

Отзыв официального оппонента

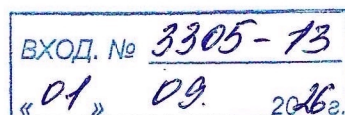
на диссертацию Поляковой Дарьи Александровны “Операторы и уравнения свёртки в пространствах ультрадифференцируемых функций нормального типа”, представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена активно развивающемуся с середины прошлого века направлению анализа, связанному с изучением пространств ультрадифференцируемых функций (УДФ), ультрараспределений (УР) и свойств операторов, действующих в таких пространствах. У истоков тематики стояли исследования Э. Бореля, Ж. Адамара, М. Жевре, А. Данжуа, Т. Карлемана, приведшие к созданию теории квазианалитических функций. Классический этап теории УДФ и УР сформировался благодаря работам Ш. Румье, Х. Коматсу, А. Бёрлинга, Г. Бьорка. К концу двадцатого столетия усилиями, в первую очередь, Р. Брауна, Р. Майзе, Б. А. Тейлора был разработан универсальный подход к построению классов ультрадифференцируемых функций с помощью весовых функций. Большое значение в развитии классического подхода А. Бёрлинга сыграл цикл работ А. В. Абанина, подытоженных в его монографии «Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения» (М.: Наука, 2007 год), где решающую роль в построениях играет скорость убывания на бесконечности преобразований Фурье пробных функций, а получаемые на этом пути пространства шире, чем во всех упомянутых выше теориях.

Исторически пространства УДФ делятся на два основных класса: пространства Бёрлинга и пространства Румье. Первые являются пространствами Фреше, а вторые наделяются более сложной проективно-индуктивной топологией. В современной шкале таких пространств важное место занимают так называемые пространства нормального типа, появившиеся относительно недавно и ещё недостаточно изученные. Пространства нормального типа и свойства операторов свёртки, действующих в таких пространствах, и составляют основной предмет диссертационного исследования Д. А. Поляковой. Тем самым тематика работы органично встроена в широкий контекст теории обобщённых функций и теории операторов, безусловна актуальна и имеет связи с востребованными в приложениях разделами функционального анализа, теории приближений, теории дифференциальных уравнений.

Диссертация общим объёмом в 238 стр. состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 114 наименований. Кратко опишем содержание работы, выделяя только её ключевые положения.

В первой главе рассматриваются пространства Бёрлинга УДФ нормального типа и операторы свёртки в них. Основной результат — критерий сюръективности такого оператора — получен в теореме 1.3.1 (случай задания функций на прямой) и в теореме 1.3.2 (случай задания функций на конечном интервале). Используемые термины позволяют, в частности, трактовать каждый из этих результатов как теорему деления в соответствующем пространстве целых функций, изоморфно реализующем сильное сопряжённое к исходному пространству



УДФ. Более того, обсуждаемый критерий формулируется также на языке «геометрических» условий поведения на комплексной плоскости символа оператора свёртки по отношению к весовой функции, задающей пространство УДФ. Нахождение означенного асимптотического описания является очень трудной аналитической задачей, успешно решённой диссертантом.

Уравнениям свёртки в тех же пространствах Бёрлинга УДФ нормального типа на прямой и на конечном интервале отведена вторая глава. Её центральные результаты составляют теорема 2.1.3 (об описании ядра оператора свёртки) и теорема 2.2.2 (построение частного решения специального вида для неоднородного уравнения свёртки). В этой части работы эффективно выбираются подходящие покрытия нулевого множества символа оператора свёртки, привлекаются слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы экспонент.

Третья глава посвящена задачам, близким к тем, что решены в первых двух главах. Но теперь основным «полигоном» является пространство Румье УДФ нормального типа в связке с пространством Румье УР нормального типа. Ситуация заметно усложняется, и несмотря на прежние наработки, диссертанту приходится дополнительно преодолевать не только серьёзные трудности топологического характера, но и, например, доказывать аналог результата Л. Хёрмандера о разрешимости $\bar{\partial}$ -задачи для пространств функций с системой весовых оценок. В связи с упомянутым аналогом выделяется такой класс проективных весовых функциональных последовательностей, что в соответствующем пространстве измеримых функций условия разрешимости $\bar{\partial}$ -задачи оказываются проверяемыми на практике (в отличие от полученных в более общих ситуациях условий из работ О. В. Епифанова и М. Лангенбруха).

Основная часть диссертации завершается сравнительно небольшой четвёртой главой, в которой (теоремы 4.1.1, 4.2.1) решён вопрос о существовании линейного непрерывного правого обратного к оператору свёртки в пространствах УДФ нормального типа (как на интервале, так и на прямой). Очень важно, что набор (эквивалентных друг другу) необходимых и достаточных условий включает наглядное условие, связывающее поведение весовой функции с распределением нулей символа оператора свёртки. Это обстоятельство позволяет для конкретных весов, применяемых в приложениях, предъявлять уравнения свёртки, решения которых непрерывно зависят от правой части.

Все утверждения, выносимые на защиту, являются новыми и снабжены подробными доказательствами. За редким исключением теоремы автора выражены в форме критериев и носят завершённый характер, причём эквивалентные друг другу условия выписываются в разных терминах, что расширяет сферу возможных приложений. Использован широкий арсенал средств и методов теории целых, субгармонических и обобщённых функций, теории представляющих систем и базисов, теории двойственности топологических пространств и теории проективных спектров. Разработаны тонкие аналитические подходы к получению оценок для символа оператора свёртки. Хорошо подобраны нетривиальные примеры, иллюстрирующие положения развиваемой теории. По ходу изложения ставится ряд интересных нерешённых задач, например, вопрос о совпадении классов мультипликаторов $M_{(\omega)}^1(\mathbb{C})$ и $\widetilde{M}_{(\omega)}^1(\mathbb{C})$ (стр. 111). Отметим также прекрасную сводку доказанных утверждений и их сравнительный обзор (см. § 3.6).

Полученные Д. А. Поляковой результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых коллективами математиков МИ РАН им. В. А. Стеклова и ПОМИ РАН, университетов Москвы, Санкт-Петербурга, Казани, Уфы, Ростова-на-Дону, Владикавказа, Саратова, а также научных школ (по комплексному анализу и теории операторов) ближнего и дальнего зарубежья.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Основные результаты автора прошли весомую апробацию на научных конференциях и семинарах высокого уровня (полный список мероприятий приведён в автореферате и в вводной части диссертации). По итогам исследования опубликованы 15 статей в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых базами данных RSCI, Web of Science и Scopus.

Несмотря на большой объём и техническую сложность, текст почти не содержит опечаток, написан ясным и доступным языком. Приведённый ниже список замечаний носит, в целом, рекомендательный характер и облечён в форму пожеланий.

1. Стр. 12, 13 (формулировки теорем 1.2.1 и 1.2.2). Возникает задача, представляющая самостоятельный интерес. Полностью описать в терминах весовой функции ω те мультипликаторы μ в $M_{(\omega)}^1(\mathbb{C})$ и в $M_{(\omega)}^0(\mathbb{C})$, для которых соответствующий оператор свёртки T_μ будет дифференциальным оператором бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.
2. На стр. 14 (формулировка теоремы 1.3.1) в условиях (а), (b) появляется непонятная на этот момент запись $\|\zeta - z\|$.
3. На стр. 18 уместно добавить ссылки на работы А. С. Кривошеева и О. А. Кривошеевой, посвящённые свойствам систем экспоненциальных мономов, и работы по уравнениям свёртки за авторством А. Б. Шишкина и его учеников.
4. Стр. 27. Допускается ли в теореме 3.5.1 пустота одного из фигурирующих в ней множеств N_1, N_2 ?
5. Стр. 37. Впервые появляется символ $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$, смысл которого надо разъяснить.
6. Стр. 39 (последняя строка). Надо пояснить, что использовано предположение $\omega(1) = 0$, и тогда $\omega(r) \equiv 0$ при $r \in [0, 1]$, откуда следует, что $r^{-k} e^{\varepsilon_1 \omega(r)} \equiv r^{-k}$ убывает на $(0, 1]$ и

$$e^{-\varepsilon_1 \varphi_\omega^*(k/\varepsilon_1)} = \inf_{r \geq 1} r^{-k} e^{\varepsilon_1 \omega(r)} = \inf_{r > 0} r^{-k} e^{\varepsilon_1 \omega(r)}.$$

7. Стр. 41 (10-я строка снизу, конец выкладки). Пропущена константа π в знаменателе второй дроби.
8. Стр. 42 (перед второй выключной формулой сверху). Учитывается неравенство (1.1.5), а не (1.1.6).

9. Стр. 85. Было бы полезно в тексте диссертации расписать пример 1.5.3 (тем более что и в оригинальной работе автора [105] также дано очень краткое изложение этого примера). Достаточно рассмотреть базовый случай $\lambda_n = q^n$ с параметром $q > 1$, отвечающий символу

$$\mu(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{q^{2n}}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Как известно, такая целая функция нулевого порядка обладает многими примечательными свойствами, например, удовлетворяет в $\mathbb{C}$ функциональному уравнению $\mu(qz) = (1 - z^2)\mu(z)$. При $r \geq q$ имеем

$$\begin{aligned} \ln \max_{|z|=r} |\mu(z)| &= \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{q^{2n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{q^{2n}}\right) \\ &= \sum_{n \leq \log_q r} \ln \left(1 + \frac{r^2}{q^{2n}}\right) + \sum_{n > \log_q r} \ln \left(1 + \frac{r^2}{q^{2n}}\right). \end{aligned}$$

Для первой суммы верна оценка

$$\sum_{n \leq \log_q r} \ln \left(1 + \frac{r^2}{q^{2n}}\right) \leq \ln \left(1 + \frac{r^2}{q^2}\right) \log_q r,$$

а для второй суммы — оценка

$$\sum_{n > \log_q r} \ln \left(1 + \frac{r^2}{q^{2n}}\right) \leq r^2 \sum_{n > \log_q r} \frac{1}{q^{2n}} < \frac{1}{1 - 1/q^2}.$$

В результате получим, что

$$\ln \max_{|z|=r} |\mu(z)| = O(\ln^2 r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

При необходимости можно вывести и точную асимптотику вида

$$\ln \max_{|z|=r} |\mu(z)| \sim C \ln^2 r, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Ближкие соображения применимы и для оценки снизу $|\mu(x)|$ на промежутках $|x| \in [q^n + 1, q^{n+1} - 1]$ при $n > \log_q(2/(q-1))$. Всё это не очень сложно, но способствует пониманию ситуации.

Наличие замечаний несколько не снижает значимость работы и не влияет на высокую оценку представленных результатов. Таким образом, диссертация Д. А. Поляковой представляет собой цельное и глубокое научное исследование, согласованное с паспортом специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. По совокупности полученных результатов диссертационную работу следует расценивать как крупный вклад в разделы современного комплексного анализа, связанные с функциональными пространствами и операторами в них.

Считаю, что диссертационная работа “Операторы и уравнения свёртки в пространствах ультрадифференцируемых функций нормального типа” удовлетворяет требованиям п. 9 Положения ВАК о порядке присуждения учёных степеней, утверждённого Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 г. (с последующими изменениями), а её автор — Полякова Дарья Александровна — безусловно заслуживает присуждения ей учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

Шерстюков Владимир Борисович
15 июля 2026 года.

Докторская диссертация
защищена по специальности
01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.
Даю согласие на обработку персональных данных.

Адрес основного места работы:
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра математического анализа,
рабочий тел.: +7(495)939-18-01,
адрес электронной почты: shervb73@gmail.com

Подпись Шерстюкова В. Б. заверяю.
Спасибо за работу! Пётр / Пётр Пётрович О.А.

