На правах рукописи

Рахимова Алсу Ильдаровна

Динамические свойства некоторых классических операторов в пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа — 2025

Работа выполнена в отделе теории функций и функционального анализа Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук.

Научный руководитель: **Мусин Ильдар Хамитович**,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
Института математики
с вычислительным центром УФИЦ РАН.

Официальные оппоненты: **Малютин Константин Геннадьевич**,
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
математического анализа
и прикладной математики
ФГБОУ ВО «Курский государственный университет».

Мелихов Сергей Николаевич,
доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры алгебры
и дискретной математики
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань.

Защита состоится 12 декабря 2025 г. в 14^{00} часов на заседании объединенного диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте https://uust.ru.

Автореферат разослан «____» ________________ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Обозначим через X топологическое векторное пространство. Рассмотрим в нем линейный непрерывный оператор $T : X \to X$. Тогда в пространстве X можно задать дискретную динамическую систему

$$(X, T) = \{T^n x : \ x \in X\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}.$$

Для описания поведения этой системы были введены такие характеристики для операторов, как цикличность, гиперцикличность, хаотичность и часто-гиперцикличность.

В работе изучаются свойства гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности классических линейных непрерывных операторов в следующих пространствах:
пространство $H(\Omega)$ аналитических в Ω функций;
весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ целых в $\mathbb{C}^n$ функций;
весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций.

Они определяются следующим образом.

Пусть Ω — произвольная односвязная область на плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $H(\Omega)$ пространство аналитических в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах из Ω, задаваемой системой норм

$$p_m(f) = \sup_{z \in K_m} |f(z)|, \ m = 1, 2, \dots,$$

где K_m — компакты в Ω с непустой внутренностью такие, что $K_m \subset \operatorname{int} K_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$.

Определим весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство выпуклых функций $\varphi_m : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

$i_1)$ $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty$;

$i_2)$ $\varphi_m(z) > \varphi_{m+1}(z), \ z \in \mathbb{C}^n$;

$i_3)$ $\lim\limits_{z \to \infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{F}_m = \big\{ f \in H(\mathbb{C}^n), \ f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \quad p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)| e^{-\varphi_m(z)}) < \infty \big\}.$$

Очевидно, при любом $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_m$ — банахово пространство. Положим $\mathcal{F}(\varphi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m$. Отметим, что с операциями сложения элементов и их умножения на комплексные числа $\mathcal{F}(\varphi)$ образует линейное пространство. Наделим $\mathcal{F}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{F}_m$, $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathcal{F}(\varphi)$ — проективный предел компактной последовательности, составленной из банаховых пространств $\mathcal{F}_m$, то $\mathcal{F}(\varphi)$ является пространством Фреше–Шварца.

Определим весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство непрерывных вещественнозначных функций $\varphi_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

α) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty$;

β) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty$.

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ определим

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \Big\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n),\ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} :\ \ p_m(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n, \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n:\ |\alpha|\le m}} \frac{|(D_x^\alpha f)(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty \Big\}.$$

Теперь положим $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}(\varphi_m)$. С операциями сложения элементов и умножения на комплексные числа $\mathcal{E}(\varphi)$ образует линейное пространство. Наделим $\mathcal{E}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}(\varphi_m)$, $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство Фреше и оно инвариантно относительно дифференцирования, а операторы частного дифференцирования в нем непрерывны. Как показано в работе И.Х. Мусина, С.В. Попенова 2010 г., пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ сепарабельно.

Обозначим через X топологическое векторное пространство. *Орбитой* элемента x оператора $T : X \to X$ называется множество

$$\mathrm{Orb}(T, x) = \big\{T^n x\big\}_{n=0}^{\infty}.$$

Линейный непрерывный оператор $T : X \to X$ называется *гиперциклическим* в X, если существует элемент $x \in X$, имеющий плотную орбиту в X. Этот элемент $x \in X$ называется *гиперциклическим вектором* оператора T в X.

Основы теории гиперциклических операторов были заложены Дж.Д. Биркхофом и Дж.Р. Маклейном в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$. В 1929 году Дж.Д. Биркхоф доказал, что существует целая функция f, для которой множество, состоящее из функций $f(z), f(z+1), f(z+2), \ldots$, плотно в $H(\mathbb{C})$. Это утверждение означает гиперцикличность оператора сдвига T

в $H(\mathbb{C})$, действующего по правилу $(Tf)(z) = f(z+1)$. В 1952 году Дж.Р. Маклейн доказал существование функции $f \in H(\mathbb{C})$ такой, что множество, состоящее из функций $f, f', f'', \ldots$, плотно в $H(\mathbb{C})$. Данный факт показывает, что оператор дифференцирования $T = \frac{d}{dz}$ гиперциклический в $H(\mathbb{C})$.

В работах К.-Г. Гроссе-Эрдманна и Г. Петерсона сделан широкий обзор гиперциклических операторов для различных пространств. Вопросы гиперцикличности в произвольных линейных топологических пространствах рассматривались Р.М. Гетнером и Дж.Х. Шапиро, Ж. Годфруа и Дж.Х. Шапиро, С. Ролевичем, К. Китаи. Основными результатами статей Р.М. Гетнера, Дж.Х. Шапиро и Ж. Годфруа, Дж.Х. Шапиро являются критерии гиперцикличности операторов в сепарабельных пространствах Фреше. Также в работе Р.М. Гетнера, Дж.Х. Шапиро доказаны теоремы о гиперцикличности операторов дифференцирования и сдвига, определенных в публикациях Дж.Д. Биркгофа и Дж.Р. Маклейна. А в статье Ж. Годфруа, Дж.Х. Шапиро приведено доказательство утверждения о гиперцикличности в $H(\mathbb{C})$ любого оператора свертки, характеристическая функция которого не тождественна постоянной.

В дальнейшем свойство гиперцикличности было изучено для многих важных в приложениях классов операторов в пространствах целых функций следующими учеными: М.Дж. Бельтран, Ж. Боне, А. Бонилья, В.Э. Ким, А.А. Лишанский. В статьях Р. Арона и Д. Маркозе рассмотрены многие гиперциклические операторы в $H(\mathbb{C})$. Они также привели подробный обзор литературы по этой теме. В данной области еще можно отметить работы Дж. Бэса, А. Пэриса и Дж.Дж. Бетанкура, Дж.Д. Бетанкура, которые посвящены гиперцикличности в $H(\mathbb{C})$ различных операторов и операторов свертки, ассоциированных с оператором Данкла. Также гиперциклическими операторами занимались следующие авторы: С.И. Ансари, М. Ансари, Ф. Байяр, С. Гриво, К.Ч. Чан, Р. Сандерс, Х.Н. Салас, З. Ксю, З. Жоу.

Периодической точкой оператора T называется элемент $x \in X$, для которого имеется натуральное число $n \geq 2$ такое, что $T^n x = x$. Непрерывный оператор $\Phi : Y \to Y$ в метрическом пространстве (Y, d) называется *хаотическим* (по Девани), если выполнены следующие условия:

(A) оператор Φ обладает существенной зависимостью от начальных условий: существует число $\delta > 0$ такое, что для любого элемента $x \in Y$ и его произвольной окрестности U найдутся точка $y \in U$ и номер $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$;

(B) оператор Φ является топологически транзитивным: для любой пары непустых открытых множеств $A,\ B \subset X$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, для которого $\Phi^n(A) \cap B \neq \varnothing$;

(C) множество периодических точек оператора Φ плотно в пространстве Y.

Основы теории хаотических операторов были заложены в 1989 г. Р.Л. Девани. Далее в 1992 г. Дж. Бэнкс, Дж. Брукс и другие авторы показали, что требование существенной зависимости оператора от начальных условий вытекает из его топологической транзитивности и наличия плотного множества периодических точек, поэтому при проверке хаотичности оператора это требование можно пропустить. В работе Ж. Годфруа и Дж.Х. Шапиро 1991 г. доказана хаотичность в $H(\mathbb{C})$ любого оператора свертки, характеристическая функция которого отлична от постоянной. В статье А. Гулисашвили, К.Р. Макклуэра 1996 г. приведено утверждение о хаотичности оператора уничтожения $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + \frac{d}{dz})$ в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$.

В 2000 г. Р.М. Кроновер написал обширную работу с подробными сведениями по хаотическим операторам в динамических системах. В книге М.В. Хирша, С. Смэйла, Р.Л. Девани 2013 г. собраны основные положения теории динамических систем, в том числе понятия цикличности, гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности. В 2002 г. Ф. Мартинез-Гименез, А. Пэрис изучили свойство хаотичности операторов обратного сдвига в пространстве l^2. Дж.Дж. Бетанкур, М. Сифи, К. Тримехе в 2005 г. показали, что операторы свертки, ассоциированные с оператором Данкла, гиперциклические и хаотические в пространстве $H(\mathbb{C})$.

В.Э. Ким в работах 2008 г. и 2009 г. показал, что все операторы обобщенной свертки, не тождественные умножению на константу и порожденные операторами обобщенного сдвига и операторами обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева, гиперциклические и хаотические в $H(\mathbb{C})$. В его статье 2011 г. приведена теорема о том, что операторы уничтожения, действующие в обобщенных пространствах Фока–Баргмана $\mathcal{F}$, обладают свойством хаотичности, причем в частном случае операторами уничтожения являются операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева.

При изучении гиперциклических операторов возникло понятие часто-гиперцикличности. Класс операторов с этим свойством удовлетворяет более сильным требованиям, чем гиперциклические операторы.

Нижняя плотность $\underline{\text{dens}} A$ множества $A \subset \mathbb{N}$ определяется по формуле

$$\underline{\text{dens}} A = \liminf_{N \to \infty} \frac{\#\{n \in A : \ n \le N\}}{N}.$$

Линейный непрерывный оператор $T : X \to X$ в топологическом векторном пространстве X называется *часто-гиперциклическим*, если найдется элемент $x \in X$, который для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ удовлетворяет условию $\underline{\text{dens}} \big\{ n \in \mathbb{N} : \ T^n x \in U \big\} > 0$. Этот элемент $x \in X$ называется *часто-гиперциклическим вектором* оператора T в X.

Понятие часто-гиперциклического оператора ввели Ф. Байяр и С. Гриво в 2006 г. для пространства $H(\mathbb{C})$. В 2007 г. А. Бонилья и К.-Г. Гроссе-Эрдманн рассмотрели примеры таких операторов и векторов в $H(\mathbb{C})$. В книгах Ф. Байяра, Э. Матерона и К.-Г. Гроссе-Эрдманна, А. Пэриса приведены подробные сведения по динамике линейных операторов, в том числе по хаотическим и часто-гиперциклическим операторам.

А. Бонилья и К.-Г. Гроссе-Эрдманн в 2006 г. доказали, что непрерывные операторы, коммутирующие со сдвигом, часто-гиперциклические в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$. В 2010 г. Л. Бернал-Гонзалез, А. Бонилья изучили свойства композиций часто-гиперциклических операторов в весовых пространствах Дирихле. В книгах М.В. Хирша, С. Смэйла, Р.Л. Девани 2013 г. и С. Гриво, Э. Матерона, К. Мене 2016 г. изложена обширная теория по хаотическим и часто-гиперциклическим операторам. В 2009 г. Ж. Боне показал гиперцикличность и часто-гиперцикличность дифференциального оператора в весовом пространстве целых функций в $\mathbb{C}$. В статье С. Гриво рассмотрены различные примеры часто-гиперциклических операторов в $H(\mathbb{C})$.

В.Э. Ким в работе 2014 г. для линейного непрерывного оператора T, удовлетворяющего соотношению $[T, A] = I$, а в более общем случае коммутационному соотношению, порождающему алгебру su(1,1), показал, что он является хаотическим и часто-гиперциклическим. В статьях А.А. Лишанского и А.Д. Баранова 2015 г. и 2016 г. изучена динамика линейных операторов, а именно операторов Теплица и унитарных операторов, в пространствах Харди функций, аналитических в круге.

И.Ф.З. Бенсайд, М. Гонзалес, Ф. Леон-Сааведра и М.П. Ромеро де ла Роса изучили, в каких случаях в пространстве Фреше X линейный непрерывный оператор T, λ-коммутирующий с дифференцированием по формуле $TD = \lambda DT$ при некотором значении $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, является гиперциклическим. Ф. Леон-Сааведра и М.П. Ромеро де ла Роса рассмотрели все случаи, когда в пространстве Фреше X линейный непрерывный оператор T, λ-коммутирующий с дифференцированием по формуле $TD = \lambda DT$ при некотором значении $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, является часто-гиперциклическим.

В работе Т. Калмеса 2019 г. эти свойства изучены для весовых операторов композиции в пространстве функций, определенном локальными свойствами. В статье Ж. Боне, Т. Калмеса, А. Пэриса 2021 г. рассматривается динамика операторов сдвига на неметризуемых пространствах последовательностей. Изучению динамических свойств различных операторов посвящены работы следующих ученых: К. Агнисенс, Ф. Байяр, И.З. Ружа, Дж.Дж. Бетанкур, М. Сифи, Д. Бонжиорно, У.Б. Даржи, Л. ди Пиацца, Б. Пирс, М.П. Ромеро де ла Роса, Л. Фрерик, С. Гриво, А. Пэрис, Х. Эмамирад, Г.С. Хешмати, К.-Г. Гроссе-Эрдманн, С. Чарпентир, К. Мене, А. Нейштадт и других.

Оператор Данкла был введен в работах Ч.Ф. Данкла 1989 г. и 1991 г., а также изучался в статьях М. Реслер 1998 г. и 2002 г., М.Ф.Э. Де Джеу 1993 г. В.Э. Ким, В.В. Напалков в 2008 г. определили обобщение оператора Данкла в виде дифференциально-разностного оператора в $H(\mathbb{C})$ и привели различные утверждения о его свойствах. В работе В.В. Напалкова, В.В. Напалкова (мл.) 2008 г. оператор Данкла представлен через действие функционала на функцию в пространстве целых функций в $\mathbb{C}$ и доказано, что оператор Данкла можно выразить через оператор свертки.

А.В. Братищев в 2009 г. показал, что в пространстве $H(G)$ оператор Данкла является оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева, и установил гиперцикличность и хаотичность операторов, коммутирующих с оператором Данкла. В.И. Иванов в статье 2021 г. в весовом пространстве $\mathbb{R}^d$ привел различные неравенства для оператора Данкла в случае радиальных кусочно-степенных весов. Этим операторам и задачам, связанным с ними, посвящены работы следующих авторов: А.В. Братищев, К.Р. Забирова, В.И. Иванов, И.И. Карамов, В.Э. Ким, В.В. Напалков, В.В. Напалков, В.В. Напалков (мл.), М. Эль Хамма, А. Ламими, Х. Эль Харрак, К.-Дж. Янг и других.

В диссертации изучаются различные динамические характеристики классических операторов в весовых пространствах целых и бесконечно дифференцируемых функций, пространствах функций, голоморфных в области и на всей комплексной плоскости. Задачи, поставленные в диссертации, являются актуальными, поскольку они не изучались в опубликованных ранее работах отечественных и зарубежных ученых.

Цели и задачи диссертационной работы. Основной целью диссертации является изучение в пространстве функций, аналитических в области, а также в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций таких динамических характеристик, как гиперцикличность, хаотичность и часто-гиперцикличность, для классических операторов: операторы сдвига, дифференцирования, конечные суммы операторов сдвига, дифференцирования и их композиций, ряды из таких операторов, оператор свертки.

Методология и методы исследования. В данной работе используются классические методы теории функций комплексных переменных и функционального анализа. Также применяются некоторые методы дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. В опубликованных ранее статьях и книгах отечественных и зарубежных ученых задачи, поставленные в диссертации, в рассматриваемых в данной работе пространствах не изучались.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретический характер. В работе рассмотрены понятия гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности операторов. Эти динамические свойства изучены для классических операторов в пространстве функций, аналитических в области, а также в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций и целых функций. Приведены доказательства гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности обобщенного оператора Данкла в данных пространствах.

Положения, выносимые на защиту. В диссертации получены следующие результаты:

1. Показано, что линейный непрерывный оператор в пространстве $H(\Omega)$, коммутирующий с оператором дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим (теорема 2.6). Также он хаотический (теорема 3.5) и часто-гиперциклический (теорема 3.6) в $H(\Omega)$.
2. Изучены свойства плотности полиномов, полноты системы экспонент в пространстве $\mathcal{F}(\varphi)$, доказана гиперцикличность операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций в $\mathcal{F}(\varphi)$. Линейный непрерывный оператор в $\mathcal{F}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не совпадающий со скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим в этом пространстве (теорема 5.5). Доказано, что рассматриваемый оператор обладает свойствами хаотичности (теорема 6.1) и часто-гиперцикличности (теорема 6.2) в $\mathcal{F}(\varphi)$.
3. В пространстве $\mathcal{E}(\varphi)$ рассмотрено свойство гиперцикличности операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций в $\mathcal{E}(\varphi)$. Показано, что линейный непрерывный оператор в $\mathcal{E}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим в этом пространстве (теорема 9.1). Приведены теоремы о хаотичности и часто-гиперцикличности оператора дифференцирования (теорема 10.2) и оператора композиции дифференцирования и сдвига (теорема 10.3) в $\mathcal{E}(\varphi)$.
4. Изучены некоторые свойства обобщенного оператора Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$ целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, а именно приведен вид функции, получаемой при действии этого оператора на функцию из $H(\mathbb{C})$, показано, что действие обобщенного оператора Данкла на целую функцию равносильно действию на нее функционала определенного вида. Доказаны утверждения, что обобщенный оператор Данкла является гиперциклическим (теорема 11.3), а также хаотическим и часто-гиперциклическим (теорема 11.4) в $H(\mathbb{C})$. Показано, что обобщенный оператор Данкла обладает свойствами гиперцикличности (теорема 12.2), хаотичности и часто-гиперцикличности (теорема 12.3) в пространстве $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов диссертации гарантируется строгостью доказательств утверждений и обсуждением полученных теорем на конференциях и семинарах [1–16].

Автор выступал с основными результатами на следующих научных конференциях и семинарах: Международная научно-практическая конференция

«Современная математика и ее приложения» (Уфа, 2017 г.); XXV международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 2018 г.); Международная научная конференция «Комплексный анализ и теория аппроксимаций» (Уфа, 2019 г.); Международная научная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2020 г.); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2020 г.); XI международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2020 г.); Международная научная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2021 г.); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2022 г.); XIII международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2022 г.); XIV международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2023 г.); Всероссийская школа-конференция «Лобачевские чтения — 2023» (Казань, 2023 г.); Семинар «Комплексный и гармонический анализ» отдела теории функций и функционального анализа Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, 2024 г.); Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения» (Уфа, 2024 г.); XV международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2024 г.); Международная конференция Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2025 г.); Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2025 г.).

Публикации. По теме диссертации имеются 6 статей [1–6], из них статьи [1–3] изданы в журналах из Перечня ВАК, работы [4–6] опубликованы в журналах, которые входят в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus, приравненных к изданиям из Перечня ВАК.

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1–6]. В совместных публикациях [1, 2] В.В. Напалкову принадлежат постановки задач, а также в статье [1] — теорема 1, в работе [2] — теорема 1, а диссертанту — остальные утверждения и их доказательства. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук И.Х. Мусину за предложенную тему исследований, постоянное внимание, неоценимую помощь и всестороннюю поддержку в процессе работы над диссертацией. Автор очень признателен члену-корреспонденту РАН, профессору В.В. Напалкову за внимательное обсуждение поставленных задач и плодотворную совместную работу.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 116 публикаций. Объем работы составляет 132 страницы.

Краткое содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, изучена история вопроса, определена цель и поставлены задачи исследования, отражены научная новизна и теоретическая значимость полученных результатов.

Пусть X — топологическое векторное пространство. Рассмотрим линейный непрерывный оператор $T : X \to X$. *Орбитой* элемента x оператора $T : X \to X$ называется множество $\mathrm{Orb}(T, x) = \{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$. *Периодической точкой* оператора T называется элемент $x \in X$, для которого имеется натуральное число $n \geq 2$ такое, что $T^n x = x$.

Линейный непрерывный оператор $T : X \to X$ называется *гиперциклическим* в пространстве X, если существует элемент $x \in X$, орбита которого плотна в X. Этот элемент $x \in X$ — *гиперциклический вектор* оператора T в X.

Непрерывный оператор $\Phi : Y \to Y$ в метрическом пространстве (Y, d) называется *хаотическим* (по Девани), если выполнены следующие условия:

(A) оператор Φ имеет существенную зависимость от начальных условий: существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in Y$ и его произвольной окрестности U найдутся элемент $y \in U$ и номер $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$;

(B) оператор Φ топологически транзитивный: для любой пары непустых открытых множеств A, $B \subset X$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, для которого $\Phi^n(A) \cap B \neq \varnothing$;

(C) множество периодических точек оператора Φ плотно в пространстве Y.

Нижняя плотность $\underline{\mathrm{dens}} A$ множества $A \subset \mathbb{N}$ определяется по формуле

$$\underline{\mathrm{dens}} A = \liminf_{N \to \infty} \frac{\#\{n \in A : \ n \leq N\}}{N}.$$

Линейный непрерывный оператор $T : X \to X$ в топологическом векторном пространстве X называется *часто-гиперциклическим*, если существует элемент $x \in X$ такой, что для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ выполняется условие $\underline{\mathrm{dens}}\{n \in \mathbb{N} : \ T^n x \in U\} > 0$. Этот элемент $x \in X$ — *часто-гиперциклический вектор* оператора T в X. Отметим, что множество часто-гиперциклических операторов содержится в классе гиперциклических операторов.

В **первой главе** в **параграфе 1** изложены основные понятия о гиперциклических, хаотических и часто-гиперциклических операторах, приведены примеры операторов, которые не обладают данными характеристиками. В **параграфе 2** рассматривается пространство $H(\Omega)$ функций, аналитических в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из Ω, задаваемой системой норм

$$p_m(f) = \sup_{z \in K_m} |f(z)|, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где K_m — компакты в Ω с непустой внутренностью такие, что $K_m \subset \operatorname{int} K_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$. По аппроксимационной теореме Рунге система полиномов плотна в $H(\Omega)$, значит, пространство $H(\Omega)$ сепарабельно. Хорошо известно, что $H(\Omega)$ является пространством Фреше. Отметим, что $H(\Omega)$ инвариантно относительно дифференцирования.

Пусть $\Omega_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$ — горизонтальная полоса на плоскости $\mathbb{C}$, где $\sigma > 0$. Определим оператор сдвига $T_a f(z) = f(z + a)$, где $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Пространство $H(\Omega_\sigma)$ инвариантно относительно дифференцирования и сдвига. Показано, что оператор сдвига гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$ (теорема 2.2), а также оператор дифференцирования гиперциклический в $H(\Omega)$ (теорема 2.3). Далее доказана теорема о гиперцикличности линейных непрерывных операторов, коммутирующих с дифференцированием и не являющихся скалярным кратным тождественному отображению, в $H(\Omega)$ (теорема 2.6) и приведены некоторые ее следствия.

Теорема 2.6. *Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению. Тогда оператор T гиперциклический в $H(\Omega)$.*

Основные утверждения **параграфа 3** состоят в том, что операторы со свойствами, определенными в теореме 2.6, хаотические (теорема 3.5) и часто-гиперциклические (теорема 3.6) в $H(\Omega)$. Из этих теорем вытекают следствия о хаотичности и часто-гиперцикличности дифференциальных операторов конечного порядка в $H(\Omega)$, конечной суммы операторов сдвига, конечной суммы композиций дифференцирования и сдвига в $H(\Omega_\sigma)$.

Теорема 3.5. *Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению. Тогда T — хаотический оператор в $H(\Omega)$.*

Теорема 3.6. *Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению. Тогда T — часто-гиперциклический оператор в $H(\Omega)$.*

Вторая глава посвящена изучению динамических свойств классических операторов — операторов дифференцирования, сдвига, их композиций и свертки в весовых счетно-нормированных пространствах целых функций.

В **параграфе 4** рассматривается весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ целых функций в $\mathbb{C}^n$, инвариантное при дополнительных условиях относительно дифференцирования и сдвига. Определим весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство выпуклых функций $\varphi_m : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

i_1) $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty$;

i_2) $\varphi_m(z) > \varphi_{m+1}(z),\ z \in \mathbb{C}^n$;

i_3) $\lim\limits_{z\to\infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{F}_m = \big\{ f \in H(\mathbb{C}^n),\ f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \quad p_m(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} (|f(z)| e^{-\varphi_m(z)}) < \infty \big\}.$$

Очевидно, при любом $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_m$ — банахово пространство. Ввиду условия i_2) вложения $\mathcal{F}_{m+1} \subset \mathcal{F}_m$ непрерывны для всех $m \in \mathbb{N}$, а в силу условия i_3) они вполне непрерывны. Положим $\mathcal{F}(\varphi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m$. Отметим, что с операциями сложения элементов и их умножения на комплексные числа $\mathcal{F}(\varphi)$ образует линейное пространство. Наделим $\mathcal{F}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{F}_m$, $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathcal{F}(\varphi)$ — проективный предел компактной последовательности, составленной из банаховых пространств $\mathcal{F}_m$, то $\mathcal{F}(\varphi)$ является пространством Фреше–Шварца.

Также по мере необходимости на семейство φ будем накладывать дополнительные условия для любого $m \in \mathbb{N}$:

i_4) найдутся постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что $\varphi_{m+1}(z+t) \le \varphi_m(z) + b_m$, где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : \|t\| \le a_m$;

или более жесткое условие:

i_5) при любом $R > 0$ найдется постоянная $b_m(R, m) > 0$ такая, что $\varphi_{m+1}(z+t) \le \varphi_m(z) + b_m$, где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : \|t\| \le R$;

или в отдельных случаях другое условие:

i_6) при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для любых $R > 0$ существует постоянная $b_m = b_m(R) > 0$, удовлетворяющая условию $\varphi_{m+1}(\widetilde{z} + t) \le \varphi_m(z) + b_m$, где $z \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{C}^n : \|t\| \le R$ и $\widetilde{z} = (z_1, \ldots, z_{j-1}, \lambda z_j, z_{j+1}, \ldots, z_n)$, $j \in (1; n)$.

Отметим, что при выполнении условия i_4) пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ инвариантно относительно дифференцирования (лемма 5.1). В случае справедливости требования i_5) $\mathcal{F}(\varphi)$ является инвариантным относительно как дифференцирования, так и сдвига (теорема 5.4). Пространства такого вида встречались в работах следующих математиков: Л. Эренпрайс, В.П. Паламодов, Б.А. Тейлор, Ф. Хаслингер, А.В. Абанин, Т.И. Абанина, Ф.Ч. Тиен, С.В. Попенов, Н.Т. Ахтямов, И.Х. Мусин.

В **параграфе 5** показана гиперцикличность операторов частного дифференцирования, дифференциальных операторов бесконечного порядка, характеристическая функция которых является целой функцией экспоненциального типа, оператора сдвига в $\mathcal{F}(\varphi)$. Далее доказана теорема о гиперцикличности оператора, коммутирующего с операторами частного дифференцирования и не совпадающего со скалярным кратным тождественному отображению, в $\mathcal{F}(\varphi)$ (теорема 5.5), а также проверено утверждение для оператора свертки (теорема 5.8).

Теорема 5.5. *Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_4) и задан линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не тождественный оператору умножения на константу. Тогда оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.*

Из этой теоремы получены следствия о том, что конечная сумма сдвигов, конечная сумма композиций дифференцирования и сдвига, ряд из сдвигов при определенных условиях на коэффициенты, операторы свертки гиперциклические в $\mathcal{F}(\varphi)$. Приведен пример гиперциклического оператора, не являющегося оператором свертки.

Теорема 5.8. *Пусть семейство φ удовлетворяет условиям i_5) и дополнительному условию*

$$\forall\, m,k \in \mathbb{N} \;\; \exists\, l = l_{m,k} \in \mathbb{N},\;\; r = r_{m,k} > 0:$$

$$\forall\, z,t \in \mathbb{C}^n \;\; \varphi_l(z+t) \le \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r,$$

S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}(\varphi)$, преобразование Лапласа которого $\widehat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z\rangle})$ не тождественно постоянной. Тогда оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ гиперцикличен в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Основные утверждения **параграфа 6** состоят в том, что линейный непрерывный оператор, коммутирующий с дифференцированием и не тождественный умножению на скаляр, хаотический (теорема 6.1) и часто-гиперциклический (теорема 6.2) в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Теорема 6.1. *Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_4), задан линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}(\varphi)$, который коммутирует с операторами частного дифференцирования и не кратный тождественному оператору. Тогда оператор T хаотический в $\mathcal{F}(\varphi)$.*

Теорема 6.2. *Пусть для семейства φ выполнено условие i_4), задан линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}(\varphi)$, который коммутирует с оператора-*

ми частного дифференцирования и не кратный тождественному оператору. Тогда оператор T часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Из этих утверждений вытекают следствия о хаотичности и часто-гиперцикличности дифференциальных операторов конечного порядка, конечной суммы сдвигов, конечной суммы композиций дифференцирования и сдвига, дифференциальных операторов бесконечного порядка, характеристическая функция которых является целой функцией экспоненциального типа, ряда из сдвигов при определенных условиях на коэффициенты, операторов свертки в $\mathcal{F}(\varphi)$. **Параграф 7** посвящен изучению свойств хаотичности и часто-гиперцикличности операторов дифференцирования и сдвига, конечной суммы композиций дифференцирования и сдвига в $\mathcal{F}(\varphi)$. Приведен пример хаотического и часто-гиперциклического оператора, не являющегося оператором свертки.

В **третьей главе** изучается гиперцикличность классических линейных операторов в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, инвариантных относительно дифференцирования или сдвига. Такие пространства рассматривались в работах Н.Т. Ахтямова, И.Х. Мусина, а в статье И.Х. Мусина 2010 г. доказано, что дифференциальные операторы конечного порядка с постоянными коэффициентами гиперциклические в весовом пространстве Фреше $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. В **параграфе 8** рассматривается весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, инвариантное относительно дифференцирования и при дополнительных условиях относительно сдвига. Определим весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство непрерывных вещественнозначных функций $\varphi_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

$$\alpha)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty;$$

$$\beta)\ \lim_{x\to\infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty.$$

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ определим

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \Big\{f \in C^m(\mathbb{R}^n),\ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} :\ \ p_m(f) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n:\ |\alpha|\le m}} \frac{|(D_x^\alpha f)(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty\Big\}.$$

Теперь положим $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}(\varphi_m)$. Снабдим $\mathcal{E}(\varphi)$ операциями сложения элементов и умножения на комплексные числа. Тогда $\mathcal{E}(\varphi)$ образует линейное пространство. Наделим его топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}(\varphi_m)$, $m \in \mathbb{N}$. В силу условия $\beta)$ вложения $\mathcal{E}(\varphi_{m+1}) \subset \mathcal{E}(\varphi_m)$ вполне непрерывны для всех $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство Фреше и оно инвариантно относительно дифференцирования, а операторы частного дифференцирования в нем непрерывны. Как показано в работе И.Х. Мусина, С.В. Попенова 2010 г., пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ сепарабельно.

Отметим, что $\mathcal{E}(\varphi)$ не обязательно инвариантно относительно сдвига. Далее на семейство функций φ в зависимости от задачи будем накладывать одно из дополнительных условий, гарантирующих инвариантность $\mathcal{E}(\varphi)$ относительно сдвига для любого $m \in \mathbb{N}$:

γ_1) найдутся постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что $\varphi_{m+1}(x+\eta) \le \varphi_m(x) + b_m$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathbb{R}^n : \|\eta\| \le a_m$;

или более жесткое условие

γ_2) при любом $R > 0$ найдется постоянная $b_m = b_m(R) > 0$ такая, что $\varphi_{m+1}(x+\eta) \le \varphi_m(x) + b_m$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathbb{R}^n : \|\eta\| \le R$;

или другое условие

γ_3) для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют числа $l = l_{m,k} \in \mathbb{N}$ и $r = r_{m,k} > 0$ такие, что при произвольных x, $y \in \mathbb{R}^n$ $\varphi_l(x+y) \le \varphi_m(x) + \varphi_k(y) + r$;

или в отдельных случаях условие

γ_4) при фиксированном $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ для любого $R > 0$ существует постоянная $b_m = b_m(R) > 0$, удовлетворяющая условию $\varphi_{m+1}(\widetilde{x} + t) \le \varphi_m(x) + b_m$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : |t| \le R$ и $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, \lambda x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $j \in (1; n)$.

В **параграфе 9** доказана теорема о гиперцикличности в $\mathcal{E}(\varphi)$ линейного непрерывного оператора, коммутирующего с дифференцированием и не являющегося скалярным кратным тождественному отображению (теорема 9.1).

Теорема 9.1. *Пусть семейство φ удовлетворяет условию γ_1). Тогда если линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{E}(\varphi)$ коммутирует с операторами частного дифференцирования и не тождественен умножению на скаляр, то он гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.*

Далее приведены ее следствия о гиперцикличности дифференциального оператора конечного порядка, оператора сдвига, конечной суммы сдвигов, конечной суммы композиций дифференцирования и сдвига, ряда из сдвигов при определенных условиях на коэффициенты, операторов свертки в $\mathcal{E}(\varphi)$. В **параграфе 10** получены утверждения о хаотичности и часто-гиперцикличности оператора дифференцирования (теорема 10.2) и оператора композиции дифференцирования и сдвига (теорема 10.3) в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Теорема 10.2. *Пусть для семейства φ выполнено условие γ_1). Тогда дифференциальный оператор $Tf(x) = D_x^\alpha f(x)$ для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha \ne (0, 0, \ldots, 0)$, где $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.*

Теорема 10.3. *Пусть семейство* φ *удовлетворяет условию* γ_1). *Тогда оператор* $Tf(x) = D_x^\alpha f(x+b)$ *для любых* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha \neq (0,0,\ldots,0)$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}$, *где* $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, *хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{E}(\varphi)$.

Четвертая глава посвящена изучению динамических свойств обобщенного оператора Данкла. В **параграфе 11** приведены основные свойства данного оператора в $H(\mathbb{C})$. Рассмотрим пространство $H(\mathbb{C})$ целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах.

Обобщенный оператор Данкла для любых функций f из пространства $H(\mathbb{C})$ определяется по формуле:

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz}f(z) + \frac{c}{z}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j f(\alpha_j z),\ z \in \mathbb{C},$$

где число $c \in \mathbb{R}_+$ и параметр $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ — некоторые заданные величины, а его коэффициенты имеют вид $\alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}}$, $j \in (0; m-1)$. Очевидно, обобщенный оператор Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$ линейный и непрерывный. Доказаны теоремы о гиперцикличности (теорема 11.3), а также хаотичности и часто-гиперцикличности (теорема 11.4) оператора Λ в $H(\mathbb{C})$.

Теорема 11.3. *Обобщенный оператор Данкла* Λ *является гиперциклическим в* $H(\mathbb{C})$.

Теорема 11.4. *Обобщенный оператор Данкла* Λ *хаотический и часто-гиперциклический в* $H(\mathbb{C})$.

В **параграфе 12** изучены свойства обобщенного оператора Данкла в $\mathcal{F}(\varphi,\mathbb{C})$, которое является пространством $\mathcal{F}(\varphi)$ при $n=1$ с условиями i_1)–i_4) на семейство φ и для всех $m \in \mathbb{N}$ $\varphi_m(z) = \varphi_m(|z|)$, где $z \in \mathbb{C}$. Приведены утверждения о гиперцикличности (теорема 12.2), а также хаотичности и часто-гиперцикличности (теорема 12.3) оператора Λ в $\mathcal{F}(\varphi,\mathbb{C})$.

Теорема 12.2. *Обобщенный оператор Данкла* Λ *является гиперциклическим в* $\mathcal{F}(\varphi,\mathbb{C})$.

Теорема 12.3. *Обобщенный оператор Данкла* Λ *хаотический и часто-гиперциклический в* $\mathcal{F}(\varphi,\mathbb{C})$.

В **заключении** кратко резюмируются результаты работы.

Заключение.

В работе изучены свойства гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности классических линейных непрерывных операторов в следующих пространствах:
пространство $H(\Omega)$ аналитических в Ω функций;
весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ целых в $\mathbb{C}^n$ функций;
весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Показано, что линейный непрерывный оператор в пространстве $H(\Omega)$, коммутирующий с оператором дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим (теорема 2.6). Также он хаотический (теорема 3.5) и часто-гиперциклический (теорема 3.6) в $H(\Omega)$.
2. Изучены свойства плотности полиномов, полноты системы экспонент в пространстве $\mathcal{F}(\varphi)$, доказана гиперцикличность операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций в $\mathcal{F}(\varphi)$. Линейный непрерывный оператор в $\mathcal{F}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не совпадающий со скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим в этом пространстве (теорема 5.5). Доказано, что рассматриваемый оператор обладает свойствами хаотичности (теорема 6.1) и часто-гиперцикличности (теорема 6.2) в $\mathcal{F}(\varphi)$.
3. В пространстве $\mathcal{E}(\varphi)$ рассмотрено свойство гиперцикличности операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций в $\mathcal{E}(\varphi)$. Показано, что линейный непрерывный оператор в $\mathcal{E}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим в этом пространстве (теорема 9.1). Приведены теоремы о хаотичности и часто-гиперцикличности оператора дифференцирования (теорема 10.2) и оператора композиции дифференцирования и сдвига (теорема 10.3) в $\mathcal{E}(\varphi)$.
4. Изучены некоторые свойства обобщенного оператора Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$ целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, а именно приведен вид функции, получаемой при действии этого оператора на функцию из $H(\mathbb{C})$, показано, что действие обобщенного оператора Данкла на целую функцию равносильно действию на нее функционала определенного вида. Доказаны утверждения, что обобщенный оператор Данкла является гиперциклическим (теорема 11.3), а также хаотическим и часто-гиперциклическим (теорема 11.4) в $H(\mathbb{C})$. Показано, что обобщенный оператор Данкла обладает свойствами гиперцикличности (теорема 12.2), хаотичности и часто-гиперцикличности (теорема 12.3) в пространстве $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследований

1. Рахимова, А.И. Некоторые свойства обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Вестник Башкирского университета. —

2017. — Т. 22, № 3. — С. 603–606.
2. Рахимова, А.И. Свойства обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Вестник Башкирского университета. — 2018. — Т. 23, № 1. — С. 4–8.
3. Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций / А.И. Рахимова // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — Т. 58, № 1. — С. 88–110.
4. Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций / А.И. Рахимова // Математические заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 297–305.
5. Рахимова, А.И. Гиперциклические и хаотические операторы в пространстве функций, аналитических в области / А.И. Рахимова // Уфимский математический журнал. — 2024. — Т. 16, № 3. — С. 88–95.
6. Rakhimova, A.I. On chaotic and frequently hypercyclic properties of classical operators in the weighted space of entire functions / A.I. Rakhimova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, no. 2. — P. 838–851.

Материалы конференций

1. Рахимова, А.И. Свойства обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Современная математика и ее приложения. Материалы Международной научно-практической конференции. — Стерлитамак: СФ БашГУ, 2017. — В 2 ч. Ч. II. — С. 144–147.
2. Рахимова, А.И. Обобщенный оператор свертки Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы XIII международной Казанской летней научной школы-конференции. — Казань: Изд. АН РТ, 2017. — Т. 54. — С. 307–308.
3. Рахимова, А.И. Оператор свертки Данкла / А.И. Рахимова // Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». Сборник тезисов. — Уфа: Изд. БГПУ, 2018. — С. 68.
4. Рахимова, А.И. Оператор свертки обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов — 2018» [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 148.
5. Рахимова, А.И. Об обобщенном операторе Данкла / А.И. Рахимова // Уфимская осенняя математическая школа. Сборник тезисов Международной научной конференции. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. — С. 195–196.
6. Рахимова, А.И. Об операторе дифференцирования / А.И. Рахимова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов XI Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: Аэтерна, 2020. — С. 3.
7. Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах

бесконечно дифференцируемых функций / А.И. Рахимова // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». — Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — Т. 1. — С. 166–167.

8. Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах $\mathcal{E}(\varphi)$ / А.И. Рахимова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов XIII Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — С. 3.
9. Рахимова, А.И. Гиперцикличность оператора сдвига в весовом пространстве / А.И. Рахимова // Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения»: сборник материалов Международной научной конференции. — Уфа: Аэтерна, 2023. — С. 92.
10. Рахимова, А.И. Гиперциклические операторы в пространстве функций, аналитических в полосе / А.И. Рахимова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы Всеросийской школы-конференции «Лобачевские чтения — 2023». — Казань: Изд. КФУ, 2023. — Т. 67. — С. 82–83.
11. Рахимова, А.И. Гиперциклические операторы в $\mathcal{E}(\varphi)$ / А.И. Рахимова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов XIV Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: РИЦ УУНиТ, 2023. — С. 3.
12. Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в $\mathcal{F}_\varphi$ / А.И. Рахимова // Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения»: сборник материалов Международной научной конференции. — Уфа: Аэтерна, 2024. — С. 62–63.
13. Рахимова, А.И. Гиперциклические операторы в пространстве целых функций / А.И. Рахимова // Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения»: сборник материалов Международной научной конференции. — Уфа: Аэтерна, 2024. — С. 18–19.
14. Рахимова, А.И. Хаотические и часто-гиперциклические операторы в весовом пространстве целых функций / А.И. Рахимова // Математика и теоретические компьютерные науки. — 2024. — Т. 2, № 2. — С. 84–106.
15. Рахимова, А.И. Динамические свойства некоторых операторов / А.И. Рахимова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов XV Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: РИЦ УУНиТ, 2024. — С. 7.
16. Рахимова, А.И. Динамические свойства некоторых операторов / А.И. Рахимова // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2025. — С. 286–287.