

ОТЗЫВ

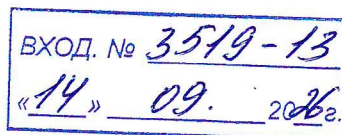
официального оппонента на диссертационную работу
Поляковой Дарьи Александровны
«Операторы и уравнения свертки в пространствах
ультрадифференцируемых функций нормального типа», представленную
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Пространства ультрадифференцируемых функций, конструкция которых восходит к работам Берлинга, Бьорка и Румье 1960-х годов, представляют собой очень естественный и важный для приложений класс функциональных пространств. Это пространства бесконечно дифференцируемых функций с ограничениями на рост производных, определяемыми фиксированной весовой функцией. Пространства Берлинга представляют собой проективный предел банаховых пространств, в то время как пространства Румье имеют смешанную проективно-индуктивную топологию. Исследованию этих пространств и действующих в них операторов посвящено большое количество работ. Особую роль при этом играют операторы свертки, включающие в себя как частные случаи дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, дифференциально-разностные и интегродифференциальные операторы. Отметим работы Х. Коматсу, Р. Брауна, Р. Майзе, Б.А. Тейлора, Д. Фогта, М. Лангенбруха, Т. Майера, А.В. Абанина, С.Н. Мелихова, О.А. Ивановой, Н.Ф. Абузяровой, З.Ю. Фазуллина, И.Х. Мусина. Таким образом, тематика, связанная с пространствами Берлинга и Румье, актуальна и привлекает внимание известных специалистов.

Диссертация посвящена построению теории пространств Берлинга и Румье нормального типа. В этом случае в конструкцию добавляется еще один параметр p (тип). Классические пространства Берлинга и Румье включаются в эту шкалу соответственно как пространства максимального (бесконечного) и минимального (нулевого) типа. Цель диссертации состоит в развитии теории, аналогичной теории классических пространств Берлинга и Румье. Эта задача очень нетривиальна и требует преодоления многих трудностей не только технического, но, прежде всего, идейного характера. Одно из главных препятствий заключается в отсутствии мультипликативной структуры – в отличие от стандартных пространств, пространства Берлинга и Румье нормального типа, а также сопряженные к ним пространства целых функций не являются алгебрами относительно поточечного умножения.

В диссертации решены фундаментальные задачи теории операторов свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций, такие как сюръективность оператора свертки в пространствах Берлинга и Румье нормального типа, достаточные условия разрешимости уравнения в несюръективном случае, представление функций из ядра оператора свертки в пространстве Берлинга в виде абсолютно сходящихся рядов из линейных комбинаций элементарных решений, нахождение частного решения неоднородного уравнения свертки, критерии наличия линейных непрерывных правых обратных для сюръективных операторов свертки в пространствах Берлинга.

Одним из основных методов исследования является переход (посредством оператора Фурье–Лапласа) к исследованию соответствующей задачи в сопряженном пространстве, состоящем из целых функций с ограничениями на рост, что позволяет



применять глубоко разработанный аппарат теории роста целых функций. Также, при изучении операторов свертки в пространствах Румье важную роль играет возможность продолжения операторов свертки на более широкие пространства ультра-распределений.

Приведем краткий обзор основных результатов диссертации. В главе 1 (теоремы 1.3.1 и 1.3.2) получены критерии сюръективности оператора свертки в пространствах Берлинга и Румье нормального типа на отрезке и прямой. В обоих случаях критерием является некоторое свойство “медленного убывания” целой функции – символа оператора свертки (мультипликатора сопряженного пространства) относительно порождающей весовой функции. Доказательство этих результатов основано на глубоких методах комплексного анализа и тонких оценках целых функций. В параграфе 1.4 в несюръективном случае найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы образ содержал другое пространство Берлинга нормального типа, что дает достаточные условия разрешимости уравнения свертки. Также хотелось бы отметить красивую теорему 1.2.1, дающую условие того, что оператор свертки является дифференциальным оператором бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, и конкретные примеры параграфа 1.5.

В главе 2 изучена структура ядра оператора свертки в сюръективном случае. Очевидно, ядро порождается элементарными решениями – экспонентами и экспоненциальными мономами, отвечающими нулям символа (с точностью до симметрии). Условие медленного убывания позволяет разбить эти нули на группы так, чтобы некоторые линейные комбинации элементарных решений, отвечающих нулям из одной группы, образовали абсолютный базис в ядре. Также получены разложения решений неоднородного уравнения свертки. При этом строится слабо достаточное множество для сопряженного пространства и применяются результаты Ю.Ф. Коробейника о связи между слабо достаточными множествами и абсолютно представляющими системами.

В главе 3 рассматриваются уравнения свертки в пространствах Румье нормального типа. В теореме 3.2.1 найдено явное описание мультипликаторов сопряженного пространства (то есть символов операторов свертки). Важную роль при этом играет результат о разрешимости неоднородного уравнения Коши–Римана в проективных весовых пространствах. В теоремах 3.3.2 и 3.3.3 показано, что если символ оператора свертки в пространстве Румье медленно убывает относительно веса в нормальном смысле, то ядро топологически изоморфно некоторому пространству последовательностей, и в нем имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций элементарных решений, отвечающих нулям из одной группы (группы те же, что и в случае пространств Берлинга). Наконец, в параграфах 3.4 и 3.5 установлены критерии сюръективности операторов свертки в пространствах ультрараспределений и в пространствах Румье нормального типа соответственно.

В главе 4 найден критерий существования линейного непрерывного правого обратного оператора у сюръективного оператора свертки в пространствах Берлинга нормального типа в терминах нулей символа.

В диссертационной работе Д.А. Поляковой построена глубокая теория операторов свертки для нового класса пространств ультрадифференцируемых функций. Большая часть результатов имеет заверченный и окончательный вид. Диссертационную работу Д.А. Поляковой следует оценить как крупное достижение в области анализа.

Работа написана четко и аккуратно. Все основные результаты снабжены полными

1. Описание пространства, сопряженного (посредством преобразования Фурье-Лапласа) с пространством Берлинга, является стандартным, но все же было бы желательно дать ссылку.

2. В доказательстве предложения 3.4.1 (стр. 179) упоминается канонический вес, ассоциированный с последовательностью. Следовало бы дать какие-то пояснения, а не просто ссылки.

3. На стр. 164 было бы желательно расшифровать обозначение $D(\mathbb{R})$, хотя оно и стандартное.

Также хотелось бы задать вопрос. В работах А.В. Абанина были введены более общие классы ультрадифференцируемых функций, определяемые не одним весом, а последовательностью весов. Наверное, значительная часть результатов диссертации допускает обобщение на этот класс пространств?

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
Баранов Антон Дмитриевич

5 сентября 2026 г.

Контактные данные:

Рабочий тел.: +7(812) 328-97-01, e-mail: anton.d.baranov@gmail.com

Специальность, по которой официальным оппонентом

защита диссертация:

01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Адрес места работы:

199034, Северо-Западный федеральный округ,

г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, дом 7/9

Тел.: +7(812) 328-20-00; e-mail: spbu@spbu.ru

Личную подпись
А. Д. Барацове
заверяю
И.О. начальника отдела кадров
И.И. Константинова

3

3

Документ подготовлен
в порядке исполнения
трудовых обязанностей