Хермандера о разрешимости $\overline{\partial}$-задачи для пространств функций с системой весовых оценок. В дальнейшем данный результат будет применен для описания всех символов операторов свертки в пространствах Румье УДФ нормального типа (§ 3.2). Также он будет использован в § 4.3, посвященном линейному непрерывному правому обратному оператору к оператору свертки в пространствах Румье.

В соответствии с классическим результатом Л. Хёрмандера [42, Теорема 4.4.2], если $\varphi \in PSH(\Omega)$, а $g \in L^2_{loc}(\Omega)$ — произвольная функция с $\int\limits_{\Omega} |g|^2 e^{-2\varphi}\, d\lambda \leq A$, то неоднородное уравнение Коши-Римана (или $\overline{\partial}$-задача)

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g \tag{3.1.1}$$

имеет решение $f \in L^2_{loc}(\Omega)$ с $\int\limits_{\Omega} |f|^2 (1+|z|^2)^{-2} e^{-2\varphi}\, d\lambda \leq A/2$. Здесь Ω — область в $\mathbb{C}^N$; $L^2_{loc}(\Omega)$, $H(\Omega)$ и $PSH(\Omega)$ — пространства всех функций, соответственно локально интегрируемых с квадратом модуля, аналитических и плюрисубгармонических в Ω; $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $z = x + iy$. Разрешимость уравнения (3.1.1) понимается в смысле теории распределений на Ω.

Данный результат открыл новые методы исследования многих задач. В частности, он применялся для решения проблем о порождающих в пространствах целых функций [70, 72, 33, 56]; задач о разделении особенностей голоморфных функций [33]; интерполяционных задач [56] и задач о продолжении функций по Борелю-Уитни [82, 84]. Основополагающую роль решение $\overline{\partial}$-задачи играет в исследовании вопросов, касающихся уравнений свертки и идеалов в различных пространствах [69, 87, 91], проблем описания сопряженных пространств [64, 37, 9] и т. д.

В последнее время все чаще решение $\overline{\partial}$-задачи приходится использовать для построения функций в индуктивных и проективных пространствах функций с равномерными или интегральными весовыми оценками. Для индуктивных пространств построение удается проводить за счет применения самого результата Хёрмандера, поскольку в этом случае необходимо удовлетворить лишь одной оценке из семейства.

Случай проективных пространств в этом отношении является гораздо более сложным, так как нужно удовлетворить семейству равномерных или L^2-оценок (как правило, эти семейства оценок эквивалентны). В связи с этим необходимо устанавливать аналог теоремы Хёрмандера для подобных пространств. В данном направлении известны приводимые ниже результаты О. В. Епифанова [17] и М. Лангенбруха [78].

Результат Епифанова [17, Теорема 3] установлен для области Ω в $\mathbb{C}$ и заключается в эквивалентности следующих условий:

(i) неоднородное уравнение Коши-Римана (3.1.1) имеет решение $f \in L^\infty_\Phi(\Omega)$ при любой правой части $g \in L^\infty_\Phi(\Omega)$;

(ii) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $H_\Phi(\Omega)$ плотно в $H_{\varphi_m}(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{\varphi_n}$ (т. е. проективный предел $H_\Phi(\Omega)$ является слабо приведенным);

(iii) для всякой функции $\xi \in L^\infty_\Phi(\Omega)$ найдется функция $l \in L^\infty_\Phi(\Omega)$, $l = \sup\{|f| : f \in I\}$, где I — локально ограниченное семейство аналитических в Ω функций, такая что $|\xi| \le l$.

Здесь $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ — невозрастающая по n последовательность весов;

$$L^\infty_{\varphi_n}(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ измерима } : \|f\|_{\varphi_n} = \sup_{z\in\Omega} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} < \infty \Big\};$$

$$H_{\varphi_n}(\Omega) = \big\{ f \in H(\Omega) : \|f\|_{\varphi_n} < \infty \big\};$$

$$L^\infty_\Phi(\Omega) = \bigcap_{n=1}^\infty L^\infty_{\varphi_n}(\Omega), \quad H_\Phi(\Omega) = \bigcap_{n=1}^\infty H_{\varphi_n}(\Omega).$$

Данный результат получен для весов φ_n из класса $SH_0(\Omega)$, т. е. имеющих вид $\varphi_n = \sup\{\ln|f| : f \in I\}$, I — локально ограниченное семейство в $H(\Omega)$, при минимальном условии разделенности:

$$\varphi_{n+1}(z) \le \varphi_n(z) + \ln d(z)\,,\ z \in \Omega\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Здесь $d(z) = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{1+|z|}, \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}\setminus\Omega)\right\}$. Как следствие (см. [17, замечание 1 к теореме 3]), утверждение справедливо для субгармонических весов φ_n, $n \in \mathbb{N}$, при чуть более жестком условии:

$$\sup\{\varphi_{n+1}(z+t) : |t| \le d(z)\} \le \varphi_n(z) + \ln d(z)\,,\ z \in \Omega\,,\ n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.1.2}$$

Результат Лангенбруха [78, лемма 1.3] обобщает теорему Епифанова на случай, когда Ω — открытое псевдовыпуклое множество в $\mathbb{C}^N$. На веса φ_n, $n \in \mathbb{N}$, накладываются следующие условия разделенности:

$$\sup\{\varphi_{n+1}(z+t) : |t| \le r(z)\} \le \inf\{\varphi_n(z+t) : |t| \le r(z)\} + A_n\,,\ z \in \Omega\,,\ n \in \mathbb{N}\,; \tag{3.1.3}$$

$$\varphi_{n+1}(z) + \ln\frac{1+|z|}{r(z)} \le \varphi_n(z) + A_n\,,\ z \in \Omega\,,\ n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.1.4}$$

где $0 < r(z) < \min\{1, \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}^N \setminus \Omega)\}$. При этом функции φ_n изначально, вообще говоря, не предполагаются плюрисубгармоническими в Ω. Заметим, что в отличие от [17], в [78] рассматривается семейство не равномерных, а L^2-оценок. Однако понятно, что при введенных ограничениях эти семейства оценок эквивалентны.

Согласно теореме Лангенбруха, разрешимость уравнения (3.1.1) в соответствующем пространстве $L^\infty_\Phi(\Omega)$ при любой правой части $g \in L^\infty_\Phi(\Omega)$ равносильна каждому из следующих условий:

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}$, $\exists A_n > 0$: $\forall t \in \Omega\ \exists \psi_t \in PSH(\Omega)$:

$$\psi_t(\xi) \ge 0 \text{ вблизи } t \quad \text{и} \quad \psi_t(z) \le \varphi_n(z) - \varphi_k(t) + A_n\,,\ z \in \Omega\,;$$

(v) (a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}$, $\exists A_n > 0$: $\forall t \in \Omega\ \exists \psi_t \in PSH(\Omega)$:

$$\psi_t(t) \ge 0 \quad \text{и} \quad \psi_t(z) \le \varphi_n(z) - \varphi_k(t) + A_n\,,\ z \in \Omega$$

(b) проективный предел $H_\Phi(\Omega)$ является слабо приведенным.

В случае, если весовая последовательность Φ эквивалентна последовательности плюрисубгармонических весов, для разрешимости уравнения (3.1.1) необходимо и достаточно справедливости утверждения $(v)(b)$. Таким образом, в одномерной ситуации результат Лангенбруха фактически совпадает с результатом Епифанова.

Понятно, что применять теоремы Епифанова и Лангенбруха достаточно затруднительно. Слабая приведенность проективного предела $H_\Phi(\Omega)$ не может рассматриваться как простое достаточное условие, позволяющее устанавливать разрешимость $\overline{\partial}$-задачи в соответствующем пространстве $L^\infty_\Phi(\Omega)$. Напротив, проверка слабой приведенности $H_\Phi(\Omega)$ зачастую выступает как серьезная самостоятельная задача, поскольку данное свойство играет важную роль во многих вопросах: в частности, в вопросах описания мультипликаторов весовых пространств целых функций (см., напр., [52]). Таким образом, в качестве основного условия, обеспечивающего разрешимость $\overline{\partial}$-задачи и одновременно слабую приведенность проективного предела $H_\Phi(\Omega)$, выступает условие Епифанова (iii) или условие Лангенбруха (iv). Очевидно, что проверка этих условий далеко не тривиальна и требует громоздкого построения специальной функции l или, соответственно, ψ_t для каждой конкретной весовой последовательности Φ.

В связи с вышеизложенным мы выделяем важный с точки зрения приложений класс проективных весовых последовательностей Φ и устанавливаем для них простые и легко проверяемые условия, при которых $\overline{\partial}$-задача разрешима в соответствующем пространстве $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ измеримых функций при любой правой части из $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$, а пространство $H_\Phi(\mathbb{C})$ целых функций является слабо приведенным.

Именно, в работе рассматриваются проективные последовательности вида

$$\Phi = \big(u_n(|z|) + v(z)\big)_{n=1}^{\infty}\,,\ z \in \mathbb{C}\,, \tag{3.1.5}$$

состоящие из радиальных и нерадиальной компонент. Они включают в себя как частный случай последовательности

$$\Phi = \big(q_n\omega(|z|) + l|\operatorname{Im} z|\big)_{n=1}^{\infty}\,,\ \infty > q_n \downarrow q \geq 0\,,\ l > 0\,,$$

играющие важную роль при изучении пространств Румье УДФ. Кроме того, последовательности вида (3.1.5) возникают при исследовании пространств голоморфных функций, имеющих заданный рост вблизи границы круговой области (см., напр., [50]).

На последовательности (3.1.5) накладываются естественные ограничения, по сути аналогичные (3.1.3) и (3.1.4), на основании которых проводится универсальное построение функции l из условия (iii) теоремы Епифанова.

Для того чтобы сформулировать основной результат параграфа, введем следующее определение (см. [52]).

Определение 3.1.1. *Регулярной функцией расстояния будем называть невозрастающую непрерывно дифференцируемую функцию* $\rho : [0, \infty) \to (0, 1]$, *удовлетворяющую условиям:*

$$\rho'(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty\,; \quad \ln \rho(e^x) \text{ вогнута на } \mathbb{R}\,.$$

В частности, регулярными функциями расстояния являются

$$\rho(t) \equiv 1\,; \;\; \rho(t) = \frac{1}{(1+t)^s}\,,\; s > 0\,; \;\; \rho(t) = e^{-at^s}\,,\; a > 0\,,\; s > 0\,.$$

Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$.

Определение 3.1.2. *Функция* $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *называется* ρ*-устойчивой, если при некотором* $C_0 > 0$

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \le C_0 \text{ для всех } z, \zeta \in \mathbb{C} \text{ с } |z - \zeta| \le \rho(z)\,.$$

Под проективной весовой последовательностью будем понимать произвольную невозрастающую по n последовательность $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывных функций $\varphi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Введем подкласс класса всех проективных весовых последовательностей, который будет рассматриваться в настоящем параграфе. Пусть $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая по n последовательность непрерывных неубывающих функций $u_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, причем выполнены условия:

$(\mathcal{U}_1)$ $u_n(e^x)$ выпукла на $[0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$;

$(\mathcal{U}_2)$ семейство $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно ρ-устойчиво на $[0, \infty)$, т. е. существует $C_0 > 0$ такое, что

$$|u_n(t) - u_n(s)| \le C_0 \text{ для всех } t, s \in [0, \infty) \text{ с } |t - s| \le \rho(t)\,,\; n \in \mathbb{N}\,;$$

$(\mathcal{U}_3)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется $D_n > 0$, при котором

$$u_{n+1}(t) + \ln \frac{1 + t^2}{\rho(t)} \le u_n(t) + D_n\,,\; t \ge 0\,.$$

Далее, пусть функция $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ обладает свойствами

$(\mathcal{V}_1)$ $v \in SH(\mathbb{C})$;

$(\mathcal{V}_2)$ v ρ-устойчива в $\mathbb{C}$.

Основным результатом параграфа является

Теорема 3.1.1. *Если Φ — проективная весовая последовательность вида (3.1.5), удовлетворяющая условиям $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$ и $(\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_2)$, то*

1) неоднородное уравнение Коши-Римана (3.1.1) имеет решение в $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ при любой правой части $g \in L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$;

2) проективный предел $H_\Phi(\mathbb{C})$ является слабо приведенным.

Замечание. *Ясно, что утверждение Теоремы 3.1.1 остается справедливым для произвольной проективной весовой последовательности Ψ, которая эквивалентна последовательности Φ вида (3.1.5), обладающей свойствами $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$ и $(\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_2)$. При этом под эквивалентностью проективных последовательностей $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ и $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty$ понимается то, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $C_n > 0$ такие, что*

$$\psi_m(z) \le \varphi_n(z) + C_n \quad \textit{и} \quad \varphi_m(z) \le \psi_n(z) + C_n\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Доказательство. Докажем теорему 3.1.1. Пусть Φ — проективная весовая последовательность вида (3.1.5), удовлетворяющая условиям $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$ и $(\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_2)$. Как уже было сказано выше, доказательство основано на применении теоремы Епифанова. Однако здесь имеется небольшая сложность, заключающаяся в том, что наши веса $\varphi_n(z) = u_n(|z|) + v(z)$, с одной стороны, не обязаны принадлежать классу $SH_0(\mathbb{C})$, а с другой, могут не удовлетворять условию (3.1.2). Решается данная проблема с помощью перехода к регуляризованным весам (см. [52])

$$\overline{\varphi}_n(z) = \sup\left\{ \ln|f(z)| : f \in H_{\varphi_n}(\mathbb{C})\,,\ \|f\|_{\varphi_n} \le 1 \right\},\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Последовательность $\overline{\Phi} = (\overline{\varphi}_n)_{n=1}^\infty$ уже будет состоять из функций класса $SH_0(\mathbb{C})$ и будет эквивалентна исходной весовой последовательности. Поэтому, если мы докажем справедливость утверждения (iii) для Φ, то автоматически получим его справедливость для $\overline{\Phi}$. Соответственно, теорема Епифанова позволит сделать вывод о разрешимости $\overline{\partial}$-задачи в пространстве $L^\infty_{\overline{\Phi}}(\mathbb{C})$, а значит, и в $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$, и о слабой приведенности проективного предела $H_{\overline{\Phi}}(\mathbb{C})$ или, что то же самое, пространства $H_\Phi(\mathbb{C})$.

Итак, докажем утверждение (iii) для весовой последовательности Φ. Обозначим для краткости $u_n(z) := u_n(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольную функцию $\xi \in L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $C_n > 0$ такое, что

$$|\xi(z)| \le e^{C_n} e^{\varphi_n(z)}\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Следовательно,

$$\ln^+ |\xi(z)| - v(z) \le u_n(z) + C_n\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

где, как обычно, $\ln^+ |\xi(z)| = \max\{\ln|\xi(z)|, 0\}$.

Положим $\alpha(t) := \sup\{\ln^+ |\xi(z)| - v(z) : |z| \le t\}$, $t \ge 0$. Тогда

$$\alpha(t) \le u_n(t) + C_n\,,\ t \ge 0\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

и, в силу условия $(\mathcal{U}_3)$,

$$\alpha(t) + k \ln \frac{1}{\rho(t)} \le u_n(t) + C_{n,k}\,,\ t \ge 0\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ k \in \mathbb{N}\,, \tag{3.1.6}$$

где $C_{n,k} = C_{n+k} + D_{n+k-1} + \ldots + D_n$.

Пусть $\widetilde{\alpha}(t) := \alpha(e^t)$, $\widetilde{u}_n(t) := u_n(e^t)$, $t \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$. На основании (3.1.6) заключаем, что

$$\widetilde{\alpha}(t) + \ln \frac{1}{\rho(e^t)} \le \widetilde{u}_n(t) + C_{n,1}\,,\ t \ge 0\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

$$\widetilde{u}_n(t) - \Big(\widetilde{\alpha}(t) + \ln \frac{1}{\rho(e^t)}\Big) \to \infty \text{ при } t \to \infty\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Кроме того, из $(\mathcal{U}_3)$, очевидно, вытекает, что

$$t = o\big(\widetilde{u}_n(t)\big) \ \text{ и } \ \widetilde{u}_n(t) - \widetilde{u}_{n+1}(t) \to \infty\,,\ t \to \infty\,.$$

Таким образом, к последовательности $(\widetilde{u}_n)_{n=1}^\infty$ и функции $\widetilde{\alpha}(t) + \ln \frac{1}{\rho(e^t)}$ можно применить лемму 2 из [9], в соответствии с которой имеется неубывающая выпуклая на $[0, \infty)$ функция $\widetilde{u}(t)$ такая, что

$$\widetilde{\alpha}(t) + \ln \frac{1}{\rho(e^t)} \le \widetilde{u}(t) \le \widetilde{u}_n(t) + B_n\,,\ t \ge 0\,,\ n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.1.7}$$

Функция $\widetilde{u}(t)$ строится конструктивно следующим образом:

$$\widetilde{u}(t) = C + \begin{cases} \widetilde{u}_1(t_1)\,,\ t \in [0, t_1)\,, \\ \beta_n(t)\,,\ t \in [t_n, r_n)\,, \\ \widetilde{u}_{n+1}(t)\,,\ t \in [r_n, t_{n+1})\,, \end{cases} \tag{3.1.8}$$

где $C := \max\left\{\widetilde{\alpha}(t) + \ln\frac{1}{\rho(e^t)} : t \in [0, t_1]\right\}$; $\beta_n(t) = \widetilde{u}_n(t_n) + (\widetilde{u}_n)'_+(t_n)(t - t_n)$; точки $t_n \uparrow \infty$ и $r_n \uparrow \infty$ выбираются специальным образом, причем $t_n < r_n < t_{n+1} - 1$. Заметим, что на самом деле точку t_{n+1} можно брать сколь угодно большой по сравнению с r_n, а также что $\widetilde{u}_{n+1}(t) \le \widetilde{\beta}_n(t) \le \widetilde{u}_n(t)$ при всех $t \in [t_n, r_n)$.

Положим $u(z) := \widetilde{u}(\ln^+|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $u \in SH(\mathbb{C})$. Покажем, что функция u является ρ-устойчивой в $\mathbb{C}$. Понятно, что достаточно проверить ρ-устойчивость на промежутке $[0, \infty)$. Фиксируем $t, s \in [0, \infty)$ такие, что $s < t < s + \rho(s)$. Найдем $n \in \mathbb{N}$, при котором $\ln s \in [t_n, t_{n+1})$.

а) Если $\ln s \in [t_n, r_n)$, то $\ln t \le \ln(s + \rho(s)) \le \ln(e^{r_n} + 1) \le r_n + 1$. Как уже говорилось выше, можно считать, что $r_n + 1 < t_{n+1}$, так что либо $\ln t \in [t_n, r_n)$, либо $\ln t \in [r_n, t_{n+1})$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

а1) Пусть сначала $\ln t \in [t_n, r_n)$. Пользуясь равенствами (3.1.8), а также выпуклостью функции $\widetilde{u}_n$, получаем:

$$u(t) - u(s) = \widetilde{u}(\ln t) - \widetilde{u}(\ln s) = \beta_n(\ln t) - \beta_n(\ln s) = (\widetilde{u}_n)'_+(t_n)(\ln t - \ln s) \le$$

$$\le (\widetilde{u}_n)'_+(\ln s)(\ln t - \ln s) \le \widetilde{u}_n(\ln t) - \widetilde{u}_n(\ln s) = u_n(t) - u_n(s) \le C_0\,,$$

где константа C_0 взята из условия $(\mathcal{U}_2)$.

а2) Если же $\ln t \in [r_n, t_{n+1})$, то

$$\begin{aligned} u(t) - u(s) = \widetilde{u}_{n+1}(\ln t) - \beta_n(\ln s) \le \\ \le \widetilde{u}_{n+1}(\ln t) - \widetilde{u}_{n+1}(\ln s) = u_{n+1}(t) - u_{n+1}(s) \le C_0\,. \end{aligned}$$

б) Если $\ln s \in [r_n, t_{n+1})$, то величина $\ln t$ может попасть на промежутки $[r_n, t_{n+1})$, $t_{n+1}, r_{n+1})$ и $[r_{n+1}, t_{n+2})$. Первый случай тривиален. Второй и третий по сути аналогичны случаю а2). При их рассмотрении используются соответственно неравенства $\beta_{n+1}(\ln t) \le \widetilde{u}_{n+1}(\ln t)$ и $\widetilde{u}_{n+2}(\ln t) \le \widetilde{u}_{n+1}(\ln t)$. Во всех указанных ситуациях в конечном итоге получаем, что $u(t) - u(s) \le C_0$. Таким образом, функция u является ρ-устойчивой на $[0, \infty)$, а значит, и в $\mathbb{C}$.

При этом на основании (3.1.7) с учетом определения функции $\widetilde{\alpha}$ имеем:

$$\ln^+|\xi(z)| + \ln\frac{1}{\rho(z)} \le u(z) + v(z) \le u_n(z) + v(z) + B_n\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ n \in \mathbb{N}\,. \quad (3.1.9)$$

Применив к субгармонической ρ-устойчивой функции $u(z) + v(z)$ предложение 3.3 из [52], получим семейство $I = \{g_\zeta : \zeta \in \mathbb{C}\}$ целых функций таких, что

$$g_\zeta(\zeta) = \rho(\zeta)\, e^{u(\zeta)+v(\zeta)}\,,\ \zeta \in \mathbb{C}\,; \quad (3.1.10)$$

$$|g_\zeta(z)| \le \frac{M}{\rho^2(z)}\,(1 + |z|^2)^4\, e^{u(z)+v(z)}\,,\ z, \zeta \in \mathbb{C}\,. \quad (3.1.11)$$

Здесь M — абсолютная постоянная, не зависящая от z и ζ.

Положим $l(z) := \sup\big\{|g_\zeta(z)| : \zeta \in \mathbb{C}\big\}$, $z \in \mathbb{C}$. Из (3.1.11), правой части (3.1.9) и $(\mathcal{U}_3)$ вытекает, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|g_\zeta(z)| \le M \exp\left(u_{n+4}(z) + 4\ln\frac{1+|z|^2}{\rho(z)} + v(z) + B_{n+4}\right) \le A_n\, e^{u_n(z)+v(z)}\,,$$

где $A_n = M\exp(B_{n+4} + D_{n+3} + D_{n+2} + D_{n+1} + D_n)$ не зависит от z и ζ. Следовательно,

$$l(z) \le A_n\, e^{\varphi_n(z)}\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

т. е. $l \in L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$.

С другой стороны, на основании (3.1.10) и левой части (3.1.9) имеем, что

$$l(\zeta) \ge |g_\zeta(\zeta)| = \rho(\zeta)\, e^{u(\zeta)+v(\zeta)} \ge |\xi(\zeta)|\,,\ \zeta \in \mathbb{C}\,,$$

что завершает доказательство теоремы 3.1.1. □

Сформулируем некоторые простые полезные следствия Теоремы 3.1.1.

Следствие 3.1.1. *Пусть $u = u(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывная неубывающая ρ-устойчивая функция, такая что $u(e^t)$ выпукла на $[0, \infty)$ и $\ln\frac{t}{\rho(t)} = o(u(t))$ при $t \to \infty$; $\infty > q_n \downarrow q \ge 0$; $v = v(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — субгармоническая ρ-устойчивая функция. Тогда для проективной весовой последовательности*

$$\Phi = \big(q_n u(|z|) + v(z)\big)_{n=1}^\infty \quad (3.1.12)$$

справедливы утверждения теоремы 3.1.1.

Доказательство очевидно.

Следствие 3.1.2. *Пусть функция* $u = u(t)$ *такая же, как в следствии 3.1.1;* $\infty > q_n \downarrow q \geq 0$*;* $v = v(t)$ *— неубывающая выпуклая на* $[0, \infty)$ *функция, удовлетворяющая условию* $v'_+(t + \rho(t))\rho(t) \leq C$ *при* $t \geq 0$*. Тогда утверждения теоремы 3.1.1 верны для последовательности*

$$\Phi = \big(q_n u(|z|) + v(|\mathrm{Im}\, z|)\big)_{n=1}^{\infty}. \tag{3.1.13}$$

Доказательство. Неубывание и выпуклость функции $v(t)$ обеспечивают субгармоничность в $\mathbb{C}$ функции $v(|\mathrm{Im}\, z|)$. Таким образом, в небольшом пояснении нуждается лишь ρ-устойчивость этой функции. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $\zeta : |z - \zeta| \leq \rho(z)$. Тогда

$$\Big|v\big(|\mathrm{Im}\, z + \mathrm{Im}\, \zeta|\big) - v(|\mathrm{Im}\, z|)\Big| \leq v'_+\big(|\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, \zeta|\big) \cdot \Big||\mathrm{Im}\, z + \mathrm{Im}\, \zeta| - |\mathrm{Im}\, z|\Big| \leq$$

$$\leq v'_+\big(|z| + \rho(z)\big)\, \rho(z) \leq C\,.$$

Значит, $v(|\mathrm{Im}\, z|)$ является ρ-устойчивой функцией в $\mathbb{C}$. □

В качестве одного из приложений Теоремы 3.1.1 мы на основании работы [52] полностью описываем множества мультипликаторов проективных и индуктивно-проективных пространств целых функций, задаваемых весовыми последовательностями рассматриваемого вида.

Напомним, что если F и G — некоторые локально выпуклые пространства целых функций, то целая функция μ называется *мультипликатором из* F *в* G, если $\mu F \subset G$. Совокупность всех мультипликаторов из F в G будем обозначать $M(F, G)$. Далее, мультипликатор $\mu \in M(F, G)$ называется непрерывным, если оператор умножения $\Lambda_\mu : f \in F \mapsto \mu f$ действует непрерывно из F в G.

Если F и G — индуктивные пространства целых функций, описание множества $M(F, G)$ хорошо известно (см. [20, предложение 3]). Для проективных пространств $F = H_\Phi(\mathbb{C})$ и $G = H_\Psi(\mathbb{C})$ ситуация более сложная. Общий результат о множестве $M\big(H_\Phi(\mathbb{C}), H_\Psi(\mathbb{C})\big)$ получен в [52, теорема 5.1], но носит условный характер: именно предполагается, что проективный предел $H_\Phi(\mathbb{C})$ является слабо приведенным. Соответственно, установленная выше теорема 3.1.1 позволяет сформулировать данный результат для последовательностей (3.1.5) в явном и более удобном для применения виде.

Теорема 3.1.2. *Пусть $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — проективная весовая последовательность вида (3.1.5), обладающая свойствами $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$ и $(\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_2)$, а $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная проективная весовая последовательность. Тогда*

$$M\big(H_\Phi(\mathbb{C}), H_\Psi(\mathbb{C})\big) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\psi_m - \varphi_n}(\mathbb{C}),$$

причем каждый мультипликатор $\mu \in M\big(H_\Phi(\mathbb{C}), H_\Psi(\mathbb{C})\big)$ непрерывен.

Применим теорему 3.1.2 для описания мультипликаторов пространств целых функций с более сложной индуктивно-проективной топологической структурой.

Под *индуктивно-проективной весовой системой* будем понимать систему $\Phi = (\varphi_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$, состоящую из непрерывных функций $\varphi_{n,m} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, таких что $\varphi_{n,m} \geq \varphi_{n+1,m}$ и $\varphi_{n,m} \leq \varphi_{n,m+1}$ при всех $n, m \in \mathbb{N}$. Соответственно, при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ будем получать проективную весовую последовательность $\Phi_m = (\varphi_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ и проективное пространство $H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$ целых функций. При этом, очевидно, $H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$ будет непрерывно вложено в $H_{\Phi_{m+1}}(\mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}$. Образуем объединение этих пространств $H_\Phi(\mathbb{C}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$ и наделим его топологией индуктивного предела $\operatorname{ind}_{m} H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$, т. е. смешанной индуктивно-проективной топологией $\operatorname{ind}_{m} \operatorname{proj}_{n} H_{\varphi_{n,m}}(\mathbb{C})$ банаховых пространств $H_{\varphi_{n,m}}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.1.3. *Пусть даны индуктивно-проективные системы $\Phi = (\varphi_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ и $\Psi = (\psi_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$, причем система Ψ произвольна, а Φ состоит из функций $\varphi_{n,m} = u_n(|z|) + v_m(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}$, где $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$, а каждая функция v_m — условиям $(\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_2)$. Тогда*

$$M\big(H_\Phi(\mathbb{C}), H_\Psi(\mathbb{C})\big) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\psi_{m,n} - \varphi_{n,m}}(\mathbb{C}), \tag{3.1.14}$$

причем каждый мультипликатор $\mu \in M\big(H_\Phi(\mathbb{C}), H_\Psi(\mathbb{C})\big)$ непрерывен.

Доказательство. Поскольку топологии пространств $H_\Phi(\mathbb{C})$ и $H_\Psi(\mathbb{C})$ мажорируют топологию поточечной сходимости, то для любого мультипликатора $\mu \in M\big(H_\Phi(\mathbb{C}), H_\Psi(\mathbb{C})\big)$ оператор умножения $\Lambda_\mu : f \in H_\Phi(\mathbb{C}) \mapsto \mu f \in H_\Psi(\mathbb{C})$ имеет замкнутый график. Следовательно, по теореме Гротендика о замкнутом графике оператор Λ_μ действует из $H_\Phi(\mathbb{C})$ в $H_\Psi(\mathbb{C})$ непрерывно.

Далее, по свойствам индуктивных пределов последовательностей пространств Фреше последнее равносильно тому, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется $l \in \mathbb{N}$ такое, что Λ_μ действует непрерывно из $H_{\Phi_k}(\mathbb{C})$ в $H_{\Psi_l}(\mathbb{C})$. Значит,

$$M\big(H_\Phi(\mathbb{C}), H_\Psi(\mathbb{C})\big) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} M\big(H_{\Phi_k}(\mathbb{C}), H_{\Psi_l}(\mathbb{C})\big)\,.$$

Применяя для описания множества $M\big(H_{\Phi_k}(\mathbb{C}), H_{\Psi_l}(\mathbb{C})\big)$ теорему 3.1.2, получаем равенство (3.1.14). $\square$

3.2 Пространства Румье УДФ нормального типа и операторы свертки в них

Определение 3.2.1. *Пусть ω — весовая функция. Пространством Румье УДФ типа $p \in [0, \infty)$ на числовой прямой называется пространство*

$$\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) := \bigcap_{l \in (0,\infty)} \bigcup_{q \in (p,\infty)} E_{\omega,q,l},$$

где, напомним, при всех $q \in (0, \infty)$ и $l \in (0, \infty)$

$$E_{\omega,q,l} := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \; : \; |f|_{\omega,q,l} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \le l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q\varphi^*_\omega(j/q)} < \infty \Big\}.$$

Пространство $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ наделяется естественной смешанной проективно-индуктивной топологией $\operatorname*{proj}_{l \in (0,\infty)} \operatorname*{ind}_{q \in (p,\infty)} E_{\omega,q,l}$.

Пространства $\mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ называются пространствами Румье УДФ минимального типа. Они рассматривались, в частности, в работах [62, 64, 83, 86, 90]. Как уже говорилось во введении, при $\omega(t) = t^\rho$, $\rho \in (0, 1)$, пространства $\mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ включают в себя известные классы Жевре. При $p \in (0, \infty)$ пространства $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ называются пространствами нормального типа; они были введены, по-видимому, в [53].

Полностью шкала пространств УДФ выглядит следующим образом: если $0 < q < p < \infty$, то

$$\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\,. \tag{3.2.1}$$

Из этого вытекают следующие полезные соотношения между пространствами Румье и Берлинга:

$$\bigcup_{t\in(p,\infty)} \mathcal{E}^t_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\,,\ p\in(0,\infty)\,. \tag{3.2.2}$$

В отличие от пространств Берлинга, в пространствах Румье операторы свертки T_μ исследуются одновременно и с помощью операторов S_μ в соответствующих пространствах ультрараспределений. В связи с этим всюду далее в настоящей главе вес ω предполагается неквазианалитическим.

Определим пространства пробных УДФ Румье. Именно, для $l\in(0,\infty)$ и $q\in(0,\infty)$ положим

$$D_{\omega,q}[-l,l] := \left\{ f\in C^\infty(\mathbb{R})\ :\ \operatorname{supp} f\subset[-l,l]\,,\ |f|_{\omega,q,l}<\infty \right\}.$$

Далее, пусть

$$D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) := \bigcup_{l\in(0,\infty)}\ \bigcup_{q\in(p,\infty)} D_{\omega,q}[-l,l]\,,\ 0\le p<\infty\,.$$

Пространство $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ называется пространством пробных УДФ, оно представляет собой строгий индуктивный предел банаховых пространств $D_{\omega,p_n}[-n,n]$, где $p_n\downarrow p$, $n\to\infty$. При этом $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})=\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\cap D(\mathbb{R})$.

Соответственно, $\left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ — это пространства Румье ультрараспределений (УР) типа p.

Перейдем к описанию сопряженных пространств. Пусть, как и в главе 1,

$$H_{\omega,q,l} := \left\{ f\in H(\mathbb{C})\ :\ \|f\|_{\omega,q,l} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\left\{q\omega(z)+l|\operatorname{Im} z|\right\}}<\infty \right\}.$$

Далее, положим

$$\widetilde{H}_{\omega,q,l} := \left\{ f\in H(\mathbb{C})\ :\ \widetilde{\|f\|}_{\omega,q,l} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\left\{l|\operatorname{Im} z|-qP_\omega(z)\right\}}<\infty \right\}.$$

Из введенных пространств образуем индуктивно-проективные и индуктивные пределы:

$$H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) := \operatorname*{ind}_{l\in(0,\infty)}\ \operatorname*{proj}_{q\in(p,\infty)} H_{\omega,q,l}\,,\quad \widetilde{H}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) := \operatorname*{ind}_{l\in(0,\infty)}\ \operatorname*{ind}_{q\in(p,\infty)} \widetilde{H}_{\omega,q,l}.$$

Как известно (см., напр., [5]), преобразование Фурье-Лапласа функционалов

$$F : \psi \mapsto \widehat{\psi}(z) := \psi_x(e^{-ixz}), \ z \in \mathbb{C},$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\left(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'_\beta$ и $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. В свою очередь преобразование Фурье функций

$$\widetilde{F} : g \mapsto \widehat{g}(z) := \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ixz}\, dx, \ z \in \mathbb{C},$$

является топологическим изоморфизмом $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ на $\widetilde{H}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Здесь попрежнему $p \in [0, \infty)$.

Из вложений (3.2.1) естественным образом вытекают вложения

$$H^\infty_{(\omega)}(\mathbb{C}) \supset H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) \supset H^p_{(\omega)}(\mathbb{C}) \supset H^q_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) \supset H^q_{(\omega)}(\mathbb{C}) \supset H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C}). \tag{3.2.3}$$

Здесь $0 < q < p < \infty$.

Введем еще сразу нужные для дальнейшего замкнутые подпространства $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(r)$ пространства $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и соответствующие им факторпространства. Именно, для $r > 0$ положим

$$\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(r) := \left\{ f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \ : \ f \equiv 0 \text{ на } (-r, r) \right\}, \quad \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[r] := \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) / \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(r).$$

По аналогии с [65, лемма 1.10] проверяется, что $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[r]$ представляет собой сильное сопряженное к ядерному пространству Фреше. Из этого так же, как в [65, доказательство леммы 2.3], вытекает, что преобразование Фурье-Лапласа функционалов

$$\overline{F} : \nu \in \left(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[r]\right)' \mapsto \widehat{\nu}(z) := \nu\left[e^{-ixz} + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(r)\right], \ z \in \mathbb{C},$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\left(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[r]\right)'_\beta$ и пространством

$$H^p_{\{\omega\}}[r] := \operatorname*{proj}_{l \in (r,\infty)} \operatorname*{proj}_{q \in (p,\infty)} H_{\omega,q,l}.$$

Перейдем к определению операторов свертки $T_\mu : \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и $S_\mu : \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)' \to \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$, действующих в пространствах Румье УДФ и, соответственно, УР нормального типа $p \in (0, \infty)$.

Как нетрудно видеть, при $p \in (0,\infty)$ пространство $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ — как и пространство $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, сопряженное к пространству Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$, — алгеброй не является. Однако, в отличие от $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, описание множества всех мультипликаторов для $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ представляет собой отдельную достаточно непростую задачу. Из общей теоремы 3.1.3 об описании мультипликаторов весовых пространств с индуктивно-проективной топологической структуры получаем следующий результат.

Теорема 3.2.1. *Пусть ω — неквазианалитический вес; $p \in (0,\infty)$. Множеством всех мультипликаторов пространства $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ является*

$$M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) := \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) \,|\, \exists l > 0 \,:\, \forall \varepsilon > 0 \quad \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,l} < \infty \right\}.$$

При этом каждый такой мультипликатор является непрерывным, т. е. оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$.

Нетрудно заметить, что множество $M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ совпадает с пространством $H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, сопряженным к пространству Румье $\mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ УДФ минимального типа, и, кроме того, с множеством $\widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, которое рассматривалось в § 2.2.

Определение 3.2.2. *Пусть $p \in (0,\infty)$, $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$ — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, преобразование Фурье-Лапласа которого совпадает с μ. Операторами свертки T_μ и S_μ с символом μ называются операторы, действующие соответственно в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и в $\left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ по правилам:*

$$T_\mu f := \psi_\mu * f\,,\ f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\,;$$
$$S_\mu \nu := \psi_\mu * \nu\,,\ \nu \in \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'.$$

Таким образом, для $f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $\nu \in \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ и $\varphi \in D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$

$$(T_\mu f)(x) = \langle \psi_\mu, f(x-\cdot)\rangle\,;$$
$$\langle S_\mu \nu, \varphi\rangle = \langle \psi_\mu * \nu, \varphi\rangle = \langle \nu, \check{\psi}_\mu * \varphi\rangle = \langle \nu, \psi_\mu\big(\varphi(x+\cdot)\big)\rangle.$$

Оператор T_μ является сопряженным (с точностью до изоморфизмов) к оператору умножения $\Lambda_{\check{\mu}}$, где $\check{\mu}(z) := \mu(-z)$, и действует линейно и непрерывно в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. Оператор S_μ — это линейный непрерывный оператор в $\left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$, который представляет собой естественное продолжение T_μ: если $f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, а $\nu_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ — соответствующий функционал из $\big(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'$, то $S_\mu \nu_f = \nu_{T_\mu f}$ в $\big(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'$.

Точно так же, как в главе 1, проверяется, что если $\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k i^k z^k$ является сильным мультипликатором пространства $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, т. е. удовлетворяет условию (1.2.3), то T_μ представляет собой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$T_\mu f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}\,,\ f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\,.$$

В заключение параграфа приведем следующие результаты для оператора T_μ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, которые являются простыми следствиями соотношений (3.2.2) и теоремы 1.4.1 главы 1.

Теорема 3.2.2. *Пусть ω, σ — весовые функции; $p\omega \le q\sigma$; $p, q \in (0,\infty)$; T_μ — оператор свертки, действующий в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$; μ — его символ. Если $T_\mu\big(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big) \supset \mathcal{E}^q_{\{\sigma\}}(\mathbb{R})$, то для целой функции μ выполнено условие (A) теоремы 1.4.1.*

Теорема 3.2.3. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; T_μ — оператор свертки, действующий в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$; μ — его символ. Для сюръективности оператора свертки T_μ необходимо, чтобы символ μ медленно убывал относительно ω в нормальном смысле, т. е. чтобы выполнялись эквивалентные условия (D_1), (E_1), (F_1) теоремы 1.3.1.*

Замечание 3.2.1. *Заметим, что для всех символов $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ условие (F_1) теоремы 1.3.1 эквивалентно условию (F_0) леммы 2.2.1.*

3.3 Описание ядра оператора свертки в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$

Основная цель настоящего параграфа — установить изоморфное описание $\ker T_\mu$ в виде пространства числовых последовательностей. Одновременно будет получено общее решение однородного уравнения $T_\mu f = g$ в пространстве $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. В отличие от пространств Берлинга, данный шаг является необходимым для решения задачи о сюръективности оператора T_μ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Для получения указанных результатов будут использованы в целом те же методы, которые применялись в § 2.1 и § 2.2 для операторов свертки в пространствах Берлинга. При этом будет использоваться построенное в § 2.2 открытое покрытие нулевого множества функции $\check{\mu}$. Это возможно благодаря тому, что операторы свертки в пространствах Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ на числовой прямой рассматривались в § 2.2 с тем же множеством символов, что и операторы свертки в пространствах Румье.

Отличительными особенностями являются топологическая структура (индуктивно-проективная вместо чисто индуктивной), а также необходимость иметь решение $\overline{\partial}$-задачи, удовлетворяющее семейству весовых оценок. В связи с этим в доказательстве основного предложения 3.3.1 вместо классического результата Хермандера, который применялся в предложении 2.2.2, будет использован его аналог, установленный в теореме 3.1.1.

Начнем со следующей леммы.

Лемма 3.3.1. *Пусть* ω *— весовая функция;* $p \in (0,\infty)$*;* $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$*. Для утверждений*

(i) *μ удовлетворяет условию* (F_0)*;*

(ii) *$\check{\mu}$ — делитель* $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$*, т. е.*

$$f \in H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})\,,\ \frac{f}{\check{\mu}} \in H(\mathbb{C}) \ \ \Rightarrow\ \ \frac{f}{\check{\mu}} \in H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C});$$

(iii) *главный идеал* $J = \check{\mu}H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ *замкнут в* $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$

справедливы импликации $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$*.*

Доказательство. Будем, как обычно, для удобства рассматривать случай $p = 1$.

Докажем импликацию $(i) \Rightarrow (ii)$. Возьмем произвольную функцию $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ такую, что $\frac{f}{\check{\mu}} \in H(\mathbb{C})$. Так как $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, то $\|f\|_{\omega,q,l_1} < \infty$ при некотором $l_1 \in (0,\infty)$ и всех $q \in (1,\infty)$.

Зафиксируем какое-нибудь $\beta \in \left(0, \frac{1}{32}\right]$ и найдем соответствующую ему константу L_0 из условия (F_0). Далее, для произвольного $q \in (1,\infty)$ выбираем $q_1 \in (1,q)$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}(q-q_1)\right]$. Пользуясь условием (F_0), находим соответствующие δ и r_0. Здесь следует заметить, что ε и, как следствие, δ можно при необходимости уменьшить.

В результате каждую точку $z \in \mathbb{C}$ можно погрузить внутрь окружности S_z, на которой справедлива оценка

$$|\check{\mu}(\zeta)| \geq \exp\left\{ -\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta) - L_0|\operatorname{Im}\zeta|\right\}, \ \zeta \in S_z .$$

Следовательно,

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \leq \|f\|_{\omega,q_1,l_1} \exp\left\{(q_1+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}\zeta) + (l_1+L_0)|\operatorname{Im}\zeta|\right\}, \ \zeta \in S_z .$$

Учитывая оценки на $\operatorname{diam} S_z$ из условия (F_0), а также свойства (1.1.1), (1.1.3) весовых функций, из этого стандартным образом получаем, что при некоторых $C > 0$ и $L_1 > 0$ для всех $\zeta \in S_z$ справедлива оценка

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\check{\mu}(\zeta)}\right| \leq C \exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z) + L_1|\operatorname{Im} z|\right\}.$$

Значит, такая же оценка имеет место и внутри окружности S_z и, в частности, в точке z. Итак, $\frac{f}{\check{\mu}} \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$.

Доказательство импликации $(ii) \Rightarrow (iii)$ совершенно стандартное. $\square$

Итак, пусть $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле, т. е. удовлетворяет условию (F_0). В силу предыдущей леммы тогда главный идеал J замкнут в $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Далее, пусть $N(\check{\mu}) = (\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ — последовательность нулей функции $\check{\mu}$; k_s — кратность нуля λ_s; $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ — открытое покрытие множества $N(\check{\mu})$, построенное в § 2.2. Напомним, что в § 2.2 в каждом множестве U_j специальным образом была выбрана точка z_j.

Как и в § 2.2, $H^{\infty}(U_j)$ будет обозначать пространство всех аналитических ограниченных на U_j функций с нормой $\|g\|_{\infty,j} = \sup\left\{|g(z)| : z \in U_j\right\}$. Положим $J_j = \left\{g \in H^{\infty}(U_j) \ : \ g^{(l)}(\lambda_s) = 0, \quad l = 0, \dots, k_s - 1, \quad \lambda_s \in U_j\right\}$; $X_j := H^{\infty}(U_j)/J_j$; $|||\,[f]\,|||_{\infty,j} = \inf\limits_{g \in H^{\infty}(U_j)} \sup\limits_{z \in U_j} |f(z) + \mu(z)g(z)|$ — факторнорма в X_j и $X := \prod_{j=1}^{\infty} X_j$. При этом $\dim X_j = \sum_{\lambda_s \in U_j} k_s =: m_j$.

Введем следующее подпространство пространства X:

$$k^{p,\infty}_{\{\omega\}} = \Big\{\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in X \mid \exists l \in (0,\infty) : \ \forall q \in (p,\infty) \\ \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} = \sup_{j\geq 1} \frac{|||\,[\varphi_j]\,|||_{\infty,j}}{\exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\right\}} < \infty\Big\}.$$

Данное пространство наделим естественной топологией внутреннего индуктивного предела пространств Фреше $K_{\omega,l} := \mathrm{proj}_{q\in(1,\infty)} k_{\omega,q,l}$, где $k_{\omega,q,l} := \big\{\varphi \in X : \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} < \infty\big\}$. Нетрудно проверить, что $K_{\omega,l}$ компактно вложено в K_{ω,l_1} при $0 < l < l_1 < \infty$, так что $k^{p,\infty}_{\{\omega\}}$ относится к классу (DFS)-пространств.

Предложение 3.3.1. *Отображение*

$$\rho : [f] \in H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J \mapsto \big([f|_{U_j}]\big)_{j=1}^{\infty}$$

устанавливает топологический изоморфизм между $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J$ *и* $k^{p,\infty}_{\{\omega\}}$.

Доказательство. Пусть $p = 1$.

1) Начнем с доказательства непрерывности отображения ρ. Поскольку топология в $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J$ совпадает с индуктивно-проективной топологией $\operatorname*{ind}_{l\in(0,\infty)} \operatorname*{proj}_{q\in(1,\infty)} H^0_{\omega,q,l}$ банаховых пространств

$$H^0_{\omega,q,l} := \Big\{[f] \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J \ : \\ \widetilde{\|[f]\|}_{\omega,q,l} = \inf_{g\in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})} \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)+\mu(z)g(z)|}{\exp\{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|\}} < \infty\Big\},$$

то, в силу [46, теорема 6.5.1], нам достаточно проверить справедливость условия:

$$\forall l \in (0,\infty) \ \ \exists l_1 \in (0,\infty) \,|\, \forall q_1 \in (1,\infty) \ \ \exists q \in (1,\infty) \ \ \exists C > 0 \ : \\ \widetilde{|\rho[f]|}_{\omega,q_1,l_1} \le C \, \widetilde{\|[f]\|}_{\omega,q,l}\,, \ \forall [f] \in H^0_{\omega,q,l}\,.$$

Зафиксируем произвольное $l \in (0,\infty)$ и положим $l_1 := 3l + 4A$, где, напомним, A — константа, определяемая условием (1.1.1). Далее, для $q_1 \in (1,2)$ выберем какое-нибудь $q \in (1,q_1)$. Пользуясь леммой 2.2.3, найдем $C_1 > 0$ такое, что для всех $j \in \mathbb{N}$ и $z \in U_j$

$$q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| \le q_1\omega(\operatorname{Re} z_j) + (2Aq_1 + 3l)|\operatorname{Im} z_j| + C_1 \le \\ \le q_1\omega(\operatorname{Re} z_j) + l_1|\operatorname{Im} z_j| + C_1\,.$$

Тогда для любого класса $[f] \in H^0_{\omega,q,l}$ имеем, что

$$\begin{aligned}
&|||\, [f\big|_{U_j}]\, |||_{\infty,j} \le \\
&\le \inf_{h\in J_j} \sup_{z\in U_j} \frac{|f(z)+h(z)|}{\exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z)+l|\operatorname{Im} z|\right\}} \cdot \sup_{z\in U_j} \exp\left\{q\omega(\operatorname{Re} z)+l|\operatorname{Im} z|\right\} \le \\
&\le \widetilde{\|[f]\,\|}_{\omega,q,l} \cdot e^{C_1} \cdot \exp\left\{q_1\omega(\operatorname{Re} z_j)+l_1|\operatorname{Im} z_j|\right\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\widetilde{|\rho[f]|}_{\omega,q_1,l_1} \le e^{C_1}\widetilde{\|\,[f]\,\|}_{\omega,q,l}$, что и требовалось.

2) Проверим теперь сюръективность отображения ρ. Поскольку именно данный пункт доказательства содержит существенные отличия от § 2.2, мы приведем его достаточно подробно.

Возьмем $\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in k^{1,\infty}_{\{\omega\}}$. Тогда $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l_1} < \infty$ при некотором $l_1 \in (0,\infty)$ и всех $q \in (1,\infty)$. Выберем в каждом классе $[\varphi_j]$, $j\in\mathbb{N}$, функцию $\varphi_j \in H^\infty(U_j)$ такую, что $|||\,[\varphi_j]\,|||_{\infty,j} = \|\varphi_j\|_{\infty,j}$.

Установим сначала некоторые вспомогательные оценки для $|\varphi_j|$ и $|\check{\mu}|$. Пользуясь снова леммой 2.2.3, найдем $C_k > 1$, при которых для всех $j \in \mathbb{N}$ и $z \in U_j$ справедливо неравенство

$$(1+\varepsilon_k)\omega(\operatorname{Re} z_j)+l_1|\operatorname{Im} z_j| \le (1+2\varepsilon_k)\omega(\operatorname{Re} z)+\big(3l_1+2A(1+2\varepsilon_k)\big)|\operatorname{Im} z|+\ln C_k\,.$$

Считая $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ и полагая $l_2 := 3l_1+4A$, получим, что

$$|\varphi_j(z)| \le C_k \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,1+\varepsilon_k,l_1} \cdot \exp\left\{(1+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z)+l_2|\operatorname{Im} z|\right\},\ z\in U_j\,. \tag{3.3.1}$$

Напомним, что в соответствии с леммой 2.2.5 для $|\check{\mu}|$ на множествах $(\partial U_j)(\sigma_j)$, $j \in \mathbb{N}$, выполняется оценка

$$\ln|\check{\mu}(z)| \ge -3\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 3L_0|\operatorname{Im} z|\,. \tag{3.3.2}$$

Здесь

$$\sigma_j := \min_{z\in\overline{U_j}} \exp\left\{-4\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 4L_0|\operatorname{Im} z|\right\}. \tag{3.3.3}$$

Учитывая, что $\varepsilon_k \downarrow 0$, и полагая

$$\ln\widetilde{C}_k := \max\left\{3(\varepsilon_1-\varepsilon_k)\omega(\operatorname{Re} z)\ :\ z\in U_j\,,\ 1\le j<j_k\right\},\ k\ge 2\,, \tag{3.3.4}$$

из (3.3.2) имеем, что

$$\ln|\mu(z)| \ge -3\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 3L_0|\operatorname{Im} z| - \ln\widetilde{C}_k\,,\ z\in U_j\,,\ j\in\mathbb{N}\,. \tag{3.3.5}$$

Наконец, снова применяя лемму 2.2.3, найдем $\overline{C}_k > 1$ такое, что для любых $\zeta, z \in U_j$, $j \in \mathbb{N}$, выполняются неравенства:

$$4\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\zeta) + 4L_0|\operatorname{Im}\zeta| \le 6\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) + l_3|\operatorname{Im} z| + 2\ln\overline{C}_k\,,\ k \in \mathbb{N}\,,$$

где $l_3 := 36L_0 + 12A$. На основании данной оценки и равенств (3.3.3) и (3.3.4) окончательно получаем, что

$$\sigma_j \ge -\overline{C}_k^2\,\widetilde{C}_k^2\,\exp\big\{-6\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - l_3|\operatorname{Im} z|\big\}\,,\ z \in U_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,. \tag{3.3.6}$$

Функция $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ такая, что $\rho[f] = \varphi$, строится по сути так же, как в предложении 2.2.2. Нам потребуется лишь получить новые оценки на f, из которых будет вытекать, что $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Пусть V_j, g, $\widetilde{C}$, Φ и h те же, что в предложении 2.2.2. Вместо неравенства (2.2.18), из (3.3.6) вытекает, что

$$\left|\frac{\partial g}{\partial\bar z}(z)\right| \le \widehat{C}_k\exp\big\{6\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) + l_3|\operatorname{Im} z|\big\},\quad z \in U_j\setminus V_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,, \tag{3.3.7}$$

где $\widehat{C}_k := \widetilde{C}\cdot\overline{C}_k^2\cdot\widetilde{C}_k^2$. Далее, из (3.3.1), (3.3.5) и (3.3.7) получаем, что для $z \in U_j\setminus V_j$, $j \in \mathbb{N}$, имеют место оценки

$$|h(z)| \le M_k\,\exp\big\{(1+11\varepsilon_k)\omega(z) + L_1|\operatorname{Im} z|\big\}\,,\ k \in \mathbb{N}\,, \tag{3.3.8}$$

где $L_1 := 3L_0 + l_2 + l_3$, $M_k := C_k\cdot\widetilde{C}_k\cdot\widehat{C}_k$. Поскольку $h(z) = 0$ для $z \notin \bigcup\limits_j(U_j\setminus V_j)$, заключаем, что оценки (3.3.8) справедливы всюду в $\mathbb{C}$.

Применяя теорему 1 из [108], находим измеримую функцию v такую, что $\frac{\partial v}{\partial\bar z} = h$ и что

$$|v(z)| \le N_k\,\exp\big\{(1+11\varepsilon_k)\omega(z) + L_1|\operatorname{Im} z|\big\}\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ k \in \mathbb{N}\,. \tag{3.3.9}$$

Полагая теперь стандартным образом $f(z) := v(z)\breve{\mu}(z) + \Phi(z)g(z)$, $z \in \mathbb{C}$, получим, что $f \in H(\mathbb{C})$. А из неравенств (3.3.1), (3.3.9) и априорной оценки сверху на $|\breve{\mu}|$ вытекает, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}|f(z)| \le \|\mu\|_{\omega,\varepsilon_k,l_0}\cdot N_k\cdot\exp\big\{(1+11\varepsilon_k)\omega(z) + L_1|\operatorname{Im} z|\big\}+\\ +C_k\cdot|\widetilde{\varphi}|_{\omega,1+\varepsilon_k,l_1}\cdot\exp\big\{(1+2\varepsilon_k)\omega(z) + l_2|\operatorname{Im} z|\big\}\,.\end{aligned}$$

Учитывая, что константы l_0, L_1 и l_2 определяются исключительно символом μ и элементом $\varphi \in k^{1,\infty}_{\{\omega\}}$, заключаем, что $f \in H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. При этом $f^{(l)}(\lambda_s) =$

$\varphi_j^{(l)}(\lambda_s)$, $l = 0, \ldots, k_s - 1$, $\lambda_s \in V_j$, так что $[f|_{U_j}] = [\varphi_j]$ в X_j, $j \in \mathbb{N}$. Это означает, что $\rho([f]) = \varphi$.

3) Инъективность отображения ρ очевидна, а непрерывность ρ^{-1} вытекает из теоремы Гротендика об открытом отображении, поскольку $H^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J$ является $(\mathcal{UF})$-пространством, а $k^{1,\infty}_{\{\omega\}}$ — пространством типа (β) (как отделимый индуктивный предел пространств Фреше) (см. [40, Приложение 1 Д.А. Райкова]). $\square$

Следствие. *Отображение ρ' является топологическим изоморфизмом $\left(k^{p,\infty}_{\{\omega\}}\right)'_\beta$ на $\left(H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\right)'_\beta$.*

Перейдем к изоморфной реализации $\ker T_\mu$. Сначала выпишем стандартный изоморфизм между $\ker T_\mu$ и пространством $\left(H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\right)'_\beta$.

Предложение 3.3.2. *Если $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (F_0), то отображение $\Phi : \ker T_\mu \to \left(H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\right)'$, определенное правилом*

$$\big\langle \Phi f, [g] \big\rangle = \big\langle f, F^{-1}(g) \big\rangle, \quad f \in \ker T_\mu, \quad [g] \in H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J,$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\ker T_\mu$ и $\left(H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})/J\right)'_\beta$. Здесь, напомним, F — преобразование Фурье-Лапласа функционалов из $\left(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$.

Доказательство. В силу условия (F_0), главный идеал J замкнут в $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Следовательно, $J_1 := F^{-1}(J)$ — замкнутое подпространство в $\left(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'_\beta$. Как известно, $\ker T_\mu = J_1^\circ = J_1^\perp$ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Из рефлексивности пространства $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и общих результатов теории двойственности (см., напр., [15]) вытекает, что $\Big(\left(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'/J_1\Big)'_\beta$ можно отождествить с $J_1^\perp$ с помощью билинейной формы

$$\langle f, [\varphi + J_1] \rangle = \langle f, \varphi \rangle\,,\ f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\,,\ \varphi \in \left(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'.$$

Для того чтобы получить утверждение леммы, остается применить преобразование Фурье-Лапласа функционалов из $\left(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$. $\square$

Из предложения 3.3.2 и следствия из предложения 3.3.1 вытекает

Предложение 3.3.3. *Если $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (F_0), то отображение $(\rho')^{-1} \circ \Phi$ устанавливает топологический изоморфизм между* $\ker T_\mu$ *и пространством* $(k^{p,\infty}_{\{\omega\}})'_\beta$.

Таким образом, нам остается лишь получить описание пространства $(k^{p,\infty}_{\{\omega\}})'_\beta$. Для этого рассмотрим пространства X'_j — сопряженные к пространствам X_j. Они, как и X_j, являются банаховыми; норма в X'_j имеет вид

$$|||\,\nu\,|||'_{\infty,j} = \sup\big\{|\nu([\varphi])| \,:\, [\varphi] \in X_j,\ |||\,[\varphi]\,|||_{\infty,j} \le 1\big\}.$$

Кроме того, $\dim X'_j = m_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Далее, положим $X' := \prod_{j=1}^{\infty} X'_j$ и

$$\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}} = \Big\{\nu = (\nu_j)_{j=1}^{\infty} \in X' \mid \forall l \in (0,\infty) \quad \exists q \in (p,\infty) \,: \\ \widetilde{|\nu|}'_{\omega,q,l} = \sup_{j\ge1} |||\,\nu_j\,|||'_{\infty,j} \exp\big\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\big\} < \infty\Big\}.$$

Данное пространство наделяется топологией $\operatorname*{proj}_{l\in(0,\infty)} \Lambda_{\omega,l}$ пространств $\Lambda_{\omega,l} = \big\{\nu \in X' \mid \exists q \in (p,\infty) \,:\, \widetilde{|\nu|}'_{\omega,q,l} < \infty\big\}$, представляющих собой индуктивные пределы банаховых пространств. Поскольку $\Lambda_{\omega,l}$ компактно вложено в Λ_{ω,l_1} при $0 < l_1 < l$, то $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$ — (FS)-пространство.

Введем стандартные отображения:

$$s_j \,:\ [\varphi_j] \in X_j \mapsto (0,\dots,0,\underset{j}{[\varphi_j]},0,\dots) \in k^{p,\infty}_{\{\omega\}};$$

$$t_j \,:\ \nu_j \in X'_j \mapsto (0,\dots,0,\underset{j}{\nu_j},0,\dots) \in \lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}.$$

Нетрудно проверить, что для каждого $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^{\infty}$ из пространства $k^{p,\infty}_{\{\omega\}}$ ряд $\sum_{j=1}^{\infty} s_j([\varphi_j])$ абсолютно сходится к φ в этом пространстве. Действительно, возьмем какое-нибудь $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^{\infty} \in k^{p,\infty}_{\{\omega\}}$ и найдем $l_1 \in (0,\infty)$, при котором $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q_1,l_1} < \infty$ для всех $q_1 \in (p,\infty)$. Пусть теперь $q \in (p,\infty)$ произвольно, а $q_1 \in (1,p)$. Положим $\varepsilon := q - q_1$, $l := l_1 + \varepsilon$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{|s_j([\varphi_j])|}_{\omega,q,l} = \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q_1,l_1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \exp\big\{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\big\}.$$

В силу следствия 2.2.1 из леммы 2.2.4, последний числовой ряд сходится. Таким образом, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} s_j([\varphi_j])$ сходится абсолютно в $k^{p,\infty}_{\{\omega\}}$.

Предложение 3.3.4. *Отображение* $S : \nu \in (k^{p,\infty}_{\{\omega\}})' \mapsto (\nu \circ s_j)_{j=1}^{\infty}$ *является топологическим изоморфизмом* $(k^{p,\infty}_{\{\omega\}})'_{\beta}$ *на* $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$.

Доказательство. Из установленного выше разложения $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} s_j([\varphi_j])$ в $k^{p,\infty}_{\{\omega\}}$, очевидно, вытекает инъективность отображения S.

Для того чтобы доказать сюръективность S, возьмем $\Theta = (\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ из $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$ и положим

$$\nu(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j([\varphi_j])\,,\ \varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^{\infty} \in k^{p,\infty}_{\{\omega\}}\,.$$

Пусть $p < q_1 < q$ произвольны, а $\varepsilon := q - q_1$. Далее, пусть $l_1 \in (0,\infty)$ — любое, а $l := l_1 + \varepsilon$. Для $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^{\infty} \in K_{\omega,l_1}$ имеем:

$$|\nu(\varphi)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j([\varphi_j])| \le |\widetilde{\Theta}|'_{\omega,q,l} \cdot |\widetilde{\varphi}|_{\omega,q_1,l_1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \exp\big\{ -\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\big\}.$$

Последний числовой ряд, как уже говорилось выше, сходится. Таким образом, мы показали, во-первых, что функционал ν непрерывен на каждом K_{ω,l_1}, $l_1 \in (0,\infty)$, и, как следствие, на $k^{p,\infty}_{\{\omega\}}$. Во-вторых, поскольку очевидно, что $S(\nu) = \Theta$, полученные оценки означают, что S^{-1} действует непрерывно из $\Lambda_{\omega,l}$ в K'_{ω,l_1}. Напомним, что здесь l_1 произвольно, а $l = l_1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ также можно выбрать произвольным. По общим свойствам индуктивных и проективных пределов это означает, что S^{-1} действует непрерывно из $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$ в $(k^{p,\infty}_{\{\omega\}})'_{\beta}$. Учитывая, что $(k^{p,\infty}_{\{\omega\}})'_{\beta}$ и $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$ — (FS)-пространства, заключаем, что отображение S также непрерывно. □

Из доказанных предложений вытекает

Теорема 3.3.1. *Пусть для* $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ *справедливо условие* (F_0). *Тогда* $\ker T_{\mu}$ *топологически изоморфно пространству последовательностей* $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$. *Топологический изоморфизм устанавливает отображение* $L := S \circ (\rho')^{-1} \circ \Phi$.

Теорема 3.3.1 позволяет, во-первых, выписать базис в $\ker T_{\mu}$. Кроме того, на основании данного результата можно, следуя работам [83] и [90], получить изоморфное описание $\ker T_{\mu}$ в виде пространства числовых последовательностей.

Сначала выпишем базис в пространстве $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$. Как и в § 2.1 и § 2.2, из леммы Ауэрбаха [88, лемма 10.5] следует, что в пространствах X_j и X'_j можно выбрать базисы $\{[\varphi_{j,n}] : n = 1, \ldots, m_j\}$ и $\{\nu_{j,n} : n = 1, \ldots, m_j\}$ такие, что

$$||| \, [\varphi_{j,n}] \, |||_{\infty,j} = ||| \, \nu_{j,n} \, |||'_{\infty,j} = 1, \quad n = 1, \ldots, m_j;$$

$$\langle [\varphi_{j,n}], \nu_{j,m} \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Лемма 3.3.2. *Система*

$$\big\{ t_j(\nu_{j,n}) \ : \ n = 1, \ldots, m_j; \ j \in \mathbb{N} \big\} \tag{3.3.10}$$

образует абсолютный базис в пространстве $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\nu = (\nu_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$ и покажем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m_j} \langle [\varphi_{j,n}], \nu_j \rangle \, t_j(\nu_{j,n}) \, . \tag{3.3.11}$$

сходится абсолютно в $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$. Пусть $l \in (0, \infty)$ произвольно. Возьмем $l_1 > l$. Так как $\nu \in \lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$, то имеется $q_1 \in (p, \infty)$ такое, что $\widetilde{|\nu|}'_{\omega,q_1,l_1} < \infty$. Пусть $q \in (p, q_1)$. Положим $\varepsilon := \min\{q_1 - q, l_1 - l\}$. Тогда имеем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m_j} \big| \langle [\varphi_{j,n}], \nu_j \rangle \big| \cdot \widetilde{|t_j(\nu_{j,n})|}'_{\omega,q,l} \leq \widetilde{|\nu|}'_{\omega,q_1,l_1} \sum_{j=1}^{\infty} m_j \exp\big\{ - \varepsilon \omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon |\operatorname{Im} z_j| \big\}.$$

В силу следствия 2.2.1 из леммы 2.2.4, последний числовой ряд сходится. Таким образом, ряд (3.3.10) сходится абсолютно в каждом $\Lambda_{\omega,l}$, $l \in (0, \infty)$, а значит, в $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$. □

Для того чтобы описать $\ker T_\mu$ в виде пространства числовых последовательностей, введем в рассмотрение последовательности $(\alpha_s)_{s=1}^{\infty}$ и $(\beta_s)_{s=1}^{\infty}$, которые получены из $\big(\omega(\operatorname{Re} z_j)\big)_{j=1}^{\infty}$ и, соответственно, $\big(|\operatorname{Im} z_j|\big)_{j=1}^{\infty}$ повторением m_j раз элемента $\omega(\operatorname{Re} z_j)$ или $|\operatorname{Im} z_j|$. Далее, положим

$$\lambda_0^p := \big\{ x = (x_s)_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \, | \, \forall l \in (0, \infty) \ \ \exists q \in (p, \infty) \ : \\ |x|^0_{\omega,q,l} := \sum_{s=1}^{\infty} |x_s| \exp\big\{ q\alpha_s + l\beta_s \big\} < \infty \big\} \, .$$

Лемма 3.3.3. *Пространства* $\lambda^{p,\infty}_{\{\omega\}}$ *и* λ_0^p *топологически изоморфны.*

Доказательство. Очевидно, пространство λ_0^p можно отождествить с пространством

$$\lambda_1^p := \Big\{ x = \big((x_{j,k})_{k=1}^{m_j}\big)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \,:\, \forall l \in (0,\infty) \;\; \exists q \in (p,\infty) \;: \\ |x|^1_{\omega,q,l} := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} |x_{j,k}| \exp\big\{ q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \big\} < \infty \Big\}.$$

Рассмотрим отображения $A : \lambda_1^p \to \lambda_{\{\omega\}}^{p,\infty}$ и $B : \lambda_{\{\omega\}}^{p,\infty} \to \lambda_1^p$, действующие по правилам:

$$A :\; x = \big((x_{j,k})_{k=1}^{m_j}\big)_{j=1}^{\infty} \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} x_{j,k} t_j(\nu_{j,k})\,;$$

$$B : \nu = (\nu_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto \Big(\big(\langle \nu_j, [\varphi_{j,k}] \rangle \big)_{k=1}^{m_j} \Big)_{j=1}^{\infty}.$$

Нетрудно проверить, что $A\circ B$ — тождественное отображение в $\lambda_{\{\omega\}}^{p,\infty}$, а $B\circ A$ — в λ_1^p.

Далее, поскольку при всех $l \in (0,\infty)$ и $q \in (p,\infty)$

$$\widetilde{|Ax|}'_{\omega,q,l} \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} |x_{j,k}| \cdot \widetilde{|t_j(\nu_{j,k})|}'_{\omega,q,l} = |x|^1_{\omega,q,l}\,,$$

то отображение A непрерывно. Аналогично, так как для $l \in (0,\infty)$, $q \in (p,\infty)$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$|B\nu|^1_{\omega,q,l} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} \big|\langle \nu_j, [\varphi_{j,k}] \rangle\big| \exp\big\{ q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \big\} \le \\ \le \widetilde{|\nu|}'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} m_j \exp\big\{ -\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) - \varepsilon|\operatorname{Im} z_j| \big\}\,,$$

то отображение B также непрерывно.

Итак, $\lambda_{\{\omega\}}^{p,\infty} \simeq \lambda_1^p \simeq \lambda_0^p$. □

Таким образом установлена

Теорема 3.3.2. *Если символ $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ оператора свертки T_μ медленно меняется относительно ω в нормальном смысле, то $\ker T_\mu$ топологически изоморфно пространству λ_0^p числовых последовательностей.*

В заключение параграфа выпишем базис в $\ker T_\mu$, т. е. в пространстве всех решений однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. С этой целью введем в рассмотрение подпространства

$$E_j = \operatorname{span}\left\{(-ix)^l e^{-i\lambda_s x} \,:\, l = 0, \dots, k_s - 1, \quad \lambda_s \in U_j\right\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

пространства всех решений указанного однородного уравнения, натянутые на элементарные решения, соответствующие нулям функции $\check{\mu}$, попадающим в каждое из множеств U_j. Так же, как в лемме 2.1.5, проверяется, что $L(E_j) = t_j(X'_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Здесь, напомним, L — изоморфизм из теоремы 3.3.1. На основании леммы 3.3.3 и теоремы 3.3.1 тогда получаем следующий результат.

Теорема 3.3.3. *Если $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ медленно меняется относительно ω в нормальном смысле, то в ядре $\ker T_\mu$ оператора свертки T_μ с символом μ, действующего в пространстве $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, имеется абсолютный базис*

$$\left\{e_{j,n} : n = 1, \dots, m_j\,;\ j \in \mathbb{N}\right\},$$

состоящий из элементов $e_{j,n} \in E_j$, $n = 1, \dots, m_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Замечание. *В примерах 2.1.1 и 2.1.2 были указаны ситуации, когда группировать нули функции $\check{\mu}$ нет необходимости и, соответственно, базис в пространстве всех решений однородного уравнения свертки образуют сами элементарные решения. Понятно, что это остается верным также и в пространствах Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.*

3.4 Критерий сюръективности оператора свертки в пространстве Румье УР нормального типа

Основной целью параграфа является получение критерия сюръективности оператора S_μ в пространствах Румье $\left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ УР нормального типа $p \in (0, \infty)$. Одновременно будет получен и критерий локальной сюръективности оператора T_μ в пространстве $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа

Введем два следующих определения.

Определение 3.4.1. *Говорят, что оператор T_μ (или S_μ) допускает фундаментальное решение (ФР), если*

$$\exists \nu \in \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)' : \quad S_\mu \nu = \delta.$$

Определение 3.4.2. *Пусть $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, $0 < p < \infty$. Говорят, что оператор T_μ локально сюръективен на $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, если*

$$\forall g \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \quad \forall l > 0 \quad \exists f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) : \quad T_\mu f|_{[-l,l]} = g\,.$$

Центральным результатом параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.4.1. *Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $S_\mu : \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)' \to \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ *сюръективен;*

(ii) T_μ *допускает ФР;*

(iii) $T_\mu : \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ *локально сюръективен;*

(iv) μ *медленно убывает относительно ω в нормальном смысле, т. е. удовлетворяет условиям (D_1), (E_1) и (F_1) теоремы 1.3.1.*

Доказательство этого результата будет проводиться по схеме $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i)$, где вспомогательное утверждение (v) выглядит следующим образом:

(v) если множество B в $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ таково, что $T_\mu B$ ограничено в $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, то B ограничено в $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Поскольку импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна, перейдем сразу к импликации $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Предложение 3.4.1. *Если T_μ допускает ФР, то T_μ локально сюръективен на $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. По условию, имеется функционал $\nu_0 \in \left(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ такой, что $S_\mu \nu_0 = \psi_\mu * \nu_0 = \delta$.

Возьмем произвольные $g \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и $l > 0$. Для последовательности $(p_n\omega)_{n=1}^\infty$, $p_n \downarrow p$, найдем ассоциированный с ней канонический вес v (см. [5, пункт 2.3.1]). Как известно [5, предложение 4.2.2], $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ является топологическим модулем над кольцом $D_{(v)}(\mathbb{R}) := D(\mathbb{R}) \bigcap \mathcal{E}^\infty_{(v)}(\mathbb{R})$. Далее, пользуясь

[5, предложение 1.6.2], выберем в $D_{(v)}(\mathbb{R})$ функцию φ_0 такую, что $\varphi_0 \equiv 1$ на $[-l, l]$.

Положим $g_0 := g \cdot \varphi_0$ и $f := \nu_0 * g_0$. Тогда $g_0 \in D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и $g_0 \equiv g$ на $[-l, l]$. При этом

$$T_\mu f = \psi_\mu * (\nu_0 * g_0) = (\psi_\mu * \nu_0) * g_0 = \delta * g_0\,,$$

так что $(T_\mu f)(x) = g_0(x) = g(x)$ для всех $x \in [-l, l]$. $\square$

Для доказательства следующей импликации нам понадобятся локализованные операторы свертки. Как и в классическом случае, функционал $\psi_\mu \in \left(\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\right)'$ представляет собой УР с компактным носителем. Пусть $k \in \mathbb{N}$ таково, что $\operatorname{supp} \psi_\mu \subset (-k, k)$. Тогда для символа μ выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists C_0 = C_0(\varepsilon) \;:\; |\mu(z)| \le C_0 \exp\left\{\varepsilon\omega(z) + k|\operatorname{Im} z|\right\},\; z \in \mathbb{C}\,. \tag{3.4.1}$$

В силу свойств весовых функций, данное условие при некотором $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 \ge k$, равносильно следующему:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists C_1 = C_1(\varepsilon) \;:\; |\mu(z)| \le C_1 \exp\left\{\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + k_1|\operatorname{Im} z|\right\},\; z \in \mathbb{C}\,. \tag{3.4.2}$$

Вложение $\operatorname{supp} \psi_\mu \subset (-k, k)$ позволяет корректно определить для всех $r > 0$ и $R \ge r + k$ оператор $T_\mu(R, r) : \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[R] \to \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[r]$, действующий по правилу:

$$T_\mu(R, r)\left[\varphi + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(R)\right] := \left[T_\mu\varphi + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(r)\right].$$

Он будет действовать линейно и непрерывно, а сопряженным к нему будет оператор умножения $\Lambda_{\check{\mu}} : f \in H^p_{\{\omega\}}[r] \mapsto \check{\mu} f \in H^p_{\{\omega\}}[R]$.

Предложение 3.4.2. $(iii) \Rightarrow (iv)$.

Доказательство. Пусть оператор T_μ локально сюръективен. При этом $T_\mu(R, r)$ будет действовать сюръективно из $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[R]$ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[r]$ при всех $r > 0$ и $R \ge r + k$. Из общих результатов теории двойственности тогда получаем, что оператор умножения $\Lambda_{\check{\mu}} : H^p_{\{\omega\}}[r] \to H^p_{\{\omega\}}[R]$ есть топологический изоморфизм "в". Следовательно, выполняется условие

$(\widetilde{iii})$ если семейство $B \subset H^p_{\{\omega\}}[r]$ таково, что $\check{\mu} B$ ограничено в $H^p_{\{\omega\}}[R]$, то B ограничено в $H^p_{\{\omega\}}[r]$.

Предположим, что условие (iv) нарушено. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ и последовательность $(b_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ с $|b_j| \uparrow \infty$ такие, что

$$|\check{\mu}(z)| < \exp\big\{ -\varepsilon_0\omega(z)\big\}\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\, :\, |z-b_j| \le \delta_0\omega(b_j)\,. \tag{3.4.3}$$

На основании (3.4.3) методами из доказательства леммы 1.3.2 построим семейство B целых функций, для которого будет нарушаться условие $(\widetilde{iii})$.

Положим

$$R_j := \frac{\delta_0}{2}\,\omega(b_j)\,,\ j \in \mathbb{N}\,; \quad r_0 := \Big(p+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\,\frac{\pi}{\delta_0}\,; \quad u(z) := r_0|\operatorname{Im} z|\,,\ z \in \mathbb{C}.$$

По функции $u(z)$, точкам b_j и кругам K_{b_j,R_j} построим функции $U_j(z)$, как в лемме 1.3.1. Функции $U_j(z)$ непрерывны и субгармоничны в $\mathbb{C}$, гармоничны в круге $|z-b_j| < R_j$, причем

$$U_j(b_j) = \Big(p+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\omega(b_j)\,;$$
$$U_j(z) \le \Big(p+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\omega(b_j) + r_0|\operatorname{Im} z|\,,\ |z-b_j| < R_j\,.$$

Используя оценку (1.1.1), для всех z с $|z-b_j| < R_j$ имеем:

$$|z| \ge |b_j| - R_j = |b_j| - \frac{\delta_0}{2}\,\omega(b_j) \ge \Big(1-\frac{\delta_0 A}{2}\Big)|b_j|\,.$$

Свойство (1.1.3) веса ω позволяет тогда считать, что

$$\Big(p+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\omega(b_j) \le \Big(p+\frac{5\varepsilon_0}{8}\Big)\omega(z)\,,\ |z-b_j| < R_j\,.$$

Следовательно,

$$U_j(z) \le \Big(p+\frac{5\varepsilon_0}{8}\Big)\omega(z) + r_0|\operatorname{Im} z|\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{3.4.4}$$

Далее применяем лемму 1 из [3] и строим целые функции $f_j(z)$ такие, что

$$|f_j(b_j)| = \exp U_j(b_j) = \exp\Big\{\Big(p+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)\omega(b_j)\Big\}\,; \tag{3.4.5}$$

$$|f_j(z)| \le \widetilde{A}(1+|z|^2)^2 \exp \sup_{|w|\le 1} U_j(z+w)\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{3.4.6}$$

Здесь $\widetilde{A}$ от j не зависит.

Будем предполагать, что $R_1 > 1$. Из условия (γ) на вес ω вытекает, что при некотором $D > 0$

$$(1+|z|^2)^2 \le D\exp\frac{\varepsilon_0}{8}\,\omega(z)\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{3.4.7}$$

Продолжим оценку (3.4.6). Если $z \in \mathbb{C}$ таково, что $|z - b_j| \geq 2R_j$, то для всех w с $|w| \leq 1$

$$U_j(z+w) = u(z+w) = r_0|\mathrm{Im}\,(z+w)| \leq r_0\big(|\mathrm{Im}\,z| + 1\big)\,.$$

Значит,

$$|f_j(z)| \leq C_2 \exp\left\{\frac{\varepsilon_0}{8}\,\omega(z) + r_0|\mathrm{Im}\,z|\right\},\ |z - b_j| \geq 2R_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,, \tag{3.4.8}$$

где $C_2 := \widetilde{A}De^{r_0}$.

Рассмотрим теперь z с $|z - b_j| < 2R_j$. Свойство (1.1.3) веса ω позволяет найти $C_3 > 1$, при котором

$$\Big(p + \frac{5\varepsilon_0}{8}\Big)\omega(z+1) \leq \Big(p + \frac{3\varepsilon_0}{4}\Big)\omega(z) + \ln C_3\,.$$

Из (3.4.4)–(3.4.7) тогда получаем, что

$$|f_j(z)| \leq C_4 \exp\left\{\Big(p + \frac{3\varepsilon_0}{4}\Big)\omega(z) + r_0|\mathrm{Im}\,z|\right\},\ |z - b_j| < 2R_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,, \tag{3.4.9}$$

где $C_4 := C_2C_3$.

Покажем, что для семейства $B := \{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ нарушено условие $(\widetilde{iii})$. Из неравенств (3.4.8), очевидно, вытекает, что $B \subset H^p_{\{\omega\}}[r]$ при всех $r \geq r_0$ (естественно, мы считаем, что $\varepsilon_0 < p$). Далее, из (3.4.3) и (3.4.9) имеем, что

$$|\check{\mu}(z)f_j(z)| \leq C_4 \exp\left\{\Big(p - \frac{\varepsilon_0}{4}\Big)\omega(z) + r_0|\mathrm{Im}\,z|\right\},\ |z - b_j| < 2R_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,,$$

а из (3.4.1) с $\frac{\varepsilon_0}{8}$ вместо ε и (3.4.8) — что

$$|\check{\mu}(z)f_j(z)| \leq C_0 \exp\left\{\frac{\varepsilon_0}{4}\omega(z) + (k + r_0)|\mathrm{Im}\,z|\right\},\ |z - b_j| \geq 2R_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Здесь C_0 — соответствующая константа из (3.4.1).

Таким образом, семейство $\check{\mu}B$ ограничено в $H^p_{\{\omega\}}[R]$ при всех $R \geq r + k$, где $r \geq r_0$. Но при этом, в силу (3.4.5), семейство B не ограничено в $H^p_{\{\omega\}}[r]$, поскольку при всех $l \in (r, \infty)$

$$\|f_j\|_{\omega, 1+\frac{\varepsilon_0}{4}, l} \geq \frac{|f(b_j)|}{\exp\big(p + \frac{\varepsilon_0}{4}\big)\omega(b_j)} \geq \exp\frac{\varepsilon_0}{4}\,\omega(b_j)\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Значит, условие $(\widetilde{iii})$ нарушено. Предложение доказано. □

Прежде чем переходить к импликации $(iv) \Rightarrow (v)$, докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 3.4.1. *Пусть* $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ *удовлетворяет условию* (E_1), $H := 2 + \ln 48e$. *Тогда для любых положительных чисел* ε *и* δ *имеется бесконечная непрерывная кривая* $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{\pm}\big)$, *где* $\Gamma_j^{\pm}$ *— участки верхних полуокружностей* $|z - t_j^{\pm}| = \rho_j^{\pm}$, $t_j^{+} \uparrow +\infty$, $t_j^{-} \downarrow -\infty$, *причем*

$$\rho_j^{\pm} \le 2\delta\omega(t_j^{\pm})\,,\ j \in \mathbb{N}\,; \tag{3.4.10}$$

$$|t_j^{\pm}| \ge (j-1)\delta\,,\ j \in \mathbb{N}\,; \tag{3.4.11}$$

$$|\mu(z)| \le c_0 \exp\big\{-10H\varepsilon\omega(z)\big\}\,,\ z \in \Gamma\,. \tag{3.4.12}$$

Доказательство. Заметим, что в § 1.3 для медленно убывающих символов уже, вообще говоря, устанавливались оценки снизу на окружностях. Однако воспользоваться указанным результатом напрямую не удалось, в связи с чем мы на основании условия (E_1) и теоремы о минимуме модуля аналитической функции (см. лемму 1.3.2) проводим непосредственное построение кривой Γ.

1) Итак, возьмем произвольные достаточно малые $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Будем для удобства предполагать, что $4e\delta k_1 < \varepsilon$, где константа k_1 определяется по ε условием (3.4.2). Пользуясь (E_1), найдем для ε и δ соответствующее r_0. Свойства (γ) и (1.1.3) веса ω позволяют считать, что при всех $t \ge r_0$

$$\ln t < \frac{\varepsilon}{8}\,\omega(t)\,; \quad \omega\big((1+4Ae\delta)t\big) \le 2\omega(t)\,; \quad \omega\big((1-2\delta A)t\big) \ge \frac{\omega(t)}{2}\,. \tag{3.4.13}$$

Здесь, напомним, A — константа из условий (1.1.1) и (1.1.2). Кроме того, будем считать, что $\omega(r_0) \ge 1$.

Возьмем произвольное $x \in \mathbb{R}$ с $|x| \ge r_0$ и на основании (E_1) найдем $t \in \mathbb{R}$ с $|t| > |x|$, для которого выполнены оценки

$$|t - x| \le \delta\omega(x) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \ge e^{-\varepsilon\omega(t)}. \tag{3.4.14}$$

Положим $r := \delta\omega(t)$, $R := 2\delta\omega(t)$. Тогда, в силу уже упоминавшейся выше теоремы о минимуме модуля аналитической функции, имеется $\rho \in (r, R)$ такое, что

$$|\mu(z)| \ge |\mu(t)|^{H+1} \cdot \big(\max_{|\zeta - t| = 2eR} |\mu(\zeta)|\big)^{-H}\,,\ \ |z - t| = \rho\,.$$

Пользуясь (3.4.2), (1.1.1) и (3.4.13), для всех ζ с $|\zeta - t| = 2eR = 4e\delta\omega(t)$ имеем, что

$$|\mu(\zeta)| \le C_1 \exp\Big\{\varepsilon\omega\Big(|t| + 4Ae\delta|t|\Big) + 4e\delta k_1\omega(t)\Big\} \le C_1 \exp\Big\{3\varepsilon\omega(t)\Big\}\,.$$

Применяя данную оценку, а также оценку для $|\mu(t)|$ из (3.4.14), тогда получим, что

$$|\mu(z)| \ge C_1^{-H} \exp\Big\{\Big(-\varepsilon(H+1) - 3H\varepsilon\Big)\omega(t)\Big\} \ge C_1^{-H} \exp\Big\{-5H\varepsilon\omega(t)\Big\}\,.$$

Поскольку для рассматриваемых z

$$\omega(z) \ge \omega\Big(|t| - R\Big) \ge \omega\Big((1 - 2A\delta)t\Big) \ge \frac{1}{2}\,\omega(t)\,, \qquad (3.4.15)$$

то заключаем, что для всех z с $|z - t| = \rho$ выполняется неравенство (3.4.12) с $c_0 := C_1^{-H}$.

2) Перейдем теперь к построению искомой кривой Γ. Положим $x_1^+ := r_0$, $x_1^- := -r_0$ и найдем для этих точек соответствующие окружности $|z - t_1^+| = \rho_1^+$ и $|z - t_1^-| = \rho_1^-$ из пункта 1). При этом $\rho_1^+ \ge \delta\omega(r_0) > |t_1^+ - r_0|$ и аналогично $\rho_1^- > |t_1^- + r_0|$.

Пусть $x_2^+ := t_1^+ + \rho_1^+$, $x_2^- := t_1^- - \rho_1^-$. Для точек x_2^+ и x_2^- найдем окружности $|z - t_2^+| = \rho_2^+$ и $|z - t_2^-| = \rho_2^-$ из пункта 1). По построению эти окружности будут пересекаться с окружностями $|z - t_1^+| = \rho_1^+$ и $|z - t_1^-| = \rho_1^-$, фигурировавшими на предыдущем шаге. Включим в кривую Γ участок верхней полуокружности $|z - t_1^+| = \rho_1^+$ от точки $t_1^+ - \rho_1^+$ до ее пересечения с верхней полуокружностью $|z - t_2^+| = \rho_2^+$. Обозначим его Γ_1^+. Далее, пусть Γ_2^+ — участок верхней полуокружности $|z - t_2^+| = \rho_2^+$ от ее точки пересечения с $|z - t_1^+| = \rho_1^+$ до ее точки пересечения с окружностью $|z - t_3^+| = \rho_3^+$, которая была бы построена на следующем этапе. Аналогичным образом поступаем и с полуокружностями с отрицательными центрами $t_1^-, t_2^-, \ldots$. Соответствующие участки обозначим $\Gamma_1^-, \Gamma_2^-, \ldots$.

Если на интервале $(t_1^- + \rho_1^-, t_1^+ - \rho_1^+)$ нет нулей символа μ, то включим в Γ отрезок $[t_1^- + \rho_1^-, t_1^+ - \rho_1^+]$. Если же нули есть, то обойдем их попарно не пересекающимися верхними полуокружностями. Включим в Γ эти полуокружности и отрезки действительной оси между ними. Обозначим данный участок с левым концом $t_1^- + \rho_1^-$ и правым концом $t_1^+ - \rho_1^+$ через Γ_0. Величина

$|\mu(z)|$ будет ограничена снизу на Γ_0 некоторой положительной константой. Будем для простоты сразу считать, что $|\mu(z)| \geq c_0$, $z \in \Gamma_0$ (при необходимости c_0 можно уменьшить).

Бесконечную непрерывную кривую Γ, всюду на которой выполняется оценка (3.4.12), таким образом построена. Неравенства (3.4.10) также справедливы. Остается проверить справедливость (3.4.11). Имеем, что при $j \geq 2$

$$\begin{aligned} t_j^+ &\geq t_{j-1}^+ + \rho_{j-1}^+ + \delta\omega\big(t_{j-1}^+ + \rho_{j-1}^+\big) \geq \\ &\geq t_{j-1}^+ + \delta\omega(t_{j-1}^+) \geq t_{j-2}^+ + \rho_{j-2}^+ + \delta\omega\big(t_{j-2}^+ + \rho_{j-2}^+\big) + \delta\omega(t_{j-1}^+) \geq \\ &\geq t_{j-2}^+ + 2\delta\omega(t_{j-2}^+) \geq \cdots \geq t_1^+ + (j-1)\omega(t_1^+) \geq (j-1)\delta\,. \end{aligned}$$

Для t_j^- рассуждения проводятся аналогично. □

Замечание. *Из неравенств (3.4.15) вытекает, что*

$$\omega(z) \geq \frac{1}{2}\omega(t_j^\pm) \;\; z \in \Gamma_j^\pm\,,\; j \in \mathbb{N}\,. \tag{3.4.16}$$

Лемма 3.4.2. *Пусть q и l — некоторые положительные константы;*

$$X := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \;:\; \|f\|_X := \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp\big\{q\omega(z) - l|\mathrm{Im}\, z|\big\} < \infty \Big\}\,;$$

$\varepsilon \in \big(0, \frac{q}{20H}\big)$; $\delta \in \big(0, \frac{q}{32(l+1)}\big)$; Γ — кривая, построенная по ε и δ в лемме 3.4.1. Тогда

$$\nu(f) := \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{\mu(z)}\,dz$$

есть линейный непрерывный функционал на X.

Доказательство. Для всех $z \in \Gamma_j^\pm$ на основании (3.4.12), (3.4.16) и (3.4.10) имеем:

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(z)}{\mu(z)}\right| &\leq \frac{\|f\|_X}{c_0} \exp\big\{(-q + 10H\varepsilon)\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z|\big\} \leq \\ &\leq \frac{\|f\|_X}{c_0} \exp\Big\{ -\frac{q}{4}\,\omega(t_j^\pm) + 2\delta l\omega(t_j^\pm)\Big\} \leq \frac{\|f\|_X}{c_0} \exp\Big\{ -\frac{q}{8}\,\omega(t_j^\pm)\Big\}\,. \end{aligned}$$

Из (3.4.12), очевидно, вытекает, что $\rho_j^\pm < 2\delta\omega(t_j^\pm) < \frac{q}{16}\omega(t_j^\pm) < \exp\frac{q}{16}\omega(t_j^\pm)$, а из (3.4.11) и первого неравенства (3.4.13) — что

$$\frac{q}{16}\,\omega(t_j^\pm) \geq \frac{q}{16}\,\omega\big((j-1)\delta\big) \geq \frac{q}{2\varepsilon}\,\ln\big((j-1)\delta\big) \geq 2\ln\big((j-1)\delta\big)\,.$$

Следовательно, для всех $j \geq 2$ имеем, что

$$\left| \int_{\Gamma_j^{\pm}} \frac{f(z)}{\mu(z)}\, dz \right| \leq \frac{\pi \|f\|_X}{c_0} \exp\Big\{ -\frac{q}{16}\, \omega(t_j^{\pm}) \Big\} \leq \frac{\pi \|f\|_X}{c_0 \delta^2 (j-1)^2} .$$

Из этого тривиальным образом следует непрерывность ν на X. □

Теперь мы можем переходить непосредственно к доказательству импликации $(iv) \Rightarrow (v)$.

Предложение 3.4.3. *$(iv) \Rightarrow (v)$.*

Доказательство. Пусть μ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле, а B — некоторое множество в $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ такое, что $T_\mu B$ ограничено в $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. Покажем, что тогда B ограничено в $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Поскольку индуктивный предел $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ является строгим, то при некоторых $q \in (p, \infty)$ и $l > 0$ множество $T_\mu B$ содержится и ограничено в $D_{\omega,q}[-l, l]$. Следовательно, $\operatorname{supp} T_\mu f \subset [-l, l]$ для всех $f \in B$. Как и в классическом случае, из этого следует, что $\operatorname{supp} f \subset [-D, D]$ для всех $f \in B$ при некотором $D > 0$ (см., напр., [65, лемма 1.7]). Далее, ограниченность множества $T_\mu B$ в $D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ влечет ограниченность множества $\widetilde{F} T_\mu B$ в $\widetilde{H}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Последний индуктивный предел также является строгим. Следовательно, увеличив при необходимости D, получаем, что при некоторых $q \in (p, \infty)$ и $M > 0$ справедливы оценки

$$\big|\widehat{T_\mu f}(z)\big| \leq M \exp\big\{ D|\operatorname{Im} z| - q P_\omega(z) \big\}\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ f \in B\,. \tag{3.4.17}$$

Для $f \in B$ и $\xi \in \mathbb{R}$ положим $f_\xi(x) := f(x + \xi)$, $x \in \mathbb{R}$. При всех $j \in \mathbb{N}_0$ имеем следующие простые равенства:

$$\widehat{T_\mu f}(z) = \int_{\mathbb{R}} \langle \psi_\mu, f(x-y) \rangle_y\, e^{-ixz}\, dx = \frac{1}{(-iz)^j} \int_{\mathbb{R}} \langle \psi_\mu, f^{(j)}(x-y) \rangle_y\, e^{-ixz}\, dz =$$
$$= \frac{1}{(-iz)^j} \int_{\mathbb{R}} \langle \psi_\mu, f^{(j)}(t+\xi-y) \rangle_y\, e^{-i(t+\xi)z}\, dz = \frac{1}{(-iz)^j}\, e^{-i\xi z}\, \widehat{T_\mu f_\xi^{(j)}}(z)\,.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q_1 := q - \varepsilon > p$. Тогда на основании (3.4.17) и неравенства $P_\omega(z) \geq \omega(z)$ получаем, что для всех $f \in B$, $\xi \in [-D, D]$, $j \in \mathbb{N}_0$

и $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\left|\widehat{T_\mu f_\xi^{(j)}}(z)\right| &\le M \exp\left\{D|\mathrm{Im}\, z| - qP_\omega(z) + D|\mathrm{Im}\, z| + j\ln|z|\right\} \le \\ &\le M\exp\left\{2D|\mathrm{Im}\, z| - \varepsilon\omega(z) - q_1\omega(z) + j\ln|z|\right\} \le \\ &\le M\exp\left\{2D|\mathrm{Im}\, z| - \varepsilon\omega(z) + q_1 \sup_{\zeta\in\mathbb{C}, |\zeta|\ge 1}\left(\frac{j}{q_1}\ln|\zeta| - \varphi_\omega(\ln|\zeta|)\right)\right\} = \\ &= M\exp\left\{2D|\mathrm{Im}\, z| - \varepsilon\omega(z)\right\}\exp q_1\varphi_\omega^*(j/q_1)\,.\end{aligned}$$

Проведенные оценки означают, что функции $T_\mu f_\xi^{(j)}$, $f \in B$, $\xi \in [-D, D]$, $j \in \mathbb{N}_0$, принадлежат пространству $X(\varepsilon, 2D)$ из леммы 3.4.2, причем

$$\left\|T_\mu f_\xi^{(j)}\right\|_X \le M\exp q_1\varphi_\omega^*(j/q_1)\,.$$

Воспользовавшись леммой 3.4.2, тогда заключаем, что

$$\left|\nu\big(T_\mu f_\xi^{(j)}\big)\right| \le \|\nu\| M\exp q_1\varphi_\omega^*(j/q_1)\,. \tag{3.4.18}$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что $\widehat{T_\mu\varphi}(z) = \widehat{\varphi}(z)\mu(z)$ для $\varphi \in D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и $z \in \mathbb{C}$. Поэтому, если $\widehat{T_\mu\varphi}$ принадлежит какому-нибудь пространству X, за счет формулы обращения Фурье получаем, что

$$\nu\big(\widehat{T_\mu\varphi}\big) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\widehat{\varphi}(z)\mu(z)}{\mu(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(z)\,dz = \varphi(0)\,.$$

Следовательно, $\nu\big(\widehat{T_\mu f_\xi^{(j)}}\big) = f^{(j)}(\xi)$. Возвращаясь к (3.4.18), таким образом имеем, что

$$|f^{(j)}(\xi)| \le M_1\exp q_1\varphi_\omega^*(j/q_1)\,,\ j\in\mathbb{N}_0\,,\ \xi\in[-D,D]\,,\ f\in B\,.$$

Это означает, что семейство B ограничено в $D_{\omega,q_1}[-D, D]$. Предложение доказано. □

Импликация $(v) \Rightarrow (i)$ вытекает из [65, предложение 1.11]. Действительно, так как $\check{\psi}_\mu = F^{-1}(\check{\mu})$ и так как для всех $\varphi \in D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и $\nu \in \big(D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})\big)'$

$$\langle S_\mu\nu, \varphi\rangle = \langle \nu, \check{\psi}_\mu * \varphi\rangle = \langle \nu, \psi_{\check{\mu}} * \varphi\rangle = \langle \nu, T_{\check{\mu}}\varphi\rangle\,,$$

то $S_\mu = \Big(T_{\check{\mu}}|_{D^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})}\Big)^t$. Далее применяем указанный результат из [65].

Таким образом, теорема 3.4.1 полностью доказана.

3.5 Критерий сюръективности оператора свертки в пространстве Румье УДФ нормального типа

Главная цель параграфа — установить критерий сюръективности оператора свертки T_μ в пространстве Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа. Для этого используется полученный в предыдущем параграфе критерий локальной сюръективности, теория проективных спектров Паламодова-Фогта [39, 98] и изоморфное описание $\ker T_\mu$ в виде пространства числовых последовательностей из § 3.3.

Будет доказан следующий результат.

Теорема 3.5.1. *Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Для сюръективности оператора свертки T_μ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

(I) μ медленно убывает относительно ω в нормальном смысле (т. е. удовлетворяет условиям (D_1), (E_1) и (F_1) теоремы 1.3.1);

(II) нулевое множество $N(\mu)$ символа μ допускает представление $N(\mu) = N_1 \bigcup N_2$ такое, что

$$\lim_{j\to\infty,\lambda_j\in N_1} \frac{|\operatorname{Im}\lambda_j|}{\omega(\operatorname{Re}\lambda_j)} = 0\,; \quad \liminf_{j\to\infty,\lambda_j\in N_2} \frac{|\operatorname{Im}\lambda_j|}{\omega(\operatorname{Re}\lambda_j)} > 0\,. \tag{3.5.1}$$

Замечание. *Условие (II) означает, что множество частичных пределов последовательности $\left(\frac{|\operatorname{Im}\lambda_j|}{\omega(\operatorname{Re}\lambda_j)}\right)_{j=1}^\infty$ содержится в $\{0\}\bigcup[\delta,+\infty]$ при некотором $\delta > 0$. При этом на самом деле в (II), конечно, должны фигурировать нули функции $\check{\mu}$. Однако, поскольку данное условие инвариантно относительно перехода от λ_j к $-\lambda_j$, мы сформулировали его в таком виде.*

Приведем в соответствии с [?] базовые понятия, касающиеся проективных спектров.

Определение 3.5.1. *Проективным спектром называется последовательность $X = (X_n, i^n_{n+1})_{n=1}^\infty$ линейных пространств X_n и линейных отображений $i^n_{n+1} : X_{n+1} \to X_n$.*

Для проективного спектра $X = (X_n, i^n_{n+1})_{n=1}^\infty$ положим

$$B(X) := \left\{(a_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty X_n |\ \exists (b_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty X_n\ :\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ a_n = i^n_{n+1}(b_{n+1}) - b_n\right\}.$$

Со спектром X связываются два следующих линейных пространства

$$\mathrm{Proj}^0 X := \Big\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \,:\, \forall n \in \mathbb{N} \quad i_{n+1}^n(x_{n+1}) = x_n \Big\},$$

$$\mathrm{Proj}^1 X := \Big(\prod_{n=1}^{\infty} X_n \Big) / B(X).$$

Введем обозначения

$$i_n^n := \mathrm{id}_{X_n}\,; \quad i_m^n := i_{n+1}^n \circ \cdots \circ i_m^{m-1}\,, \ m > n\,,$$

и сформулируем следующее определение.

Определение 3.5.2. *Отображением проективного спектра* $X = (X_n, i_{n+1}^n)_{n=1}^{\infty}$ *в проективный спектр* $Y := (Y_n, j_{n+1}^n)_{n=1}^{\infty}$ *называется последовательность* $\Phi = \big(\varphi_{k(n)}^n\big)_{n=1}^{\infty}$ *линейных отображений* $\varphi_{k(n)}^n : X_{k(n)} \to Y_n$*, для которых при всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$k(n) \le k(n+1) \quad \text{и} \quad \varphi_{k(n)}^n \circ i_{k(n+1)}^{k(n)} = j_{n+1}^n \circ \varphi_{k(n+1)}^{n+1}\,.$$

При $m \ge k(n)$ *для удобства полагают* $\varphi_m^n := \varphi_{k(n)}^n \circ i_m^{k(n)}$.

Отображение Φ спектра X в спектр Y индуцирует отображение $\Phi^0 : \mathrm{Proj}^0 X \to \mathrm{Proj}^0 Y$, действующее по правилу:

$$\Phi^0 : x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Proj}^0 X \mapsto \big(\varphi_{k(n)}^n x_{k(n)}\big)_{n=1}^{\infty}\,.$$

Определение 3.5.3. *Два отображения* $\Phi = \big(\varphi_{k(n)}^n\big)_{n=1}^{\infty}$ *и* $\widetilde{\Phi} = \big(\widetilde{\varphi}_{l(n)}^n\big)_{n=1}^{\infty}$ *проективного спектра* $X = (X_n, i_{n+1}^n)_{n=1}^{\infty}$ *в проективный спектр* $Y := (Y_n, j_{n+1}^n)_{n=1}^{\infty}$ *называются эквивалентными, если для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *найдется* $m(n) \ge \max\{k(n), l(n)\}$ *такое, что* $\varphi_{m(n)}^n = \widetilde{\varphi}_{m(n)}^n$.

Определение 3.5.4. *Пусть* X, Y, Z *— проективные спектры;* $\Phi = \big(\varphi_{k(n)}^n\big)_{n=1}^{\infty}$ *— отображение из* X *в* Y*;* $\Psi = \big(\psi_{l(n)}^n\big)_{n=1}^{\infty}$ *— отображение из* Y *в* Z*. Композиция* $\Psi \circ \Phi$*, действующая из* X *в* Z*, определяется по правилу:*

$$\Psi \circ \Phi = \Big(\psi_{l(n)}^n \circ \varphi_{k(l(n))}^{l(n)} \Big)_{n=1}^{\infty}.$$

Определение 3.5.5. *Отображение* Φ*, действующее из спектра* X *в спектр* Y*, называется отображением эквивалентности, если существует отображение* $\Phi^{-1} : Y \to X$ *такое, что* $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}_X$ *и* $\Phi \circ \Phi^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

Определение 3.5.6. *Два спектра X и Y называются эквивалентными, если существует отображение эквивалентности $\Phi : X \to Y$.*

Определение 3.5.7. *Если $X = (X_n, i^n_{n+1})^\infty_{n=1}$ — проективный спектр, причем все X_n являются локально выпуклыми пространствами, то под проективным пределом, порождаемым спектром X, понимается пространство $\mathrm{Proj}^0 X$ с топологией проективного предела относительно отображений $i_n : x = (x_s)^\infty_{s=1} \mapsto x_n$. Если при этом $\overline{i_n(\mathrm{Proj}^0 X)} = X_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то спектр X называется приведенным.*

Свяжем с пространством $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и оператором свертки T_μ в нем некоторый проективный спектр $\mathbb{E}^p_{\{\omega\}}$ и отображение $\mathbb{T}_\mu$ этого проективного спектра в себя. Спектр $\mathbb{E}^p_{\{\omega\}}$ образуется из факторпространств $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$, $n \in \mathbb{N}$, и отображений $i^n_{n+1} : \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n+1] \to \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$, действующих по правилу: $i^n_{n+1}(q_{n+1}f) = q_n f$, $f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. Здесь q_n — факторотображение из $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$:

$$q_n : \ f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \mapsto \left[f + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(n)\right] \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n] \,.$$

Заметим, что отображение

$$Q : f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \mapsto \Big(\left[f + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(n)\right]\Big)^\infty_{n=1} \in \prod^\infty_{n=1} \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$$

есть линейное взаимно однозначное отображение $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ на $\mathrm{Proj}^0\mathbb{E}^p_{\{\omega\}}$. Кроме того, нетрудно проверить, что

$$\mathrm{Proj}^1\mathbb{E}^p_{\{\omega\}} = 0. \tag{3.5.2}$$

Пусть $T_\mu(n+k, n) : \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n+k] \to \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$, $n \in \mathbb{N}$, — локализованные операторы свертки, которые были введены в § 3.4. Здесь, напомним, $k \in \mathbb{N}$ таково, что $\mathrm{supp}\, \psi_\mu \in (-k, k)$. Положим

$$\mathbb{T}_\mu := \big(T_\mu(n+k, n)\big)^\infty_{n=1} \,.$$

Тогда $\mathbb{T}_\mu$ — отображение проективного спектра $\mathbb{E}^p_{\{\omega\}}$ в себя. Соответствующее отображение $\mathbb{T}^0_\mu$, действующее в $\mathrm{Proj}^0\mathbb{E}^p_{\{\omega\}}$, очевидным образом может быть отождествлено с T_μ, действующим в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Введем еще один проективный спектр $\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu) := \left(K_n, \tau^n_{n+1}\right)^\infty_{n=1}$, связанный с оператором T_μ. Именно, положим

$$K_n := \begin{cases} 0\,,\ 1 \le n \le k\,; \\ \left\{[f] \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n] : T_\mu(n, n-k)[f] = 0\right\}\,,\ n > k\,; \end{cases}$$

$$\tau^n_{n+1} := \begin{cases} 0\,,\ 1 \le n \le k\,; \\ i^n_{n+1}|_{K_n}\,,\ n > k\,. \end{cases}$$

Отображения вложения $j^n_n : K_n \to \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$, $n \in \mathbb{N}$, образуют отображение $\mathbb{J}$ спектра $\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)$ в спектр $\mathbb{E}^p_{\{\omega\}}$.

Заметим еще сразу, что $\mathrm{Proj}^0\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)$ естественным образом отождествляется с $\ker T_\mu$.

Основополагающим для доказательства основного результата является следующее предложение.

Предложение 3.5.1. *Пусть* $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$; $p \in (0, \infty)$; T_μ *локально сюръективен на* $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. *Для сюръективности* T_μ *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Proj}^1\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu) = 0$.

Доказательство. Из локальной сюръективности T_μ вытекает, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ последовательность

$$0 \longrightarrow K_{n+k} \xrightarrow{j^{n+k}_{n+k}} \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n+k] \xrightarrow{T_\mu(n+k,n)} \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n] \longrightarrow 0$$

является точной. Соответственно, точной будет последовательность проективных спектров

$$0 \longrightarrow \mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu) \xrightarrow{\mathbb{J}} \mathbb{E}^p_{\{\omega\}} \xrightarrow{\mathbb{T}_\mu} \mathbb{E}^p_{\{\omega\}} \longrightarrow 0\,.$$

Она порождает точную последовательность проективных пределов

$$0 \longrightarrow \mathrm{Proj}^0\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu) \xrightarrow{\mathbb{J}^0} \mathrm{Proj}^0\mathbb{E}^p_{\{\omega\}} \xrightarrow{\mathbb{T}^0_\mu} \mathrm{Proj}^0\mathbb{E}^p_{\{\omega\}} \longrightarrow 0\,.$$

Поскольку, как уже отмечалось выше, $\mathrm{Proj}^1\mathbb{E}^p_{\{\omega\}} = 0$, то, в силу [98, теорема 5.1], имеем, что сюръективность $\mathbb{T}^0_\mu$ эквивалентна условию $\mathrm{Proj}^1\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu) = 0$. Учитывая, что $\mathbb{T}^0_\mu$ может быть отождествлен с $T_\mu : \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, получаем нужное. $\square$

Итак, доказательство теоремы 3.5.1 сводится теперь к доказательству эквивалентности условия $\mathrm{Proj}^1\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)=0$ и условия (II). Это делается за счет перехода от спектра $\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)$ к спектру $\Lambda(\alpha,\beta)$, порождаемому пространством числовых последовательностей

$$\lambda_0^p := \Big\{x=(x_s)_{s=1}^\infty\subset\mathbb{C}\,|\,\forall l\in(0,\infty)\ \ \exists q\in(p,\infty)\ : \\ \|x\|_{\omega,q,l}:=\sum_{s=1}^\infty |x_s|\exp\big(q\alpha_s+l\beta_s\big)<\infty\Big\}\,.$$

В соответствии с теоремой 3.3.2 данное пространство изоморфно $\ker T_\mu$.

Напомним, что числовые последовательности $(\alpha_s)_{s=1}^\infty$ и $(\beta_s)_{s=1}^\infty$ получались из последовательностей $\big(\omega(\mathrm{Re}\,z_j)\big)_{j=1}^\infty$ и $\big(|\mathrm{Im}\,z_j|\big)_{j=1}^\infty$ повторением m_j раз элемента $\omega(\mathrm{Re}\,z_j)$ и, соответственно, $|\mathrm{Im}\,z_j|$. Здесь z_j — выбранная специальным образом точка из множества U_j, $j\in\mathbb{N}$, где $(U_j)_{j=1}^\infty$ — построенное в § 2.2 открытое покрытие нулевого множества $N(\check\mu)=(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ функции $\check\mu$ при условии медленного убывания μ; k_s — кратность нуля λ_s; $m_j:=\sum_{\lambda_s\in U_j}k_s$ — суммарное количество нулей символа, попавших в множество U_j.

Заметим, что лемма 2.2.3 позволяет заменить в определении пространства λ_0^p описанные выше последовательности $(\alpha_s)_{s=1}^\infty$ и $(\beta_s)_{s=1}^\infty$ на последовательности, полученные из $\big(\omega(\mathrm{Re}\,\lambda_s)\big)_{s=1}^\infty$ и $\big(|\mathrm{Im}\,\lambda_s|\big)_{s=1}^\infty$ повторением k_s раз элемента $\omega(\mathrm{Re}\,\lambda_s)$ или $|\mathrm{Im}\,\lambda_s|$.

Введем проективный спектр $\Lambda(\alpha,\beta)=(\Lambda_n,s^n_{n+1})_{n=1}^\infty$, порождаемый пространством λ_0^p. Для этого положим

$$\Lambda_n:=\Big\{x=(x_s)_{s=1}^\infty\subset\mathbb{C}\,|\,\exists q\in(p,\infty)\ :\ \|x\|_{\omega,q,n}<\infty\Big\}\,;$$

$$s^n_{n+1}:\Lambda_{n+1}\to\Lambda_n\,,\ s^n_{n+1}x:=x\,.$$

Очевидно, что $\mathrm{Proj}^0\Lambda(\alpha,\beta)$ можно отождествить с $\lambda_0^p\simeq\ker T_\mu$.

Следующий основной момент доказательства — доказать эквивалентность спектров $\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)$ и $\Lambda(\alpha,\beta)$. Из этого на основании [98, следствие 1.2] будет вытекать, что $\mathrm{Proj}^1\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)\simeq\mathrm{Proj}^1\Lambda(\alpha,\beta)$. А далее можно будет воспользоваться теоремой 4.3 из [98], в силу которой $\mathrm{Proj}^1\Lambda(\alpha,\beta)=0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (II) теоремы 3.5.1.

Однако на этом пути имеется определенная трудность, связанная с тем, что имеющийся изоморфизм

$$\mathrm{Proj}^0\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu) \simeq \ker T_\mu \simeq \mathrm{Proj}^0\Lambda(\alpha,\beta)$$

обеспечивал бы эквивалентность спектров $\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)$ и $\Lambda(\alpha,\beta)$ только при условии приведенности обоих этих спектров (см. [98, следствие 5.3]). И если приведенность спектра $\Lambda(\alpha,\beta)$ достаточно понятна, то для $\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)$ все не так просто. Пожалуй, относительно легко было бы сделать вывод о слабой приведенности $\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)$, но данного факта в любом случае недостаточно, так что мы не будем здесь на этом останавливаться.

В связи с вышеизложенным мы вынуждены построить дополнительный приведенный спектр X, который будет эквивалентен $\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)$. Именно, пусть q_n — введенное выше факторотображение из $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$, $n \in \mathbb{N}$. Через X_n обозначим замыкание в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$ образа $q_n(\ker T_\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Естественно, $X_n \subset \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$, $n \in \mathbb{N}$. Далее, если сузить отображение $i^n_{n+1} : \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n+1] \to \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$ на множество X_{n+1}, то оно будет действовать в X_n. Таким образом, введен проективный спектр $X = \big(X_n, i^n_{n+1}|_{X_{n+1}}\big)_{n=1}^\infty$.

Приведенность спектра X вытекает из самого определения множеств X_n. Действительно, если взять класс $[f] \in X_n$, то он может быть приближен в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[n]$ классами $[g + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(n)]$, где $g \in \ker T_\mu$. Поскольку $\big([g + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(n)]\big)_{n=1}^\infty \in \mathrm{Proj}^0 X$ и поскольку $i_n\Big(\big([g + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(s)]\big)_{s=1}^\infty\Big) = [g + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(n)]$, то получаем, что $\mathrm{Proj}^0 X$ плотно в X_n.

Лемма 3.5.1. *Спектры $\mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu)$ и X эквивалентны.*

Доказательство. Так как $X_n \subset K_n$ при всех $n > k$, то остается показать, что

$$\forall l \in \mathbb{N}\ (l > k)\ \ \exists n(l) \in \mathbb{N}\ (n(l) > n(l-1))\ :\ \ i^l_{n(l)}(K_{n(l)}) \subset X_l\,.$$

Зафиксируем $l \in \mathbb{N}$, $l > k$. Пусть $n(l)$ такое же, как в [65, доказательство леммы 3.6]. Возьмем произвольный класс $\big[f + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(n(l))\big] \in K_{n(l)}$, $f \in \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$. Поскольку $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, то можно воспользоваться уже проведенными в [65] рассуждениями. Именно, в указанной работе в доказательстве леммы 3.6 было показано, что функцию f можно приблизить в пространстве $\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(-l,l)$

функциями $g \in \ker T_\mu \bigcap \mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Так как $\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ и так как сходимость в $\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(-l,l)$ влечет сходимость в $\mathcal{E}^\infty_{\{\omega\}}(-l,l)$, то получаем, что соответствующие классы $[g + \mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(l)]$ будут приближать $[f]$ в $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}[l]$. Из этого вытекает, что $[f] \in X_l$. □

Из [98, следствие 1.2] тогда получаем, что

$$\mathrm{Proj}^0 X \simeq \mathrm{Proj}^0 \mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu) \simeq \ker T_\mu\,.$$

Следовательно, $\mathrm{Proj}^0 X \simeq \mathrm{Proj}^0 \Lambda(\alpha,\beta)$. Поскольку оба данных спектра являются приведенными, то, в силу [98, следствие 5.3], $X \simeq \Lambda(\alpha,\beta)$. Из этого на основании [98, следствие 1.2] и [98, теорема 4.3] получаем следующий результат.

Предложение 3.5.2. *Условие* $\mathrm{Proj}^1 \mathbb{K}^p_{\{\omega\}}(\mu) = 0$ *эквивалентно условию* $\mathrm{Proj}^1 \Lambda(\alpha,\beta) = 0$*, а также условию* (II) *теоремы 3.5.1.*

Тем самым теорема 3.5.1 полностью доказана, т. е. установлен критерий сюръективности оператора свертки T_μ в пространстве Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа $p \in (0,\infty)$.

3.6 Сравнение критериев сюръективности и примеры

Начнем с примеров сюръективных и несюръективных операторов свертки T_μ в пространствах Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ нормального типа.

Естественно, любой символ $\mu \in M^1_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ с чисто вещественными нулями, медленно убывающий относительно ω в нормальном смысле, будет порождать сюръективный оператор свертки T_μ в пространстве $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$, $p \in (0,\infty)$. В частности, перечисленным условиям удовлетворяют символы μ из примеров 1.5.1–1.5.3 главы 1. Соответственно, порождаемые этими символами уравнения свертки разрешимы в пространстве Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ нормального типа (для рассматриваемых в примерах 1.5.1–1.5.3 весов).

Далее, в примере 1.5.4 для веса $\omega(t) = t^\rho$, $\rho \in (0,1)$, был построен символ μ, также имеющий только вещественные нули и являющийся сильным мультипликатором пространств $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — а значит, и пространств $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ — который не удовлетворяет условиям (D_1), (E_1) и (F_1).

Следовательно, порождаемый им оператор свертки T_μ не сюръективен на пространстве Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ (и даже не локально сюръективен).

Отдельный интерес представляют собой веса $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок, и символы μ, заданные своими простыми нулями по формуле (1.5.9). В примере 1.5.5 были приведены достаточно простые условия на нули, при которых рассматриваемые символы являются сильными мультипликаторами пространств $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — а значит, и пространств $H^p_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ — и удовлетворяют условиям (E_1), (D_1) и (F_1). При этом операторы свертки T_μ, порождаемые данными символами будут сюръективны на всех пространствах Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ нормального типа.

Однако, если рассмотреть эти же операторы свертки в пространствах Румье $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ нормального типа, то они могут быть как сюръективными, так и не сюръективными: именно, расположением нулей можно легко добиться как выполнения (II), так и его нарушения. Например, если углы, в которых находятся нули, заключены в секторах $\big\{z \in \mathbb{C} : \delta < \arg z < \pi - \delta\,,\ \pi + \delta < \arg z < 2\pi - \delta\big\}$, то условие (II) выполнено. Либо, наоборот, можно взять нули по одному на каждой кривой $\{x + i\delta_n\omega(x) : x \geq 0\}$, где $\delta_n \downarrow 0$, и тогда (II) также будет выполнено. Допустимо, естественно, совместить эти два вида расположения нулей. Во всех перечисленных ситуациях оператор T_μ будет сюръективен на $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

Если же на каждой такой кривой $\{x + i\delta_n\omega(x) : x \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, расположить бесконечно много нулей λ_k так, чтобы были выполнены приведенные выше ограничения, то (II) будет нарушено и соответствующий оператор свертки не сюръективен на $\mathcal{E}^p_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

В заключение параграфа и главы приведем некоторые замечания, касающиеся всех имеющихся критериев сюръективности операторов свертки в пространствах Берлинга и Румье УДФ на числовой прямой, поскольку установленный в § 3.5 критерий (теорема 3.5.1) в определенной степени завершает исследования в этом направлении.

Во-первых, случай пространств Румье принципиально отличается от случая пространств Берлинга как по методам исследования, так и по установленным результатам. Именно, в пространствах Берлинга для решения задачи о сюръективности оператора T_μ нет необходимости разделять неквазианалитические и квазианалитические веса и привлекать оператор S_μ: критерий получается за счет применения теории двойственности для всех весов одновременно. При этом необходимым и достаточным условием сюръективности операторов свертки в пространствах Берлинга нормального типа является одно условие (D_1) медленного убывания символа относительно весовой функции, задающей пространство. Кроме того, в случае пространств Румье решение задачи о сюръективности невозможно без изоморфного описания ядра оператора свертки в то время как в случае пространств Берлинга эти задачи являются совершенно независимыми.

Далее, представляется интересным, на наш взгляд, что, хотя в соответствии со шкалой пространств (3.2.1) пространство Румье $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ очень плотно зажато между пространствами Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R})$, $0 < q < p$, критерии сюръективности в пространствах Берлинга и Румье нормального типа разные. Это обстоятельство говорит также о том, что оба вложения

$$\bigcup_{p\in(q,\infty)} \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R})$$

являются строгими. Доказать данный факт непосредственно, т. е. привести пример соответствующей функции, будет, по нашему мнению, достаточно непросто.

Другим интересным обстоятельством является то, что критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Румье нормального и минимального типов в итоге совпали, в то время как в пространствах Берлинга нормального и максимального типов эти критерии различны. С нашей точки зрения, это связано со значительным сужением в шкале пространств (3.2.1) при переходе к $\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})$ (и с принципиальным расширением $H^\infty_{(\omega)}(\mathbb{C})$).

Именно, самое широкое пространство $H^\infty_{(\omega)}(\mathbb{C})$ в (3.2.3), равно как и самое узкое пространство $H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, являются алгебрами относительно операции поточечного умножения функций. Это означает, что символами операторов свертки в $\mathcal{E}^\infty_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}^0_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ будут все функции из $H^\infty_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $H^0_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, т. е. целые функции μ, удовлетворяющие соответственно условиям

$$\exists l > 0 \;\; \exists C > 0 : \quad |\mu(z)| \le C \exp\left\{l\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z|\right\}, \; z \in \mathbb{C};$$
$$\exists l > 0 \,|\, \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists C > 0 : \quad |\mu(z)| \le C \exp\left\{\varepsilon\omega(z) + l|\mathrm{Im}\, z|\right\}, \; z \in \mathbb{C}\,.$$

Нетрудно видеть, что оценки на функции в $H^{\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ значительно слабее оценок в $H^{0}_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$, так что $H^{\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ шире, чем $H^{0}_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Оценки снизу на символ, фигурирующие в критериях сюръективности, естественным образом коррелируют с априорными оценками сверху. Именно, в пространствах $\mathcal{E}^{0}_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ Румье минимального типа условие медленного убывания совпадает с нашим условием (E_1) (см. [65]), в то время как в пространствах $\mathcal{E}^{\infty}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ Берлинга максимального типа соответствующее условие значительно слабее (см. [86]).

При $0 < p < \infty$ пространства $H^{p}_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ и $H^{p}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ алгебрами уже не являются. Множества $M^{1}_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$ и $M^{1}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ их мультипликаторов описаны в § 1.1 и § 3.2. При этом в случае неквазианалитических весов $M^{1}_{(\omega)}(\mathbb{C}) = M^{1}_{\{\omega\}}(\mathbb{C}) = H^{0}_{\{\omega\}}(\mathbb{C})$. Таким образом, символы операторов свертки во всех неквазианалитических пространствах Румье нормального и минимального типов и пространствах Берлинга нормального типа, порождаемых весом ω, будут одними и теми же. Это обстоятельство в определенной степени объясняет совпадение критерия сюръективности в пространствах $\mathcal{E}^{p}_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$ нормального типа $p \in (0, \infty)$ с аналогичным критерием в $\mathcal{E}^{0}_{\{\omega\}}(\mathbb{R})$.

ГЛАВА 4
ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРАВЫЕ ОБРАТНЫЕ К ОПЕРАТОРАМ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УДФ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

4.1 ЛНПО к оператору свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$

Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $a \in (0,\infty)$; $I = (-a,a)$ — заданный конечный интервал в $\mathbb{R}$. Далее, пусть μ — делитель пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, т. е. целая функция из $M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$, удовлетворяющая условиям (D_2), (E_2), (F_2) теоремы 1.3.2. Тогда порождаемый ею оператор свертки T_μ сюръективен на пространстве Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$, и, значит, уравнение свертки

$$T_\mu f = g \tag{4.1.1}$$

имеет решение в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

В настоящем параграфе решается вопрос о существовании линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) к оператору T_μ, т. е. о том, при каких условиях на символ μ уравнение 4.1.1 имеет решение, линейно и непрерывно зависящее от правой части g. Данная задача естественным образом связана с проблемой дополнимости главного идеала $J = \check{\mu}H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, порождаемого функцией $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, в сопряженном пространстве $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Центральным результатом параграфа является следующая теорема.

Теорема 4.1.1. *Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $a \in (0,\infty)$; $I = (-a,a)$; $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; T_μ — оператор свертки с символом μ в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$; $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — последовательность нулей символа μ. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) T_μ имеет ЛНПО;

(ii) ядро $\ker T_\mu$ оператора T_μ дополнимо в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$;

(iii) главный идеал $J = \operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}} = \check{\mu}H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ дополним в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$;

(iv) $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{|\operatorname{Im}\lambda_s|}{\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)} = 0.$

Замечание 4.1.1. *Заметим, во-первых, что мы не рассматриваем случай конечного числа нулей символа μ, поскольку в этом случае ядро $\ker T_\mu$ конечномерно, а значит, дополнимо в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Кроме того, в условии (iv), конечно, на самом деле по смыслу должны фигурировать нули функции $\check{\mu}$. Однако, поскольку нулями $\check{\mu}$ являются точки $-\lambda_s$ и поскольку условие (iv) не меняет свой вид при переходе от $-\lambda_s$ к λ_s, мы сформулировали его через нули самого символа μ.*

Замечание 4.1.2. *На основании свойств веса ω легко проверяется, что условие (iv) эквивалентно условию*

$$\widetilde{(iv)} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_s|}{\omega(\lambda_s)} = 0\,.$$

Начнем с функционального критерия наличия ЛНПО для T_μ. Общий критерий существования ЛНПО или, соответственно, ЛНЛО для линейного непрерывного оператора можно найти в [14, Гл. 1, § 1, предложения 13,14]. Именно, если E, F — топологические векторные пространства и $A : E \to F$ — линейное непрерывное сюръективное отображение, то A имеет ЛНПО в том и только в том случае, когда A открыто и ядро $\ker A$ оператора A дополнимо в E. Соответственно, если $B : E \to F$ — линейный непрерывный инъективный оператор, то B имеет ЛНЛО тогда и только тогда, когда отображение B открыто и образ $\operatorname{Im} B$ дополним в F. Естественно, имеется двойственная связь между наличием ЛНПО и ЛНЛО: для того чтобы линейный непрерывный сюръективный оператор $A : E \to F$ имел ЛНПО, необходимо и достаточно, чтобы сопряженный оператор $A' : F' \to E'$ имел ЛНЛО.

Таким образом, как видно из приведенных результатов, вопрос о существовании ЛНПО или ЛНЛО неразрывно связан с возможностью применения теоремы об открытом отображении. В случае пространств Берлинга этот аспект трудностей не представляет, поскольку $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ — (FS)-пространство, а $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — (DFS)-пространство. Следовательно, наличие ЛНПО к оператору T_μ эквивалентно дополнимости ядра $\ker T_\mu$ в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$, а также дополнимости главного идеала $J = \operatorname{Im} \Lambda_{\check{\mu}}$ в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Напомним еще, что в § 2.1 было построено специальное открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^\infty$ нулевого множества $N(\check{\mu})$ функции $\check{\mu}$ и было показано (см. предложение 2.1.2), что отображение

$$\rho : [f] \in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J \mapsto \big([f|_{U_j}]\big)_{j=1}^{\infty}$$

устанавливает топологический изоморфизм между $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ и $k^{p,a}$. Напомним, что

$$k^{p,a} = \Big\{\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in X \mid \exists q \in (0,p)\,,\ \exists l \in (0,a)\ :\\ \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} = \sup_{j\geq 1} \frac{|||\,[\varphi_j]|||_{\infty,j}}{\exp\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\}} < \infty\Big\}.$$

Здесь z_j — выбранная определенным образом точка из U_j, $j \in \mathbb{N}$ (см. § 2.1); $H^{\infty}(U_j)$ — пространство всех ограниченных аналитических функций в U_j; $J_j = \big\{g \in H^{\infty}(U_j)\ :\ g^{(l)}(\lambda_s) = 0\,,\ l = 0,\dots,k_s - 1\,,\ \lambda_s \in U_j\big\}$; $X_j := H^{\infty}(U_j)/J_j$; $X := \prod_{j=1}^{\infty} X_j$.

Очевидно, из сказанного вытекает, что отображение

$$\widetilde{\rho} : f \in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \mapsto \big([f|_{U_j}]\big)_{j=1}^{\infty}$$

является линейным непрерывным сюръективным отображением $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ на $k^{p,a}$. При этом $\ker\widetilde{\rho} = J$, так что $\widetilde{\rho}$ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда J дополнимо в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

Таким образом, мы можем сформулировать следующий функциональный критерий наличия ЛНПО для оператора T_μ. Заметим, что на данном этапе нет необходимости предполагать неквазианалитичность веса ω.

Теорема 4.1.2. *Пусть ω — произвольная весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $a \in (0,\infty)$; $I = (-a,a)$; $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; T_μ — оператор свертки с символом μ в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i_1) *оператор свертки T_μ имеет ЛНПО;*

(i_2) *ядро $\ker T_\mu$ дополнимо в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$;*

(i_3) *оператор умножения $\Lambda_{\check{\mu}}$ имеет ЛНЛО;*

(i_4) *главный идеал $J = \operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}$ дополним в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$;*

(i_5) *оператор $\widetilde{\rho}$ допускает ЛНПО.*

На основании функционального критерия доказываются необходимые и достаточные условия наличия ЛНПО у оператора T_μ в терминах семейств целых и субгармонических функций.

Предложение 4.1.1. *Пусть ω — произвольная весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $a \in (0,\infty)$; $I = (-a,a)$; $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — последовательность нулей функции $\check{\mu}$. Если оператор T_μ допускает ЛНПО, то в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ имеется семейство функций $(g_s)_{s=1}^\infty$ такое, что $g_s(\lambda_s) = 1$ и*

$$(A)\ \ \forall q \in (0,p)\ \ \forall l \in (0,a)\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists C > 0 :\ \ \forall s \in \mathbb{N}\ \ \forall z \in \mathbb{C}$$
$$\ln|g_s(z)| + \big(q\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + l|\operatorname{Im}\lambda_s|\big) \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C\,. \tag{4.1.2}$$

Доказательство. В силу теоремы 4.1.2, оператор $\widetilde{\rho}$ имеет ЛНПО $L : k^{p,a} \to H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. В пространстве $k^{p,a}$ рассмотрим элементы

$$\varphi^j = \big([0], \ldots, [0], \underset{j}{[1]}, [0], \ldots\big)\,.$$

Нетрудно видеть, что $|||\,[1]|||_{\infty,j} = 1$ в X_j, так что в $k^{p,a}$

$$\widetilde{|\varphi^j|}_{\omega,q,l} = e^{-q\omega(\operatorname{Re} z_j) - l|\operatorname{Im} z_j|}\,,\ q \in (0,p)\,,\ l \in (0,a)\,.$$

Обозначим $f^j := L(\varphi^j)$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $f^j \in H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $f^j(\lambda_s) = 1$ для всех $\lambda_s \in U_j$. Далее, поскольку $k^{p,a}$ и $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — (DFS)-пространства и L непрерывно действует из $k^{p,a}$ в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то для произвольных $q \in (0,p)$, $l \in (0,a)$ и $\varepsilon > 0$ найдется $C_1 > 0$, при котором

$$\|L\varphi\|_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \le C_1\,\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}\,,\ \varphi \in k^{p,a}\,.$$

Следовательно, при всех $z \in \mathbb{C}$

$$\ln|f^j(z)| \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z| - \big(q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\big) + \ln C_1\,. \tag{4.1.3}$$

В силу леммы 2.1.3, существует $C_2 > 0$ такое, что при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\lambda_s \in U_j$

$$q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \ge (q-\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + (l-\varepsilon)|\operatorname{Im}\lambda_s| - C_2\,.$$

Возвращаясь к (4.1.3) и полагая $C := \ln C_1 + C_2$, имеем:

$$\ln|f^j(z)| \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z| - \big((q-\varepsilon)\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + (l-\varepsilon)|\operatorname{Im}\lambda_s|\big) + C\,.$$

Взяв $g_s(z) = f^j(z)$ для всех номеров s, при которых $\lambda_s \in U_j$, получим требуемое утверждение. $\square$

Предложение 4.1.2. *Пусть* μ *и* $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ *те же, что в предложении 4.1.1. Если имеется семейство* $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ *субгармонических в* $\mathbb{C}$ *функций такое, что* $u_j\big|_{U_j} \geq 0$ *и*

$$(B)\ \ \forall q \in (0,p)\ \ \forall l \in (0,a)\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists C > 0:\ \forall j \in \mathbb{N}\ \ \forall z \in \mathbb{C}$$
$$u_j(z) + \big(q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\big) \leq (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C\,,$$

то T_μ *имеет ЛНПО.*

Доказательство. Будем рассматривать $p = 1$ (напомним, это возможно благодаря соотношениям (1.1.9)). Доказательство сводится к построению ЛНПО L к оператору $\widetilde{\rho}$. Иначе говоря, для каждого элемента $\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in k^{1,a}$ нужно указать функцию $f \in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ такую, что $[f\big|_{U_j}] = [\varphi_j]$ при всех $j \in \mathbb{N}$, т. е.

$$f^{(l)}(\lambda_s) = \varphi_j^{(l)}(\lambda_s)\,,\ \lambda_s \in U_j\,,\ l = 0, \ldots, k_s - 1\,.$$

При этом еще отображение $L : \varphi \mapsto f$ должно быть линейным и непрерывным. Заметим, что, вообще говоря, само построение функции f уже фактически проводилось в доказательстве предложения 2.1.2. Здесь оно несколько модифицировано так, чтобы можно было использовать семейство функций $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ для улучшения оценок норм функции f в $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

а) Как в доказательстве леммы 2.1.6, пользуясь леммой Ауэрбаха [88, 10.5] выберем в пространствах X_j и X_j' базисы $\{[\varphi_{jn}] : n = 1, \ldots, m_j\}$ и $\{\nu_{jn} : n = 1, \ldots, m_j\}$ такие, что

$$|||\,[\varphi_{jn}]|||_{\infty,j} = 1\,,\ |||\,\nu_{jn}|||'_{\infty,j} = 1\,,\ n = 1, \ldots, m_j\,;$$

$$< [\varphi_{jn}], \nu_{jm} >= \delta_{nm} = \begin{cases} 1\,,\ n = m\,,\\ 0\,,\ n \neq m\,.\end{cases}$$

Обозначим

$$E_{jn} = \big([0], \ldots, [0], \underset{j}{[\varphi_{jn}]}, [0], \ldots\big)\,,\ n = 1, \ldots, m_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Тогда $E_{jn} \in k^{1,a}$, причем

$$\widetilde{|E_{jn}|}_{\omega,q,l} = e^{-q\omega(\operatorname{Re} z_j) - l|\operatorname{Im} z_j|}\,,\ q \in (0,1)\,,\ l \in (0,a)\,.$$

При этом $\{E_{jn} : n = 1, \ldots, m_j; j \in \mathbb{N}\}$ — абсолютный базис в $k^{1,a}$; разложение произвольного элемента $x = \big([x_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in k^{1,a}$ по нему имеет вид:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m_j} < [x_j], \nu_{jn} > E_{jn}\,.$$

При этом для коэффициентов ряда справедлива оценка:

$$| < [x_j], \nu_{jn} > | \le \widetilde{|x|}_{\omega,q,l}\, e^{q\omega(\operatorname{Re} z_j)+l|\operatorname{Im} z_j|}\,. \tag{4.1.4}$$

Здесь $q \in (0,1)$ и $l \in (0,a)$ определяются условием $\widetilde{|x|}_{\omega,q,l} < \infty$.

б) Построим теперь функции $f_{jn} \in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ такие, что $\widetilde{\rho}(f_{jn}) = E_{jn}$. Это делается так же, как в предложении 2.1.2, но с уточнением оценок.

1) В классе $[\varphi_{jn}]$ выберем представителя, т. е. функцию $\varphi_{jn} \in H^{\infty}(U_j)$ так, чтобы $\|\varphi_{jn}\|_{\infty,j} = |||\,[\varphi_{jn}]|||_{\infty,j} = 1$. Тогда

$$|\varphi_{jn}(z)| \le 1\,,\ z \in U_j\,. \tag{4.1.5}$$

Пусть σ_j определяется равенством (2.1.12), $V_j = \{z \in U_j : \operatorname{dist}(z, \partial U_j) \ge \sigma_j\}$. При этом, если $z \in U_j \setminus V_j$, для $\ln|\breve{\mu}(z)|$ выполняется неравенство (2.1.13).

Как известно, существует бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция g, обладающая свойствами:

$$g(z) \equiv 1 \text{ на } \bigcup_j V_j\,; \quad \operatorname{supp} g \subset \bigcup_j U_j\,; \quad 0 \le g(z) \le 1 \text{ в } \mathbb{C}\,.$$

При этом

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \le \frac{C_0}{\sigma_j}\,,\ z \in U_j \setminus V_j\,, \tag{4.1.6}$$

где C_0 от j не зависит.

2) Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$, $n : 1 \le n \le m_j$ и перейдем к построению функции f_{jn}. Положим

$$\Phi(z) := \begin{cases} \varphi_{jn}(z)\,, & z \in U_j\,, \\ 0\,, & z \notin U_j\,; \end{cases} \qquad h(z) := -\frac{\Phi(z)}{\breve{\mu}(z)} \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Тогда $h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$; $h(z) = 0$ при $z \notin U_j \setminus V_j$. Для $z \in U_j \setminus V_j$ на основании (4.1.5), (4.1.6), (2.1.12) и (2.1.13) имеем:

$$|h(z)| \le C_0 \exp \max_{z \in \overline{U}_j} \big\{7\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + 7\varepsilon_k |\operatorname{Im} z|\big\} = C_0\, e^{7\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\widetilde{z}_j)+7\varepsilon_k|\operatorname{Im}\widetilde{z}_j|}\,, \tag{4.1.7}$$

где $\widetilde{z}_j$ — некоторая точка из $\overline{U}_j$.

Получим еще для функции h специальную интегральную оценку. Пусть числа $q \in (0,1)$, $l \in (0,a)$ и $\varepsilon > 0$ выбраны произвольно. Обозначим

$$\psi_j(z) := u_j(z) + q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\,,$$

где $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ — субгармонические функции из условия теоремы. Заметим сразу, что в силу условия (B) существует $C_1 \geq 1$, при котором

$$\psi_j(z) \leq \psi(z) + \ln C_1\,,\ z \in \mathbb{C}\,, \tag{4.1.8}$$

где $\psi(z) := (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|$; константа C_1 от j и z не зависит. Учитывая (4.1.7) и то, что $u_j\big|_{U_j} \geq 0$, имеем:

$$\int_{\mathbb{C}} |h(z)|^2\, e^{-2\psi_j(z)-2\ln(1+|z|^2)}\, d\lambda_z = \int_{U_j\setminus V_j} |h(z)|^2\, e^{-2\psi_j(z)}\, \frac{d\lambda_z}{(1+|z|^2)^2} \leq C_0^2 M^2 D_j^2\,,$$

где

$$M^2 := \int_{\mathbb{C}} \frac{d\lambda_z}{(1+|z|^2)^2}\,,$$

$$D_j^2 := \exp\Big(14\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\widetilde{z}_j) + 14\varepsilon_k|\operatorname{Im}\widetilde{z}_j| - 2q\omega(\operatorname{Re} z_j) - 2l|\operatorname{Im} z_j|\Big)\,.$$

Пользуясь [42, теорема 4.4.2], находим бесконечно дифференцируемую в $\mathbb{R}^2$ функцию v, являющуюся решением $\overline{\partial}$-задачи $\frac{\partial v}{\partial \bar z} = h$, для которой

$$\int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2\, e^{-2\psi_j(z)-4\ln(1+|z|^2)}\, d\lambda_z \leq \frac{C_0^2 M^2 D_j^2}{2}\,.$$

Из этого на основании (4.1.8) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2\, e^{-2\psi(z)-4\ln(1+|z|^2)}\, d\lambda_z \leq \frac{C_0^2 C_1^2 M^2 D_j^2}{2}\,. \tag{4.1.9}$$

4) Наконец, положим $f_{jn}(z) := v(z)\check{\mu}(z) + \Phi(z)g(z)$, $z \in \mathbb{C}$. В доказательстве предложения 2.1.2 было показано, что $f_{jn} \in H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $\widetilde{\rho}(f_{jn}) = E_{jn}$. Установим нужные нам оценки нормы функции f_{jn} в $H^{1,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Для этого рассмотрим сначала интеграл

$$I_{jn} := \int_{\mathbb{C}} |f_{jn}(z)|^2 \exp\big\{-2(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) - 2(l+2\varepsilon)|\operatorname{Im} z| - 4\ln(1+|z|^2)\big\}\, d\lambda_z\,.$$

Имеем, что $|f_{jn}(z)|^2 \le 2\big(|v(z)|^2|\check{\mu}(z)|^2 + |\Phi(z)|^2\big)$.

Поскольку $\mu \in M^0_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то найдется $C_2 > 0$ такое, что

$$|\check{\mu}(z)| \le C_2\, e^{\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|}\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Тогда с учетом (4.1.9)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2|\check{\mu}(z)|^2 \exp\big\{ -2(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) - 2(l+2\varepsilon)|\operatorname{Im} z| - \\ -4\ln(1+|z|^2)\big\}\, d\lambda_z \le \frac{C_0^2C_1^2C_2^2}{2}\, M^2 D_j^2\,.\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Функция $\Phi(z)$ тождественно равна 0 вне U_j и $|\Phi(z)| \le 1$ при $z \in U_j$. В силу леммы 2.1.3, существует $C_3 > 1$, при котором для всех $z \in U_j$

$$2(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + 2(l+2\varepsilon)|\operatorname{Im} z| \ge 2q\omega(\operatorname{Re} z_j) + 2l|\operatorname{Im} z_j| - \ln C_3\,,$$

причем C_3 зависит только от q, l и ε. Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |\Phi(z)|^2 \exp\big\{ -2(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) - 2(l+2\varepsilon)|\operatorname{Im} z| - 4\ln(1+|z|^2)\big\}\, d\lambda_z \le \\ \le C_3^2 M^2\, e^{-2q\omega(\operatorname{Re} z_j)-2l|\operatorname{Im} z_j|} \le C_3 M^2 D_j^2\,.\end{aligned}$$

Объединяя (4.1.10) и последнюю оценку, полагая $C_4^2 := (C_0^2C_1^2C_2^2 + 2C_3^2)M^2$, окончательно имеем, что $I_{jn} \le C_4^2 D_j^2$. Пользуясь субгармоничностью $|f_{jn}(z)|$, из этого стандартным образом для произвольного $z \in \mathbb{C}$ получаем:

$$|f_{jn}(z)|^2 \le C_4^2 D_j^2 \exp\big\{2(q+2\varepsilon)\omega(|\operatorname{Re} z|+1) + 2(l+2\varepsilon)(|\operatorname{Im} z|+1) + 4\ln(3+|z|^2)\big\}\,.$$

В силу свойств функции ω, эту оценку можно продолжить следующим образом:

$$|f_{jn}(z)|^2 \le C_5^2 D_j^2 \exp\big\{2(q+3\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + 2(l+3\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\big\}\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Уже неоднократно цитированная выше лемма 2.1.3 позволяет выбрать $C_6 \ge 1$, не зависящее от j, при котором

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\omega(\operatorname{Re} \widetilde{z}_j) + \frac{\varepsilon}{2}\,|\operatorname{Im} \widetilde{z}_j| \le \varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + \varepsilon|\operatorname{Im} z_j| + \ln C_6\,.$$

Если теперь взять $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ так, чтобы $7\varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2}$, то окончательно при $j \ge j_{\widetilde{k}}$ и всех $z \in \mathbb{C}$ будем иметь:

$$\begin{aligned}&|f_{jn}(z)| \le \\ &\le C_5C_6 \exp\big\{-(q-\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) - (l-\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j| + (q+3\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+3\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\big\}\,,\end{aligned}$$

так что

$$\|f_{jn}\|_{\omega,q+3\varepsilon,l+3\varepsilon} \le C_5C_6\, e^{-(q-\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j)-(l-\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|}\,,\ j \ge j_{\widetilde{k}}\,.$$

За счет увеличения константы можно считать, что это неравенство выполнено для всех $j \in \mathbb{N}$. Таким образом, фактически показано, что для любых $q \in (0,1)$, $l \in (0,a)$ и $\varepsilon > 0$ найдется $C > 0$, при котором

$$\|f_{jn}\|_{\omega,q+2\varepsilon,l+2\varepsilon} \le C\, e^{-(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j)-(l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|}\,,\ j \in \mathbb{N}\,,\ p = 1,\dots,m_j\,. \tag{4.1.11}$$

в) Завершая доказательство, определим наконец нужный оператор L, полагая для $x = \big([x_j]\big)_{j=1}^{\infty} \in k^{1,a}$

$$Lx := \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m_j} < [x_j], \nu_{jn} > f_{jn}\,.$$

Из (4.1.4) и (4.1.11) вытекает, что

$$\|Lx\|_{\omega,q+2\varepsilon,l+2\varepsilon} \le C\widetilde{|x|}_{\omega,q,l}\,\sum_{j=1}^{\infty}\frac{m_j}{e^{\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j)+\varepsilon|\operatorname{Im} z_j|}}\,.$$

Сходимость последнего ряда следует, например, из доказательства леммы 2.1.6. Значит, L — ЛНПО к $\widetilde{\rho}$. □

Прежде чем переходить к характеристике наличия ЛНПО для T_μ в терминах нулей символа, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 4.1.1. *Пусть p и l_0 — фиксированные положительные числа. Имеется такая непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция v, что $v(0) = 0$ и что выполняется условие*

$$(C)\ \ \forall q \in (0,p)\ \ \exists C > 0\ :\ v(z) \le l_0|\operatorname{Im} z| - q\omega(z) + C\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ УДФ Берлинга нормального типа p на всей числовой прямой и пространство пробных функций

$$D^p_{(\omega)}[-l_0,l_0] = \left\{f \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})\ :\ \operatorname{supp} f \subset [-l_0,l_0]\right\}.$$

Как известно (см., например, [5, теорема 2.4.2]), преобразование Фурье функций $h \mapsto \widehat{h}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,e^{-ix\zeta}\,dx$ устанавливает топологический изоморфизм между $D^p_{(\omega)}[-l_0,l_0]$ и

$$H^p_{(\omega)}[-l_0,l_0] = \left\{f \in H(\mathbb{C})\ :\ \forall q \in (0,p)\quad \sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{e^{l_0|\operatorname{Im} z|-q\omega(z)}} < \infty\right\}.$$

Далее, в $D^p_{(\omega)}[-l_0, l_0]$ имеется неотрицательная функция η такая, что $\int_{\mathbb{R}} \eta(x)\,dx = 1$ (по этому поводу см. [5, с. 51 и предложение 1.6.2]). Поэтому, положив $v(z) := \max\{\ln|\widehat{\eta}(z+\zeta)| : |\zeta| \le 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, как нетрудно видеть, получим требуемое утверждение. $\square$

Установим теперь основное необходимое и достаточное условие наличия ЛНПО для оператора T_μ, формулируемое в терминах нулей символа μ, т. е. условие (iv) теоремы 4.1.1.

Предложение 4.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1.1. Если оператор свертки T_μ имеет ЛНПО, то последовательность нулей (λ_s) символа μ удовлетворяет условию (iv).*

Доказательство. В соответствии с предложением 4.1.1, в $H^{p,a}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ найдется семейство функций $(g_s)_{s=1}^{\infty}$ таких, что $g_s(\lambda_s) = 1$ при всех $s \in \mathbb{N}$, и удовлетворяющих условию (A). Возьмем какое-нибудь $l_0 \in (0, a)$ и произвольное $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$. В силу (A), существуют $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, при которых для всех $s \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$ справедливы оценки

$$\ln|g_s(z)| + \varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + \varepsilon|\operatorname{Im}\lambda_s| \le 2\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + 2\varepsilon|\operatorname{Im} z| + C_1\,; \tag{4.1.12}$$
$$\ln|g_s(z)| + \varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + (l_0+4\varepsilon)|\operatorname{Im}\lambda_s| \le 2\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + (l_0+5\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C_2\,.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\ln|g_s(t)| + \varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + (l_0+4\varepsilon)|\operatorname{Im}\lambda_s| \le 2\varepsilon\omega(t) + C_2\,,\ t \in \mathbb{R}\,,\ s \in \mathbb{N}\,. \tag{4.1.13}$$

Пользуясь условием (α) на вес ω, найдем $C_3 > 0$ такое, что

$$\omega(x+y) \le (1+\varepsilon)\big(\omega(x)+\omega(y)\big) + C_3\,,\ x, y \ge 0\,. \tag{4.1.14}$$

Далее, для гармонического продолжения P_ω веса ω выполнено условие $P_\omega(iy) = o(y)$, $y \to \infty$, то имеется $C_4 > 0$, при котором

$$P_\omega(iy) \le |y| + C_4\,,\ y \in \mathbb{R}\,. \tag{4.1.15}$$

По принципу Фрагмена-Линделефа (см. [58, 6.5.4]) для всех $u + iv \in \mathbb{C}$ с $v \neq 0$

$$\ln|g_s(u+iv)| \le \frac{|v|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|g_s(t)|}{(u-t)^2+v^2}\,dt + |v|d_s\,, \tag{4.1.16}$$

где $d_s = \limsup_{r\to\infty} \frac{2}{\pi r}\,\int_0^\pi \ln|g_s(r\,e^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta$. Из (4.1.12) вытекает, что

$$\frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|g_s(r\,e^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \le \frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \bigl(2\varepsilon\omega(r)+2\varepsilon r\sin\theta + C_1\bigr)\sin\theta\,d\theta = \\ = \frac{2}{\pi r}\left(4\varepsilon\omega(r)+2\varepsilon r\frac{\pi}{2}+2C_1\right),$$

так что $d_s \le 2\varepsilon$ при всех $s\in\mathbb{N}$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ заключаем, что $d_s\le 0$, $s\in\mathbb{N}$.

На основании (4.1.13) с учетом (4.1.14) и (4.1.15) имеем:

$$\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|g_s(t)|}{(u-t)^2+v^2}\,dt \le \\ \le 2\varepsilon\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(u+vt)}{t^2+1}\,dt - \varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)-(l_0+4\varepsilon)|\operatorname{Im}\lambda_s|+C_2 \le \\ \le 2\varepsilon(1+\varepsilon)\bigl(\omega(u)+P_\omega(iv)\bigr)-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)-(l_0+4\varepsilon)|\operatorname{Im}\lambda_s|+C_2+2\varepsilon C_3 \le \\ \le 4\varepsilon\omega(u)+4\varepsilon|v|-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)-(l_0+4\varepsilon)|\operatorname{Im}\lambda_s|+C_2+C_3+C_4\,.$$

Возвращаясь к (4.1.16), полагая $C_5 := C_2+C_3+C_4$, получаем, что для всех $u+iv\in\mathbb{C}$ с $v\ne 0$ и всех $s\in\mathbb{N}$

$$\ln|g_s(u+iv)| \le 4\varepsilon\omega(u)+4\varepsilon|v|-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)-(l_0+4\varepsilon)|\operatorname{Im}\lambda_s|+C_5\,.$$

По непрерывности это неравенство выполняется и для $v=0$. При $u+iv=\lambda_s$, учитывая условие $g_s(\lambda_s)=1$, $s\in\mathbb{N}$, получаем:

$$0 \le 3\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)-l_0|\operatorname{Im}\lambda_s|+C_5\,,$$

так что

$$l_0|\operatorname{Im}\lambda_s| \le 3\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)+C_5\,,\ s\in\mathbb{N}\,.$$

Это означает требуемое. □

Предложение 4.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1.1. Если*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{|\operatorname{Im} z_j|}{\omega(\operatorname{Re} z_j)} = 0\,, \tag{4.1.17}$$

то T_μ допускает ЛНПО.

Доказательство. Построим семейство субгармонических функций, как в предложении 4.1.2. Выберем произвольное $l_0 \in \bigl(0, \min\{1, a\}\bigr)$. Пусть $v(z)$ — функция из леммы 4.1.1. Положим

$$u_j(z) := \sup_{t \in U_j} v(z - t)\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Тогда функции u_j, $j \in \mathbb{N}$, непрерывны и субгармоничны в $\mathbb{C}$. Если $z \in U_j$, то $u_j(z) \geq v(0) = 0$.

Проверим выполнение условия (B). Возьмем произвольное $q \in (0, p)$ и $\varepsilon > 0$. Пусть константа $C_1 > 0$ такова, что

$$v(z) \leq l_0|\operatorname{Im} z| - (q+\varepsilon)\omega(z) + C_1\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.1.18}$$

Далее, найдем $C_2 > 0$, при котором

$$6|\operatorname{Im} z_j| < \varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + C_2\,,\ j \in \mathbb{N}\,. \tag{4.1.19}$$

В силу условия (α) на вес ω, существует $C_3 > 0$ такое, что

$$q\omega(x+y) \leq (q+\varepsilon)\bigl(\omega(x) + \omega(y)\bigr) + C_3\,,\ x, y \geq 0\,. \tag{4.1.20}$$

На основании леммы 2.1.3 можно выбрать $C_4 > 0$, при котором для всех $j \in \mathbb{N}$ и $t \in U_j$ справедлива оценка

$$(q-\varepsilon)\omega(z_j) + |\operatorname{Im} z_j| \leq q\omega(t) + 2|\operatorname{Im} t| + C_4\,. \tag{4.1.21}$$

Наконец, из установленных в лемме 2.1.1 оценок на $\operatorname{diam} U_j$ вытекает, что имеется $C_5 > 0$, при котором

$$\operatorname{diam} U_j \leq \varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + \varepsilon|\operatorname{Im} z_j| + C_5\,,\ j \in \mathbb{N}\,. \tag{4.1.22}$$

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Пусть $t \in U_j$. Из (4.1.20) и (4.1.21) имеем:

$$\begin{aligned}(q+\varepsilon)\omega(z-t) &\geq q\omega(t) - (q+\varepsilon)\omega(z) - C_3 \geq \\ &\geq (q-\varepsilon)\omega(z_j) - (q+\varepsilon)\omega(z) + |\operatorname{Im} z_j| - 2|\operatorname{Im} t| - C_3 - C_4\,.\end{aligned}$$

В силу (4.1.18) тогда

$$\begin{aligned}v(z-t) &\leq l_0|\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} t| - (q+\varepsilon)\omega(z-t) + C_1 \leq \\ &\leq \bigl((q+\varepsilon)\omega(z) + l_0|\operatorname{Im} z|\bigr) - (q-\varepsilon)\omega(z_j) + (l_0+2)|\operatorname{Im} t| + C_1 + C_3 + C_4\,.\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Пользуясь (4.1.22) и (4.1.19), получаем:

$$(l_0+2)|\operatorname{Im} t| \le 3\big(|\operatorname{Im} z_j| + \operatorname{diam} U_j\big) \le 3\big(\varepsilon\omega(z_j) + (1+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j| + C_5\big) \le$$
$$\le 3\varepsilon\omega(z_j) + 6|\operatorname{Im} z_j| + 3C_5 \le 4\varepsilon\omega(z_j) + C_2 + 3C_5\,.$$

Возвращаясь к (4.1.23), заключаем, что

$$v(z-t) \le \big((q+\varepsilon)\omega(z) + l_0|\operatorname{Im} z|\big) - (q-5\varepsilon)\omega(z_j) + C_6\,,$$

где $C_6 := C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + 3C_5$ зависит лишь от q, l_0 и ε. Следовательно,

$$u_j(z) + (q-5\varepsilon)\omega(z_j) \le (q+\varepsilon)\omega(z) + l_0|\operatorname{Im} z| + C_6\,,\ z\in\mathbb{C}\,,\ j\in\mathbb{N}\,.$$

Поскольку выполнено условие (4.1.17), мы фактически доказали, что для любых $q\in(0,p)$, $l\in(0,a)$ и $\varepsilon>0$ имеется такое $C>0$, что при всех $z\in\mathbb{C}$ и $j\in\mathbb{N}$

$$u_j(z) + q\omega(z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \le (q+\varepsilon)\omega(z) + l_0|\operatorname{Im} z| + C\,.$$

Свойства весовых функций (см. лемму 1.1.2) позволяют заменить здесь z на $\operatorname{Re} z$, а z_j — на $\operatorname{Re} z_j$. Значит, семейство $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет всем условиям предложения 4.1.2, так что оператор T_μ имеет ЛНПО. □

Поскольку эквивалентность условия (iv) теоремы 4.1.1 и (4.1.17) достаточно легко вытекает из оценок на $\operatorname{diam} U_j$ (см. лемму 2.1.1) и свойств веса ω, то теорема 4.1.1 полностью доказана.

В заключение приведем простые примеры. Символы μ из примеров 1.5.2 и 1.5.3 главы 1 имеют только действительные нули, так что порождаемые ими операторы свертки T_μ (дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) имеют ЛНПО. В свою очередь, если рассмотреть, как в примере 1.5.5, веса $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t)\to\rho\in(0,1)$ — некоторый уточненный порядок, и символы μ, заданные равенствами 1.5.9, то в зависимости от расположения точек λ_s соответствующий сюръективный оператор свертки (также дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) может как иметь ЛНПО, так и не иметь его.

4.2 ЛНПО к оператору свертки в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$

В настоящем параграфе проблема о существовании ЛНПО решается для сюръективного оператора свертки в пространстве Берлинга $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ УДФ нормального типа на числовой прямой.

Пусть ω — весовая функция; $p \in (0, \infty)$; μ — делитель пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$. Как в § 2.2, будем предполагать, что $\mu \in \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, т. е. что μ удовлетворяет условию (2.2.2). В силу леммы 2.2.1 тогда для μ выполнено условие (F_0).

Критерий наличия ЛНПО для сюръективного оператора T_μ в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ содержится в следующей теореме.

Теорема 4.2.1. *Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0, \infty)$; $\mu \in \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; T_μ — оператор свертки с символом μ в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$; $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — последовательность нулей символа μ. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *T_μ имеет ЛНПО;*

(ii) *ядро $\ker T_\mu$ оператора T_μ дополнимо в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$;*

(iii) *главный идеал $J = \operatorname{Im} \Lambda_{\check{\mu}} = \check{\mu} H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ дополним в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$;*

(iv) $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_s|}{\omega(\operatorname{Re} \lambda_s)} = 0.$

Как и в теореме 4.1.1, в условии (iv) должны на самом деле фигурировать нули функции $\check{\mu}$.

Доказательство сформулированного основного результата базируется на открытом покрытии $(U_j)_{j=1}^\infty$ нулевого множества $N(\check{\mu})$ функции $\check{\mu}(z) = \mu(-z)$, построенном в § 2.2. Напомним основные факты об этом покрытии. Для построения бралась произвольная последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$; $\varepsilon_1 < \frac{1}{A}$, где A — константа из условия (1.1.1). Затем вводились числа $\delta_k = \frac{\varepsilon_k}{64KHel_0}$, где K определяется условием $\widetilde{(\alpha)}$; l_0 — константа из условия (2.2.2); $H := 3 + \ln 48$. Всякий номер $k \in \mathbb{N}$ порождает некоторый номер $j_k \in \mathbb{N}$, $j_k \uparrow \infty$. Далее, в каждом множестве U_j была выбрана определенная точка z_j по следующему правилу: если в U_j $(j_k \le j < j_{k+1})$ имеется точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j| \le \delta_k \omega(\operatorname{Re} z_j)$, то берем эту точку z_j; в противном случае в качестве z_j берем произвольную точку из U_j. Было показано, что в первом случае $\operatorname{diam} U_j \le 12\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j)$;

а во втором $\operatorname{diam} U_j \le 2|\operatorname{Im} z_j|$. Здесь $\operatorname{diam} U_j = \sup\{\|z-t\| : z,t \in U_j\}$; $\|z\| = \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\}$, $z \in \mathbb{C}$.

Наконец, для $j_k \le j < j_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, была введена величина

$$\sigma_j := \min_{z\in\overline{U_j}} \exp\{-4\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 4L_0|\operatorname{Im} z|\}. \tag{4.2.1}$$

В соответствии с леммой 2.2.5, для всех $z \in (\partial U_j)(\sigma_j) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, \partial U_j) < \sigma_j\}$ справедлива оценка

$$\ln|\mu(z)| \ge -3\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - 3L_0|\operatorname{Im} z|. \tag{4.2.2}$$

Здесь $L_0 = 112KK_1H(H+1)(H_1+1)el_0$; $H_1 := 3+\ln\frac{24(1+\beta)}{\beta}$, β — произвольное число из $(0, \frac{1}{32}]$ (например, $\beta = \frac{1}{32}$); константа $K_1 \ge 1$ определяется условием

$$\omega(2s + 8e\eta) \le K_1\big(\omega(s) + \omega(\eta) + 1\big)\,,\ s,\eta \ge 0\,.$$

Как и ранее, положим $m_j := \sum_{\lambda_s\in U_j} k_s$; $J := \check{\mu}H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; $J_j = \{g \in H^\infty(U_j) : g^{(l)}(\lambda_s) = 0\,,\ l = 0,\dots,k_s-1\,,\ \lambda_s \in U_j\}$; $X_j := H^\infty(U_j)/J_j$; $X := \prod_{j=1}^\infty X_j$.

В § 2.2 было показано, что отображение

$$\rho : [f] \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J \mapsto \big([f|_{U_j}]\big)_{j=1}^\infty$$

устанавливает топологический изоморфизм между пространством $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})/J$ и пространством $k^{p,\infty}$, определяемым следующим образом:

$$k^{p,\infty} = \{\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^\infty \in X \mid \exists q \in (0,p)\ \ \exists l \in (0,\infty)\ :$$
$$\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} = \sup_{j\ge1}\frac{|||\,[\varphi_j]|||_{\infty,j}}{\exp\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\}} < \infty\}.$$

Из этого вытекает, что отображение

$$\widetilde{\rho} : f \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \mapsto \big([f|_{U_j}]\big)_{j=1}^\infty$$

является линейным непрерывным сюръективным отображением $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ на $k^{p,\infty}$. Учитывая, что $\ker\widetilde{\rho} = J$, на основании общего функционального критерия наличия ЛНПО или ЛНЛО, приведенного в начале § 4.1, мы можем сформулировать следующий функциональный критерий существования ЛНПО для оператора T_μ.

Теорема 4.2.2. *Пусть ω — произвольная весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $\mu \in \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; T_μ — оператор свертки с символом μ в пространстве $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i_1) *оператор свертки T_μ имеет ЛНПО;*

(i_2) *ядро $\ker T_\mu$ дополнимо в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$;*

(i_3) *оператор умножения $\Lambda_{\check{\mu}}$ имеет ЛНЛО;*

(i_4) *главный идеал $J = \operatorname{Im}\Lambda_{\check{\mu}}$ дополним в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$;*

(i_5) *оператор $\widetilde{\rho} : H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C}) \to k^{p,\infty}$ допускает ЛНПО.*

Прежде чем устанавливать необходимые и достаточные условия наличия ЛНПО для оператора T_μ в терминах целых и субгармонических функций, докажем две технические леммы.

Лемма 4.2.1. *Пусть ω — весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $\mu \in \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — символ сюръективного оператора свертки T_μ в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$; $(U_j)_{j=1}^\infty$ — построенное открытое покрытие $N(\check{\mu})$; $(z_j)_{j=1}^\infty$ — последовательность выбранных точек из этого покрытия. Если*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\operatorname{Im} z_j|}{\omega(\operatorname{Re} z_j)} = 0\,, \tag{4.2.3}$$

то для произвольных положительных чисел q, l и ε найдется $C > 0$ такое, что при всех $j \in \mathbb{N}$ и $z \in U_j$

$$q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| + l|\operatorname{Im} z| \le (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + C\,.$$

Доказательство. Возьмем произвольные q, l, ε из $(0,\infty)$. Найдем $\delta \in \left(0, \frac{1}{A}\right)$ и $C > 0$, при которых

$$\Big(q + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega\Big(\frac{1}{1-\delta A}t\Big) \le (q+\varepsilon)\omega(t) + C\,,\ t \ge 0\,. \tag{4.2.4}$$

Используя приведенные выше оценки для $\operatorname{diam} U_j$, а также условие (4.2.3), заключаем, что имеется $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\operatorname{diam} U_j \le \delta\omega(\operatorname{Re} z_j)$, $j \ge j_0$. Тогда, в силу (1.1.2), $\operatorname{diam} U_j \le \delta A|\operatorname{Re} z_j|$, $j \ge j_0$. Следовательно, $|\operatorname{Re} z| \ge |\operatorname{Re} z_j| - \operatorname{diam} U_j \ge (1-\delta A)|\operatorname{Re} z_j|$ для всех $j \ge j_0$, $z \in U_j$, так что

$$|\operatorname{Re} z_j| \le \frac{1}{1-\delta A}\,|\operatorname{Re} z|\,,\ j \ge j_0\,,\ z \in U_j\,. \tag{4.2.5}$$

В лемме 2.2.2 для $|\mathrm{Im}\, z|$, $z \in U_j$, $j \in \mathbb{N}$, были установлены следующие оценки. Если множество U_j содержит точку z_j с $|\mathrm{Im}\, z_j| \le \delta_k \omega(\mathrm{Re}\, z_j)$, то $|\mathrm{Im}\, z| \le 13\delta_k\omega(\mathrm{Re}\, z_j)$; в противном случае $|\mathrm{Im}\, z| \le 3|\mathrm{Im}\, z_j|$. Таким образом, в любом случае

$$l|\mathrm{Im}\, z_j| + l|\mathrm{Im}\, z| \le (l+3)|\mathrm{Im}\, z_j| + 13l\delta_k\omega(\mathrm{Re}\, z_j)\,,\ z \in U_j\,.$$

Снова принимая во внимание условие (4.2.3), увеличивая при необходимости номер j_0, заключаем, что

$$l|\mathrm{Im}\, z_j| + l|\mathrm{Im}\, z| \le \frac{\varepsilon}{2}\,\omega(\mathrm{Re}\, z_j)\,,\ z \in U_j\,,\ j \ge j_0\,. \tag{4.2.6}$$

Объединяя оценки (4.2.4)–(4.2.6), окончательно получаем, что для всех $z \in U_j$, $j \ge j_0$, справедливы неравенства

$$q\omega(\mathrm{Re}\, z_j) + l|\mathrm{Im}\, z_j| + l|\mathrm{Im}\, z| \le \Big(q + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\,\omega\Big(\frac{1}{1-\delta A}\mathrm{Re}\, z\Big) \le (q+\varepsilon)\omega(\mathrm{Re}\, z) + C\,.$$

Доказательство завершено. □

Поскольку $X_j = H^\infty(U_j)/J_j$ — банахово пространство размерности m_j, $j \in \mathbb{N}$, то по лемме Ауэрбаха в пространствах X_j и X_j' можно выбрать базисы $\{[\varphi_{jn}] : n = 1, \ldots, m_j\}$ и $\{\nu_{jn} : n = 1, \ldots, m_j\}$ такие, что

$$|||\,[\varphi_{jn}]|||_{\infty,j} = 1\,,\ |||\,\nu_{jn}|||'_{\infty,j} = 1\,,\ n = 1, \ldots, m_j\,;$$

$$< [\varphi_{jn}], \nu_{jm} >= \delta_{nm} = \begin{cases} 1\,,\ n = m\,, \\ 0\,,\ n \ne m\,. \end{cases}$$

Положим

$$E_{jn} = \big([0], \ldots, [0], \underset{j}{[\varphi_{jn}]}, [0], \ldots\big)\,,\ n = 1, \ldots, m_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

При этом, очевидно, $E_{jn} \in k^{p,\infty}$ и

$$\widetilde{|E_{jn}|}_{\omega,q,l} = \exp\big\{-q\omega(\mathrm{Re}\, z_j) - l|\mathrm{Im}\, z_j|\big\}\,,\ \ q \in (0,p)\,,\ l \in (0,\infty)\,. \tag{4.2.7}$$

Лемма 4.2.2. *Система* $\{E_{jn} :\ n = 1, \ldots, m_j\,;\, j \in \mathbb{N}\}$ *образует абсолютный базис в пространстве* $k^{p,\infty}$*. Для каждого элемента* $x = \big([x_j]\big)_{j=1}^\infty \in k^{p,\infty}$ *его разложение по этой системе имеет вид*

$$x = \sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^{m_j} < [x_j], \nu_{jn} > E_{jn}\,. \tag{4.2.8}$$

Доказательство. Пусть $x = \big([x_j]\big)_{j=1}^{\infty}$ — произвольный элемент из $k^{p,\infty}$. Тогда в X_j

$$[x_j] = \sum_{n=1}^{m_j} < [x_j], \nu_{jn} > \varphi_{jn}\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Таким образом, нам остается лишь проверить, что ряд (4.2.8) сходится абсолютно в $k^{p,\infty}$. Находим $q \in (0,p)$ и $l \in (0,\infty)$ такие, что $\widetilde{|x|}_{\omega,q,l} < \infty$. Тогда

$$|||\,[x_j]|||_{\infty,j} \le \widetilde{|x|}_{\omega,q,l} \cdot \exp\big\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\big\}$$

и

$$|<[x_j], \nu_{jn}>| \le \widetilde{|x|}_{\omega,q,l} \cdot \exp\big\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\big\}\,. \tag{4.2.9}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q+\varepsilon < p$. Используя (4.2.7) с $q+\varepsilon$ вместо q и $l+\varepsilon$ вместо l, получаем:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m_j} |<[x_j],\nu_{jn}>| \cdot \widetilde{|E_{jn}|}_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \le \widetilde{|x|}_{\omega,q,l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{\exp\big\{\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\big\}}\,.$$

Последний числовой ряд сходится в силу следствия 2.2.1. □

Необходимые условия наличия ЛНПО для оператора T_μ в терминах целых функций представлены в следующем предложении.

Предложение 4.2.1. *Пусть ω — произвольная весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $\mu \in \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ — последовательность нулей функции $\check{\mu}$. Если оператор T_μ допускает ЛНПО, то в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ имеется семейство функций $(g_s)_{s=1}^{\infty}$ такое, что $g_s(\lambda_s) = 1$, $s \in \mathbb{N}$, и что выполняется условие*

$$(A)\ \ \forall q \in (0,p)\ \ \forall l \in (0,\infty)\ \ \exists \widetilde{q} \in (0,p)\ \ \exists \widetilde{l} \in (0,\infty)\ \ \exists C > 0 :$$
$$\ln|g_s(z)| + q\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + l|\operatorname{Im}\lambda_s| \le \widetilde{q}\omega(\operatorname{Re} z) + \widetilde{l}|\operatorname{Im} z| + C\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ s \in \mathbb{N}\,. \tag{4.2.10}$$

Доказательство. Поскольку T_μ допускает ЛНПО, то по теореме 4.2.2 оператор $\widetilde{\rho}$ также имеет ЛНПО $L : k^{p,\infty} \to H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$.

В пространстве $k^{p,\infty}$ рассмотрим элементы

$$\varphi^j = \big([0], \dots, [0], \underset{j}{[1]}, [0], \dots\big)\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Очевидно, $|||\,[1]\,|||_{\infty,j}=1$, так что при всех $q\in(0,1)$, $l\in(0,\infty)$ и $j\in\mathbb{N}$

$$\widetilde{|\varphi^j|}_{\omega,q,l}=\exp\big(-q\omega(\operatorname{Re}z_j)-l|\operatorname{Im}z_j|\big)\,.$$

Положим $f^j:=L(\varphi^j)$, $j\in\mathbb{N}$. Тогда $f^j\in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, $j\in\mathbb{N}$, и $\widetilde{\rho}(f^l)=\big([f^l|_{U_j}]\big)_{j=1}^{\infty}=\varphi^l$, $l\in\mathbb{N}$. Следовательно, $[f^j|_{U_j}]=[1]$, $j\in\mathbb{N}$, и, значит, $f^j(\lambda_s)=1$, $\lambda_s\in U_j$.

Для каждого $s\in\mathbb{N}$ находим $j\in\mathbb{N}$, при котором $\lambda_s\in U_j$, и полагаем $g_s(z):=f^j(z)$, $z\in\mathbb{C}$. При этом $g_s(\lambda_s)=1$, $s\in\mathbb{N}$, так что нам остается лишь проверить выполнение условия (A).

Зафиксируем произвольные $q\in(0,p)$, $l\in(0,\infty)$ и выберем какое-нибудь $q_1\in(q,p)$. В силу леммы 2.2.3, имеются $l_1\in(l,\infty)$ (причем l_1 может быть выписано точно) и $C_1>0$ такие, что

$$q\omega(\operatorname{Re}z)+l|\operatorname{Im}z|\le q_1\omega(\operatorname{Re}z_j)+l_1|\operatorname{Im}z_j|+C_1\,,\ z\in U_j\,,\ j\in\mathbb{N}.$$

Полагая здесь $z=\lambda_s$, получим, что

$$q\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)+l|\operatorname{Im}\lambda_s|\le q_1\omega(\operatorname{Re}z_j)+l_1|\operatorname{Im}z_j|+C_1\,. \tag{4.2.11}$$

Далее, поскольку $k^{p,\infty}$ и $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — (DFS)-пространства и оператор L действует непрерывно из $k^{p,\infty}$ в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, то для q_1 и l_1 найдутся $\widetilde{q}\in(0,p)$, $\widetilde{l}\in(0,\infty)$ и $C_2>0$, при которых

$$\|L\varphi\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l}}\le C_2\cdot\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q_1,l_1}$$

для всех $\varphi\in k^{p,\infty}$ с $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q_1,l_1}<\infty$. В частности, $\|L\varphi^j\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l}}\le C_2\cdot\widetilde{|\varphi^j|}_{\omega,q_1,l_1}$, $j\in\mathbb{N}$. Это означает, что

$$\ln|f^j(z)|\le\widetilde{q}\omega(\operatorname{Re}z)+\widetilde{l}|\operatorname{Im}z|-q_1\omega(\operatorname{Re}z_j)-l_1|\operatorname{Im}z_j|+\ln C_2\,,\ z\in\mathbb{C}\,,\ j\in\mathbb{N}\,.$$

Принимая во внимание оценки (4.2.11), заключаем, что функции g_s удовлетворяют неравенству (4.2.10) с $C=C_1+\ln C_2$. $\square$

В обратном направлении справедлив следующий результат.

Предложение 4.2.2. *Пусть ω — произвольная весовая функция; $p\in(0,\infty)$; $\mu\in\widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$; $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ — построенное в § 2.2 покрытие нулевого множества $N(\check{\mu})$ функции $\check{\mu}$; z_j — вы-*

бранные точки из U_j, $j \in \mathbb{N}$. Далее, предположим, что имеется семейство $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ субгармонических функций в $\mathbb{C}$ с $u_j\big|_{U_j} \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned}&(B)\ \ \forall q \in (0,p)\ \ \forall l \in (0,\infty)\ \ \exists \widetilde{q} \in (0,p)\ \ \exists \widetilde{l} \in (0,\infty)\ \ \exists C > 0 :\\ &\qquad u_j(z) + q\omega(z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \leq \widetilde{q}\omega(z) + \widetilde{l}|\operatorname{Im} z| + C\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ j \in \mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Тогда T_μ имеет ЛНПО.

Доказательство. В силу теоремы 4.2.2, достаточно построить линейный непрерывный оператор L, действующий из $k^{p,\infty}$ в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, который является правым обратным к $\widetilde{\rho}$. Для того чтобы это сделать, мы сначала (см. пункт (a) ниже) определим элементы $f_{jn} = LE_{jn}$, где $\{E_{jn} : n = 1, \ldots, m_j\,; j \in \mathbb{N}\}$ — абсолютный базис в $k^{p,\infty}$ из леммы 4.2.2. Затем (пункт (b) данного доказательства) мы продолжим оператор L на все пространство $k^{p,\infty}$ естественным образом. Напомним, что L действует непрерывно из $k^{p,\infty}$ в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда для всех $q \in (0,p)$ и $l \in (0,\infty)$ имеются $\widetilde{q} \in (0,p)$, $\widetilde{l} \in (0,\infty)$ и $C > 0$ такие, что $\|L\varphi\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l}} \leq C \cdot \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}$ при всех $\varphi \in k^{p,\infty}$ с $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} < \infty$.

(a) Построим функции f_{jn} в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ с $\widetilde{\rho}(f_{jn}) = E_{jn}$, $n = 1, \ldots, m_j$, $j \in \mathbb{N}$, нормы которых в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ удовлетворяют оценкам, необходимым для дальнейшего.

1) В каждом классе $[\varphi_{jn}]$ выберем функцию $\varphi_{jn} \in H^\infty(U_j)$ такую, что $\|\varphi_{jn}\|_{\infty,j} = |||\,[\varphi_{jn}]|||_{\infty,j} = 1$. Тогда

$$|\varphi_{jn}(z)| \leq 1\,,\ z \in U_j\,. \tag{4.2.12}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ таково, что $j_k \leq j < j_{k+1}$. Положим $V_j = \{z \in U_j : \operatorname{dist}(z, \partial U_j) \geq \sigma_j\}$, где, напомним, σ_j определяется по формуле (4.2.1). Тогда для всех $z \in U_j \setminus V_j$, $j \in \mathbb{N}$, имеют место оценки (4.2.2). Теперь находим бесконечно дифференцируемую в $\mathbb{R}^2$ функцию g (см. [69, теорема 1.4.1 и оценка (1.4.2)]) такую, что

$$g(z) \equiv 1 \text{ на } \bigcup_j V_j\,; \quad \operatorname{supp} g \subset \bigcup_j U_j\,; \quad 0 \leq g(z) \leq 1 \text{ в } \mathbb{C}\,;$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leq \frac{C_0}{\sigma_j}\,,\ z \in U_j \setminus V_j\,.$$

Заметим, что C_0 не зависит от $z \in U_j \setminus V_j$ и j. Тогда

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \le C_0 \exp\big\{4\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + 4L_0|\operatorname{Im} z|\big\}, \quad z \in U_j \setminus V_j. \tag{4.2.13}$$

2) Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и $n : 1 \le n \le m_j$. Put

$$\Phi_{jn}(z) := \begin{cases} \varphi_{jn}(z), & z \in U_j, \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus U_j; \end{cases} \qquad h_{jn}(z) := -\frac{\Phi_{jn}(z)}{\mu(z)} \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что $h_{jn}(z) = 0$ при всех $z \notin U_j \setminus V_j$. Поскольку функция $\check{\mu}$ не имеет нулей в $U_j \setminus V_j$, то функция h_{jn} бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$. Используя (4.2.12), (4.2.2) и (4.2.13), для всех $z \in U_j \setminus V_j$ имеем:

$$|h_{jn}(z)| \le C_0 \exp \max_{z \in \overline{U_j}} \big\{7\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + 7L_0 |\operatorname{Im} z|\big\} =$$

$$= C_0 \exp\big\{7\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} \widetilde{z}_j) + 7L_0|\operatorname{Im} \widetilde{z}_j|\big\}. \tag{4.2.14}$$

Здесь $\widetilde{z}_j$ — некоторая точка из $\overline{U_j}$.

Установим теперь для функций h_{jn} специальные интегральные оценки. Пусть $q \in (0, p)$ и $l \in (2A + 21L_0, \infty)$ произвольны (напомним, что A — константа из условия (1.1.1)). Положим

$$\psi_j(z) := u_j(z) + q\omega(z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ j \in \mathbb{N}\,,$$

где $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ — семейство субгармонических функций из условий предложения. Тогда ψ_j субгармоничны в $\mathbb{C}$ и

$$\psi_j(z) \le \widetilde{q}\omega(z) + \widetilde{l}|\operatorname{Im} z| + \ln C_1\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ j \in \mathbb{N}\,, \tag{4.2.15}$$

при некоторых $\widetilde{q} \in (q, p)$, $\widetilde{l} \in (l, \infty)$ и $C_1 > 1$. Используя (4.2.14) и условие $u_j\big|_{U_j} \ge 0$, $j \in \mathbb{N}$, получаем, что

$$\int_{\mathbb{C}} |h_{jn}(z)|^2 \exp\big\{-2\psi_j(z) - 2\ln(1 + |z|^2)\big\}\, d\lambda_z \le C_0^2 M^2 D_j^2\,,$$

где

$$M^2 := \int_{\mathbb{C}} \frac{d\lambda_z}{(1 + |z|^2)^2}\,,\ D_j^2 := \exp\big\{14\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} \widetilde{z}_j) + 14L_0|\operatorname{Im} \widetilde{z}_j| - 2q\omega(z_j) - 2l|\operatorname{Im} z_j|\big\}\,.$$

Применяя [69, теорема 4.4.2], решаем $\overline{\partial}$-задачу $\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = h_{jn}$ и находим функцию $v_{jn} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что

$$\int_{\mathbb{C}} |v_{jn}(z)|^2 \exp\big\{-2\psi_j(z) - 4\ln(1+|z|^2)\big\}\, d\lambda_z \le \frac{C_0^2 M^2 D_j^2}{2}\,. \qquad (4.2.16)$$

3) Рассмотрим функции $f_{jn}(z) := v_{jn}(z)\check{\mu}(z) + \Phi_{jn}(z) g(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Из доказательства предложения 2.2.2 вытекает, что $f_{jn} \in H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$ и $\widetilde{\rho}(f_{jn}) = E_{jn}$, $n = 1, \ldots, m_j$, $j \in \mathbb{N}$. Уточним оценки норм функций f_{jp} в $H^{p,\infty}_{(\omega)}(\mathbb{C})$, установленные в доказательстве предложения 2.2.2.

Очевидно, что

$$|f_{jn}(z)|^2 \le 2\big(|v_{jn}(z)|^2 |\check{\mu}(z)|^2 + |\Phi_{jn}(z)|^2\big), \quad z \in \mathbb{C}. \qquad (4.2.17)$$

Выберем какое-нибудь $\varepsilon \in \big(0, \min\big\{\frac{p-\widetilde{q}}{2}, q\big\}\big)$. Поскольку $\mu \in \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$, имеется $C_2 > 0$, при котором

$$|\check{\mu}(z)| \le C_2 \exp\big\{\varepsilon\omega(z) + l_0 |\mathrm{Im}\, z|\big\}\,,\ z \in \mathbb{C}\,. \qquad (4.2.18)$$

Далее, положим $\widetilde{\psi}(z) := (\widetilde{q} + \varepsilon)\omega(z) + (\widetilde{l} + l_0)|\mathrm{Im}\, z| + 2\ln(1+|z|^2)$, $z \in \mathbb{C}$. На основании (4.2.18), (4.2.15) и (4.2.16) имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{C}} |v_{jn}(z)|^2 |\check{\mu}(z)|^2 \exp\big\{-2\widetilde{\psi}(z)\big\}\, d\lambda_z \le \\ &\le C_2^2 \int_{\mathbb{C}} |v_{jn}(z)|^2 \exp\big\{-2\widetilde{q}\omega(z) - 2\widetilde{l}|\mathrm{Im}\, z| - 4\ln(1+|z|^2)\big\}\, d\lambda_z \le \\ &\le C_1^2 C_2^2 \int_{\mathbb{C}} |v_{jn}(z)|^2 \exp\big\{-2\psi_j(z) - 4\ln(1+|z|^2\big\}\, d\lambda_z \le \frac{C_0^2 C_1^2 C_2^2 M^2}{2} D_j^2\,. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $\Phi_{jn} = 0$ для $z \notin U_j$ и, в силу (4.2.12), $|\Phi_{jn}(z)| \le 1$ для $z \in U_j$, $n = 1, \ldots, m_j$, $j \in \mathbb{N}$. Применяя лемму 2.2.3, находим $C_3 > 1$, при котором

$$(\widetilde{q} + \varepsilon)\omega(z) + (\widetilde{l} + l_0)|\mathrm{Im}\, z| \ge q\omega(z_j) + l|\mathrm{Im}\, z_j| - \frac{\ln C_3}{2}\,,\ z \in U_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{C}} |\Phi_{jn}(z)|^2 \exp\big\{-2\widetilde{\psi}(z)\big\}\, d\lambda_z \le C_3^2 M^2 \exp\big\{-2q\omega(z_j) - 2l|\mathrm{Im}\, z_j|\big\} \le C_3 M^2 D_j^2\,.$$

Используя данное неравенство и интегральные оценки для $|v_{jp}(z)|^2|\breve{\mu}(z)|^2$ из (4.2.17), получаем, что

$$\int_{\mathbb{C}} |f_{jn}(z)|^2 \exp\big\{-2\widetilde{\psi}(z)\big\}\, d\lambda_z \le C_4^2 D_j^2\,,$$

где $C_4^2 := (C_0^2C_1^2C_2^2 + 2C_3^2)M^2$. Поскольку функции $|f_{jn}|^2$ субгармоничны, окончательно имеем:

$$|f_{jn}(z)|^2 \le \frac{1}{\pi}\int_{|t-z|\le 1} |f_{jn}(t)|^2 \exp\big\{-2\widetilde{\psi}(t)\big\}\, d\lambda_t \cdot \exp \sup_{|t-z|\le 1} 2\widetilde{\psi}(t) \le$$
$$\le C_4^2 D_j^2 \exp\Big\{2(\widetilde{q}+\varepsilon)\omega\big(|z|+1\big) + 2(\widetilde{l}+l_0)\big(|\operatorname{Im} z|+1\big) + 4\ln\big(1+(|z|+1)^2\big)\Big\}.$$

На основании свойств веса ω, из этого вытекает, что

$$|f_{jn}(z)|^2 \le C_5^2 D_j^2 \exp\big\{2(\widetilde{q}+2\varepsilon)\omega(z) + 2(\widetilde{l}+l_0)|\operatorname{Im} z|\big\}\,,\ z\in\mathbb{C}\,, \qquad (4.2.19)$$

при всех $j\in\mathbb{N}$, $n=1,\dots,m_j$ и некотором $C_5 \ge C_4$ (C_5 не зависит от j,p,z).

Рассмотрим теперь D_j. Пусть $\widetilde{k}\in\mathbb{N}$ таково, что $14\varepsilon_k < \varepsilon$, $k\ge\widetilde{k}$. Снова используя лемму 2.2.3 для $q=\varepsilon$, $l=14L_0$ и ε, получаем, что при $L_1 = 2A+21L_0$ и некотором $C_6>1$ имеет место следующая оценка:

$$\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + 14L_0|\operatorname{Im} z| \le 2\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + 2L_1|\operatorname{Im} z_j| + \ln C_6\,,\ z\in U_j\,,\ j\in\mathbb{N}\,.$$

Следовательно,

$$14\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\widetilde{z}_j) + 14L_0|\operatorname{Im}\widetilde{z}_j| \le 2\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + 2L_1|\operatorname{Im} z_j| + \ln C_6\,,\quad j\ge j_{\widetilde{k}}\,.$$

Из этого вытекает, что

$$D_j^2 \le C_6^2 \exp\big\{-2(q-\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) - 2(l-L_1)|\operatorname{Im} z_j|\big\}\,,\ z\in\mathbb{C}\,,\ j\ge j_{\widetilde{k}}\,.$$

Здесь $l > 2A+21L_0 = L_1$, так что $l-L_1>0$.

Из (4.2.19) получаем, что для всех $z\in\mathbb{C}$ и $j\ge j_{\widetilde{k}}$

$$\frac{|f_{jn}(z)|}{\exp\big\{(\widetilde{q}+2\varepsilon)\omega(z) + (\widetilde{l}+l_0)|\operatorname{Im} z|\big\}} \le C_5C_6\exp\big\{-(q-\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) - (l-L_1)|\operatorname{Im} z_j|\big\}\,.$$

Значит, $\|f_{jn}\|_{\omega,\widetilde{q}+2\varepsilon,\widetilde{l}+l_0} \le C_5C_6\widetilde{|E_{jn}|}_{\omega,q-\varepsilon,l-L_1}$, $n=1,\dots,m_j$, $j\ge j_{\widetilde{k}}$. Напомним, что C_5 и C_6 не зависят от j и p; l_0 и L_1 определяются ω и μ; $\varepsilon>0$ — произвольное малое число.

Фактически мы показали, что для всех $q \in (0,p)$ и $l \in (0,\infty)$ существуют $\widetilde{q} \in (0,p)$, $\widetilde{l} \in (0,\infty)$ и $C > 0$, при которых

$$\|f_{jn}\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l}} \le C\widetilde{|E_{jn}|}_{\omega,q,l}\,,\ n = 1,\dots,m_j\,,\ j \ge j_{\widetilde{k}}\,. \tag{4.2.20}$$

Тем самым получены нужные оценки норм функций f_{jp}.

Завершая пункт (a) доказательства, полагаем $L(E_{jn}) := f_{jn}$.

(b) Продолжим оператор L на все пространство $k^{p,\infty}$. Пусть $x = \big([x_j]\big)_{j=1}^{\infty}$ — произвольный элемент из $k^{p,\infty}$. Его разложение по базису $\{E_{jn} : n = 1,\dots,m_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ имеет вид (4.2.8). Положим

$$Lx := \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m_j} < \nu_j, [x_{jn}] > f_{jn}\,. \tag{4.2.21}$$

Проверим, что данный оператор действует непрерывно из $k^{p,\infty}$ в $H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C})$. Зафиксируем $q \in (0,p)$ и $l \in (0,\infty)$. Если $\widetilde{|x|}_{\omega,q,l} < \infty$, то коэффициенты ряда (4.2.21) удовлетворяют оценкам (4.2.9). Возьмем какое-нибудь $\varepsilon \in \big(0, \frac{p-q}{2}\big)$. В силу (4.2.20), для $q+\varepsilon$ вместо q и $l+\varepsilon$ вместо l имеются $\widetilde{q} \in (0,p)$, $\widetilde{l} \in (0,\infty)$ и $C > 0$ такие, что $\|f_{jn}\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l}} \le C\widetilde{|E_{jn}|}_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m_j} \big| < \nu_j, [x_{jn}] > \big| \cdot \|f_{jn}\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l}} \le C\widetilde{|x|}_{\omega,q,l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{\exp\big\{\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + \varepsilon|\operatorname{Im} z_j|\big\}}\,.$$

Из сходимости последнего ряда вытекает непрерывность оператора $L : k^{p,\infty} \to H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C})$. При этом по построению оператор L является правым обратным к оператору $\widetilde{\rho}$. $\square$

Перейдем к доказательству основного результата параграфа — теоремы 4.2.1.

Предложение 4.2.3. *Пусть ω — неквазианалитическая весовая функция; $p \in (0,\infty)$; $\mu \in \widetilde{M}^1_{(\omega)}(\mathbb{C})$ — делитель пространства $H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C})$; $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ — последовательность нулей функции μ. Если оператор T_μ допускает ЛНПО, то выполнено условие (iv) теоремы 4.2.1.*

Доказательство. В доказательстве будем предполагать, что λ_s — нули функции $\check{\mu}$. Условие (iv) при этом, очевидно, останется неизменным. По предложению 4.2.1 в пространстве $H_{(\omega)}^{p,\infty}(\mathbb{C})$ имеется семейство функций $(g_s)_{s=1}^{\infty}$ такое, что $g_s(\lambda_s) = 1$, $s \in \mathbb{N}$, и что выполнено условие (A).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем произвольные $q \in (p-\varepsilon, p)$ и $l \in (0,\infty)$. Далее, найдем $q_1 \in (q,p)$, $l_1 \in (l,\infty)$ и $C_1 > 0$, при которых для всех $z \in \mathbb{C}$ и $s \in \mathbb{N}$

$$\ln|g_s(z)| + q\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + l|\operatorname{Im}\lambda_s| \le q_1\omega(\operatorname{Re} z) + l_1|\operatorname{Im} z| + C_1. \qquad (4.2.22)$$

Аналогично, для q и l_1+2 имеются $q_2 \in (q_1,p)$, $l_2 \in (l_1+2,\infty)$ и $C_2 > 0$ такие, что для любых $z \in \mathbb{C}$ и $s \in \mathbb{N}$

$$\ln|g_s(z)| + q\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + (l_1+2)|\operatorname{Im}\lambda_s| \le q_2\omega(\operatorname{Re} z) + l_2|\operatorname{Im} z| + C_2. \qquad (4.2.23)$$

Из условия (α) на вес ω вытекает, что для любого $q_3 \in (q_2,p)$ найдется $C_3 > 0$, при котором

$$q_2\omega(x+y) \le q_3\big(\omega(x)+\omega(y)\big) + C_3\,,\ x,y \ge 0\,. \qquad (4.2.24)$$

Наконец, по свойствам функции P_ω при некотором $C_4 > 0$ имеет место неравенство

$$P_\omega(iy) \le |y| + C_4\,,\ y \in \mathbb{R}. \qquad (4.2.25)$$

По принципу Фрагмена-Линделефа [58, 6.5.4] для всех $u+iv \in \mathbb{C}$ с $v \ne 0$,

$$\ln|g_s(u+iv)| \le \frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|g_s(t)|}{(u-t)^2+v^2}\,dt + |v|d_s\,,\ s \in \mathbb{N}\,, \qquad (4.2.26)$$

где $d_s = \limsup_{r\to\infty}\frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|g_s(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta$.

Рассмотрим d_s. Из (4.2.22) вытекает, что

$$\ln|g_s(re^{i\theta})| \le q_1\omega(r\cos\theta) + l_1 r|\sin\theta| + C_1\,,\ \ r>0\,,\ \theta \in [0,2\pi)\,.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|g_s(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \le \frac{4}{\pi r}\big(q_1\omega(r)+C_1\big) + l_1\,,\ r>0\,.$$

Поскольку $\frac{\omega(r)}{r} \to 0$, $r\to\infty$, заключаем, что $d_s \le l_1$, $s \in \mathbb{N}$.

Теперь оценим интегральное слагаемое в (4.2.26). В силу (4.2.23) имеем:

$$\ln|g_s(t)| + q\omega(\operatorname{Re}\lambda_s) + (l_1+2)|\operatorname{Im}\lambda_s| \le q_2\omega(t) + C_2\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Используя данное неравенство, а также оценки (4.2.24), (4.2.25), окончательно получаем, что

$$\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|g_s(t)|}{(u-t)^2+v^2}\,dt+q\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)+(l_1+2)|\operatorname{Im}\lambda_s|\le$$

$$\le q_2\cdot\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(t)}{(u-t)^2+v^2}\,dt+C_2=$$

$$=q_2\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(u+vt)}{t^2+1}\,dt+C_2\le q_3\cdot\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega(u)+\omega(vt)}{t^2+1}\,dt+C_2+C_3=$$

$$=q_3\omega(u)+q_3P_\omega(iv)+C_2+C_3\le q_3\omega(u)+|v|+C_5\,,$$

где $C_5:=C_2+C_3+C_4$.

Возвращаясь к (4.2.26), имеем, что для всех $u+iv\in\mathbb{C}$ с $v\ne0$ и всех $s\in\mathbb{N}$

$$\ln|g_s(u+iv)|\le q_3\omega(u)+(l_1+1)|v|+C_5-q\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)-(l_1+2)|\operatorname{Im}\lambda_s|.$$

Поскольку все функции непрерывны, то оценка верна всюду в $\mathbb{C}$. Взяв теперь $u+iv=\lambda_s$, с учетом условия $g_s(\lambda_s)=1$, $s\in\mathbb{N}$, получим, что

$$(q_3-q)\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)-|\operatorname{Im}\lambda_s|+C_5\ge0\,,\ s\in\mathbb{N}\,.$$

Здесь $q_3-q<1-q<\varepsilon$, так что

$$|\operatorname{Im}\lambda_s|\le\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\lambda_s)+C_5\,,\ s\in\mathbb{N}\,.$$

Доказательство завершено. □

Предложение 4.2.4. *Если выполнено условие (iv), то T_μ допускает ЛНПО.*

Доказательство. Из установленных в § 2.2 оценок на $\operatorname{diam}U_j$ и базовых свойств весовых функций вытекает эквивалентность условий (iv) и (4.2.3). Покажем, что при выполнении последнего условия имеется семейство $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ непрерывных субгармонических в $\mathbb{C}$ функций таких, что $u_j\big|_{U_j}\ge0$, $j\in\mathbb{N}$, и что

$$(\widetilde{B})\ \ \forall q\in(0,1)\,,\ \forall l\in(0,\infty)\,,\ \forall\widetilde{q}\in(q,1)\quad\exists C>0\ :$$
$$u_j(z)+q\omega(z_j)+l|\operatorname{Im}z_j|\le\widetilde{q}\omega(z)+|\operatorname{Im}z|+C\,,\ z\in\mathbb{C}\,,\ j\in\mathbb{N}\,.$$

В силу предложения 4.2.2, этого будет достаточно для того, чтобы T_μ имел ЛНПО.

По лемме 4.1.1 имеется непрерывная субгармоническая функция v такая, что $v(0) = 0$ и что

$$v(z) \leq |\operatorname{Im} z| - q\omega(z) + C\,,\ z \in \mathbb{C}\,,$$

при всех $q \in (0,p)$ и некотором $C = C(q) > 0$. Положим $u_j(z) := \sup_{t\in U_j} v(z-t)$, $z \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда u_j непрерывны и субгармоничны в $\mathbb{C}$, причем $u_j(z) \geq v(0) = 0$ для $z \in U_j$.

Покажем, что семейство $(u_j)_{j=1}^\infty$ удовлетворяет условию $(\widetilde{B})$. Зафиксируем $q \in (0,p)$, $l \in (0,\infty)$ и выберем q_1, q_2: $q < q_1 < q_2 < p$. Для q_2 найдем $C_2 > 0$ такое, что

$$v(z) \leq |\operatorname{Im} z| - q_2\omega(z) + C_2 \leq |\operatorname{Im} z| - q_2\omega(\operatorname{Re} z) + C_2\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Далее, в силу условия (α) на вес ω,

$$q_1\omega(x+y) \leq q_2\big(\omega(x) + \omega(y)\big) + C_1\,,\ x, y \geq 0\,,$$

при некотором $C_1 > 0$. Из этого вытекает, что

$$q_2\omega(x-y) \geq q_1\omega(x) - q_2\omega(y) - C_1\,,\ x, y \geq 0\,.$$

Следовательно, для всех $z, t \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} v(z-t) &\leq |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} t| - q_2\omega(\operatorname{Re} t - \operatorname{Re} z) + C_2 \leq \\ &\leq |\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Im} t| - q_1\omega(\operatorname{Re} t) + q_2\omega(\operatorname{Re} z) + C_1 + C_2\,. \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

По лемме 4.2.1 существует $C_3 > 0$, при котором

$$q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| + |\operatorname{Im} t| \leq q_1\omega(\operatorname{Re} t) + C_3\,,\ t \in U_j\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Следовательно, оценка (4.2.27) продолжается следующим образом:

$$v(z-t) \leq q_2\omega(\operatorname{Re} z) + |\operatorname{Im} z| - \big(q\omega(\operatorname{Re} z_j) - l|\operatorname{Im} z_j|\big) + C\,,$$

Отсюда получаем, что

$$u_j(z) + q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \leq q_2\omega(\operatorname{Re} z) + |\operatorname{Im} z| + C\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Предложение доказано. □

Поскольку необходимое и достаточное условие наличия ЛНПО для оператора T_μ в пространствах $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(I)$ и $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ в итоге совпали, то в качестве примеров, иллюстрирующих теорему 4.2.1, можно рассмотреть примеры, приведенные в конце предыдущего параграфа. Дополнительно можно взять также функцию $\mu(z) = \sin z$, которая является символом оператора свертки только в случае пространств на числовой прямой и которая была рассмотрена в примере 1.5.1. Применив теорему 4.2.1, получим, что разностное уравнение

$$\frac{1}{2i}\big(f(x+1) - f(x-1)\big) = g(x)$$

имеет решение f в $\mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$, линейно и непрерывно зависящее от правой части $g \in \mathcal{E}^p_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любом неквазианалитическом весе ω.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе установлены критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Берлинга УДФ нормального типа на числовой прямой и на конечном интервале. Основное необходимое и достаточное условие сюръективности сформулировано через оценки снизу на символ оператора и названо условием медленного убывания символа относительно веса, задающего пространство, в нормальном смысле. Данное условие отличается от условия медленного убывания в максимальном смысле, которое возникало при изучении операторов свертки в пространствах Берлинга УДФ максимального типа. Одновременно полученные критерии представляют собой теоремы деления в сопряженных пространствах целых функций со смешанными весовыми оценками.

В работе также изучен образ несюръективного оператора свертки в пространствах Берлинга нормального типа: установлены условия, при которых указанный образ содержит в себе аналогичное пространство, задаваемое другим весом и имеющее другой тип. Полученный результат кардинально отличается от известного ранее результата для пространств Берлинга максимального типа.

Получены критерии сюръективности операторов свертки в пространствах Румье УДФ и УР нормального типа. В пространствах Румье УР необходимым и достаточным условием является медленное убывание символа в нормальном смысле, а в пространствах Румье УДФ — медленное убывание символа в нормальном смысле и определенное расположение нулей символа на комплексной плоскости.

Далее, в работе построены абсолютные базисы в пространствах всех решений однородных уравнений свертки в пространствах УДФ Берлинга и Румье нормального типа. Кроме того, для неоднородных уравнений в пространствах Берлинга доказано существование частных решений определенного вида.

Решен вопрос о существовании у разрешимых уравнений свертки в пространствах нормального типа решений, линейно и непрерывно зависящих от правой части уравнения, или, другими словами, о существовании линейных непрерывных правых обратных к операторам свертки в указанных пространствах. Основные необходимые и достаточные условия формулируются в терминах нулей символа оператора или уравнения.

Несмотря на то что проведенные исследования операторов и уравнений свертки в пространствах УДФ нормального типа в определенной степени носят завершенный характер, имеются и некоторые интересные нерешенные задачи в данном направлении. Среди них можно отметить, во-первых, не совсем понятную в общем случае взаимосвязь между множеством всех символов операторов свертки в пространствах Берлинга и Румье УДФ нормального типа на числовой прямой. Во-вторых, представляется интересным доказать для неоднородных уравнений свертки в пространствах Румье УДФ существование частных решений определенного вида. Эта задача связана с некоторыми трудностями, возникающими на пути построения абсолютно представляющих систем в пространствах со сложной топологической структурой. Отдельным направлением исследования также может быть изучение операторов свертки в пространствах Берлинга УР нормального типа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованных источников

1. Абанин А. В. О некоторых признаках слабой достаточности / А. В. Абанин // Матем. заметки. – 1986. – Т. 47, № 3. – С. 485–500.

2. Абанин А. В. О продолжении и устойчивости слабо достаточных множеств / А. В. Абанин // Изв. вузов. Матем. – 1987. – Т. 299, № 4. – С. 3–10.

3. Абанин А. В. Густые пространства и аналитические мультипликаторы / А. В. Абанин // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 1994. – № 4. – С. 3–10.

4. Абанин А. В. Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы / А. В. Абанин // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57, № 4. – С. 483–497.

5. Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения / А. В. Абанин. – М.: Наука, 2007. – 222 с.

6. Абанин А. В. Ω-ультрараспределения / А. В. Абанин // Изв. РАН. Сер. матем. – 2008. – Т. 72, № 2. – С. 3—38.

7. Абанин А. В., Тищенко Е. С. Пространства ультрадифференцируемых функций и обобщение теоремы Пэли-Винера-Шварца / Абанин А. В., Е. С. Тищенко // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 1997. – № 2. – С. 5–8.

8. Абанин А. В., Налбандян Ю. С., Шабаршина И. С. Продолжение бесконечно дифференцируемых функций до целых с согласованными оценками роста и теоремы Пэли-Винера-Шварца / А. В. Абанин, Ю. С. Налбандян, И. С. Шабаршина // Владикавк. матем. журн. – 2004. – Т. 6, № 2. – С. 3–9.

9. Абанин А. В., Филипьев И. А. Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций / А. В. Абанин, И. А. Филипьев // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47, № 3. – С. 485–500.

10. Абанин А. В., Ле Хай Хой. Линейный непрерывный правый обратный оператор для оператора свертки в пространствах голоморфных функций по-

линомиального роста / А. В. Абанин, Ле Хай Хой // Изв. вузов. Матем. – 2015. – № 1. – С. 1–11.

11. Абанина Д. А. О классах весов, используемых при определении пространств ультрадифференцируемых функций // Д. А. Абанина // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки. – 2005. – № 1. – С. 3–7.

12. Абузярова Н. Ф. Инвариантные подпространства в неквазианалитических пространствах Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале / Н. Ф. Абузярова // Изв. вузов. Матем. – 2023. – № 11. – С. 86–91.

13. Абузярова Н. Ф., Фазуллин З. Ю. О главных подмодулях в модулях целых функций, двойственных к пространствам Ω-ультрадифференцируемых функций / Н. Ф. Абузярова, З. Ю. Фазуллин // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. – 2025. – Т. 523. – С. 3–9.

14. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства / Н. Бурбаки. – М.: Изд. иностр. лит-ры, 1959. – 411 с.

15. Гротендик А. О пространствах (F) и (DF) / А. Гротендик // Математика. – 1958. – Т. 2, № 3. – С. 81–128.

16. Епифанов О. В. Вариации слабо достаточных множеств в пространствах аналитических функций / О. В. Епифанов // Изв. вузов. Матем. – 1986. – № 7. – С. 50–56.

17. Епифанов О. В. О разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов / О. В. Епифанов // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51, № 1. – С. 83–92.

18. Жаринов В. В. Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS / В. В. Жаринов // УМН. – 1979. – Т. 34, № 4. – С. 97–131.

19. Коробейник Ю. Ф. Об одной двойственной задаче. 1. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше / Ю. Ф. Коробейник // Матем. сб. – 1975. – Т. 97. – С. 193–229.

20. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1978. – Т. 42, № 2. – С. 325–355.

21. Коробейник Ю. Ф. Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50, № 3. – С. 539–565.

22. Коробейник Ю. Ф. О мультипликаторах весовых функциональных пространств / Ю. Ф. Коробейник // Anal. Math. – 1989. – Т. 15, № 2. – С. 105–114.

23. Коробейник Ю. Ф. О правом обратном для оператора свертки, действующего в пространствах ростков на связных множествах в C / Ю. Ф. Коробейник // Матем. сб. – 1996. – Т. 187, № 1. – С. 55–82.

24. Красичков-Терновский И. Ф. Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона / И. Ф. Красичков-Терновский // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24, № 4. – С. 531–546.

25. Кривошеев А. С. Базис Шаудера в пространстве решений однородного уравнения свертки / А. С. Кривошеев // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57, № 1. – С. 57–71.

26. Леонтьев А. Ф. Дифференциально-разностные уравнения / А. Ф. Леонтьев // Матем. сб. – 1949. – Т. 24. – С. 347–374.

27. Леонтьев А. Ф. О представлении произвольных функций рядами Дирихле / А. Ф. Леонтьев // ДАН СССР. – 1965. – Т. 164, № 1. С. 40–42.

28. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1976.

29. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

30. Левин Б. Я. Дополнения и исправления к книге «Распределение корней целых функций» / Б. Я. Левин. –Харьков, 1978.

31. Иванова О. А., Мелихов С. Н. Об обратимости оператора Дюамеля в пространствах ультрадифференцируемых функций / О. А. Иванова, С. Н. Мелихов // Уфимск. матем. журн. – 2023. – Т. 15, № 4. – С. 61–74.

32. Мелихов С. Н., Ханина Л. В. Аналитические решения уравнений свертки на выпуклых множествах в комплексной плоскости с препятствием, открытым на границе / С. Н. Мелихов, Л. В. Ханина // Матем. сб. – 2020. – Т. 211, № 7. – С. 121–150.

33. Митягин Б. С., Хенкин Г. М. Линейные задачи комплексного анализа / Б. С. Митягин, Г. М. Хенкин // УМН. – 1971. – V. XXVI, № 4. – С. 93–152.

34. Мусин И. Х. О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций / И. Х. Мусин // Матем. сб. – 2000. – Т. 191, № 10. – С. 57–86.

35. Мусин И. Х. Теорема Пэли-Винера для весового пространства бесконечно дифференцируемых функций / И. Х. Мусин // Изв. РАН. Сер. Мат. – 2000. – Т. 64, № 6. – С. 181–204.

36. Мусин И. Х. О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ / И. Х. Мусин // Матем. сб. – 2004. – Т. 195, № 10. – С. 83–108.

37. Мусин И. Х. О пространствах периодических ультрадифференцируемых функций типа Румье и его сопряженном / И. Х. Мусин // Изв. вузов. Матем. – 2023. – № 4. – С. 89–95.

38. Напалков В. В., О базисе в пространстве решений уравнения свертки / В. В. Напалков // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 1. – С. 44–55.

39. Паламодов В. П. Функтор проективного предела в категории топологических линейных пространств / В. П. Паламодов // Матем. сб. – 1968. – Т. 75(117), № 4. – С. 567–603.

40. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства / А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон. – М.: Мир, 1967. – 257 с.

41. Саранчук Ю.Ċ., Шишкин А. Б. Общее элементарное решение однородного уравнения типа q-сторонней свертки / А. Б. Шишкин, Ю. С. Саранчук // Алгебра и анализ. – 2022. – Т. 34, № 4. – С. 188–213.

42. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1968.

43. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

44. Шерстюков В. Б. О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями / В. Б. Шерстюков // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82, № 4. – С. 621–630.

45. Шерстюков В. Б. Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации / В. Б. Шерстюков // Матем. сб. – 2015. – Т. 206, № 9. – С. 139–180.

46. Эдвардс Р. Функциональный анализ / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1969. – 1072 с.

47. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций / Р. С. Юлмухаметов // Anal. Math. – 1985. – V. 11, № 3. – С. 257–282.

48. Abanin A. V. On Whitney's extension theorem for spaces of ultradifferentiable functions / A. V. Abanin // Math. Ann. – 2001. – V. 320. – P. 115–126.

49. Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi. Exponential-polynomial bases for null spaces of convolution operators in $A^{-\infty}$ / A. V. Abanin, R. Ishimura, Le Hai Khoi // Contemp. Math. – 2011. – V. 547. – P. 1–15.

50. Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Hoi. Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains / A. V. Abanin, R. Ishimura, Le Hai Khoi // Ark. Mat. – 2012. – V. 50. – P. 1–22.

51. Abanin A. V., Tien P. T. Almost subadditive weight functions form Braun-Meise-Taylor theory of ultradistributions / A. V. Abanin, P. T. Tien // J. Math. Anal. Appl. – 2010. – V. 363. – P. 296–301.

52. Abanin A.V., Pham Trong Tien. Continuation of holomorphic functions and some of its applications / A. V. Abanin, P. T. Tien // Studia Math. – 2010. – V. 200. – P. 279–295.

53. Abanina D. A. On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type / D. A. Abanina // Results Math. – 2003. – V. 44. – P. 195–213.

54. Abuzyarova N. F., Fazullin Z. Yu. Invariant subspaces in non-quasianalytic spaces of Ω-ultradifferentiable functions on an interval / N. F. Abuzyarova, Z. Yu. Fazullin // Eurasian Math. J. – 2024. – V. 15, № 3. – P. 9–24.

55. Baernstein II A. Representation of holomorphic functions by boundary integrals / A. Baernstein II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 160. – P. 27–37.

56. Berenstein C. A., Taylor B. A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable / C. A. Berenstein, B. A. Taylor // Adv. in Math. – 1979. – V. 33. – P. 109–143.

57. Björck G. Linear partial differential operators and generalized distributions / G. Bjorck // Ark. Mat. – 1965. – V. 6. – P. 351–407.

58. Boas R. Entire functions / R. Boas. – NY: Academic Press, 1954. – 276 p.

59. Boiti C., Jornet D., Oliaro A. Regularity of partial differential operators in ultradifferential spaces and Wigner type transforms / C. Boiti, D. Jornet, A. Oliaro // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – V. 446, № 1. – P. 920–944.

60. Bonet J., Fernandez C., Meise R. Operators of solution for convolution equations / J. Bonet, C. Fernandez, R. Meise // Note Mat. – 1997. – V. 17. – P. 1—12.

61. Bonet J., Galbis A. The range of non-surjective convolution operators on Beurling spaces / J. Bonet, A. Galbis // Glasgow Math. J. – 1996. – V. 38. – P. 125–135.

62. Bonet J., Meise R., Taylor B. A. Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Roumieu type / J. Bonet, R. Meise, B. A. Taylor // Proc. R. Ir. Acad. – 1989. – V. 89A. – P. 53–66.

63. Borel E. Sur quelques points de la théorie des fonctions / E. Borel // Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. – 1985. – № 12. – P. 9–55.

64. Braun R. W., Meise R., Taylor B. A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis / R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor // Results Math. – 1990. – V. 17. – P. 206–237.

65. Braun R. W., Meise R., Vogt D. Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultradifferentiable functions / R. W. Braun, R. Meise, D. Vogt // Proc. London Math. Soc. – 1990. – V. 61. – P. 344–370.

66. Cioranescu I., Zsido L. ω-ultradistributions and their applications to operator theory / I. Cioranescu, L. Zsido // Spectral Theory. – Warsaw, Banach Center Publ. – 1982. – V. 8. – P. 77–220.

67. Ehrenpreis L. Solutions of some problems of division. V. Hyperbolic operators / L. Ehrenpreis // Am. J. Math. – 1962. – V. 84. – P. 324–348.

68. Franken U. Continuous linear extension of ultradifferentiable functions of Beurling type / U. Franken // Math. Nachr. – 1993. – V. 164. – P. 119–139.

69. Hörmander L. On the range of differential and convolution operators / L. Hörmander // Ann. of Math. – 1962. – V. 76. – P. 148–170.

70. Hörmander L. Generators for some rings of analytic functions / L. Hörmander // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. P. 943–949.

71. Jimenez-Garrido J., Nenning D. N, Schindl G. On generalized definitions of ultradifferentiable classes / J. Jimenez-Garrido, D. N. Nenning, G. Schindl // J. Math. Anal. Appl. –2023. – V. 526. – P. 127–260.

72. Kelleher J. J., Taylor B. A. Finitely generated ideals in rings of analytic functions / J. J. Kelleher, B. A. Taylor // Math. Ann. – 1971. – V. 193. – P. 225–237.

73. Komatsu H. Ultradistributions. Pt. I. Structure theorems and a characterization / H. Komatsu // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA, Math. – 1973. – V. 20, № 1. – P. 25–105.

74. Komatsu H. Ultradistributions. Pt. II. The kernel theorem and ultradistrinutions with support in a submanifold / H. Komatsu // Ibid. – 1977. – V. 24, № 3. – P. 607–628.

75. Korobeinik Yu. F. On absolutely representing systems in spaces of infinitely differentiable functions / Yu. F. Korobeinik // Studia Math. – 2000. – V. 139, № 2. – P. 175–188.

76. Korobeinik Yu. F. Absolutely representing systems of esponentials in the spaces of infinitely-differentiable functions / Yu. F. Korobeinik // Turk. J. Math. – 2001. – V. 25. – P. 503–517.

77. Langenbruch M. Continuous linear right inverses for convolution operators in spaces of real analytic functions / M. Langenbruch // Studia Math. – 1994. – V. 110. – P. 65–82.

78. Langenbruch M. Differentiable Functions and the $\overline{\partial}$-Complex / M. Langenbruch // Functional Analysis: Proceedings of the Essen Conference (Edited by Bierstedt K.D., Pietsch A., Vogt D.) – Marcel Dekker, Inc.: New York. –1993. – P. 415–434.

79. Malgrange B. Existence et approximationdes solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution / B. Malgrange // Ann. Inst. Fourier Grenoble. – 1955-56. – V. 6. – P. 271–355.

80. Mandache N. A Paley-Wiener theorem and pseudolocal operators / N. Mandache // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 1990. – V. 35. – P. 321–328.

81. Meise R. Sequence space representation for (DFN)-algebras of entire functions modulo closed ideals / R. Meise // J. Reine Angew. Math. – 1985. – V. 363. – P. 59–95.

82. Meise R., Taylor B. A., Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type / R. Meise, B. A. Taylor // Ark. Mat. – 1988. – V. 26. – P. 265–287.

83. Meise R. Sequence space representations for zero-solutions of convolution equations on ultradifferentiable functions of Roumieu type / R. Meise // Studia Math. – 1989. – V. 92. – P. 211–230.

84. Meise R., Taylor B. A. Linear extension operators for ultradifferentiable functions of Beurling type on compact sets / R. Meise, B. A. Taylor // Amer. J. Math. – 1989. – V. 111. – P. 309–337.

85. Meise R., Schwerdtfeger K., Taylor B. A. On kernels of slowly decreasing convolution operators / R. Meise, K. Schwerdtfeger, B. A. Taylor // Doğa Mat. – 1986. –V. 10, № 1. – P. 176–197.

86. Meise R., Taylor B. A., Vogt D. Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions / R. Meise, B. A. Taylor, D. Vogt // Indiana Univ. Math. J. – 1987. – V. 36, № 4. – P. 729–756.

87. Meise R., Vogt D. Characterization of convolution operators on spaces of C^∞-functions admitting a continuous linear right inverse / R. Meise, D. Vogt // Math. Ann. – 1987. – V. 279. – P. 141–155.

88. Meise R., Vogt D. Introduction to functional analysis / R. Meise, D. Vogt. – Oxford Clarendon Press, 1997. – 438 p.

89. Melikhov S. N., Momm S. Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary / S. N. Melikhov, S. Momm // Math. Scand. – 2000. – V. 86. – P. 293–319.

90. Meyer T. Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentialble functions of Roumieu type / T. Meyer // Studia Math. – 1997. – V. 125, № 2. – P. 101–129.

91. Momm S. Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras / S. Momm // Arch. Math. – 1992. – V. 58. – P. 47–55.

92. Momm S. Convolution equations on the analytic functions on convex domains in the plane / S. Momm // Bull. Sci. Math. – 1994. – V. 118, № 3. – P. 259–270.

93. Petzsche H. J., On E.Borel's theorem / H. J. Petzsche // Math. Ann. – 1988. – V. 282. – P. 292–313.

94. Roumieu C. Sur quelques extensions de la notion de distribution / C. Roumieu // Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. Sér. 3. – 1960. – V. 77, № 1. – P. 41–121.

95. Roumieu C. Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables / C. Roumieu // J. Anal. Math. – 1962/1963. – V. 10. – P. 153–192.

96. Schindl G. On the class of almost subadditive weight functions / G. Schindl // J. Math. Anal. Appl. – 2024. –V. 541. 128682.

97. Schneider D. M. Sufficient sets for some spaces of entire functions / D. M. Schneider // Trans. Amer. Math. – 1974. – V. 197. – P. 161–180.

98. Vogt D. Lectures on projective spectra of (DF)-spaces / D. Vogt. – Universitat Wuppertal, 1987. – 37 p.

99. Whitney H. Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets / H. Whitney // Trans. Amer. Math. Soc. – 1934. – V. 36. – P. 63–89.

Публикации автора по теме диссертации

100.Абанин А. В., Абанина (Полякова) Д. А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций / А. В. Абанин, Д. А. Абанина // Владикавказский математический журнал. – 2010. – Т. 12, № 3. – С. 3–20.

101.Абанина (Полякова) Д. А. Представление решений уравнений свертки в неквазианалитических классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа / Д. А. Абанина // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2011. – № 6. – С. 3–11.

102.Абанина (Полякова) Д. А. Экспоненциально-полиномиальный базис в пространстве решений однородного уравнения свертки на классах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Абанина // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Т. 13, № 4. – С. 3–17.

103.Абанина (Полякова) Д. А. Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале / Д. А. Абанина // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 3. – С. 477–494.

104.Абанина (Полякова) Д. А. О существовании решения уравнения свертки, линейно и непрерывно зависящего от правой части / Д. А. Абанина // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2012. – № 6. – С. 13–15.

105.Полякова Д. А. О линейном непрерывном правом обратном к оператору свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 4. – С. 548–566.

106.Полякова Д. А. О решениях уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Алгебра и анализ. – 2014. – Т. 26, № 6. – С. 121–142.

107.Полякова Д. А. О разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в пространствах функций с системой равномерных весовых оценок / Д. А. Полякова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 10. – С. 77–82.

108.Полякова Д. А. О разрешимости неоднородного уравнения Коши-Римана в проективных весовых пространствах / Д. А. Полякова // Сибирский математический журнал. – 2017. – Т. 58, № 1. – С. 185–198.

109.Полякова Д. А. О частном решении неоднородного уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Владикавказский математический журнал. – 2018. – Т. 20, № 4. – С. 67–75.

110.Полякова Д. А. Общее решение однородного уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Алгебра и анализ. – 2019. – Т. 31, № 1. – С. 114–142.

111.Polyakova D. A. On continuous linear right inverse to convolution operator / D. A. Polyakova // Operator Theory and Differential Equations. Trends in Mathematics. – Birkhauser, 2021. – P. 163–184.

112.Полякова Д. А. Об образе оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций / Д. А. Полякова // Алгебра и анализ. – 2024. – Т. 36, № 2. – С. 108–130.

113.Полякова Д. А. Описание ядра оператора свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Румье / Д. А. Полякова // Владикавказский математический журнал. – 2024. – Т. 26, № 3. – С. 72–85.

114.Полякова Д. А. Сюръективность операторов свертки в пространствах Румье ультрадифференцируемых функций и ультрараспределений нормального типа / Д. А. Полякова // Алгебра и анализ. – 2025. – Т. 37, № 6. – С. 158–183.