

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ –
ОБОСОБЛЕННОЕ СТРУКТУРНОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
БЮДЖЕТНОГО НАУЧНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
УФИМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Рез

РАХИМОВА АЛСУ ИЛЬДАРОВНА

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ
КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ
БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ И
ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

Мусин Ильдар Хамитович

Уфа — 2025

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Динамические свойства классических операторов	
в пространстве функций, аналитических в области	23
§ 1. Основные определения	23
§ 2. Гиперциклические операторы в пространстве	
функций, аналитических в области	30
§ 3. Хаотические и часто-гиперциклические операторы	
в пространстве функций, аналитических в области	37
Глава 2. Гиперциклические, хаотические и	
часто-гиперциклические операторы в весовых	
пространствах целых функций	45
§ 4. Определение пространства $\mathcal{F}(\varphi)$	45
§ 5. Гиперциклические операторы в $\mathcal{F}(\varphi)$	51
§ 6. Хаотичность и часто-гиперциклическость операторов,	
коммутирующих с дифференцированием, в $\mathcal{F}(\varphi)$	73
§ 7. Хаотичность и часто-гиперциклическость	
операторов дифференцирования и сдвига в $\mathcal{F}(\varphi)$	80
Глава 3. Динамические свойства классических операторов	
в весовых пространствах бесконечно	
дифференцируемых функций	86
§ 8. Определение пространства $\mathcal{E}(\varphi)$	86
§ 9. Гиперциклические операторы в $\mathcal{E}(\varphi)$	89
§ 10. Хаотические и часто-гиперциклические	
операторы в $\mathcal{E}(\varphi)$	102
Глава 4. Свойства обобщенного оператора Данкла	108
§ 11. Динамические свойства	
обобщенного оператора Данкла в $H(\mathbb{C})$	108

§ 12. Динамические свойства	
обобщенного оператора Данкла в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$	115
Заключение	119
Список литературы	121

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Обозначим через X топологическое векторное пространство. Рассмотрим в нем линейный непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$. Тогда в пространстве X можно задать дискретную динамическую систему $(X, T) = \{T^n x : x \in X\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Для описания поведения этой системы были введены такие характеристики для операторов, как цикличность, гиперцикличность, хаотичность и часто-гиперцикличность.

В работе изучаются свойства гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности классических линейных непрерывных операторов в следующих пространствах:

пространство $H(\Omega)$ аналитических в Ω функций;

весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ целых в $\mathbb{C}^n$ функций;

весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций.

Они определяются следующим образом.

Пусть Ω — произвольная односвязная область на плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $H(\Omega)$ пространство аналитических в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах из Ω , задаваемой системой норм

$$p_m(f) = \sup_{z \in K_m} |f(z)|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где K_m — компакты в Ω с непустой внутренностью такие, что $K_m \subset \text{int } K_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$.

Определим весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство выпуклых функций $\varphi_m : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

$$i_1) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty;$$

$$i_2) \varphi_m(z) > \varphi_{m+1}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n;$$

$$i_3) \lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty.$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{F}_m = \{f \in H(\mathbb{C}^n), f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)|e^{-\varphi_m(z)}) < \infty\}.$$

Очевидно, при любом $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_m$ — банахово пространство. Положим $\mathcal{F}(\varphi) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m$. Отметим, что с операциями сложения элементов и их умножения на комплексные числа $\mathcal{F}(\varphi)$ образует линейное пространство. Наделим $\mathcal{F}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{F}_m, m \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathcal{F}(\varphi)$ — проективный предел компактной последовательности, составленной из банаховых пространств $\mathcal{F}_m$, то $\mathcal{F}(\varphi)$ является пространством Фреше–Шварца [74, п. 1.2], [91, § 2, п. 5].

Определим весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство непрерывных вещественнозначных функций $\varphi_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty;$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty.$$

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ определим

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n), f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : p_m(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \leq m}} \frac{|(D_x^\alpha f)(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty\}.$$

Теперь положим $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}(\varphi_m)$. С операциями сложения элементов и умножения на комплексные числа $\mathcal{E}(\varphi)$ образует линейное пространство. Наделим $\mathcal{E}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}(\varphi_m), m \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство Фреше и оно инвариантно относительно дифференцирования, а операторы частного дифференцирования в нем непрерывны. Как показано в работе [90, теорема 1], пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ сепарабельно.

Обозначим через X топологическое векторное пространство. Орбитой элемента x оператора $T : X \rightarrow X$ [10, определение 1.1] называется множество

$$\text{Orb}(T, x) = \{T^n x\}_{n=0}^{\infty}.$$

Линейный непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$ называется *гиперциклическим* [10, определение 1.2] в X , если существует элемент $x \in X$, имеющий плотную орбиту в X . Этот элемент $x \in X$ называется *гиперциклическим вектором* оператора T в X .

Основы теории гиперциклических операторов были заложены Дж.Д. Биркхофом и Дж.Р. Маклейном в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$. В 1929 году Дж.Д. Биркхоф [20] доказал, что существует целая функция f , для которой множество, состоящее из функций $f(z), f(z+1), f(z+2), \dots$, плотно в $H(\mathbb{C})$. Это утверждение означает гиперциклическость оператора сдвига T в $H(\mathbb{C})$, действующего по правилу $(Tf)(z) = f(z+1)$. В 1952 году Дж.Р. Маклейн [54] доказал существование функции $f \in H(\mathbb{C})$ такой, что множество, состоящее из функций $f, f', f'', \dots$, плотно в $H(\mathbb{C})$. Данный факт показывает, что оператор дифференцирования $T = \frac{d}{dz}$ гиперциклический в $H(\mathbb{C})$.

В работах К.-Г. Гроссе-Эрдманна [45] и Г. Петерсона [58] сделан широкий обзор гиперциклических операторов для различных пространств. Вопросы гиперциклическости в произвольных линейных топологических пространствах рассматривались Р.М. Гетнером и Дж.Х. Шапиро [39], Ж. Годфруа и Дж.Х. Шапиро [40], С. Ролевичем [60], К. Китаи [50]. Основными результатами статей Р.М. Гетнера, Дж.Х. Шапиро [39] и Ж. Годфруа, Дж.Х. Шапиро [40] являются критерии гиперциклическости операторов в сепарабельных пространствах Фреше. Также в работе [39] доказаны теоремы о гиперциклическости операторов дифференцирования и сдвига, определенных в публикациях Дж.Д. Биркгофа и Дж.Р. Маклейна. А в статье [40] приведено доказательство утверждения о гиперциклическости в $H(\mathbb{C})$ любого оператора свертки, характеристическая функция которого не тождественна постоянной.

В дальнейшем свойство гиперциклическости было изучено для многих важных в приложениях классов операторов в пространствах целых функций многими авторами, в том числе: М.Дж. Бельтран [12], Ж. Боне, А. Бонилья [22], В.Э. Ким [79, 81, 82], А.А. Лишанский [86]. В статьях Р. Арона и Д. Маркозе [4, 5] рассмотрены многие гиперциклические операторы в $H(\mathbb{C})$. Они также привели подробный обзор литературы по этой теме. В данной области еще можно отметить работы Дж. Бэса, А. Пэриса [15–17] и Дж.Дж. Бетанкура, Дж.Д. Бетанкура [18, 19], которые посвящены гиперциклическости в $H(\mathbb{C})$ различных операторов и операторов свертки, ассоциированных с оператором

Данкла. Также гиперциклическими операторами занимались следующие ученые: С.И. Ансари [2], М. Ансари [3], Ф. Байяр, С. Гриво [8], [9], К.Ч. Чан, Р. Сандерс [28, 29], Х.Н. Салас [64], З. Ксю, З. Жоу [66].

Периодической точкой оператора T [10, определение 6.5] называется элемент $x \in X$, для которого имеется натуральное число $n \geq 2$ такое, что $T^n x = x$. Непрерывный оператор $\Phi : Y \rightarrow Y$ в метрическом пространстве (Y, d) называется *хаотическим* (по Девани), если выполнены следующие условия [33, определение 8.5]:

- (А) оператор Φ обладает существенной зависимостью от начальных условий: существует число $\delta > 0$ такое, что для любого элемента $x \in Y$ и его произвольной окрестности U найдутся точка $y \in U$ и номер $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$;
- (В) оператор Φ является топологически транзитивным: для любой пары непустых открытых множеств $A, B \subset X$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, для которого $\Phi^n(A) \cap B \neq \emptyset$;
- (С) множество периодических точек оператора Φ плотно в пространстве Y .

Основы теории хаотических операторов были заложены Р.Л. Девани в 1989 г. в работе [33]. Далее в статье [6] 1992 г. Дж. Бэнкс, Дж. Брукс и другие авторы показали, что требование существенной зависимости оператора от начальных условий вытекает из его топологической транзитивности и наличия плотного множества периодических точек, поэтому при проверке хаотичности оператора это требование можно пропустить. В работе Ж. Годфруа и Дж.Х. Шапиро 1991 г. [40] доказана хаотичность в $H(\mathbb{C})$ любого оператора свертки, характеристическая функция которого отлична от постоянной. В статье А. Гулишавили, К.Р. Макклуэра 1996 г. [46] приведено утверждение о хаотичности оператора уничтожения $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + \frac{d}{dz})$ в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$.

В 2000 г. Р.М. Кроновер написал обширную работу [85] с подробными сведениями по хаотическим операторам в динамических системах. В книге М.В. Хирша, С. Смэйла, Р.Л. Девани 2013 г. [48] собраны основные положения теории динамических систем, в том числе понятия цикличности, гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности. В 2002 г. Ф. Мартинез-Гименез, А. Пэрис в статье [55] изучили свойство хаотичности операторов обратного

сдвига в пространстве l^2 . Дж.Дж. Бетанкур, М. Сифи, К. Тримехе в 2005 г. в работе [19] показали, что операторы свертки, ассоциированные с оператором Данкла, гиперциклические и хаотические в пространстве $H(\mathbb{C})$.

В.Э. Ким в работах [79] 2008 г. и [81] 2009 г. показал, что все операторы обобщенной свертки, не тождественные умножению на константу и порожденные операторами обобщенного сдвига и операторами обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева, гиперциклические и хаотические в $H(\mathbb{C})$. В его статье [83] 2011 г. приведена теорема о том, что операторы уничтожения, действующие в обобщенных пространствах Фока–Баргмана $\mathcal{F}$, обладают свойством хаотичности, причем в частном случае операторами уничтожения являются операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева.

При изучении гиперциклических операторов возникло понятие часто-гиперциклическости. Класс операторов с этим свойством удовлетворяет более сильным требованиям, чем гиперциклические операторы.

Нижняя плотность $\underline{\text{dens}}A$ множества $A \subset \mathbb{N}$ [10, § 6.3.1] определяется по формуле

$$\underline{\text{dens}}A = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in A : n \leq N\}}{N}.$$

Линейный непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$ в топологическом векторном пространстве X называется *часто-гиперциклическим* [44, определение 9.2], если найдется элемент $x \in X$, который для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ удовлетворяет условию

$$\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\} > 0.$$

Этот элемент $x \in X$ называется *часто-гиперциклическим вектором* оператора T в X .

Понятие часто-гиперциклического оператора ввели Ф. Байяр и С. Гриво [9] в 2006 г. для пространства $H(\mathbb{C})$. В 2007 г. А. Бонилья и К.-Г. Гроссе-Эрдманн [27] рассмотрели примеры таких операторов и векторов в $H(\mathbb{C})$. В книгах Ф. Байяра, Э. Матерона [10] и К.-Г. Гроссе-Эрдманна, А. Пэриса [44] приведены подробные сведения по динамике линейных операторов, в том числе по хаотическим и часто-гиперциклическим операторам.

А. Бонилья и К.-Г. Гроссе-Эрдманн в 2006 г. в работе [26] доказали, что непрерывные операторы, коммутирующие со сдвигом, часто-гиперциклические в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$. В 2010 г. Л. Бернал-Гонзалес, А. Бонилья в статье [14]

изучили свойства композиций часто-гиперциклических операторов в весовых пространствах Дирихле. В книгах М.В. Хирша, С. Смэйла, Р.Л. Девани [48] 2013 г. и С. Гриво, Э. Матерона, К. Мене [42] 2016 г. изложена обширная теория по хаотическим и часто-гиперциклическим операторам. В 2009 г. Ж. Боне в работе [21] показал гиперцикличность и часто-гиперцикличность дифференциального оператора в весовом пространстве целых функций в $\mathbb{C}$. В статье С. Гриво [41] рассмотрены различные примеры часто-гиперциклических операторов в $H(\mathbb{C})$.

В.Э. Ким в работе [84] 2014 г. для линейного непрерывного оператора T , удовлетворяющего соотношению $[T, A] = I$, а в более общем случае коммутационному соотношению, порождающему алгебру $\mathfrak{su}(1,1)$, показал, что он является хаотическим и часто-гиперциклическим. В статьях А.А. Лишанского и А.Д. Баранова [86] 2015 г., [7] 2016 г. изучена динамика линейных операторов, а именно операторов Теплица и унитарных операторов, в пространствах Харди функций, аналитических в круге.

И.Ф.З. Бенсайд, М. Гонзалес, Ф. Леон-Сааведра и М.П. Ромеро де ла Роса [13] изучили, в каких случаях в пространстве Фреше X линейный непрерывный оператор T , λ -коммутирующий с дифференцированием по формуле $TD = \lambda DT$ при некотором значении $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, является гиперциклическим. Ф. Леон-Сааведра и М.П. Ромеро де ла Роса [52] рассмотрели все случаи, когда в пространстве Фреше X линейный непрерывный оператор T , λ -коммутирующий с дифференцированием по формуле $TD = \lambda DT$ при некотором значении $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, является часто-гиперциклическим.

В работе Т. Калмеса [49] 2019 г. эти свойства изучены для весовых операторов композиции в пространстве функций, определенном локальными свойствами. В статье Ж. Боне, Т. Калмеса, А. Пэриса [23] 2021 г. рассматривается динамика операторов сдвига на неметризуемых пространствах последовательностей. Изучению динамических свойств различных операторов посвящены работы следующих ученых: К. Агнисенс [1], Ф. Байяр, И.З. Ружа [11], Дж.Дж. Бетанкур, М. Сифи [19], Д. Бонжиорно, У.Б. Даржи, Л. ди Пиацца, Б. Пирс [25], [31], М.П. Ромеро де ла Роса, Л. Фрерик, С. Гриво, А. Пэрис [61], Х. Эмамирад, Г.С. Хешмати [38], К.-Г. Гроссе-Эрдманн, С. Чарпентир, К. Мене [30], [43], [56], А. Нейштадт [57] и других.

Оператор Данкла был введен в работах Ч.Ф. Данкла [34] 1989 г. и [35]

1991 г., а также изучался в статьях М. Реслер [62] 1998 г. и [63] 2002 г., М.Ф.Э. Де Джеу 1993 г. [32]. В.Э. Ким, В.В. Напалков в 2008 г. [80] определили обобщение оператора Данкла в виде дифференциально-разностного оператора в $H(\mathbb{C})$ и привели различные утверждения о его свойствах. В работе В.В. Напалкова, В.В. Напалкова (мл.) 2008 г. [92] оператор Данкла представлен через действие функционала на функцию в пространстве целых функций в $\mathbb{C}$ и доказано, что оператор Данкла можно выразить через оператор свертки.

А.В. Братищев в 2009 г. [72] показал, что в пространстве $H(G)$ оператор Данкла является оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева, и установил гиперцикличность и хаотичность операторов, коммутирующих с оператором Данкла. В статье [77] В.И. Иванов в 2021 г. в весовом пространстве $\mathbb{R}^d$ привел различные неравенства для оператора Данкла в случае радиальных кусочно-степенных весов. Этим операторам и задачам, связанным с ними, посвящены работы следующих авторов: А.В. Братищев [72], К.Р. Забирова [75], [76], В.И. Иванов [77], И.И. Карамов [78], В.Э. Ким, В.В. Напалков [80], В.В. Напалков, В.В. Напалков (мл.) [92], М. Эль Хамма, А. Ламими, Х. Эль Харрак [37], К.-Дж. Янг [67] и других.

В диссертации изучаются различные динамические характеристики классических операторов в весовых пространствах целых и бесконечно дифференцируемых функций, пространствах функций, голоморфных в области и на всей комплексной плоскости. Задачи, поставленные в диссертации, являются актуальными, поскольку они не изучались в опубликованной ранее отечественной и зарубежной научной литературе.

Цели и задачи диссертационной работы. Основной целью диссертации является изучение в пространстве функций, аналитических в области, а также в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций таких динамических характеристик, как гиперцикличность, хаотичность и часто-гиперцикличность, для классических операторов: операторы сдвига, дифференцирования, конечные суммы операторов сдвига, дифференцирования и их композиций, ряды из таких операторов, оператор свертки.

Методология и методы исследования. В данной работе используются классические методы теории функций комплексных переменных и функционального анализа. Также применяются некоторые методы дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. В опубликованных ранее статьях и книгах отечественных и зарубежных ученых задачи, поставленные в диссертации, в рассматриваемых в данной работе пространствах не изучались.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретический характер. В работе рассмотрены понятия гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности операторов. Эти динамические свойства изучены для классических операторов в пространстве функций, аналитических в области, а также в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций и целых функций. Приведены доказательства гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности обобщенного оператора Данкла в данных пространствах.

Положения, выносимые на защиту. В диссертации получены следующие результаты:

1. Показано, что линейный непрерывный оператор в пространстве $H(\Omega)$, коммутирующий с оператором дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим (теорема 2.6). Также он хаотический (теорема 3.5) и часто-гиперциклический (теорема 3.6) в $H(\Omega)$.
2. Изучены свойства плотности полиномов, полноты системы экспонент в пространстве $\mathcal{F}(\varphi)$, доказана гиперцикличность операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций в $\mathcal{F}(\varphi)$. Линейный непрерывный оператор в $\mathcal{F}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не совпадающий со скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим в этом пространстве (теорема 5.5). Доказано, что рассматриваемый оператор обладает свойствами хаотичности (теорема 6.1) и часто-гиперцикличности (теорема 6.2) в $\mathcal{F}(\varphi)$.
3. В пространстве $\mathcal{E}(\varphi)$ рассмотрено свойство гиперцикличности операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций. Показано, что линейный непрерывный оператор в $\mathcal{E}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим в этом пространстве (теорема 9.1). Приведены теоремы о хаотичности и

- часто-гиперцикличности оператора дифференцирования (теорема 10.2) и оператора композиции дифференцирования и сдвига (теорема 10.3) в $\mathcal{E}(\varphi)$.
4. Изучены некоторые свойства обобщенного оператора Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$ целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, а именно приведен вид функции, получаемой при действии этого оператора на функцию из $H(\mathbb{C})$, показано, что действие обобщенного оператора Данкла на целую функцию равносильно действию на нее функционала определенного вида. Доказаны утверждения, что обобщенный оператор Данкла является гиперциклическим (теорема 11.2), а также хаотическим и часто-гиперциклическим (теорема 11.3) в $H(\mathbb{C})$. Показано, что обобщенный оператор Данкла обладает свойствами гиперцикличности (теорема 12.2), хаотичности и часто-гиперцикличности (теорема 12.3) в пространстве $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов диссертации гарантируется строгостью доказательств утверждений и обсуждением полученных теорем на конференциях и семинарах [100–115].

Автор выступал с основными результатами на следующих научных конференциях и семинарах: Международная научно-практическая конференция «Современная математика и ее приложения» (Уфа, 2017 г.); XXV международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 2018 г.); Международная научная конференция «Комплексный анализ и теория аппроксимаций» (Уфа, 2019 г.); Международная научная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2020 г.); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2020 г.); XI международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2020 г.); Международная научная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2021 г.); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2022 г.); XIII международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2022 г.); XIV международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2023 г.); Всероссийская

школа-конференция «Лобачевские чтения — 2023» (Казань, 2023 г.); Семинар «Комплексный и гармонический анализ» отдела теории функций и функционального анализа Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, 2024 г.); Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения» (Уфа, 2024 г.); XV международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2024 г.); Международная конференция Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2025 г.); Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2025 г.).

Публикации. По теме диссертации имеются 6 статей [59, 95–99], из них статьи [95–97] изданы в журналах из Перечня ВАК, работы [59, 98, 99] опубликованы в журналах, которые входят в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus, приравненных к изданиям из Перечня ВАК.

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [59, 95–99]. В совместных публикациях [95, 96] В.В. Напалкову принадлежат постановки задач, а также в статье [95] — теорема 1, в работе [96] — теорема 1, а диссертанту — остальные утверждения и их доказательства. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук И.Х. Мусину за предложенную тему исследований, постоянное внимание, неоценимую помощь и всестороннюю поддержку в процессе работы над диссертацией. Автор очень признателен члену-корреспонденту РАН, профессору В.В. Напалкову за внимательное обсуждение поставленных задач и плодотворную совместную работу.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 116 публикаций. Объем работы составляет 132 страницы.

Краткое содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, изучена история вопроса, определена цель и поставлены задачи исследования, отражены научная новизна и теоретическая значимость полученных результатов.

Пусть X — топологическое векторное пространство. Рассмотрим линейный непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$. *Орбитой* элемента x оператора $T : X \rightarrow X$ [10, определение 1.1] называется множество

$$\text{Orb}(T, x) = \{T^n x\}_{n=0}^{\infty}.$$

Периодической точкой оператора T [10, определение 6.5] называется элемент $x \in X$, для которого имеется натуральное число $n \geq 2$ такое, что $T^n x = x$.

Линейный непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$ называется *гиперциклическим* [10, определение 1.2] в пространстве X , если существует элемент $x \in X$, орбита которого плотна в X . Этот элемент $x \in X$ — *гиперциклический вектор* оператора T в X .

Непрерывный оператор $\Phi : Y \rightarrow Y$ в метрическом пространстве (Y, d) называется *хаотическим* (по Девани), если выполнены следующие условия [33, определение 8.5]:

- (А) оператор Φ имеет существенную зависимость от начальных условий: существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in Y$ и его произвольной окрестности U найдутся элемент $y \in U$ и номер $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$;
- (В) оператор Φ топологически транзитивный: для любой пары непустых открытых множеств $A, B \subset X$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, для которого $\Phi^n(A) \cap B \neq \emptyset$;
- (С) множество периодических точек оператора Φ плотно в пространстве Y .

Нижняя плотность $\underline{\text{dens}}A$ множества $A \subset \mathbb{N}$ [10, § 6.3.1] определяется по формуле

$$\underline{\text{dens}}A = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in A : n \leq N\}}{N}.$$

Линейный непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$ в топологическом векторном пространстве X называется *часто-гиперциклическим* [44, определение 9.2],

если существует элемент $x \in X$ такой, что для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ выполняется условие

$$\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\} > 0.$$

Этот элемент $x \in X$ — *часто-гиперциклический вектор* оператора T в X . Отметим, что множество часто-гиперциклических операторов содержится в классе гиперциклических операторов [44, определение 9.2].

В первой главе в параграфе 1 изложены основные понятия о гиперциклических, хаотических и часто-гиперциклических операторах, приведены примеры операторов, которые не обладают данными характеристиками. В параграфе 2 рассматривается пространство $H(\Omega)$ функций, аналитических в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из Ω , задаваемой системой норм

$$p_m(f) = \sup_{z \in K_m} |f(z)|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где K_m — компакты в Ω с непустой внутренностью такие, что $K_m \subset \text{int } K_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$. По аппроксимационной теореме Рунге [87, гл. 4, § 2], [116, п. 23] система полиномов плотна в $H(\Omega)$, значит, пространство $H(\Omega)$ сепарабельно. Хорошо известно, что $H(\Omega)$ является пространством Фреше. Отметим, что $H(\Omega)$ инвариантно относительно дифференцирования.

Пусть $\Omega_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| < \sigma\}$ — горизонтальная полоса на плоскости $\mathbb{C}$, где $\sigma > 0$. Определим оператор сдвига $T_a f(z) = f(z + a)$, где $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Пространство $H(\Omega_\sigma)$ инвариантно относительно дифференцирования и сдвига.

Показано, что оператор сдвига гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$ (теорема [2.2]), а также оператор дифференцирования гиперциклический в $H(\Omega)$ (теорема [2.3]). Далее доказана теорема о гиперциклическости линейных непрерывных операторов, коммутирующих с дифференцированием и не являющихся скалярным кратным тождественному отображению, в $H(\Omega)$ (теорема [2.6]) и приведены некоторые ее следствия.

Теорема [2.6]. Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению. Тогда оператор T гиперциклический в $H(\Omega)$.

Основные утверждения **параграфа 3** состоят в том, что операторы со свойствами, определенными в теореме [2.6](#), хаотические (теорема [3.5](#)) и часто-гиперциклические (теорема [3.6](#)) в $H(\Omega)$. Из этих теорем вытекают следствия о хаотичности и часто-гиперциклическости дифференциальных операторов конечного порядка в $H(\Omega)$, конечной суммы операторов сдвига, конечной суммы композиций дифференцирования и сдвига в $H(\Omega_\sigma)$.

Теорема [3.5](#). Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению. Тогда T — хаотический оператор в $H(\Omega)$.

Теорема [3.6](#). Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению. Тогда T — часто-гиперциклический оператор в $H(\Omega)$.

Вторая глава посвящена изучению динамических свойств классических операторов — операторов дифференцирования, сдвига, их композиций и свертки в весовых счетно-нормированных пространствах целых функций. В **параграфе 4** рассматривается весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ целых функций в $\mathbb{C}^n$, инвариантное при дополнительных условиях относительно дифференцирования и сдвига. Определим весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ — семейство выпуклых функций $\varphi_m : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

- $i_1)$ $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty$;
- $i_2)$ $\varphi_m(z) > \varphi_{m+1}(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$;
- $i_3)$ $\lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{F}_m = \{f \in H(\mathbb{C}^n), f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)|e^{-\varphi_m(z)}) < \infty\}.$$

Очевидно, при любом $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_m$ — банахово пространство. Ввиду условия $i_2)$ вложения $\mathcal{F}_{m+1} \subset \mathcal{F}_m$ непрерывны для всех $m \in \mathbb{N}$, а в силу условия $i_3)$

они вполне непрерывны. Положим $\mathcal{F}(\varphi) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m$. Отметим, что с операциями сложения элементов и их умножения на комплексные числа $\mathcal{F}(\varphi)$ образует линейное пространство. Наделим $\mathcal{F}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{F}_m$, $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathcal{F}(\varphi)$ — проективный предел компактной последовательности, составленной из банаховых пространств $\mathcal{F}_m$, то $\mathcal{F}(\varphi)$ является пространством Фреше–Шварца [51, п. 1], [91, § 2, п. 5].

Также по мере необходимости на семейство φ будем накладывать дополнительные условия для любого $m \in \mathbb{N}$:

$i_4)$ найдутся постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что

$$\varphi_{m+1}(z + t) \leq \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : \|t\| \leq a_m$;

или более жесткое условие

$i_5)$ при любом $R > 0$ найдется постоянная $b_m = b_m(R) > 0$ такая, что

$$\varphi_{m+1}(z + t) \leq \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : \|t\| \leq R$;

или в отдельных случаях условие

$i_6)$ при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для любых $R > 0$ существует постоянная $b_m = b_m(R) > 0$, удовлетворяющая условию

$$\varphi_{m+1}(\tilde{z} + t) \leq \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^n : \|t\| \leq R$ и

$\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$, $j \in (1; n)$.

Отметим, что при выполнении условия $i_4)$ пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ инвариантно относительно дифференцирования (лемма [5.1]). В случае справедливости требования $i_5)$ $\mathcal{F}(\varphi)$ является инвариантным относительно как дифференцирования, так и сдвига (теорема [5.4]). Пространства такого вида встречались в работах следующих математиков: Л. Эренпрайс [36], В.П. Паламодов [93],

Б.А. Тейлор [65], Ф. Хаслингер [47], А.В. Абанин, Т.И. Абанина, Ф.Ч. Тиен [68, 69], С.В. Попенов [94], Н.Т. Ахтямов, И.Х. Мусин [71].

В параграфе 5 показана гиперцикличность операторов частного дифференцирования, дифференциальных операторов бесконечного порядка, характеристическая функция которых является целой функцией экспоненциального типа, оператора сдвига в $\mathcal{F}(\varphi)$. Далее доказана теорема о гиперцикличности оператора, коммутирующего с операторами частного дифференцирования и не совпадающего со скалярным кратным тождественному отображению, в $\mathcal{F}(\varphi)$ (теорема 5.5), а также проверено утверждение для оператора свертки (теорема 5.6).

Теорема 5.5. Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_4) и задан линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не тождественный оператору умножения на константу. Тогда оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Из этой теоремы получены следствия о том, что конечная сумма сдвигов, конечная сумма композиций дифференцирования и сдвига, ряд из сдвигов при определенных условиях на коэффициенты, операторы свертки гиперциклические в $\mathcal{F}(\varphi)$. Приведен пример гиперциклического оператора, не являющегося оператором свертки.

Теорема 5.6. Пусть семейство φ удовлетворяет условиям i_5) и дополнительному условию

$$\forall m, k \in \mathbb{N} \exists l = l_{m,k} \in \mathbb{N}, r = r_{m,k} > 0 : \forall z, t \in \mathbb{C}^n \varphi_l(z+t) \leq \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r,$$

S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}(\varphi)$, преобразование Лапласа которого $\hat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle})$ не тождественно постоянной. Тогда оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Основные утверждения параграфа 6 состоят в том, что линейный непрерывный оператор, коммутирующий с дифференцированием и не тождественный умножению на скаляр, хаотический (теорема 6.1) и часто-гиперциклический (теорема 6.2) в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Теорема 6.1. Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_4), задан линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}(\varphi)$, который коммутирует с операторами частного дифференцирования и не кратный тождественному оператору. Тогда оператор T хаотический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Теорема 6.2. Пусть для семейства φ выполнено условие i_4), задан линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}(\varphi)$, который коммутирует с операторами частного дифференцирования и не кратный тождественному оператору. Тогда оператор T часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Из этих утверждений вытекают следствия о хаотичности и часто-гиперциклическости дифференциальных операторов конечного порядка, конечной суммы сдвигов, конечной суммы композиций дифференцирования и сдвига, дифференциальных операторов бесконечного порядка, характеристическая функция которых является целой функцией экспоненциального типа, ряда из сдвигов при определенных условиях на коэффициенты, операторов свертки в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Параграф 7 посвящен изучению свойств хаотичности и часто-гиперциклическости операторов дифференцирования и сдвига, конечной суммы композиций дифференцирования и сдвига в $\mathcal{F}(\varphi)$. Приведен пример хаотического и часто-гиперциклического оператора, не являющегося оператором свертки.

В **третьей главе** изучается гиперциклическость классических линейных операторов в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, инвариантных относительно дифференцирования или сдвига. Такие пространства рассматривались в работах Н.Т. Ахтямова, И.Х. Мусина [70, 71], а в статье И.Х. Мусина [89] доказано, что дифференциальные операторы конечного порядка с постоянными коэффициентами гиперциклические в весовом пространстве Фреше $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. В **параграфе 8** рассматривается весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, инвариантное относительно дифференцирования и при дополнительных условиях относительно сдвига. Определим весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство непрерывных вещественнозначных функций $\varphi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(x)}{\|x\|} &= +\infty; \\ \beta) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) &= +\infty. \end{aligned}$$

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ определим

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n), f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : p_m(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \leq m}} \frac{|(D_x^\alpha f)(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty \right\}.$$

Теперь положим $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}(\varphi_m)$. Снабдим $\mathcal{E}(\varphi)$ операциями сложения элементов и умножения на комплексные числа. Тогда $\mathcal{E}(\varphi)$ образует линейное пространство. Наделим его топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}(\varphi_m)$, $m \in \mathbb{N}$. В силу условия β) вложения $\mathcal{E}(\varphi_{m+1}) \subset \mathcal{E}(\varphi_m)$ вполне непрерывны для всех $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство Фреше и оно инвариантно относительно дифференцирования, а операторы частного дифференцирования в нем непрерывны. Как показано в работе [90, теорема 1], пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ сепарабельно.

Отметим, что $\mathcal{E}(\varphi)$ не обязательно инвариантно относительно сдвига. Далее на семейство функций φ в зависимости от задачи будем накладывать одно из дополнительных условий, гарантирующих инвариантность $\mathcal{E}(\varphi)$ относительно сдвига для любого $m \in \mathbb{N}$:

γ_1) найдутся постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что

$$\varphi_{m+1}(x + \eta) \leq \varphi_m(x) + b_m,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathbb{R}^n : \|\eta\| \leq a_m$;

или более жесткое условие

γ_2) при любом $R > 0$ найдется постоянная $b_m = b_m(R) > 0$ такая, что

$$\varphi_{m+1}(x + \eta) \leq \varphi_m(x) + b_m,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathbb{R}^n : \|\eta\| \leq R$;

или другое условие

γ_3) для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют числа $l = l_{m,k} \in \mathbb{N}$ и $r = r_{m,k} > 0$ такие, что при произвольных $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_l(x + y) \leq \varphi_m(x) + \varphi_k(y) + r;$$

или в отдельных случаях условие

γ_4) при фиксированном $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ для любого $R > 0$ существует постоянная $b_m = b_m(R) > 0$, удовлетворяющая условию

$$\varphi_{m+1}(\tilde{x} + t) \leq \varphi_m(x) + b_m,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \|t\| \leq R$ и

$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $j \in (1; n)$.

В параграфе 9 доказана теорема о гиперцикличности в $\mathcal{E}(\varphi)$ линейного непрерывного оператора, коммутирующего с дифференцированием и не являющегося скалярным кратным тождественному отображению (теорема 9.1).

Теорема 9.1. Пусть семейство φ удовлетворяет условию γ_1). Тогда если линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{E}(\varphi)$ коммутирует с операторами частного дифференцирования и не тождественен умножению на скаляр, то он гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Далее приведены ее следствия о гиперцикличности дифференциально-го оператора конечного порядка, оператора сдвига, конечной суммы сдвигов, конечной суммы композиций дифференцирования и сдвига, ряда из сдвигов при определенных условиях на коэффициенты, операторов свертки в $\mathcal{E}(\varphi)$. В параграфе 10 получены утверждения о хаотичности и часто-гиперцикличности оператора дифференцирования (теорема 10.2) и оператора композиции дифференцирования и сдвига (теорема 10.3) в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Теорема 10.2. Пусть для семейства φ выполнено условие γ_1). Тогда дифференциальный оператор $Tf(x) = D^\alpha f(x)$ для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha \neq (0, 0, \dots, 0)$, где $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Теорема 10.3. Пусть семейство φ удовлетворяет условию γ_1). Тогда оператор $Tf(x) = D_x^\alpha f(x + b)$ для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha \neq (0, 0, \dots, 0)$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, где $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Четвертая глава посвящена изучению динамических свойств обобщенного оператора Данкла. В параграфе 11 приведены основные свойства данного оператора в $H(\mathbb{C})$. Рассмотрим пространство $H(\mathbb{C})$ целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах.

Обобщенный оператор Данкла для любых функций f из пространства $H(\mathbb{C})$ определяется по формуле:

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f(\alpha_j z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где число $c \in \mathbb{R}_+$ и параметр $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ — некоторые заданные величины, а коэффициенты α_j имеют вид

$$\alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}}, \quad j \in (0; m-1).$$

Очевидно, обобщенный оператор Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$ линейный и непрерывный. Доказаны теоремы о гиперцикличности (теорема [11.2](#)), а также хаотичности и часто-гиперцикличности (теорема [11.3](#)) оператора Λ в $H(\mathbb{C})$.

Теорема [11.2](#). *Обобщенный оператор Данкла Λ является гиперциклическим в $H(\mathbb{C})$.*

Теорема [11.3](#). *Обобщенный оператор Данкла Λ хаотический и часто-гиперциклический в $H(\mathbb{C})$.*

В параграфе 12 изучены свойства оператора Λ в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$, которое является пространством $\mathcal{F}(\varphi)$ при $n = 1$ с условиями $i_1)–i_4)$ на семейство φ и для всех $m \in \mathbb{N}$ $\varphi_m(z) = \varphi_m(|z|)$, где $z \in \mathbb{C}$. Приведены утверждения о гиперцикличности (теорема [12.2](#)), а также хаотичности и часто-гиперцикличности (теорема [12.3](#)) оператора Λ в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.

Теорема [12.2](#). *Обобщенный оператор Данкла Λ является гиперциклическим в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.*

Теорема [12.3](#). *Обобщенный оператор Данкла Λ хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.*

В заключении кратко резюмируются результаты работы.

Глава 1. Динамические свойства классических операторов в пространстве функций, аналитических в области

§ 1. Основные определения

Обозначим через X топологическое векторное пространство. Рассмотрим в нем линейный непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$. *Орбита* элемента x оператора $T : X \rightarrow X$ [10, определение 1.1] определяется в виде

$$\text{Orb}(T, x) = \{T^n x\}_{n=0}^{\infty}.$$

Периодической точкой оператора T [10, определение 6.5] называется элемент $x \in X$, для которого существует натуральное число $n \geq 2$ такое, что $T^n x = x$. Оператор $T : X \rightarrow X$ *нетривиальный*, если он не тождественен оператору умножения на отличную от нуля постоянную величину.

Линейный непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$ называется *гиперциклическим* [10, определение 1.2] в пространстве X , если существует элемент $x \in X$, орбита которого плотна в X . Этот элемент $x \in X$ — *гиперциклический вектор* оператора T в X .

Непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$ *топологически транзитивный* в X [10, теорема 1.2], если для любой пары непустых открытых множеств $A, B \subset X$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, для которого $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$. Понятия линейного топологически транзитивного оператора и гиперциклического оператора эквивалентны в пространстве Фреше [10, теорема 1.2].

Непрерывный оператор $\Phi : Y \rightarrow Y$ в метрическом пространстве (Y, d) называется *хаотическим* (по Девани), если выполнены следующие условия [33, определение 8.5]:

- (А) оператор Φ имеет существенную зависимость от начальных условий: существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in Y$ и его произвольной окрестности U найдутся элемент $y \in U$ и номер $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$;
- (В) оператор Φ топологически транзитивный;
- (С) множество периодических точек оператора Φ плотно в пространстве Y .

Нижняя плотность $\underline{\text{dens}}A$ множества $A \subset \mathbb{N}$ [10, § 6.3.1] определяется по формуле

$$\underline{\text{dens}}A = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in A : n \leq N\}}{N}.$$

Линейный непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$ в топологическом векторном пространстве X называется *часто-гиперциклическим* [44, определение 9.2], если существует элемент $x \in X$ такой, что для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ выполняется условие

$$\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\} > 0.$$

Этот элемент $x \in X$ — *часто-гиперциклический вектор* оператора T в X . Отметим, что множество часто-гиперциклических операторов содержится в классе гиперциклических операторов [44, определение 9.2].

Следующие факты из работ С.И. Ансари [2], Ф. Байяра, Э. Матерона [10] и К.-Г. Гроссе-Эрдманна, А. Пэриса [44], Ф. Леон-Сааведры, В. Мюллера [53] необходимы для общего представления о динамике линейных операторов.

Утверждение 1.1. *Если линейный непрерывный оператор T в топологическом векторном пространстве X гиперциклический, то при любом $p \in \mathbb{N}$ оператор T^p гиперциклический и имеет те же гиперциклические векторы [10, теорема 3.1], [2, теорема 1]. Если линейный непрерывный оператор T в комплексном топологическом векторном пространстве X гиперциклический, то для всех $\lambda \in \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, оператор λT гиперциклический и имеет те же гиперциклические векторы [10, следствие 3.3], [53, следствие 3].*

Утверждение 1.2. *Пусть линейные непрерывные операторы T и S в топологическом векторном пространстве X гиперциклические, тогда оператор $S + T$ не всегда гиперциклический [44, замечание 4.17]. Если линейный непрерывный оператор T гиперциклический в пространстве Фреше X , то любой вектор $x \in X$ можно представить как сумму двух гиперциклических векторов [10, предложение 1.29].*

Утверждение 1.3. *Если линейный непрерывный оператор T в топологическом векторном пространстве X часто-гиперциклический, то при любом $p \in \mathbb{N}$ оператор T^p часто-гиперциклический и имеет те же часто-гиперциклические векторы [10, теорема 6.30].*

Утверждение 1.4. Если линейный непрерывный оператор T в комплексном топологическом векторном пространстве X часто-гиперциклический, то для всех $\lambda \in \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, оператор λT часто-гиперцикличесок и имеет те же часто-гиперциклические векторы [10, теорема 6.28].

Далее при изучении различных свойств операторов используются следующие утверждения:

Теорема 1.1 (теорема Годфруа–Шапиро, [40, следствие 1.3]). Пусть $T : X \rightarrow X$ — линейный непрерывный оператор в сепарабельном пространстве Фреше X , подпространства

$$X_0 = \text{span}\{x \in X : Tx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\} \text{ и}$$

$$Y_0 = \text{span}\{x \in X : Tx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > 1\} \text{ плотны в } X.$$

Тогда T — гиперциклический оператор в X .

Теорема 1.2 (теорема Китаи–Гетнера–Шапиро, [39, теорема 2.2]). Пусть X — сепарабельное пространство Фреше и $T : X \rightarrow X$ — линейный непрерывный оператор. Пусть X_0, Y_0 — плотные подмножества X и последовательность $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ отображений $S_k : Y_0 \rightarrow X$ таковы, что:

1. $T^k \rightarrow 0$ поточечно на X_0 при $k \rightarrow \infty$;
2. $S_k \rightarrow 0$ поточечно на Y_0 при $k \rightarrow \infty$;
3. $T^k S_k = I$ для любых $k \in \mathbb{N}$ на Y_0 .

Тогда оператор T гиперциклический в X .

Теорема 1.3 (теорема о хаотичности и часто-гиперциклическости, [10, теорема 6.10, теорема 6.18], [44, теорема 9.9, предложение 9.11]). Пусть $T : X \rightarrow X$ — линейный непрерывный оператор в сепарабельном пространстве Фреше X и существуют плотное подмножество $X_0 \subset X$ и отображение $S : X_0 \rightarrow X_0$ такие, что:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ — ряд сходится безусловно для всех $x \in X_0$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} S^n x$ — ряд сходится безусловно для всех $x \in X_0$;
3. $TSx = x$ для всех $x \in X_0$.

Тогда оператор T является хаотическим и часто-гиперциклическим в X .

Теперь приведем утверждения из работ Дж. Бэнкса, Дж. Брукса [6] и Ф. Байяра, Э. Матерона [10]:

Лемма 1.1 ([6, теорема 1]). *Если в метрическом пространстве X непрерывный оператор $T : X \rightarrow X$ топологически транзитивный и множество его периодических точек плотно в X , то оператор T обладает существенной зависимостью от начальных условий.*

Лемма 1.2 (теорема Биркгофа о транзитивности, [10, теорема 1.2]). *Если X — пространство Фреше, то для линейного непрерывного оператора $T : X \rightarrow X$ топологическая транзитивность и гиперциклическость равносильны.*

По лемме [1.1] условие (А) в определении хаотичности вытекает из требований (В) и (С), а в силу леммы [1.2] условие (В) в пространстве Фреше эквивалентно гиперциклическости оператора. Значит, для доказательства хаотичности гиперциклического оператора в пространстве Фреше достаточно показать, что он имеет плотное множество периодических точек.

Теорема 1.4 ([44, теорема 2.33]). *Пусть T — линейный оператор в комплексном векторном пространстве X . Тогда множество периодических точек оператора T образует линейное подпространство в X , которое задается в виде*

$$\text{Per}(T) = \text{span}\{x \in X : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tx = e^{\alpha\pi i}x\}.$$

Пусть X — комплексное пространство Фреше, $T : X \rightarrow X$ — линейный непрерывный оператор в X , $J \subset \mathbb{N}$ — множество индексов, $\mathbb{T}$ — единичная окружность. Тогда множество отображений $\{E_j\}_{j \in J}$ таких, что $E_j : \mathbb{T} \rightarrow X$ при всех $j \in J$ и для любого $\lambda \in \mathbb{T}$ $E_j(\lambda)$ является либо собственным вектором оператора T для собственного значения λ , либо 0, которое удовлетворяет условию, что множество $\text{span}\{E_j(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{T}, j \in J}$ плотно в X , называется *охватывающим полем собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем* [44, определение 9.21]. Векторное поле называется *непрерывным* или *C^2 -гладким*, если отображения E_j при всех $j \in J$ соответственно непрерывны или дважды непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{T}$ [44, определение 9.21].

Теорема 1.5 ([44, теорема 9.22]). Пусть T — линейный непрерывный оператор в комплексном сепарабельном пространстве Фреше X . Тогда справедливы утверждения:

- а) если оператор T имеет в X непрерывное охватывающее поле собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем, то T хаотический в X ;
- б) если оператор T имеет в X C^2 -гладкое охватывающее поле собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем, то T часто-гиперциклический в X .

Примеры не гиперциклических, не хаотических и не часто-гиперциклических операторов.

1. Не гиперциклические операторы. Классами не гиперциклических операторов в вещественных или комплексных банаховых пространствах являются [44, пример 5.10]: операторы ограниченной степени; операторы конечного ранга; компактные операторы; степенно-компактные операторы; нижние треугольные операторы. В качестве классов не гиперциклических операторов в гильбертовых пространствах можно привести [44, пример 5.24]: самосопряженные операторы; нормальные операторы; положительные операторы в комплексных гильбертовых пространствах.

Примерами компактных операторов являются операторы Вольтерра, интегральные операторы Вольтерра, ядерные операторы, а к степенно-компактным операторам относятся абсолютно суммируемые операторы, операторы Гильберта–Шмидта. Основные результаты для банаховых пространств верны также для всех локально выпуклых пространств, в частности, для пространств Фреше. Например, компактные и степенно-компактные операторы не гиперциклические в локально выпуклых пространствах [24, предложение 8].

Пример 1.1. [44, пример 5.9] Интегральный оператор Вольтерра

$$V_k f(t) = \int_0^t k(t, s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad f \in C[0; 1],$$

где $k : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$, в пространстве $C[0; 1]$ не гиперциклический.

Пример 1.2. [44, пример 5.22] Оператор Чезаро

$$C_1 x = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right\}_{n=1}^{\infty}$$

в пространствах l^p , $1 \leq p < \infty$, и c_0 не является гиперциклическим оператором.

Пример 1.3. [44, пример 5.33] Оператор $I + B$, где B — обратный сдвиг, в пространстве l^2 не является гиперциклическим оператором.

Пример 1.4. [44, пример 5.2.7] Оператор композиции Вольтерра

$$V_{\varphi} f(t) = \int_0^{\varphi(t)} f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad f \in C[0; 1],$$

где $\varphi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, $\varphi \in C[0; 1]$, в пространстве $C[0; 1]$ не гиперциклический.

В данной работе примеры не гиперциклических операторов приведены в следующих теоремах и следствиях.

Предложение 1.1. [теорема 2.4] Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа, $f \in H(\Omega_{\sigma})$. Тогда оператор $Tf(z) = f'(\lambda z + b)$ при условии $|\lambda| < 1$ не гиперциклический в $H(\Omega_{\sigma})$.

Предложение 1.2. [следствие 2.1] Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа, $f \in H(\Omega_{\sigma})$. Тогда оператор $Tf(z) = f^{(n)}(\lambda z + b)$, $n \in \mathbb{N}$ при условии $|\lambda| < 1$ не гиперциклический в $H(\Omega_{\sigma})$.

Предложение 1.3. [теорема 5.7] Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_6). Тогда оператор $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f \right)(z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j + b, z_{j+1}, \dots, z_n)$, где $j = 1, \dots, n$, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}$ фиксированные, не гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$ в случае $|\lambda| < 1$.

Предложение 1.4. [теорема 9.3] Пусть для семейства φ выполнено условие γ_4). Тогда оператор $Tf(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right)(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j + b, x_{j+1}, \dots, x_n)$, где $j = 1, \dots, n$, $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, числа $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ фиксированные, не гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$ при условии $|\lambda| < 1$.

2. Не хаотические операторы. Можно привести следующие примеры не хаотических операторов в различных пространствах.

Пример 2.1. [44, пример 2.39] Весовой сдвиг T в пространстве l^p , $1 \leq p < \infty$, имеет вид

$$Tx = T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (2x_2, \frac{3}{2}x_3, \frac{4}{3}x_4, \dots), \quad x \in l^p.$$

Оператор T не хаотический в пространстве l^p , $1 \leq p < \infty$.

Пример 2.2. [44, пример 8.2.3] Обратный сдвиг S в пространстве l^1 имеет вид

$$S\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha_1 + \frac{\langle x_2, x_2^* \rangle}{2} \alpha_2, \alpha_2 + \frac{\langle x_3, x_3^* \rangle}{2^2} \alpha_3, \dots).$$

Оператор S не хаотический в пространстве l^1 и в любых сепарабельных пространствах Фреше.

Пример 2.3. [44, пример 4.7] Обратный сдвиг B в пространстве

$$l^p(v) = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где $v = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — положительная весовая последовательность, имеет вид

$$Bf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n = \frac{1}{z}(f(z) - f(0)), \quad Bf(0) = f'(0), \quad f \in l^p(v).$$

Оператор B не хаотический при условии $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$ в пространстве $l^p(v)$.

3. Не часто-гиперциклические операторы. Классы не гиперциклических операторов в вещественных или комплексных банаховых пространствах и гильбертовых пространствах являются также не часто-гиперциклическими операторами.

Пример 3.1. [44, пример 9.28] Оператор Ролевича $T = 2B$ в пространстве l^1 не часто-гиперциклический.

Пример 3.2. [44, пример 5.22] Оператор Чезаро

$$C_1 x = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right\}_{n=1}^{\infty},$$

где $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, в пространствах l^p , $1 \leq p < \infty$, и c_0 не часто-гиперциклический.

В данной работе примеры не часто-гиперциклических операторов приведены в следующей теореме и ее следствии.

Предложение 3.1. [теорема 7.4] Пусть для семейства φ выполнено условие i_6). Тогда оператор $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f \right)(z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j + b, z_{j+1}, \dots, z_n)$, где $j \in (1; n)$, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}$ фиксированные, не часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$ в случае $|\lambda| < 1$.

§ 2. Гиперциклические операторы в пространстве функций, аналитических в области

В данном разделе рассмотрим задачи о гиперциклическости, хаотичности и часто-гиперциклическости линейных непрерывных операторов в пространствах функций, аналитических в односвязной области на комплексной плоскости. Вопросу гиперциклическости в пространстве $H(\mathbb{C})$ посвящены работы многих авторов, в том числе: Р.М. Гетнер, Дж.Х. Шапиро [39], Ж. Годфруа, Дж.Х. Шапиро [40], М.Дж. Бельтран [12], Ж. Боне, А. Бонилья [22], В.Э. Ким [79, 82], Р. Арон, Д. Маркозе [4], [5], Дж. Бэс, А. Пэрис [15–17], Дж.Дж. Бетанкур, Дж.Д. Бетанкур [18, 19]. Задачами хаотичности и часто-гиперциклическости в $H(\mathbb{C})$ занимались следующие ученые: Ф. Байяр, С. Гриво [9], [41], А. Бонилья, К.-Г. Гроссе-Эрдманн [27], Ж. Годфруа, Дж.Х. Шапиро [40], Дж.Дж. Бетанкур, М. Сифи, К. Тримехе [19], В.Э. Ким [81, 83, 84], Ф. Байяр, Э. Матерон [10], К.-Г. Гроссе-Эрдманн, А. Пэрис [44].

Пусть Ω — произвольная односвязная область на плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $H(\Omega)$ пространство аналитических в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах из Ω , задаваемой системой норм

$$p_m(f) = \sup_{z \in K_m} |f(z)|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где K_m — компакты в Ω с непустой внутренней частью такие, что $K_m \subset \text{int } K_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$. По аппроксимационной теореме Рунге [87, гл. 4, § 2], [116, п. 23] система полиномов плотна в $H(\Omega)$, значит, пространство $H(\Omega)$ сепарабельно. Хорошо известно, что $H(\Omega)$ является пространством Фреше.

Пусть $\Omega_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| < \sigma\}$ — горизонтальная полоса на плоскости $\mathbb{C}$, где $\sigma > 0$. Определим оператор сдвига $T_a f(z) = f(z + a)$, где $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Отметим, что $H(\Omega)$ инвариантно относительно дифференцирования и при условии $\Omega = \Omega_\sigma$ относительно сдвига.

Через $H(\mathbb{C})$ обозначим пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{C}$, а через $H^*(\Omega_\sigma)$ — пространство линейных непрерывных функционалов на $H(\Omega_\sigma)$. Обозначим в виде $\text{span } E$ линейную оболочку множества E в $H(\Omega)$. Характеристическую функцию оператора T в $H(\Omega)$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ определим формулой

$$\check{T}(\lambda) = T_z(e^{\lambda z})|_{z=0}.$$

Далее нам понадобится следующая теорема.

Теорема 2.1 ([44, лемма 2.34]). Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — множество, содержащее предельную точку, тогда множество

$$\text{span}\{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Lambda},$$

где $z \in \Omega$, плотно в $H(\Omega)$.

Докажем утверждения о гиперцикличности некоторых операторов в $H(\Omega_\sigma)$.

Теорема 2.2. Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Тогда оператор сдвига $(T_a f)(z) = f(z + a)$ гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$.

Доказательство. Используя лемму [1.2], докажем гиперцикличность оператора по схеме из примера 2.20 [44]. Пусть U, V — произвольные непустые открытые множества из $H(\Omega_\sigma)$, $f \in U$ и $g \in V$. Тогда при некотором $m \in \mathbb{N}$ найдутся открытые множества

$$W_m^{(1)} = \left\{ F \in H(\Omega_\sigma) : p_m(F - f) < \frac{1}{m} \right\} \subset U,$$

$$W_m^{(2)} = \left\{ F \in H(\Omega_\sigma) : p_m(F - g) < \frac{1}{m} \right\} \subset V.$$

Выберем $n \in \mathbb{N}$ таким образом, что компакты K_m и $K_m + na$ не пересекаются.

Пусть D_1 — выпуклая область в Ω_σ , содержащая K_m , D_2 — выпуклая область в Ω_σ , содержащая $K_m + na$, причем $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Определим функцию s на $D_1 \cup D_2$, полагая

$$s(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in D_1, \\ g(z - na) & \text{при } z \in D_2. \end{cases}$$

По аппроксимационной теореме Рунге [87, гл. 4, § 2], [116, п. 23] существует полином p такой, что

$$\sup_{z \in K_m} |s(z) - p(z)| = \sup_{z \in K_m} |f(z) - p(z)| < \frac{1}{m},$$

$$\sup_{z \in K_m + na} |s(z) - p(z)| = \sup_{z \in K_m + na} |g(z - na) - p(z)| < \frac{1}{m}.$$

Отсюда получим $p \in W_m^{(1)}$, значит, $p \in U$ и $T_a^n p \in T_a^n(U)$. Из соотношения

$$\sup_{z \in K_m + na} |g(z - na) - p(z)| = \sup_{z \in K_m} |g(z) - (T_a^n p)(z)| < \frac{1}{m}$$

следует $T_a^n p \in W_m^{(2)}$. Тогда $T_a^n p \in V$.

Поскольку $T_a^n p \in T_a^n(U)$ и $T_a^n p \in V$, то $T_a^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Таким образом, T_a — топологически транзитивный оператор в $H(\Omega_\sigma)$. По лемме 1.2 оператор T_a гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$. $\square$

Теорема 2.3. *Оператор дифференцирования $T = \frac{d}{dz} : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ гиперциклический в $H(\Omega)$.*

Доказательство. Отметим, что оператор T линейный и непрерывный в $H(\Omega)$. Используя теорему 1.2, докажем утверждение.

Положим $X_0 = Y_0 = \text{span}\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. По аппроксимационной теореме Рунге [87, гл. 4, § 2], [116, п. 23] множества X_0 и Y_0 плотны в $H(\Omega)$. Введем обозначение $R_m = \sup_{z \in K_m} |z|$, $m \in \mathbb{N}$.

Определим оператор $S : Y_0 \rightarrow H(\Omega)$:

$$Sf(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi, \quad z \in \Omega, \quad f \in Y_0,$$

где $(0; z)$ — любой путь в Ω . Положим $S_k = S^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Очевидно, условие 3) теоремы 1.2 на Y_0 выполнено.

Проверим выполнение условия 1) на множестве X_0 . Действие оператора T на моном z^n при всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$T^k z^n = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k} & \text{при } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases}$$

Поэтому при условии $k > n$ для всех $m \in \mathbb{N}$ $p_m(T^k z^n) = 0$. Таким образом, условие 1) выполнено.

Проверим выполнение условия 2) на множестве Y_0 . Действие оператора S на моном z^n для любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ равно

$$S^k z^n = \frac{n!}{(n+k)!} z^{n+k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(S^k z^n) = \frac{n!}{(n+k)!} \sup_{z \in K_m} |z|^{n+k} = \frac{n!}{(n+k)!} R_m^{n+k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

В силу этого условие 2) выполнено. Итак, для T справедливы все требования теоремы [1.2](#). Следовательно, оператор T гиперциклический в $H(\Omega)$. $\square$

Приведем пример не гиперциклического оператора в $H(\Omega_\sigma)$.

Теорема 2.4. Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Тогда оператор $Tf(z) = f'(\lambda z + b)$ при условии $|\lambda| < 1$ не гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$.

Доказательство. Очевидно, оператор T линейный и непрерывно отображает $H(\Omega_\sigma)$ в $H(\Omega_\sigma)$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in H(\Omega_\sigma)$. Действие оператора T на функцию f для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$T^n f(z) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f^{(n)} \left(\lambda^n z + b \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \right) \right).$$

Возьмем произвольный компакт $K \subset \Omega_\sigma$. Очевидно,

$$\sup_{z \in K} \left| \lambda^n z + b \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \right) - \frac{b}{1 - \lambda} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Значит, для некоторого $N \in \mathbb{N}$ при $n \geq N$

$$\left| \lambda^n z + b \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \right) - \frac{b}{1 - \lambda} \right| < \frac{\sigma}{4}, \quad z \in K.$$

Введем обозначение

$$z_n = \lambda^n z + b \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \right).$$

По интегральной формуле Коши для всех $n \geq N$

$$f^{(n)}(z_n) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\xi - \frac{b}{1-\lambda}| = \frac{\sigma}{2}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_n)^{n+1}},$$

поэтому

$$|f^{(n)}(z_n)| \leq \frac{2^n n!}{\sigma^n} \max_{|\xi - \frac{b}{1-\lambda}| \leq \frac{\sigma}{2}} |f(\xi)| = C_0 \left(\frac{2}{\sigma} \right)^n n!,$$

где $C_0 = \max_{|\xi - \frac{b}{1-\lambda}| \leq \frac{\sigma}{2}} |f(\xi)|$. Тогда для любых $n \geq N$, $z \in K$ получим

$$|T^n f(z)| = |\lambda|^{\frac{n(n-1)}{2}} |f^{(n)}(z_n)| \leq C_0 \left(\frac{2}{\sigma} \right)^n n! |\lambda|^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

значит,

$$\max_{z \in K} |T^n f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Поскольку K — произвольный компакт, то $T^n f \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в топологии пространства $H(\Omega_\sigma)$. В частности, множество $\{T^n f\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничено в $H(\Omega_\sigma)$ и не может быть всюду плотным. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Тогда оператор $Tf(z) = f^{(n)}(\lambda z + b)$, $n \in \mathbb{N}$ при условии $|\lambda| < 1$ не гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$.

Это следствие справедливо в силу утверждения [1.1](#).

Далее приведем теоремы об операторах, коммутирующих с оператором дифференцирования.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы [\[91\]](#), теорема 17.3].

Теорема 2.5. Линейный непрерывный оператор M , отображающий пространство $H(\Omega_\sigma)$ в $H(\Omega_\sigma)$, коммутирует с оператором дифференцирования тогда и только тогда, когда M можно представить в виде оператора свертки $M_F[f](z) = \langle F_w, f(z + w) \rangle$, где F — некоторый функционал из $H^*(\Omega_\sigma)$, определяющее множество которого лежит на вещественной оси [\[91\]](#), теорема 17.3].

Теорема 2.6. Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению. Тогда T — гиперциклический оператор в $H(\Omega)$.

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ ряд Тейлора

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

сходится равномерно на компактах плоскости, значит, он сходится в топологии пространства $H(\Omega)$. Функцию $T(z, \lambda) = T_z(e^{\lambda z})$ можно представить в виде поточечно сходящегося по λ ряда

$$T(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T(z^n)}{n!} \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поскольку T — линейный непрерывный оператор в $H(\Omega)$, то при любом $m \in \mathbb{N}$ можно найти постоянную $c_m > 0$ и номер $s \in \mathbb{N}$ такие, что $p_m(Tf) \leq c_m p_s(f)$ для функции $f \in H(\Omega)$. Так как для всех $m \in \mathbb{N}$ $p_m(f) = \sup_{z \in K_m} |f(z)|$, то

$$\sup_{z \in K_m} |(Tf)(z)| \leq c_m \sup_{z \in K_s} |f(z)|.$$

Введем обозначение $R_s = \sup_{z \in K_s} |z|$. Значит, для любых $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ при фиксированном $z \in \mathbb{C}$

$$p_m(T(z^n)) \leq c_m p_s(z^n) = c_m \sup_{z \in K_s} |z^n| \leq c_m R_s^n < \infty.$$

Тогда степенной ряд сходится равномерно на компактах плоскости, поэтому $T_z(e^{\lambda z})$ — целая функция по переменной λ .

Так как T коммутирует с оператором дифференцирования, то при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ верно равенство

$$\frac{d}{dz}(T_z(e^{\lambda z})) = T_z \frac{d}{dz}(e^{\lambda z}) = \lambda T_z(e^{\lambda z}), \quad z \in \Omega.$$

Решение дифференциального уравнения $\frac{d}{dz}(T_z(e^{\lambda z})) = \lambda T_z(e^{\lambda z})$ имеет вид

$$T_z(e^{\lambda z}) = a_T(\lambda) e^{\lambda z}, \quad z \in \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поскольку функция $T_z(e^{\lambda z})$ целая по λ , то $a_T(\lambda)$ — целая функция. Отметим, что $a_T(\lambda)$ не тождественна постоянной: если положим $a_T(\lambda) \equiv c$, где $c = \text{const}$, то получим

$$T_z(e^{\lambda z}) = c e^{\lambda z},$$

а в силу того, что по теореме [2.1](#) множество $\text{span}\{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $z \in \Omega$, плотно в $H(\Omega)$, следует

$$Tf = cf, \quad f \in H(\Omega),$$

что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим множества $W_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |a_T(\lambda)| < 1\}$ и $W_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |a_T(\lambda)| > 1\}$. Они открытые и непустые: если $W_2 = \emptyset$, то $a_T(\lambda)$ ограничена, значит, постоянна, а если $W_1 = \emptyset$, то $1/a_T(\lambda)$ ограничена. Определим $X_0 = \text{span}\{e^{\lambda z}\}_{z \in W_1}$ и $Y_0 = \text{span}\{e^{\lambda z}\}_{z \in W_2}$. Множества X_0 и Y_0 плотны в $H(\Omega)$. Таким образом, по теореме [1.1](#) оператор T гиперциклический в $H(\Omega)$. $\square$

Операторы из следствий [2.2](#)–[2.5](#) линейные непрерывные и коммутируют с оператором дифференцирования, поэтому они удовлетворяют теореме [2.6](#).

Следствие 2.2. Пусть полином $P(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n$, где $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \dots, m$, отличен от постоянной. Тогда оператор $T = \sum_{n=0}^m a_n \frac{d^n}{dz^n}$ является гиперциклическим в $H(\Omega)$.

Следствие 2.3. Пусть заданы числа $m \in \mathbb{N}$ и $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_j \in \mathbb{C}$, где $j \in (1; m)$, причем не все c_j равны нулю, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{j=1}^m c_j f(z + a_j)$ гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$.

Следствие 2.4. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, для всех $j = 0, 1, \dots, N$ и $k = 1, 2, \dots, m$ заданы числа $c_{jk} \in \mathbb{C}$ и $a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, причем не все c_{jk} равны нулю, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^m c_{jk} (\frac{d^j}{dz^j} f)(z + a_k)$, действующий в $H(\Omega_\sigma)$, является гиперциклическим в $H(\Omega_\sigma)$.

Следствие 2.5. Оператор $M_F[f](z) = \langle F_w, f(z + w) \rangle$, где $F \in H^*(\Omega_\sigma)$, определяющее множество которого лежит на вещественной оси, гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$ (см. теорему 2.5).

§ 3. Хаотические и часто-гиперциклические операторы в пространстве функций, аналитических в области

Далее докажем утверждения о хаотичности некоторых операторов в пространстве $H(\Omega)$.

Теорема 3.1. *Оператор сдвига $(T_a f)(z) = f(z+a)$, где $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in H(\Omega_\sigma)$, хаотический в $H(\Omega_\sigma)$.*

Доказательство. Известно, что $H(\Omega_\sigma)$ является пространством Фреше. В теореме 2.2 было доказано, что оператор T_a гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$. В силу лемм 1.1 и 1.2 по определению хаотичности осталось показать, что T_a имеет плотное множество периодических точек в $H(\Omega_\sigma)$.

По теореме 1.4 множество периодических точек оператора T_a в $H(\Omega_\sigma)$ имеет вид $\text{Per}(T_a) = \text{span}\{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $\Lambda = \{\lambda = \frac{\alpha}{a}\pi i : \alpha \in \mathbb{Q}\}$. Замыкание Λ совпадает с мнимой осью на $\mathbb{C}$. Тогда совокупность предельных точек множества Λ также содержит все точки из мнимой оси на $\mathbb{C}$. По теореме 2.1 множество $\text{Per}(T_a)$ плотно в $H(\Omega_\sigma)$. Таким образом, оператор T_a хаотический в $H(\Omega_\sigma)$. $\square$

Теорема 3.2. *Оператор дифференцирования $Tf(z) = \frac{d}{dz}f(z)$, где $f \in H(\Omega)$, хаотический в $H(\Omega)$.*

Доказательство. Проверим выполнение условий из определения хаотичности. В теореме 2.3 показали, что оператор T гиперциклический. Теперь в силу лемм 1.1 и 1.2 достаточно показать, что T имеет плотное множество периодических точек в $H(\Omega)$.

По теореме 1.4 периодические точки оператора T в $H(\Omega)$ составляют множество $\text{Per}(T) = \text{span}\{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $\Lambda = \{\lambda = e^{\alpha\pi i} : \alpha \in \mathbb{Q}\}$. Замыканием Λ является единичная окружность $\mathbb{T}$, тогда предельными точками множества Λ будут все точки из $\mathbb{T}$. По теореме 2.1 множество $\text{Per}(T)$ плотно в $H(\Omega)$. Следовательно, T хаотический в $H(\Omega)$. $\square$

Теперь покажем часто-гиперциклическость операторов дифференцирования и сдвига.

Теорема 3.3. Оператор дифференцирования $Tf(z) = \frac{d}{dz}f(z)$, где $f \in H(\Omega)$, часто-гиперциклический в $H(\Omega)$.

Доказательство. Проверим справедливость утверждения по теореме 1.3. Непрерывность оператора $T : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ известна. Введем множество $W = \text{span}\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Оно плотно в $H(\Omega)$ по аппроксимационной теореме Рунге [87, гл. 4, § 2], [116, п. 23]. Обозначим $R_m = \sup_{z \in K_m} |z|$, $m \in \mathbb{N}$.

Определим оператор $S : W \rightarrow W$ в виде

$$Sf(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi, \quad z \in \Omega, \quad f \in W,$$

где $(0; z)$ — любой путь в Ω .

Очевидно, условие 3) теоремы 1.3 на W выполнено.

Проверим выполнение условия 1) на W . Действие оператора T на моном z^n для произвольных $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$T^k z^n = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k} & \text{при } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases}$$

Отсюда при всех $m \in \mathbb{N}$ получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z \in K_m} |T^k z^n| < \infty.$$

Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} T^k z^n$ безусловно сходится в $H(\Omega)$. Условие 1) выполнено.

Проверим выполнение условия 2) на W . Действие оператора S на моном z^n при любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ равно

$$S^k z^n = \frac{n!}{(n+k)!} z^{n+k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что для любых $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{z \in K_m} |S^k z^n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} \sup_{z \in K_m} |z|^{n+k} = R_m^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} R_m^k < \infty.$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} S^k z^n$ безусловно сходится в $H(\Omega)$. Условие 2) выполнено.

Таким образом, оператор T часто-гиперциклический в $H(\Omega)$. □

Теорема 3.4. Оператор сдвига $T_a f(z) = f(z + a)$, где $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in H(\Omega_\sigma)$, часто-гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$.

Доказательство. Используя теорему 1.3, докажем утверждение. Непрерывность линейного оператора $T_a : H(\Omega_\sigma) \rightarrow H(\Omega_\sigma)$ очевидна. Определим при произвольных $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ функции

$$f_{nk}(z) = z^n \left(\frac{\sin(z/k)}{z/k} \right)^{n+2}.$$

Очевидно, для любых $k \in \mathbb{N}$ $f_{nk} \in H(\Omega_\sigma)$.

Поскольку $f_{nk}(z)$ равномерно сходится к z^n при $k \rightarrow \infty$ в $H(\Omega_\sigma)$, то система функций $\{f_{nk}(z)\}_{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0}$ полна в $H(\Omega_\sigma)$. Введем множество $W = \text{span}\{f_{nk}(z)\}_{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0}$.

Определим оператор $S_a : W \rightarrow W$ в виде

$$(S_a f)(z) = f(z - a).$$

Очевидно, условие 3) теоремы 1.3 на W выполнено.

Проверим выполнение условия 1) на W . Действие оператора T_a на функцию f_{nk} для произвольных $m \in \mathbb{N}$ равно

$$T_a^m f_{nk}(z) = \frac{k^{n+2}}{(z + ma)^2} \sin^{n+2}\left(\frac{z + ma}{k}\right).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{z \in K_s} |T_a^m f_{nk}(z)| = k^{n+2} \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}\left(\frac{z+ma}{k}\right)|}{|z + ma|^2}.$$

Тогда существует точка $m_0 \geq l + 1$, начиная с которой для всех $m \geq m_0$ верно условие

$$\forall z \in K_s \quad |z + ma| \geq \frac{m|a|}{2}.$$

Введем обозначение $R_s = \sup_{z \in K_s} \text{Im } z$, где $s \in \mathbb{N}$. Обозначим при любых $s \in \mathbb{N}$

$$k^{n+2} \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}\left(\frac{z+ma}{k}\right)|}{|z + ma|^2} = I_1(s) + I_2(s),$$

где

$$I_1(s) = k^{n+2} \sum_{m=1}^{m_0-1} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}\left(\frac{z+ma}{k}\right)|}{|z + ma|^2},$$

$$I_2(s) = k^{n+2} \sum_{m=m_0}^{\infty} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}\left(\frac{z+ma}{k}\right)|}{|z+ma|^2}.$$

Оценим суммы $I_1(s)$ и $I_2(s)$:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= k^{n+2} \sum_{m=1}^{m_0-1} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}\left(\frac{z+ma}{k}\right)|}{|z+ma|^2} \leq \\ &\leq Ck^{n+2}(m_0-1)e^{\frac{(n+2)}{k} \sup_{z \in K_s} \operatorname{Im} z} = Ck^{n+2}(m_0-1)e^{\frac{(n+2)}{k} R_s} < \infty, \end{aligned}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от компакта K_s ,

$$\begin{aligned} I_2(s) &= k^{n+2} \sum_{m=m_0}^{\infty} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}\left(\frac{z+ma}{k}\right)|}{|z+ma|^2} \leq \\ &\leq \frac{4k^{n+2}}{|a|^2} \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{e^{\frac{(n+2)}{k} \sup_{z \in K_s} \operatorname{Im} z}}{m^2} = \frac{4k^{n+2}}{|a|^2} e^{\frac{(n+2)}{k} R_s} \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} T_a^m f_{nk}(z)$ безусловно сходится в $H(\Omega_\sigma)$. Условие 1) выполнено.

Проверим выполнение условия 2) на множестве W . Действие оператора S_a на функцию f_{nk} при любых $m \in \mathbb{N}$ имеет вид:

$$S_a^m f_{nk}(z) = \frac{k^{n+2}}{(z-ma)^2} \sin^{n+2}\left(\frac{z-ma}{k}\right).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{z \in K_s} |S_a^m f_{nk}(z)| = k^{n+2} \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}\left(\frac{z-ma}{k}\right)|}{|z-ma|^2}.$$

Тогда существует точка m_0 , начиная с которой для всех $m \geq m_0$ верно условие

$$\forall z \in K_s \quad |z-ma| \geq \frac{m|a|}{2}.$$

Обозначим при любых $s \in \mathbb{N}$

$$k^{n+2} \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}\left(\frac{z-ma}{k}\right)|}{|z-ma|^2} = J_1(s) + J_2(s),$$

где

$$J_1(s) = k^{n+2} \sum_{m=1}^{m_0-1} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}\left(\frac{z-ma}{k}\right)|}{|z-ma|^2},$$

$$J_2(s) = k^{n+2} \sum_{m=m_0}^{\infty} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}(\frac{z-ma}{k})|}{|z-ma|^2}.$$

Оценим суммы $J_1(s)$ и $J_2(s)$:

$$\begin{aligned} J_1(s) &= k^{n+2} \sum_{m=1}^{m_0-1} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}(\frac{z-ma}{k})|}{|z-ma|^2} \leq \\ &\leq \tilde{C} k^{n+2} (m_0 - 1) e^{\frac{n}{k} \sup_{z \in K_s} \operatorname{Im} z} = \tilde{C} k^{n+2} (m_0 - 1) e^{\frac{n+2}{k} R_s} < \infty, \end{aligned}$$

где $\tilde{C}$ — некоторая константа, не зависящая от компакта K_s ,

$$\begin{aligned} J_2(s) &= k^{n+2} \sum_{m=m_0}^{\infty} \sup_{z \in K_s} \frac{|\sin^{n+2}(\frac{z-ma}{k})|}{|z-ma|^2} \leq \\ &\leq \frac{4k^{n+2}}{|a|^2} \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{e^{\frac{(n+2)}{k} \sup_{z \in K_s} \operatorname{Im} z}}{m^2} = \frac{4k^{n+2}}{|a|^2} e^{\frac{(n+2)}{k} R_s} \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} S_a^m f_{nk}(z)$ безусловно сходится в $H(\Omega_\sigma)$. Условие 2) выполнено. Таким образом, оператор T_a хаотический и часто-гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$. $\square$

Приведем следующие утверждения об операторах, коммутирующих с оператором дифференцирования.

Теорема 3.5. Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению. Тогда T — хаотический оператор в $H(\Omega)$.

Доказательство. Покажем справедливость утверждения, проверив определение хаотичности. В теореме [2.6](#) было показано, что T — гиперциклический оператор в пространстве Фреше $H(\Omega)$. В силу лемм [1.1](#) и [1.2](#) осталось показать, что T имеет плотное множество периодических точек в $H(\Omega)$.

При доказательстве теоремы [2.6](#) получили, что действие оператора T на функцию $e^{\lambda z}$ определяется по формуле

$$T(e^{\lambda z}) = a_T(\lambda) e^{\lambda z},$$

где $a_T(\lambda)$ — целая функция, отличная от постоянной, $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \Omega$.

Введем обозначение $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$.

По теореме [1.4](#) множество периодических точек оператора T имеет вид

$$V = \text{span} \left\{ f \in H(\Omega) : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tf(z) = e^{\alpha\pi i} f(z) \right\}.$$

Возьмем подмножество множества V :

$$V_0 = \text{span} \{ e^{\lambda z} \}_{\lambda \in W},$$

где $W = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : \varphi(\lambda) = e^{\alpha\pi i} \right\}.$

Поскольку $\varphi(\lambda)$ — непостоянная целая функция, то она принимает все значения, кроме, может быть, одного значения. Значит, ее образ $\varphi(\mathbb{C})$ пересекает единичную окружность $\mathbb{T}$. Так как непостоянная голоморфная функция $\varphi(\lambda)$ является открытым отображением, то бесконечно много точек $\lambda = \varphi^{-1}(e^{\alpha\pi i})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, лежат в некотором компакте в $\mathbb{C}$. Отсюда получим, что W имеет предельную точку. По теореме [2.1](#) множество V_0 плотно в $H(\Omega)$. Тогда оператор T хаотический в $H(\Omega)$. $\square$

Теорема 3.6. Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению. Тогда T — частогиперциклический оператор в $H(\Omega)$.

Доказательство. В теореме [2.6](#) было показано, что T — гиперциклический оператор в пространстве Фреше $H(\Omega)$. При ее доказательстве получили, что действие оператора T на функцию $e^{\lambda z}$ равно

$$T(e^{\lambda z}) = a_T(\lambda) e^{\lambda z},$$

где $a_T(\lambda)$ — целая функция, отличная от постоянной, $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \Omega$. Обозначим $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$. Из предыдущего уравнения следует, что числа $\varphi(\lambda)$ являются собственными значениями оператора T , а экспоненты $e^{\lambda z}$ — его собственными функциями. Теперь докажем утверждение по схеме из теоремы 9.25 [\[44\]](#).

Поскольку φ — целая функция, не тождественная постоянной, то по теореме Пикара [\[116\]](#), с. 219] множество $\varphi(\mathbb{C})$ содержит всю единичную окружность, кроме, возможно, одной точки. Возьмем точку $w \in \mathbb{T}$ таким образом, что в точке λ , удовлетворяющей соотношению $\varphi(\lambda) = w$, производная $\varphi'(\lambda)$ отлична от нуля: $\varphi'(\lambda) \neq 0$. В этом случае функция φ отображает некоторую открытую окрестность $\tilde{U}$ точки λ конформно в некоторую открытую окрестность U точки w .

Пусть $\psi = \varphi^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$ — обратное отображение, оно голоморфно в U . Зафиксируем некоторую нетривиальную замкнутую дугу единичной окружности $\gamma \subset U$, содержащую точку w . Возьмем C^2 -гладкую функцию $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ такую, что $f(w) \neq 0$ и $f \equiv 0$ вне γ . Определим функцию $E : \mathbb{T} \rightarrow H(\Omega)$ в виде

$$E(w) = f(w)e^{\psi(w)z}.$$

Так как функция $f(w)$ C^2 -гладкая на $\mathbb{T}$ и $e^{\psi(w)z}$ — бесконечно дифференцируемая функция по w на $\mathbb{T}$, то $E(w)$ — C^2 -гладкая по w на $\mathbb{T}$ функция.

Построим C^2 -гладкие по w функции $E_j(w)$ для всех значений $w_j \in \mathbb{T}$, для которых в соответствующей точке λ_j такой, что $\varphi(\lambda_j) = w_j$, выполнено условие $\varphi'(\lambda_j) \neq 0$. $E_j(w)$ являются собственными функциями оператора T , соответствующими изолированным собственным значениям $w_j = \varphi(\lambda_j)$, где $w_j \in \mathbb{T}$. Тогда множество

$$\tilde{E} = \text{span}\{f_j(w)e^{\psi(w)z}\}_{w \in \mathbb{T}} = \text{span}\{f_j(\varphi(\lambda))e^{\lambda z}\}_{\lambda \in W},$$

где $W = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : \varphi(\lambda) = e^{\alpha \pi i}\}$, определяет поле собственных функций оператора T , соответствующих собственным значениям с единичным модулем. В силу того, что для всех значений $w_j \in \mathbb{T}$ функции $E_j(w)$ C^2 -гладкие по w , получим, что $\tilde{E}$ является C^2 -гладким полем собственных функций оператора T , соответствующих собственным значениям с единичным модулем.

В теореме [3.5](#) доказано, что множество W содержит предельную точку. Поэтому по теореме [2.1](#) $\tilde{E}$ плотно в $H(\Omega)$. Таким образом, оператор T имеет плотное в $H(\Omega)$ C^2 -гладкое поле собственных функций, соответствующих собственным значениям с единичным модулем. Следовательно, по теореме [1.5](#) оператор T часто-гиперциклический в $H(\Omega)$. $\square$

Поскольку операторы из следствий [3.1](#)–[3.4](#) линейные непрерывные в $H(\Omega)$ и коммутируют с оператором дифференцирования, то для них справедливы теоремы [3.5](#) и [3.6](#).

Следствие 3.1. Пусть полином $P(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n$, где $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \dots, m$, отличен от постоянной. Тогда оператор $T = \sum_{n=0}^m a_n \frac{d^n}{dz^n}$ хаотический и часто-гиперциклический в $H(\Omega)$.

Следствие 3.2. Пусть заданы числа $m \in \mathbb{N}$ и $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_j \in \mathbb{C}$, где $j \in (1; m)$, причем не все c_j равны нулю, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{j=1}^m c_j f(z + a_j)$ хаотичен и часто-гиперцикличесок в $H(\Omega_\sigma)$.

Следствие 3.3. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, для всех $j = 0, 1, \dots, N$ и $k = 1, 2, \dots, m$ заданы числа $c_{jk} \in \mathbb{C}$ и $a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, причем не все c_{jk} равны нулю, $f \in H(\Omega_\sigma)$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^m c_{jk} (\frac{d^j}{dz^j} f)(z + a_k)$, действующий в $H(\Omega_\sigma)$, хаотический и часто-гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$.

Следствие 3.4. Оператор $M_F[f](z) = \langle F_w, f(z + w) \rangle$, где $F \in H^*(\Omega_\sigma)$, определяющее множество которого лежит на вещественной оси, хаотичен и часто-гиперцикличесок в $H(\Omega_\sigma)$ (см. теорему [2.5](#)).

Глава 2. Гиперциклические, хаотические и часто-гиперциклические операторы в весовых пространствах целых функций

§ 4. Определение пространства $\mathcal{F}(\varphi)$

В этой главе изучим динамические свойства некоторых классических операторов, в том числе операторов дифференцирования, сдвига, их композиций и свертки, в весовых пространствах целых функций. Пространства такого вида встречались в работах многих математиков: Л. Эренпрайс [36], В.П. Паламонов [93], Б.А. Тейлор [65], Ф. Хаслингер [47], А.В. Абанин, Т.И. Абанина, Ф.Ч. Тиен [68, 69], С.В. Попенов [94], Н.Т. Ахтямов, И.Х. Мусин [71]. В статьях Ж. Боне, А. Бонильи [21], [22] и М.Дж. Бельтрана [12] были установлены условия гиперциклическости оператора дифференцирования в таких пространствах, заданных с помощью радиальных весовых функций. Банаховы пространства имеют жесткую структуру, ввиду этого в них сложно исследовать подобные задачи. Поэтому далее их будем рассматривать в счетно-нормированных пространствах, у которых менее жесткая структура. Определим весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство выпуклых функций $\varphi_m : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

- $i_1) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty;$
- $i_2) \varphi_m(z) > \varphi_{m+1}(z), z \in \mathbb{C}^n;$
- $i_3) \lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty.$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим

$$\mathcal{F}_m = \{f \in H(\mathbb{C}^n), f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)|e^{-\varphi_m(z)}) < \infty\}.$$

Очевидно, при любом $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_m$ — банахово пространство. Ввиду условия $i_2)$ вложения $\mathcal{F}_{m+1} \subset \mathcal{F}_m$ непрерывны для всех $m \in \mathbb{N}$, а в силу условия $i_3)$ они вполне непрерывны.

Положим

$$\mathcal{F}(\varphi) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m.$$

Отметим, что с операциями сложения элементов и их умножения на комплексные числа $\mathcal{F}(\varphi)$ образует линейное пространство. Наделим $\mathcal{F}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{F}_m$, $m \in \mathbb{N}$. Эквивалентную топологию в $\mathcal{F}(\varphi)$ можно определить при помощи метрики

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(f_1 - f_2)}{1 + p_m(f_1 - f_2)}.$$

Поскольку $\mathcal{F}(\varphi)$ — проективный предел компактной последовательности, составленной из банаховых пространств $\mathcal{F}_m$, то $\mathcal{F}(\varphi)$ является пространством Фреше–Шварца [74, п. 1.2], [91, § 2, п. 5].

Также по мере необходимости на семейство φ будем накладывать дополнительные условия для любого $m \in \mathbb{N}$:

i_4) найдутся постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что

$$\varphi_{m+1}(z + t) \leq \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : \|t\| \leq a_m$;

или более жесткое условие

i_5) при любом $R > 0$ найдется постоянная $b_m = b_m(R) > 0$ такая, что

$$\varphi_{m+1}(z + t) \leq \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : \|t\| \leq R$.

Определим для произвольного $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ и оператор сдвига на вектор a в $\mathcal{F}(\varphi)$

$$T_a : f \in \mathcal{F}(\varphi) \rightarrow f(z + a).$$

Отметим, что при выполнении условия i_4) пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ инвариантно относительно дифференцирования (лемма 5.1). В случае справедливости требования i_5) $\mathcal{F}(\varphi)$ инвариантно относительно дифференцирования и сдвига (теорема 5.4).

Пример. Примерами функций φ_m из семейства $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям $i_4)$ – $i_5)$, являются:

1) функция $\varphi_m(z) = 2^{-mp}\|z\|^p$, где $p > 1$;

2) функция $\varphi_m(z) = \sum_{j=1}^q c_j 2^{-mp_j} \|z\|^{p_j}$, где $q \in \mathbb{N}$, $2 \leq q < \infty$ и при всех $j \in (1; n)$ $p_j > 1$, $c_j \geq 0$, причем хотя бы один коэффициент c_j не равен нулю.

Для чисел $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ и $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ определим в $\mathbb{C}^n$ скалярное произведение $\langle u, v \rangle = u_1 \bar{v}_1 + \dots + u_n \bar{v}_n$ и евклидову норму $\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}$. Обозначим в виде $\text{span } E$ линейную оболочку множества E в $\mathcal{F}(\varphi)$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и переменных $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ определим длину мультииндекса $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, мономы $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ и операторы дифференцирования

$$D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad D_z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}.$$

Для вещественнозначной функции ψ в $\mathbb{C}^n$ такой, что

$$\lim_{\|z\| \rightarrow +\infty} \frac{\psi(z)}{\|z\|} = +\infty,$$

преобразование Юнга-Фенхеля определяется в виде

$$\tilde{\psi}(z) = \sup_{t \in \mathbb{C}^n} (\text{Re} \langle z, t \rangle - \psi(t)), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда для функций из семейства $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ в силу условия $i_1)$ их преобразования Юнга-Фенхеля $\tilde{\varphi}_m(z)$ ограничены во всем $\mathbb{C}^n$.

Докажем гиперцикличность линейных непрерывных операторов, коммутирующих с дифференцированием, и оператора дифференцирования в $\mathcal{F}(\varphi)$ при выполнении условия $i_4)$, также гиперцикличность операторов сдвига и свертки в $\mathcal{F}(\varphi)$ в случае справедливости требования $i_5)$. Основным результатом параграфа 5 является теорема [\[5.5\]](#). Далее покажем, что линейные непрерывные операторы, коммутирующие с дифференцированием, хаотические и часто-гиперциклические в $\mathcal{F}(\varphi)$ при выполнении условия $i_4)$. Эти утверждения приведены в теоремах [\[6.1\]](#) и [\[6.2\]](#) параграфа 7.

Приведем необходимые в дальнейшем утверждения.

Лемма 4.1. *Полиномы плотны в $\mathcal{F}(\varphi)$.*

Доказательство. Возьмем функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ и число $\varepsilon > 0$ произвольным образом. Для доказательства леммы необходимо показать, что при любом $\varepsilon > 0$ существует полином P , для которого $\rho(f, P) < \varepsilon$.

Выберем номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таким, что

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\frac{|f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}} = \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_{m+1}(z)}} e^{\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)} \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)}.$$

В силу требования i_3) из этой формулы получим, что для всех $m \in \mathbb{N}$ при $z \rightarrow \infty$

$$\frac{|f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}} \rightarrow 0.$$

По теореме 4 [65] если функция φ_m выпуклая в $\mathbb{C}^n$ и функция φ_m^* финитная в окрестности нуля, то полиномы плотны в $\mathcal{F}_m$ при произвольном $m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что множество полиномов плотно в $\mathcal{F}_m$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Поэтому можно подобрать полином P , удовлетворяющий условию

$$p_N(f - P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку справедливо неравенство

$$p_1(f - P) \leq p_2(f - P) \leq \dots \leq p_N(f - P) < \frac{\varepsilon}{2},$$

то следует, что $\rho(f, P) < \varepsilon$. □

Отметим, что из совокупности всех полиномов можно выбрать некоторое его подмножество с рациональными коэффициентами, которое является счетным всюду плотным множеством в $\mathcal{F}(\varphi)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ сепарабельно.*

Преобразование Лапласа линейного непрерывного функционала $S \in \mathcal{F}^*(\varphi)$ определяется по формуле

$$\hat{S}(z) = S_\lambda(e^{\langle \lambda, z \rangle}), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

В силу i_1) функция $f_z : \lambda \in \mathbb{C}^n \rightarrow e^{\langle \lambda, z \rangle}$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$ принадлежит $\mathcal{F}(\varphi)$. Поэтому функция $\hat{S}$ корректно определена всюду в $\mathbb{C}^n$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 4.3. *Пусть S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}(\varphi)$. Тогда функция $\hat{S}(z) = (S_\xi, e^{\langle \xi, z \rangle})$ целая в $\mathbb{C}^n$, причем для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ справедливо равенство $D_z^\alpha \hat{S}(z) = S_\xi(\xi^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Возьмем любую точку $\eta \in \mathbb{C}^n$. Покажем аналитичность функции $\hat{S}$ в точке η . Для всех значений $z \in \mathbb{C}^n$ из шара $\|z - \eta\| < 1$ определим функцию

$$g_z(\xi) = e^{\langle \xi, z \rangle} - e^{\langle \xi, \eta \rangle} - \langle \xi, z - \eta \rangle e^{\langle \xi, \eta \rangle}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Для нее выполняется оценка

$$|g_z(\lambda)| \leq (1 + |\lambda| + |\lambda|^2) \|z - \eta\|^2 e^{\operatorname{Re} \langle \lambda, z \rangle}.$$

В силу i_1) отсюда получим, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(g_z) \leq C_m \|z - \eta\|^2,$$

где $C_m > 0$ — некоторая константа. Из этого ввиду непрерывности функционала S следует, что $S(g_z) = o(\|z - \eta\|)$ при $z \rightarrow \eta$.

Используя линейность S , получим

$$\begin{aligned} \hat{S}(z) - \hat{S}(\eta) &= S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle}) - S_\xi(e^{\langle \xi, \eta \rangle}) = S_\xi(\langle \xi, z - \eta \rangle e^{\langle \xi, \eta \rangle}) + S_\xi(g_z(\xi)) = \\ &= \sum_{j=1}^n S_\xi(\xi_j e^{\langle \xi, \eta \rangle})(z_j - \eta_j) + o(\|z - \eta\|), \quad z \rightarrow \eta. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда по определению аналитичности функция $\hat{S}(z)$ голоморфна в точке η и верно равенство

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \hat{S}(\eta) = S_\xi(\xi_j e^{\langle \xi, \eta \rangle}), \quad \eta \in \mathbb{C}^n.$$

Так как точка η произвольная в $\mathbb{C}^n$, то $\hat{S}$ аналитична во всем $\mathbb{C}^n$, таким образом, она является целой функцией. Аналогично доказывается, что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ справедлива формула

$$D_z^\alpha \hat{S}(z) = S_\xi(\xi^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle}), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

□

Лемма 4.4. *Если $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — открытое непустое множество, то система экспонент $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in \Omega}$ полна в $\mathcal{F}(\varphi)$.*

Доказательство. Возьмем линейный непрерывный функционал $S \in \mathcal{F}^*(\varphi)$, для которого $S_z(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$ при всех $\xi \in \Omega$. Покажем с помощью теоремы Хана–Банаха о непрерывном продолжении линейного функционала, что функционал S нулевой.

В силу леммы 4.3 $\hat{S}(\xi) = (S_z, e^{\langle \xi, z \rangle})$ — целая функция в $\mathbb{C}^n$, значит, по теореме единственности при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ получим

$$S_z(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0.$$

Ввиду леммы 4.3 для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ верно равенство

$$D_\xi^\alpha \hat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle}),$$

поэтому

$$D_\xi^\alpha \hat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0.$$

Таким образом, для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ следует, что $S_z(z^\alpha) = 0$.

Значит, $S(p) = 0$ для любых полиномов $p \in \mathcal{F}(\varphi)$. По лемме 4.1 полиномы плотны в $\mathcal{F}(\varphi)$, из этого получим, что $S(f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, поэтому функционал S нулевой. Следовательно, система экспонент $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in \Omega}$ полна в $\mathcal{F}(\varphi)$. □

Из леммы 4.4 вытекает, что любую функцию в $\mathcal{F}(\varphi)$ можно приблизить некоторой функцией из линейной оболочки множества $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in \Omega}$. Значит, если $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — открытое непустое множество, то множество $\text{span}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in \Omega}$ плотно в $\mathcal{F}(\varphi)$.

§ 5. Гиперциклические операторы в $\mathcal{F}(\varphi)$

Докажем непрерывность оператора частного дифференцирования в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Лемма 5.1. *При выполнении условия i_4) в $\mathcal{F}(\varphi)$ оператор частного дифференцирования $T = \frac{\partial}{\partial z_j}$ для любого $j \in (1; n)$ непрерывен и отображает его в $\mathcal{F}(\varphi)$.*

Доказательство. Возьмем некоторую функцию $f \in \mathcal{F}_m$ при произвольном $m \in \mathbb{N}$. Функция f целая в $\mathbb{C}^n$, поэтому для всех $j \in (1; n)$ $\frac{\partial}{\partial z_j} f \in H(\mathbb{C}^n)$. По интегральной формуле Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} f(z) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_z} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_{j-1} - z_{j-1})(\xi_j - z_j)^2(\xi_{j+1} - z_{j+1}) \dots (\xi_n - z_n)}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$\Pi_z = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_j - z_j| = r_j, j \in (1; n) \right\},$$

$r_j > 0$ при всех $j \in (1; n)$ такие, что для вектора $r = (r_1, \dots, r_n)$ $\|r\| \leq a_m$, a_m взяты из условия i_4).

Из равенства (5.1) следует оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \right| \leq \frac{1}{r_j} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)|. \quad (5.2)$$

Так как для всех $m \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ $p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)| e^{-\varphi_m(z)})$, где $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, то

$$|f(z)| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(z)}.$$

Из условия i_4) при любых $m \in \mathbb{N}$ получим соотношение

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi)) \exp(-\varphi_m(z)) \right) \leq \\ & \leq \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \exp \left(\sup_{t \in \mathbb{C}^n: |t_j|=r_j, j \in (1; n)} (\varphi_{m+1}(z+t) - \varphi_m(z)) \right) \leq e^{b_m}. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (5.2) при произвольном $j \in (1; n)$ следует

$$\begin{aligned} p_m \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \right) & \leq \frac{1}{r_j} p_{m+1}(f) \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi)) \exp(-\varphi_m(z)) \right) \leq \\ & \leq \frac{e^{b_m}}{r_j} p_{m+1}(f) = C_{mj} p_{m+1}(f) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\frac{\partial}{\partial z_j}$ при всех $j \in (1; n)$ действует из $\mathcal{F}_{m+1}$ в $\mathcal{F}_m$ для любых $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, оператор T при всех $j \in (1; n)$ непрерывен и действует из $\mathcal{F}(\varphi)$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Далее приведем утверждения о гиперцикличности дифференциальных операторов.

Теорема 5.1. Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_4). Тогда оператор частного дифференцирования $T = \frac{\partial}{\partial z_j}$ для любого $j \in (1; n)$ гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. В лемме 5.1 показаны линейность и непрерывность оператора T в $\mathcal{F}(\varphi)$. Используя теорему 1.2, докажем его гиперцикличность.

Функция $f_\xi : z \in \mathbb{C}^n \rightarrow e^{\langle \xi, z \rangle}$ при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ принадлежит $\mathcal{F}(\varphi)$, поскольку она целая в $\mathbb{C}^n$ и для любых $m \in \mathbb{N}$ ее норма в $\mathcal{F}_m$ конечная:

$$p_m(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty.$$

Характеристическая функция оператора T при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$\check{T}(\xi) = \frac{\partial}{\partial z_j} (e^{\langle \xi, z \rangle}) e^{-\langle \xi, z \rangle} \Big|_{z=0} = \xi_j, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Определим множества $W_1 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi_j| < 1\}$ и $W_2 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi_j| > 1\}$. W_1 и W_2 открытые и непустые. Обозначим линейные оболочки экспонент как $X_0 = \operatorname{span}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_1}$ и $Y_0 = \operatorname{span}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_2}$, по лемме 4.4 X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Действие оператора T на функцию f_ξ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ равно

$$T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \xi_j^k e^{\langle \xi, z \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Вычислим его норму. При фиксированном $\xi \in W_1$ и любых $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(T^k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |\xi_j|^k \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = |\xi_j|^k e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty. \quad (5.3)$$

Отсюда и из того, что $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}(\varphi)$, получим, что $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \in \mathcal{F}(\varphi)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $|\xi_j| < 1$ в W_1 , то для всех $\xi \in W_1$ $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

По лемме 4.4 множество $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_1}$ полно в $\mathcal{F}(\varphi)$, поэтому для любых $f \in X_0$ $T^k(f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Для всех $\xi \in W_2$ и произвольного $k \in \mathbb{N}$ определим оператор $S_k : Y_0 \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ в виде

$$S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\check{T}(\xi))^{-k} e^{\langle \xi, z \rangle} = \frac{e^{\langle \xi, z \rangle}}{\xi_j^k}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

При фиксированном $\xi \in W_2$ и любых $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$p_m(S_k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |\xi_j|^{-k} \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = |\xi_j|^{-k} e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty. \quad (5.4)$$

Так как $|\xi_j| > 1$ в W_2 , то для всех $\xi \in W_2$ следует, что $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. По лемме 4.4 множество $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_2}$ полно в $\mathcal{F}(\varphi)$, поэтому для любых $f \in Y_0$ $S_k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Заметим, что для любых $k \in \mathbb{N}$ верно равенство $T^k S_k(f) = f$. Все условия теоремы 1.2 выполнены. Таким образом, T — гиперциклический оператор в пространстве $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Для дифференциального оператора конечного порядка выполняется следующее утверждение о гиперциклическости.

Теорема 5.2. Пусть для семейства φ выполняется условие i_4) и задан некоторый полином в $\mathbb{C}^n$ с постоянными коэффициентами $\Phi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha z^\alpha$, отличный от константы. Тогда оператор $T : f \in \mathcal{F}(\varphi) \longrightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha D_z^\alpha f$ гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. Очевидно, T — линейный оператор. Докажем, что он непрерывный. Возьмем некоторую функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ и произвольный номер $m \in \mathbb{N}$. Функция f целая в $\mathbb{C}^n$, поэтому по интегральной формуле Коши ее частные производные для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ имеют вид

$$(D_z^\alpha f)(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_z} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{\alpha + (1, 1, \dots, 1)}}, \quad (5.5)$$

где

$$\Pi_z = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_j - z_j| = r_j, \quad j \in (1; n) \right\},$$

$r_j > 0$ при всех $j \in (1; n)$ такие, что для вектора $r = (r_1, \dots, r_n)$ $\|r\| \leq a_m$, a_m взяты из условия i_4).

Из равенства (5.5) получается оценка

$$|D_z^\alpha f(z)| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)|. \quad (5.6)$$

Отсюда следует неравенство

$$|Tf(z)| \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} |c_\alpha| |D^\alpha f(z)| = \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} |c_\alpha| \frac{\alpha!}{r^\alpha} = c_{mr} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)|. \quad (5.7)$$

Так как для всех $m \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ $p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)| e^{-\varphi_m(z)})$, где $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, то

$$|f(z)| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(z)}.$$

Отсюда и из неравенства (5.7) имеем

$$p_m(Tf) \leq c_{mr} p_{m+1}(f) \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp \left(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi) \right) \exp \left(-\varphi_m(z) \right) \right). \quad (5.8)$$

В силу $i_4)$ для всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp \left(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi) \right) \exp \left(-\varphi_m(z) \right) \right) \leq \\ & \leq \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \exp \left(\sup_{t \in \mathbb{C}^n: |t_j|=r_j, j \in (1;n)} (\varphi_{m+1}(z+t) - \varphi_m(z)) \right) \leq e^{b_m} = \widetilde{c}_m < \infty. \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что

$$p_m(Tf) \leq \widetilde{c}_m c_{mr} p_{m+1}(f) = C_m p_{m+1}(f) < \infty.$$

Таким образом, для всех $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ функции Tf лежат в $\mathcal{F}(\varphi)$. Очевидно, оператор T линейный. Из последнего неравенства следует его непрерывность. Используя теорему 1.2, докажем его гиперцикличность.

В доказательстве теоремы 5.1 показано, что при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}(\varphi)$ как функция переменной z . Характеристическая функция оператора T для всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$\check{T}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha = \Phi(\xi).$$

Определим $W_1 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\Phi(\xi)| < 1\}$ и $W_2 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\Phi(\xi)| > 1\}$. Поскольку Φ — не равный константе полином, то множества W_1 и W_2 открытые и непустые. Обозначим линейные оболочки экспонент как $X_0 = \text{span}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_1}$ и $Y_0 = \text{span}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_2}$. В силу леммы 4.4 множества X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Оператор T действует на экспоненту при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ по формуле

$$T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\Phi(\xi))^k e^{\langle \xi, z \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

При любых $\xi \in W_1$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение

$$p_m(T^k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |\Phi(\xi)|^k \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = |\Phi(\xi)|^k e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty. \quad (5.9)$$

Отсюда и из того, что $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}(\varphi)$, получим, что для всех $k \in \mathbb{N}$

$T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \in \mathcal{F}(\varphi)$. Для всех $\xi \in W_1$ из условий $|\Phi(\xi)| < 1$ и

$T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\Phi(\xi))^k e^{\langle \xi, z \rangle}$ при любых $z \in \mathbb{C}^n$ следует, что $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

В силу леммы 4.4 множество $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_1}$ полно в $\mathcal{F}(\varphi)$, поэтому для любых $f \in X_0$ $T^k(f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Для произвольных $\xi \in W_2$ и $k \in \mathbb{N}$ определим оператор $S_k : Y_0 \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ по правилу:

$$S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \frac{e^{\langle \xi, z \rangle}}{(\Phi(\xi))^k}.$$

Тогда при всех $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(S_k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = (|\Phi(\xi)|)^{-k} \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = (|\Phi(\xi)|)^{-k} e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty. \quad (5.10)$$

Для любых $\xi \in W_2$ из условий $|\Phi(\xi)| > 1$ и $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = e^{\langle \xi, z \rangle} (\Phi(\xi))^{-k}$ при всех $z \in \mathbb{C}^n$ получим, что $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. По лемме 4.4 множество $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_2}$ полно в $\mathcal{F}(\varphi)$, значит, при произвольных $f \in Y_0$ $S_k(f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Для всех $k \in \mathbb{N}$ верно равенство $T^k S_k(f) = f$. Все требования теоремы 1.2 выполнены. Поэтому оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Для дифференциального оператора бесконечного порядка справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.3. Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_5 ,

$\Phi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} c_\alpha z^\alpha$ — непостоянная целая функция экспоненциального типа

в $\mathbb{C}^n$. Определим оператор $T : f \in \mathcal{F}(\varphi) \xrightarrow{\Phi(D)} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} c_\alpha D_z^\alpha f$. Тогда оператор

T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. Покажем корректность оператора T . Поскольку Φ — целая функция конечного типа, то существуют числа $C > 0$ и $\sigma_j > 0$ при всех $j \in (1; n)$ такие, что

$$|\Phi(z)| \leq C e^{\sigma_1|z_1| + \sigma_2|z_2| + \dots + \sigma_n|z_n|}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Для коэффициентов функции Φ при любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняется оценка:

$$\begin{aligned} |c_\alpha| &= \frac{|(D^\alpha \Phi)(0)|}{\alpha!} \leq \frac{\max_{r_j > 0, 0 \leq \theta_j \leq 2\pi, j \in (1; n)} |\Phi(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, \dots, r_n e^{i\theta_n})|}{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_n^{\alpha_n}} \leq \\ &\leq C_\Phi \inf_{r_1 > 0} \frac{e^{\sigma_1 r_1}}{r_1^{\alpha_1}} \cdot \inf_{r_2 > 0} \frac{e^{\sigma_2 r_2}}{r_2^{\alpha_2}} \cdot \dots \cdot \inf_{r_n > 0} \frac{e^{\sigma_n r_n}}{r_n^{\alpha_n}} \leq C_\Phi \frac{e^{|\alpha|} \sigma^\alpha}{\tau}, \end{aligned}$$

где $\sigma_i > 0$, $i \in (1; n)$,

$$\tau = \begin{cases} \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_n^{\alpha_n}, & \text{если } \alpha_j \neq 0 \text{ при всех } j \in (1; n), \\ \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \alpha_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \dots \alpha_n^{\alpha_n}, & \text{если } \alpha_j = 0 \text{ при некотором } j \in (1; n). \end{cases}$$

Возьмем некоторую функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ и произвольный номер $m \in \mathbb{N}$. Функция f целая в $\mathbb{C}^n$, поэтому по интегральной формуле Коши для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(D_z^\alpha f)(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_z} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{\alpha + (1, 1, \dots, 1)}},$$

где

$$\Pi_z = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_j - z_j| = r_j, j \in (1; n) \right\},$$

r_j выберем так, что $r_j > \sigma_j$ при всех $j \in (1; n)$.

Из этого равенства при произвольных $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $z \in \mathbb{C}^n$ получается оценка

$$|D_z^\alpha f(z)| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)|.$$

Действие оператора T на функцию f оценим в виде

$$|Tf(z)| \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} |c_\alpha| |D^\alpha f(z)| \leq \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} |c_\alpha| \frac{\alpha!}{r^\alpha}.$$

Так как для всех $m \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ $p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)|e^{-\varphi_m(z)})$, где $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, то

$$|f(z)| \leq p_{m+1}(f)e^{\varphi_{m+1}(z)}.$$

В силу i_5) при любых $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp \left(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi) \right) \exp \left(-\varphi_m(z) \right) \right) \leq \\ & \leq \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \exp \left(\sup_{t \in \mathbb{C}^n: |t_j|=r_j, j \in (1;n)} (\varphi_{m+1}(z+t) - \varphi_m(z)) \right) \leq e^{b_m} = \widetilde{c}_m < \infty. \end{aligned}$$

Для произвольных $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(Tf) \leq \widetilde{c}_m p_{m+1}(f) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} |c_\alpha| \frac{\alpha!}{r^\alpha}. \quad (5.11)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} p_m(Tf) & \leq C_\Phi \widetilde{c}_m p_{m+1}(f) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} \frac{e^{|\alpha|} \sigma^\alpha \alpha!}{\tau r^\alpha} \leq \\ & \leq (2\pi)^{n/2} C_\Phi \widetilde{c}_m p_{m+1}(f) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} \frac{\sigma^\alpha (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^{1/2}}{r^\alpha} \leq \\ & \leq C_0 p_{m+1}(f) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} \frac{\sigma^\alpha (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^{1/2}}{r^\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Значит, оператор T определен корректно в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Очевидно, оператор T линейный. Из последнего неравенства следует его непрерывность. Покажем по теореме 1.2 его гиперцикличность. Как показано в теореме 5.1, при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}(\varphi)$ как функция переменной z .

Характеристическая функция оператора T имеет вид

$$\check{T}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} c_\alpha \xi^\alpha = \Phi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Определим $W_1 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\Phi(\xi)| < 1\}$ и $W_2 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\Phi(\xi)| > 1\}$.

Очевидно, множества W_1 и W_2 открытые и непустые. Обозначим линейные оболочки экспонент в виде $X_0 = \text{span}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_1}$ и $Y_0 = \text{span}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_2}$. В силу леммы 4.4 множества X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Оператор T действует на экспоненту при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ по формуле

$$T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\Phi(\xi))^k e^{\langle \xi, z \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$

$$p_m(T^k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |\Phi(\xi)|^k \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = |\Phi(\xi)|^k e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty.$$

Отсюда и из того, что $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}(\varphi)$, для произвольных $k \in \mathbb{N}$ получим $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \in \mathcal{F}(\varphi)$. Поскольку $|\Phi(\xi)| < 1$ в W_1 и $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\Phi(\xi))^k e^{\langle \xi, z \rangle}$ при любых $k \in \mathbb{N}$, то для всех $\xi \in W_1$ $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. По лемме 4.4 множество $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_1}$ полно в $\mathcal{F}(\varphi)$, поэтому для всех $f \in X_0$ $T^k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Для всех $\xi \in W_2$ определим оператор $S_k : Y_0 \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ при любых $k \in \mathbb{N}$ в виде

$$S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \frac{e^{\langle \xi, z \rangle}}{(\Phi(\xi))^k}.$$

Вычислим его норму для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$:

$$p_m(S_k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = (|\Phi(\xi)|)^{-k} \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = (|\Phi(\xi)|)^{-k} e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty.$$

Так как $|\Phi(\xi)| > 1$ в W_2 и $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = e^{\langle \xi, z \rangle} (\Phi(\xi))^{-k}$ при любых $k \in \mathbb{N}$, то для всех $\xi \in W_2$ $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. По лемме 4.4 множество $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_2}$ полно в $\mathcal{F}(\varphi)$, поэтому вытекает, что для всех $f \in Y_0$ $S_k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Заметим, что верно равенство $T^k S_k(f) = f$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Все условия теоремы 1.2 выполнены. Значит, T — гиперциклический оператор в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Изучим свойства оператора сдвига в $\mathcal{F}(\varphi)$. Из следующего утверждения вытекает инвариантность пространства $\mathcal{F}(\varphi)$ относительно сдвига.

Теорема 5.4. При выполнении условия i_5) в пространстве $\mathcal{F}(\varphi)$ для произвольного $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ определим оператор сдвига

$T_a : f(z) \in \mathcal{F}(\varphi) \longrightarrow f(z + a)$. Тогда оператор T_a гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. Очевидно, оператор T_a линейный. Возьмем произвольную функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi)$. Покажем, что T_a непрерывный.

Для любых $z \in \mathbb{C}^n$ и $m \in \mathbb{N}$

$$|T_a f(z)| = |f(z + a)| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(z+a)}. \quad (5.12)$$

Из условия i_5) следует, что найдется конечное число b_m такое, что

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z + a) - \varphi_m(z)) \leq b_m.$$

Отсюда и из (5.12) имеем

$$\begin{aligned} p_m(T_a f) &\leq p_{m+1}(f) \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z+a) - \varphi_m(z)) \right) \leq \\ &\leq e^{b_m} p_{m+1}(f) = \widetilde{c}_m p_{m+1}(f) < \infty. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Тогда $T_a f \in \mathcal{F}(\varphi)$ и оператор T_a непрерывен в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Покажем по теореме 1.2 гиперцикличность оператора T_a . Действие оператора T_a на функцию f для любых $k \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$T_a^k f(z) = f(z + ka).$$

По теореме 5.1 $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}(\varphi)$ для всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ как функция переменной z .

Характеристическая функция оператора T_a при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ равна

$$\check{T}_a(\xi) = e^{\langle \xi, a \rangle}.$$

Определим $W_1 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\check{T}_a(\xi)| < 1\}$ и $W_2 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\check{T}_a(\xi)| > 1\}$, то есть $W_1 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \langle \xi, a \rangle < 0\}$ и $W_2 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \langle \xi, a \rangle > 0\}$. Множества W_1 и W_2 открытые и непустые. Введем обозначения $X_0 = \operatorname{span}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_1}$ и $Y_0 = \operatorname{span}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_2}$, в силу леммы 4.4 множества X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Действие оператора T_a на функцию $e^{\langle \xi, z \rangle}$ для произвольных $k \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ равно

$$T_a^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\check{T}_a(\xi))^k e^{\langle \xi, z \rangle} = e^{k \langle \xi, a \rangle} e^{\langle \xi, z \rangle}.$$

При любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$

$$p_m(T_a^k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |e^{\langle \xi, a \rangle}|^k \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = e^{k \operatorname{Re} \langle \xi, a \rangle} e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty.$$

Следовательно, $T_a^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \in \mathcal{F}(\varphi)$.

Для всех $\xi \in W_1$ из того, что $|\check{T}_a(\xi)| < 1$, получим $T_a^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. По лемме 4.4 множество $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_1}$ полно в $\mathcal{F}(\varphi)$. Поэтому для всех $f \in X_0$ $T_a^k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

При произвольных $\xi \in W_2$ определим оператор $S_{ak} : Y_0 \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ при любых $k \in \mathbb{N}$ в виде

$$S_{ak}(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\check{T}_a(\xi))^{-k} e^{\langle \xi, z \rangle} = e^{-k \langle \xi, a \rangle} e^{\langle \xi, z \rangle}.$$

Для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$

$$p_m(S_{ak}(e^{\langle \xi, z \rangle})) = (|e^{\langle \xi, a \rangle}|)^{-k} \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = e^{-k \operatorname{Re} \langle \xi, a \rangle} e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty.$$

Для всех $\xi \in W_2$ из условия $|\check{T}_a(\xi)| > 1$ получим, что $S_{ak}(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. По лемме 4.4 множество $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in W_2}$ полно в $\mathcal{F}(\varphi)$, значит, для всех $f \in Y_0$ $S_{ak}(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}(\varphi)$.

При любом $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_a^k S_{ak}(f) = f$. Все требования теоремы 1.2 выполнены. Следовательно, оператор T_a гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Далее рассмотрим операторы, коммутирующие с дифференцированием.

Теорема 5.5. Пусть семейство φ удовлетворяет условию $i_4)$ и задан линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не тождественный оператору умножения на константу. Тогда оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. Функция $f_\xi(z) := e^{\langle \xi, z \rangle}$ для всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ принадлежит $\mathcal{F}(\varphi)$ как функция переменной z , так как его нормы при любых $m \in \mathbb{N}_0$ конечные:

$$p_m(f_\xi) = \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(z)) \right) = e^{\tilde{\varphi}_m(\xi)} < \infty.$$

Поэтому функция $F_T(\xi, z) := T(f_\xi)(z)$ корректно определена на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Поскольку оператор T коммутирует с операторами частного дифференцирования, то для любых $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$

$$D_j z T_z(f_\xi) = T_z D_j z(f_\xi) = \xi_j T_z(f_\xi), \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.14)$$

Представим ее как систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} T_z(f_\xi) = \xi_j T_z(f_\xi), \quad j = 1, \dots, n.$$

Решение этой системы запишем в виде

$$T_z(f_\xi) = e^{C(\xi)} e^{\langle \xi, z \rangle} = a_T(\xi) e^{\langle \xi, z \rangle}.$$

Из этого следует, что существует функция a_T при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$, для которой выполняется равенство

$$T_z(f_\xi) = a_T(\xi) f_\xi. \quad (5.15)$$

Итак, решение уравнения при произвольных $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$F_T(\xi, z) = a_T(\xi) e^{\langle \xi, z \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Заметим, что функция F_T целая по z . Докажем, что F_T является целой функцией по ξ . Действительно, T — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}(\varphi)$, поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ можно найти числа $m \in \mathbb{N}$ и $c_m > 0$ такие, что

$$p_k(T(g)) \leq c_m p_m(g), \quad g \in \mathcal{F}(\varphi). \quad (5.16)$$

Возьмем произвольную точку $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Для всех $\xi \in \mathbb{C}^n$ из шара $\|\xi - \zeta\| < 1$ определим функцию

$$g_{\xi, \zeta}(z) := e^{\langle \xi, z \rangle} - e^{\langle \zeta, z \rangle} - \langle \xi - \zeta, z \rangle e^{\langle \zeta, z \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Используя неравенство (5.16), получим оценку

$$|T(g_{\xi, \zeta})(z)| \leq c_m p_m(g_{\xi, \zeta}) e^{\varphi_m(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Из неравенства

$$p_m(g_{\xi, \zeta}) \leq C \|\xi - \zeta\|^2,$$

полученного в лемме 4.3 и справедливого при некотором положительном C , и линейности оператора T следует, что при произвольном $z \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство

$$F_T(\xi, z) - F_T(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n T(f_{j, \zeta})(z)(\xi_j - \zeta_j) + o(\|\xi - \zeta\|), \quad \xi \rightarrow \zeta,$$

где $f_{j, \zeta}(z) := z_j \exp(\langle \zeta, z \rangle)$, $j \in (1; n)$.

Таким образом, для каждого фиксированного значения $z \in \mathbb{C}^n$ функция $F_T(\xi, z)$ как функция по ξ голоморфна в точке ζ . Поскольку точка $\zeta \in \mathbb{C}^n$ произвольная, то F_T по ξ является целой функцией. Отсюда и из того, что по теореме 5.1 функция $e^{\langle \xi, z \rangle}$ целая как по переменной z , так и по ξ , получим, что a_T — целая функция в $\mathbb{C}^n$. Оператор T не тождественен оператору умножения на константу, значит, a_T — непостоянная функция.

Определим множества $W_1 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |a_T(\xi)| < 1\}$ и $W_2 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |a_T(\xi)| > 1\}$. W_1 и W_2 непустые и открытые в $\mathbb{C}^n$. Положим $X_0 = \text{span}\{f_\xi\}_{\xi \in W_1}$ и $Y_0 = \text{span}\{f_\xi\}_{\xi \in W_2}$. По лемме 4.4 X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}(\varphi)$. Тогда линейные оболочки множеств $\bigcup_{|\lambda| < 1} \ker(T - \lambda)$ и $\bigcup_{|\lambda| > 1} \ker(T - \lambda)$ плотны в $\mathcal{F}(\varphi)$. Таким образом, все условия теоремы 1.1 выполнены, T — гиперциклический оператор в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Из теоремы 5.5 вытекают следующие утверждения.

Следствие 5.1. Пусть для семейства φ выполнено условие i_5), заданы числа $N \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{C}$ и $a^j \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, $j = 1, 2, \dots, N$, причем не все c_j равны нулю, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{j=1}^N c_j f(z + a^j)$ гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. Очевидно, T коммутирует с операторами частного дифференцирования. В силу теоремы 5.4 все его слагаемые непрерывны в $\mathcal{F}(\varphi)$. Тогда линейный оператор T как конечная сумма сдвигов T_a также непрерывен. По теореме 5.5 оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Следствие 5.2. Пусть заданы числа $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ и $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$, $a_\beta \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, причем не все $c_{\alpha\beta}$ равны нулю, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$. Тогда при выполнении условия i_5) оператор $Tf(z) = \sum_{\alpha: |\alpha|=0}^N \sum_{\beta: |\beta|=1}^m c_{\alpha\beta} (D^\alpha f)(z + a_\beta)$ гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. По теореме 5.2 оператор D^α для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ отображает непрерывно $\mathcal{F}(\varphi)$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. Из теоремы 5.4 следует, что оператор сдвига T_a также непрерывен в $\mathcal{F}(\varphi)$. Тогда T — непрерывный оператор как конечная сумма их композиций. Поскольку T коммутирует с операторами частного дифференцирования, то в силу теоремы 5.5 T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Если семейство функций φ удовлетворяет условию i_5) и задана последовательность $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty$ точек $\lambda_j \in \mathbb{C}^n$, то при всех $m \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}$ можно определить зависящую от Λ последовательность чисел

$$b_{j,m}(\Lambda) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z + \lambda_j) - \varphi_m(z)).$$

Следствие 5.3. Пусть для семейства φ выполнено условие i_5) и для нее заданы последовательность $(d_j)_{j=1}^\infty$ чисел $d_j \in \mathbb{C}$, причем не все d_j равны нулю, и совокупность $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty$ точек $\lambda_j \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, для которых $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\lambda_j\| = \infty$ и $\sum_{j=1}^\infty |d_j| e^{b_{j,m}(\Lambda)} < \infty$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Определим в $\mathcal{F}(\varphi)$ оператор $T(f)(z) = \sum_{j=1}^\infty d_j f(z + \lambda_j)$, где $z \in \mathbb{C}^n$. Тогда T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. Для любой функции $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ при любых $m \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ верно неравенство

$$|f(z + \lambda_j)| \leq p_{m+1}(f)e^{\varphi_{m+1}(z + \lambda_j)}.$$

В силу $i_5)$ получим, что

$$|f(z + \lambda_j)| \leq p_{m+1}(f)e^{\varphi_m(z) + b_{j,m}(\Lambda)}.$$

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} p_m(Tf) &= \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\left| \sum_{j=1}^{\infty} d_j f(z + \lambda_j) \right| e^{-\varphi_m(z)} \right) \leq \\ &\leq p_{m+1}(f) \sum_{j=1}^{\infty} |d_j| e^{b_{j,m}(\Lambda)} < \infty. \end{aligned}$$

Итак, оператор $T : \mathcal{F}(\varphi) \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ линейный и непрерывный. Поскольку он коммутирует с операторами частного дифференцирования, то по теореме 5.5 оператор T является гиперциклическим. $\square$

Следствие 5.4. Пусть семейство φ удовлетворяет условию $i_5)$, S — линейный непрерывный функционал на $H(\mathbb{C}^n)$, причем его преобразование Лапласа $\hat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle})$ не тождественно постоянной. Тогда оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z + t))$ гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. Покажем, что $M_S[f] \in \mathcal{F}(\varphi)$ при всех $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ и линейный оператор M_S действует непрерывно из $\mathcal{F}(\varphi)$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. Поскольку S — линейный непрерывный функционал на $H(\mathbb{C}^n)$, то его определяющее множество компактно. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ $M_S[f] \in H(\mathbb{C}^n)$.

Существуют компактное множество K в $\mathbb{C}^n$ и постоянная $C > 0$ такие, что

$$|S(f)| \leq C \max_{t \in K} |f(t)|, \quad f \in \mathcal{F}(\varphi).$$

Из этого следует, что

$$|M_S[f](z)| \leq C_1 \max_{t \in K} |f(z + t)|.$$

В силу $i_5)$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$ найдется постоянная $b_m > 0$, удовлетворяющая условию

$$\varphi_{m+1}(z + t) - \varphi_m(z) \leq b_m,$$

где $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in K$. Отсюда вытекает, что

$$|M_S[f](z)| \leq C_1 p_{m+1}(f) \exp \left(\max_{t \in K} \varphi_{m+1}(z+t) \right), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Из этой оценки получим неравенство

$$\begin{aligned} p_m(M_S[f]) &\leq C_1 p_{m+1}(f) \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\max_{t \in K} \varphi_{m+1}(z+t) - \varphi_m(z) \right) \right) \leq \\ &\leq C_1 p_{m+1}(f) e^{b_m} = C_2 p_{m+1}(f) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор M_S непрерывно действует из $\mathcal{F}(\varphi)$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. Из теоремы [2.5](#) следует, что оператор свертки M_S в $H(\mathbb{C}^n)$ коммутирует с операторами частного дифференцирования. Функция $\hat{S}$ отлична от постоянной, поэтому M_S не кратен тождественному оператору. Тогда по теореме [5.5](#) оператор M_S гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Далее докажем, что оператор свертки гиперциклический.

Лемма 5.2. Пусть семейство φ удовлетворяет условию $i_5)$ и дополнительному условию

$$\forall m, k \in \mathbb{N} \quad \exists l = l_{m,k} \in \mathbb{N}, \quad r = r_{m,k} > 0 : \quad \forall z, t \in \mathbb{C}^n \quad \varphi_l(z+t) \leq \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r, \quad (5.17)$$

S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}(\varphi)$. Тогда для любых $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ функция $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ целая в $\mathbb{C}^n$ и оператор $M_S[f]$ коммутирует с операторами частного дифференцирования.

Доказательство. Из условия $i_5)$ следует, что пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ инвариантно относительно сдвига. Значит, оператор свертки M_S определен на всем пространстве $\mathcal{F}(\varphi)$ и для любых $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ функция $M_S[f]$ определена всюду в $\mathbb{C}^n$.

Далее докажем, что из условия $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ вытекает голоморфность функции $M_S[f]$ в $\mathbb{C}^n$. Возьмем произвольную точку $z_0 \in \mathbb{C}^n$ и любое число $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ такое, что $\|h\| < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} M_S[f](z_0 + h) - M_S[f](z_0) &- \sum_{j=1}^n M_S[D_j f](z_0) h_j = \\ &= S_t \left(f(z_0 + h + t) - f(z_0 + t) - \sum_{j=1}^n (D_j f)(z_0 + t) h_j \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Так как функционал S линейный и непрерывный на $\mathcal{F}(\varphi)$, то найдутся номер $m \in \mathbb{N}$ и число $C_m > 0$ такие, что

$$|S(f)| \leq C_m p_m(f), \quad f \in \mathcal{F}(\varphi). \quad (5.19)$$

Тогда из (5.18) и (5.19) имеем

$$|M_S[f](z_0 + h) - M_S[f](z_0) - \sum_{j=1}^n M_S[D_j f](z_0) h_j| \leq C_m p_m(g_{z_0, h}), \quad (5.20)$$

где $g_{z_0, h}(t) = f(z_0 + h + t) - f(z_0 + t) - \sum_{j=1}^n (D_j f)(z_0 + t) h_j$, $t \in \mathbb{C}^n$.

Используя формулу Тейлора для вещественной и мнимой части функции $g_{z_0, h}$, получим неравенство

$$|(g_{z_0, h})(t)| \leq n^2 \|h\|^2 \max_{\xi \in [z_0 + t, z_0 + t + h], \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha|=2} |D^\alpha f(\xi)|, \quad (5.21)$$

где $[z_0 + t, z_0 + t + h]$ — отрезок, соединяющий точки $z_0 + t$ и $z_0 + t + h$. В силу требования (5.17) можно найти число $k \in \mathbb{N}$ и постоянную $C = C(z_0) > 0$, удовлетворяющие условию $\varphi_k(\xi) \leq \varphi_m(t) + C$ при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$, для которых $\|\xi - t\| \leq \|z_0\| + 1$. Используя оценку производной из доказательства теоремы 5.7, получим

$$\max_{\xi \in [z_0 + t, z_0 + t + h], \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha|=2} |D^\alpha f(\xi)| \leq \frac{2}{(\|z_0\| + 1)^2} e^C p_k(f) e^{\varphi_m(t)}, \quad t \in \mathbb{C}^n. \quad (5.22)$$

В силу неравенств (5.21) и (5.22) справедливо соотношение

$$|g_{z_0, h}(t)| \leq \frac{2}{(\|z_0\| + 1)^2} n^2 e^C \|h\|^2 p_k(f) e^{\varphi_m(t)}, \quad t \in \mathbb{C}^n.$$

Значит, при любых $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(g_{z_0, h}) \leq \frac{2}{(\|z_0\| + 1)^2} n^2 e^C \|h\|^2 p_k(f). \quad (5.23)$$

Тогда из формул (5.20) и (5.23) следует, что

$$|M_S[f](z_0 + h) - M_S[f](z_0) - \sum_{j=1}^n M_S[D_j f](z_0) h_j| \leq \frac{C_m}{(\|z_0\| + 1)^2} n^2 e^C \|h\|^2 p_k(f).$$

Таким образом, функция $M_S[f]$ C -дифференцируема в точке $z_0 \in \mathbb{C}^n$ и выполняется равенство

$$D_j(M_S[f])(z_0) = M_S[D_j f](z_0).$$

Точка z_0 произвольная, поэтому функция $M_S[f]$ голоморфна во всем $\mathbb{C}^n$ и

$$D_j(M_S[f]) = M_S[D_j f], \quad j = 1, \dots, n.$$

□

Лемма 5.3. Пусть семейство φ удовлетворяет условию $i_5)$ и дополнительному условию (5.17)

$$\forall m, k \in \mathbb{N} \quad \exists l = l_{m,k} \in \mathbb{N}, \quad r = r_{m,k} > 0 : \quad \forall z, t \in \mathbb{C}^n \quad \varphi_l(z+t) \leq \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r,$$

S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}(\varphi)$. Тогда оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ действует из $\mathcal{F}(\varphi)$ в $\mathcal{F}(\varphi)$, а также он линеен и непрерывен в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. В силу теоремы 5.4 пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ инвариантно относительно сдвига. Поэтому оператор M_S определен всюду на $\mathcal{F}(\varphi)$. Очевидно, M_S линейный. Так как функционал S линейный и непрерывный на $\mathcal{F}(\varphi)$, то найдутся номер $k \in \mathbb{N}$ и число $C_k > 0$ такие, что

$$|S(f)| \leq C_k p_k(f), \quad f \in \mathcal{F}(\varphi).$$

Следовательно, для всех $z \in \mathbb{C}^n$ при любых $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ справедливо неравенство

$$|M_S[f](z)| \leq C_k p_k(f) = C_k \sup_{t \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z+t)|}{\exp(\varphi_k(t))}.$$

Из (5.17) следует, что для любого номера $m \in \mathbb{N}$ можно найти число $l \in \mathbb{N}$. В силу условий $l \geq k$ и $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ имеем

$$|M_S[f](z)| \leq C_k p_l(f) \sup_{t \in \mathbb{C}^n} \frac{\exp(\varphi_l(z+t))}{\exp(\varphi_k(t))}. \quad (5.24)$$

Тогда из условия (5.17) и (5.24) вытекает соотношение

$$|M_S[f](z)| \leq C_k e^{r_{m,k}} p_l(f) \exp(\varphi_m(z)).$$

Поэтому при любых $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(M_S[f]) \leq C_k e^{r_{m,k}} p_l(f), \quad f \in \mathcal{F}(\varphi).$$

Таким образом, линейный оператор M_S действует из $\mathcal{F}(\varphi)$ в $\mathcal{F}(\varphi)$ и он непрерывен.

□

В силу лемм [5.2](#) и [5.3](#) получается следующее утверждение.

Теорема 5.6. Пусть семейство φ удовлетворяет условиям i_5) и [\(5.17\)](#), S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}(\varphi)$, преобразование Лапласа которого $\hat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle})$ не тождественно постоянной. Тогда оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Приведем пример не гиперциклического оператора в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Наложим дополнительное условие на семейство функций φ при всех $m \in \mathbb{N}$:

i_6) при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для любых $R > 0$ существует постоянная $b_m = b_m(R) > 0$, удовлетворяющая условию

$$\varphi_{m+1}(\tilde{z} + t) \leq \varphi_m(z) + b_m,$$

где $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n : \|t\| \leq R$ и $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$, $j \in (1; n)$.

Пример. Примерами функций φ_m из семейства $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, удовлетворяющих условию i_6), являются:

1) при $|\lambda| \leq 1$ $\varphi_m(z) = 2^{-mp} \|z\|^p$,
при $|\lambda| > 1$ $\varphi_m(z) = 2^{-mp} |\lambda|^{-mp} \|z\|^p$, где $p > 1$;

2) при $|\lambda| \leq 1$ $\varphi_m(z) = \sum_{k=1}^q c_k 2^{-mp_k} \|z\|^{p_k}$,

при $|\lambda| > 1$ $\varphi_m(z) = \sum_{k=1}^q c_k 2^{-mp_k} |\lambda|^{-mp_k} \|z\|^{p_k}$,

где $q \in \mathbb{N}$, $2 \leq q < \infty$ и при всех $k \in (1; n)$ $p_k > 1$, $c_k \geq 0$,

причем хотя бы один коэффициент c_k не равен нулю;

3) при $|\lambda| \leq 1$ $\varphi_m(z) = 2^{-m\alpha_j} |z_j|^{\alpha_j} + c 2^{-mp} \|z'\|^p$,

при $|\lambda| > 1$ $\varphi_m(z) = 2^{-m\alpha_j} |\lambda|^{-m\alpha_j} |z_j|^{\alpha_j} + c 2^{-mp} \|z'\|^p$,

где номер j задан в условии i_6), $\alpha_j > 1$, $p > 1$, $c \geq 0$,

$z' = (z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Теорема 5.7. Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_6). Тогда оператор $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j + b, z_{j+1}, \dots, z_n)$, где $j \in (1; n)$, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}$ фиксированные, не гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$ при условии $|\lambda| < 1$.

Доказательство. Покажем корректность оператора T в $\mathcal{F}(\varphi)$. Возьмем произвольным образом функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ и номер $m \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$z' = (z'_1, \dots, z'_n) = (z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j + b, z_{j+1}, \dots, z_n).$$

Пусть числа $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ произвольны. Ввиду аналитичности f в $\mathbb{C}^n$ получим $Tf \in H(\mathbb{C}^n)$. Из интегральной формулы Коши вытекает следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(z') = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_T \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi_1 - z'_1) \cdot \dots \cdot (\xi_j - z'_j)^2 \cdot (\xi_{j+1} - z'_{j+1}) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z'_n)},$$

где $T = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_j - z'_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}$. Отсюда следует оценка

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(z')\right| \leq \frac{1}{r_j} \max_{\xi \in T} |f(\xi)|.$$

Так как для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ $|f(\xi)| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(\xi)}$, то получим

$$\begin{aligned} |Tf(z)| &= \left|\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(z')\right| \leq \frac{1}{r_j} p_{m+1}(f) \exp\left(\sup_{\xi \in T} \varphi_{m+1}(\xi)\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{r_j} p_{m+1}(f) \exp\left(\sup_{|w_j|=r_j, j \in (1;n)} \varphi_{m+1}(z' + w)\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{r_j} p_{m+1}(f) \exp\left(\sup_{\|u\| \leq r_1 + \dots + r_n + |b|} \varphi_{m+1}(z'' + u)\right), \end{aligned}$$

где $z'' = (z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$, $u = (w_1, \dots, w_{j-1}, w_j + b, w_{j+1}, \dots, w_n)$.

По условию i_6) при всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\exp\left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z'' + u) - \varphi_m(z))\right) \leq e^{\tilde{b}_m},$$

где $\tilde{b}_m > 0$ зависит от числа $R = r_1 + \dots + r_n + |b|$.

Следовательно, при произвольном $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(Tf) \leq \frac{e^{\tilde{b}_m}}{r_j} p_{m+1}(f) < \infty.$$

Таким образом, T действует из $\mathcal{F}_{m+1}$ в $\mathcal{F}_m$ для любых $m \in \mathbb{N}$. Значит, оператор T определен корректно в $\mathcal{F}(\varphi)$. Очевидно, T линейный и является непрерывным.

Пусть $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^n$,

$$\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) = (z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda^k z_j + b(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1}), z_{j+1}, \dots, z_n).$$

Для всех $k \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$T^k f(z) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f \right) (z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda^k z_j + b(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1}), z_{j+1}, \dots, z_n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f \right) (\tilde{z}) &= \\ &= \frac{k!}{(2\pi i)^n} \int_{\tilde{T}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta_1 - \tilde{z}_1) \cdot \dots \cdot (\zeta_j - \tilde{z}_j)^{k+1} \cdot (\zeta_{j+1} - \tilde{z}_{j+1}) \cdot \dots \cdot (\zeta_n - \tilde{z}_n)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{T} = \left\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) : |\zeta_j - \tilde{z}_j| = r_j, j = 1, \dots, n \right\}$.

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f \right) \right| &\leq \frac{k!}{r_j^k} \max_{\zeta \in \tilde{T}} |f(\zeta)| \leq \frac{k!}{r_j^k} p_{m+1}(f) \exp \left(\max_{\zeta \in \tilde{T}} \varphi_{m+1}(\zeta) \right) \leq \\ &\leq \frac{k!}{r_j^k} p_{m+1}(f) \exp \left(\max_{|u_j|=r_j, j \in (1;n)} \varphi_{m+1}(\tilde{z} + u) \right) \leq \\ &\leq \frac{k!}{r_j^k} p_{m+1}(f) \exp \left(\max_{\|v\| \leq r_1 + \dots + r_n + |b| \frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}} \varphi_{m+1}(\tilde{z} + v) \right) \leq \\ &\leq \frac{k!}{r_j^k} p_{m+1}(f) \exp(\varphi_m(z) + c_m), \end{aligned}$$

где $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda^k z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$, $v = (u_1, \dots, u_{j-1}, u_j + b \frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}, u_{j+1}, \dots, u_n)$, $c_m > 0$ зависит от $r = (r_1, \dots, r_n)$, b и λ .

Следовательно,

$$p_m(T^k f) \leq |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{k!}{r_j^k} p_{m+1}(f) e^{c_m}.$$

Отсюда следует, что $T^k f \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. Поэтому не существует функции $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ такой, что

$$\overline{\{T^k f\}_{k=0}^\infty} = \mathcal{F}(\varphi).$$

Значит, в случае $|\lambda| < 1$ оператор T не гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Теперь приведем пример гиперциклического оператора, который не является сверткой.

Теорема 5.8. Пусть для семейства φ выполнено условие i_6). Тогда оператор $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j + b, z_{j+1}, \dots, z_n)$, где $j \in (1; n)$, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}$ фиксированные, гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$ при условии $|\lambda| \geq 1$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi)$. Как показано в теореме 5.7, оператор T линейный и непрерывный в $\mathcal{F}(\varphi)$ и $T : \mathcal{F}(\varphi) \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$. С помощью теоремы 1.2 докажем его гиперциклическость. Определим $X = Y = \text{span}\{z^\beta\}_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n}$, в силу леммы 4.4 множества X и Y плотны в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Действие оператора T^k на функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ для произвольных $k \in \mathbb{N}$ равно

$$T^k f(z) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f \right)(z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda^k z_j + b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s, z_{j+1}, \dots, z_n).$$

Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$T^k z^\beta = \begin{cases} \frac{\lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \beta_j!}{(\beta_j - k)!} z_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot z_{j-1}^{\beta_{j-1}} \left(\lambda^k z_j + b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^{\beta_j - k} z_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n} & \text{при } k \leq \beta_j, \\ 0 & \text{при } k > \beta_j. \end{cases}$$

Тогда $T^k z^\beta \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. Итак, условие 1) теоремы 1.2 выполнено.

Теперь определим операторы S_k для мономов $t^\gamma \in \mathbb{C}^n$ для произвольных $k \in \mathbb{N}$ и $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ в виде

$$S_k t^\gamma = \frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k)! \lambda^k \gamma_j \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \left(\left(t_j - b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^{\gamma_j + k} - \sum_{r=\gamma_j+1}^{\gamma_j+k} (-1)^r \frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} t_j^{\gamma_j + k - r} b^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^r \right) t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n}.$$

Справедливо условие 3) теоремы 1.2 на Y для всех $k \in \mathbb{N}$:

$$T^k S_k t^\gamma = \frac{(\gamma_j + k)! \gamma_j! \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(\gamma_j + k)! \gamma_j! \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \left(\lambda^k \left(\frac{t_j}{\lambda^k} - \frac{b}{\lambda^k} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right) + b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^{\gamma_j} t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n} = t^\gamma.$$

Операторы S_k для любых $k \in \mathbb{N}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
S_k t^\gamma &= \frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k)! \lambda^{k\gamma_j} \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \\
&\cdot \left(\sum_{r=0}^{\gamma_j+k} (-1)^r \frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} t_j^{\gamma_j+k-r} b^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^r - \right. \\
&- \sum_{r=\gamma_j+1}^{\gamma_j+k} (-1)^r \frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} t_j^{\gamma_j+k-r} b^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^r \Big) \cdot t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n} = \\
&= \frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k)! \lambda^{k\gamma_j} \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \\
&\cdot \sum_{r=0}^{\gamma_j} \left((-1)^r \frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} t_j^{\gamma_j+k-r} b^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^r \right) \cdot t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n}.
\end{aligned}$$

В силу $i_1)$ для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ найдется постоянная $C_M = C_M(m, M) \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая при всех $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ условию

$$\varphi_m(t_1, \dots, t_n) \geq M(|t_1| + \dots + |t_n|) - C_M,$$

поэтому получается оценка

$$e^{\sup_{t \in \mathbb{C}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n)} (\gamma_1 \ln |t_1| + \dots + \gamma_n \ln |t_n| - \varphi_m(t_1, \dots, t_n))} \leq e^{C_M} \frac{\gamma^\gamma}{(Me)^{|\gamma|}}.$$

Отсюда для любых $k \in \mathbb{N}$ следует, что

$$e^{\sup_{t \in \mathbb{C}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n)} (\gamma_1 \ln |t_1| + \dots + (\gamma_j + k) \ln |t_j| + \dots + \gamma_n \ln |t_n| - \varphi_m(t_1, \dots, t_n))} \leq e^{C_M} \frac{(\gamma_j + k)^{\gamma_j+k} \gamma^\gamma}{\gamma_j^{\gamma_j} (Me)^{|\gamma|+k}}.$$

Для любых $m \in \mathbb{N}$ и $t^\gamma \in \mathbb{C}^n$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ получим

$$\begin{aligned}
p_m(S_k t^\gamma) &\leq \frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k)! |\lambda|^{k\gamma_j} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}}} \sup_{t \in \mathbb{C}^n} \left(|t_1|^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot |t_{j-1}|^{\gamma_{j-1}} \cdot \right. \\
&\cdot \sum_{r=0}^k \left(\frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} |t_j|^{\gamma_j+k-r} |b|^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} |\lambda|^s \right)^r \right) \cdot |t_{j+1}|^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot |t_n|^{\gamma_n} e^{-\varphi_m(t)} \Big) \leq \\
&\leq \sum_{r=0}^{\gamma_j} \left(\frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k - r)! r! |\lambda|^{k\gamma_j} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}}} |b|^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} |\lambda|^s \right)^r \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sup_{t \in \mathbb{C}^n} \left(|t_1|^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot |t_{j-1}|^{\gamma_{j-1}} \cdot |t_j|^{\gamma_j+k-r} \cdot |t_{j+1}|^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot |t_n|^{\gamma_n} e^{-\varphi_m(t)} \right) \leq \\
& \leq e^{C_M} \sum_{r=0}^{\gamma_j} \frac{\gamma_j! |b|^r k^r |\lambda|^{r(k-1)}}{(\gamma_j + k - r)! r! |\lambda|^{k\gamma_j} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}}} \frac{(\gamma_j + k - r)^{\gamma_j+k-r} \gamma^\gamma}{\gamma_j^{\gamma_j} (Me)^{|\gamma|+k-r}} \leq \\
& \leq e^{C_M} \sum_{r=0}^{\gamma_j} \frac{\gamma_j! \gamma^\gamma |b|^r k^r}{\gamma_j^{\gamma_j} e^{|\gamma|-\gamma_j} r! (\gamma_j + k - r)^{1/2} |\lambda|^{k(\gamma_j-r)+r} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} M^{|\gamma|+k-r}} \leq \\
& \leq e^{C_M} \frac{\gamma_j \gamma^\gamma \gamma_j! |b|^{\gamma_j} k^{\gamma_j}}{\gamma_j^{\gamma_j} e^{|\gamma|-\gamma_j} |\lambda|^{\gamma_j} (\gamma_j + k)^{1/2} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} M^{|\gamma|+k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Тогда $S_k t^\gamma \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. Значит, условие 2) теоремы [1.2](#) выполнено.

Все условия теоремы [1.2](#) выполнены. Следовательно, в случае $|\lambda| \geq 1$ оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Заметим, что в случае $\lambda = 1$ в следствии [5.2](#) показано, что при выполнении условия i_5) оператор

$$Tf(z) = \sum_{\alpha: |\alpha|=0}^N \sum_{\beta: |\beta|=1}^m c_{\alpha\beta} (D^\alpha f)(z + a_\beta)$$

гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

§ 6. Хаотичность и часто-гиперцикличность операторов, коммутирующих с дифференцированием, в $\mathcal{F}(\varphi)$

Приведем следующее необходимое в дальнейшем утверждение.

Лемма 6.1. Пусть $r = (r_1, \dots, r_n)$, где $r_i > 0$ — постоянные величины при всех $i = 1, \dots, n$,

$$D_r = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < r_i, i = 1, \dots, n\},$$

$B \subset \mathbb{C}$ — некоторое непустое множество и φ — непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$. Тогда если существует точка $\lambda_0 \in D_r$, для которой $\varphi(\lambda_0)$ — предельная точка множества B , то система экспонент

$$\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in D_r: \varphi(\xi) \in B}$$

полна в $\mathcal{F}(\varphi)$ при выполнении условия i_4).

Доказательство. По условию i_1) для любой фиксированной точки $\xi \in \mathbb{C}^n$ функция $e^{\langle \xi, z \rangle}$ лежит в $\mathcal{F}(\varphi)$. Возьмем произвольный линейный непрерывный функционал $S \in \mathcal{F}^*(\varphi)$ такой, что $S_z(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$ при всех $\xi \in D_r \cap \varphi^{-1}(B)$. Покажем, что S — нулевой функционал.

По условию леммы найдется точка $\lambda_0 \in D_r$ такая, что $\varphi(\lambda_0)$ является предельной точкой множества B . Тогда существует последовательность точек $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B$, для которой $w_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Поскольку $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ — непостоянная целая функция в $\mathbb{C}^n$, то по теореме 6 [73, приложение В] φ является открытым отображением в $\mathbb{C}$. Отсюда и из непрерывности φ в $\mathbb{C}^n$ следует, что при всех $k \in \mathbb{N}$ каждому значению $w_k \in B$ можно сопоставить точку $\lambda_k \in \mathbb{C}^n$ такую, что $\lambda_k = \varphi^{-1}(w_k)$ и $\lambda_k \neq \lambda_0$. Причем точки λ_k берем так, чтобы они не совпадали между собой и функция φ на прямой, проходящей через λ_0 и λ_k , не была постоянной. Таким образом, имеется последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$ таких, что $\varphi(\lambda_k) \in B$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi(\lambda_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Так как φ — открытое отображение, то $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_0$.

Поскольку $\lambda_0 \in D_r$, то при некотором $R > 0$ шар $B_R = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - \lambda_0\| < R\}$ лежит в D_r . Пусть $A = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ — счетное множество точек $\xi_k \in \mathbb{C}^n$, где ξ_k при каждом $k \in \mathbb{N}$ лежит на сфере $S_k = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - \lambda_k\| = R\}$. Возьмем точку ξ_1 . Если $\varphi(\xi_1) \neq \varphi(\lambda_0)$, то образуем комплексную прямую L_1 , проходящую через ξ_1 и λ_0 . На L_1 функция φ не постоянная.

Если $\varphi(\xi_1) = \varphi(\lambda_0)$, то в каждой окрестности $V_{1j} = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - \xi_1\| < \frac{1}{j}\}$, где $j = 1, 2, \dots$, найдется точка ξ_{1j} такая, что $\varphi(\xi_{1j}) \neq \varphi(\xi_1)$, значит, $\varphi(\xi_{1j}) \neq \varphi(\lambda_0)$. Через ξ_{1j} и λ_0 проведем прямую L_{1j} . На ней функция φ не постоянная. Пусть $\mathcal{L}_1 = \{L_1\}$, если $\varphi(\xi_1) \neq \varphi(\lambda_0)$, и $\mathcal{L}_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_{1j}$, если $\varphi(\xi_1) = \varphi(\lambda_0)$. Аналогично берем точки $\xi_2, \xi_3, \dots$ и строим семейства прямых $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots$. Далее полагаем $L = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_k$. Множество L плотно в $\mathbb{C}^n$ и на каждом элементе из $\mathcal{L}_k$ функция φ не постоянна.

Пусть M — произвольная комплексная прямая из L . Ввиду того, что φ непостоянна на M , $\varphi|_{D_r \cap M}$ — открытое отображение. Отсюда и из того, что $\varphi(\lambda_0)$ является предельной точкой множества B , вытекает, что λ_0 — предельная точка множества $D_r \cap M \cap \varphi^{-1}(B)$. Поскольку наложим условие $S_z(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$ при всех $\xi \in D_r \cap \varphi^{-1}(B)$, то в силу следствия из теоремы единственности получим $S_z(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$ для любых $\xi \in D_r \cap M$. Множество $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M$ плотно в $\mathbb{C}^n$, значит, $S_z(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$ для всех $\xi \in D_r$.

По лемме 4.3 функция $\hat{S}(\xi)$ целая и $S_z(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$ для каждого $\xi \in D_r$, тогда по теореме единственности следует, что $S_z(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$ при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$. Поскольку при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство $D_\xi^\alpha \hat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle})$, то верно тождество $D_\xi^\alpha \hat{S}(\xi) = S_z(z^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$. Значит, следует, что для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $S_z(z^\alpha) = 0$. Тогда для любых полиномов $p \in \mathcal{F}(\varphi)$ $S(p) = 0$. Ввиду плотности полиномов по лемме 4.1 в $\mathcal{F}(\varphi)$ получим формулу $S(f) = 0$ при всех $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, значит, функционал S нулевой. Отсюда получим, что система экспонент $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\xi \in D_r: \varphi(\xi) \in B}$ полна в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Приведем пример по лемме 6.1.

Пример. Положим

$$D_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |z_i| < r_i, \ i = 1, \dots, n \right\},$$

где $r_i > 0$ — постоянные величины при всех $i = 1, \dots, n$, $\varphi = z_1 z_2 \dots z_n$ и

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < r_1 r_2 \dots r_n \right\}.$$

Тогда множество $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{\{\xi \in \mathbb{C}^n: |\xi_i| < r_i, i=1, \dots, n\}}$ полно в $\mathcal{F}(\varphi)$ при выполнении условия i_4) в силу леммы 4.4.

Докажем следующие утверждения для операторов, коммутирующих с дифференцированием.

Теорема 6.1. Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_4), задан линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}(\varphi)$, который коммутирует с операторами частного дифференцирования и не кратный тождественному оператору. Тогда оператор T хаотический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. В теореме 5.5 было показано, что T — гиперциклический оператор в пространстве Фреше $\mathcal{F}(\varphi)$. Отсюда по леммам 1.1 и 1.2 следует, что условия хаотичности (А) и (В) выполнены. Проверим условие (С).

При доказательстве теоремы 5.5 показали, что действие T на $e^{\langle \lambda, z \rangle}$ равно

$$T(e^{\langle \lambda, z \rangle}) = a_T(\lambda)e^{\langle \lambda, z \rangle},$$

где $a_T(\lambda)$ — непостоянная целая функция. Введем обозначение $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$.

В силу теоремы 1.4 множество периодических точек оператора T имеет вид

$$V = \text{span} \left\{ f \in \mathcal{F}(\varphi) : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tf(z) = e^{\alpha \pi i} f(z) \right\}.$$

Возьмем подмножество множества V :

$$V_0 = \text{span} \{ e^{\langle \lambda, z \rangle} \}_{\lambda \in W},$$

где $W = \{ \lambda \in \mathbb{C}^n : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : \varphi(\lambda) = e^{\alpha \pi i} \}$.

Так как $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является непостоянной целой функцией в $\mathbb{C}^n$, то по теореме 6 [73, приложение В] φ — открытое отображение в $\mathbb{C}$. Поскольку по теореме Пикара [116, с. 219] целая функция φ , не тождественная постоянной, принимает все значения, кроме, может быть, одного, из $\mathbb{C}$, то пересечение $\varphi(\mathbb{C}^n)$ с единичной окружностью $\mathbb{T}$ всюду совпадает с $\mathbb{T}$, кроме, может быть, одной точки. Заметим, что на окружности $\mathbb{T}$ лежат как комплексные корни из единицы бесконечно много точек вида $e^{\alpha \pi i}$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, причем каждая точка на $\mathbb{T}$ является предельной для точек из $\mathbb{T}$. Поскольку φ — непрерывное открытое отображение, то в прообразе $\varphi^{-1}(\mathbb{T})$ имеется бесконечное число точек вида $\lambda = \varphi^{-1}(e^{\alpha \pi i})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, которые содержатся в некотором открытом поликруге D_r в $\mathbb{C}^n$.

Возьмем некоторую точку $\lambda_0 \in D_r$ такую, что $w_0 = \varphi(\lambda_0) \in \mathbb{T}$. Очевидно, имеется последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D_r$ такая, что $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$ и точки $\varphi(\lambda_k)$ имеют вид $e^{\alpha \pi i}$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, и $\varphi(\lambda_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(\lambda_0)$. По лемме 6.1 множество V_0 плотно в $\mathcal{F}(\varphi)$. Следовательно, T — хаотический оператор в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Теорема 6.2. Пусть для семейства φ выполнено условие i_4), задан линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}(\varphi)$, который коммутирует с операторами частного дифференцирования и не кратный тождественному оператору. Тогда оператор T часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. Согласно теореме 5.5 оператор T гиперциклический в пространстве Фреше $\mathcal{F}(\varphi)$. Как показано в ее доказательстве, действие T на $e^{\langle \lambda, z \rangle}$ равно

$$T(e^{\langle \lambda, z \rangle}) = a_T(\lambda)e^{\langle \lambda, z \rangle},$$

где $a_T(\lambda)$ — непостоянная целая функция. Обозначим $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$. Из теоремы 6.1 видно, что числа $\varphi(\lambda)$ принадлежат совокупности собственных значений оператора T , а экспоненты $e^{\langle \lambda, z \rangle}$ — множеству его собственных функций. Докажем теорему по схеме из теоремы 1.3 26].

Возьмем некоторую точку $\lambda_0 \in \mathbb{C}^n$ такую, что $w_0 = \varphi(\lambda_0) \in \mathbb{T}$. Пусть B — некоторая дуга на $\mathbb{T}$, содержащая точку w_0 . Точка w_0 является предельной для точек на окружности $\mathbb{T}$, поэтому существует последовательность точек $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B$, удовлетворяющих условию $w_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(\lambda_0)$. Поскольку $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является непостоянной целой функцией в $\mathbb{C}^n$, то по теореме 6 73, приложение В] φ — открытое отображение в $\mathbb{C}$. Отсюда и из непрерывности φ в $\mathbb{C}^n$ следует, что при всех номерах $k \in \mathbb{N}$ каждому значению $w_k \in B$ можно сопоставить точку $\lambda_k \in \mathbb{C}^n$ такую, что $\lambda_k = \varphi^{-1}(w_k)$ и $\lambda_k \neq \lambda_0$. Причем точки λ_k берем так, чтобы они не совпадали между собой и функция φ на прямой, проходящей через λ_0 и λ_k , не была постоянной. Значит, имеется последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$ таких, что $\varphi(\lambda_k) \in B$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi(\lambda_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(\lambda_0)$. В силу того, что φ — открытое отображение, получим, что $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_0$. Используя схему из леммы 6.1, построим множество прямых L в $\mathbb{C}^n$. Возьмем подмножество из L в виде $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, где при каждом $k \in \mathbb{N}$ $M_k = L_k$, если $\mathcal{L}_k = \{L_k\}$, и $M_k = L_{k1}$, если $\mathcal{L}_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_{kj}$.

Так как непостоянная аналитическая функция $\varphi|_{M_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$ является открытым отображением, то в силу построения множества L каждой прямой M_k при всех $k \in \mathbb{N}$ можно сопоставить точку $\lambda_k \in \mathbb{C}^n$. Тогда точке λ_k , как показано выше, соответствует некоторое собственное значение оператора T $w_k \in \mathbb{T}$. Возьмем непустую открытую дугу $\gamma_k \subset \mathbb{T}$, содержащую точку w_k . Определим аналитическую на окружности $\mathbb{T}$ функцию $\psi_k : \gamma_k \rightarrow M_k$

такую, что

$$\varphi(\psi_k(w_k)) = w_k.$$

Далее построим не тождественную нулю C^2 -гладкую функцию $f_k : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ таким образом, что $f_k(w_k) \neq 0$, а также f_k не тождественна нулю на γ_k и $f_k \equiv 0$ вне γ_k . Определим функцию $E_k : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ в виде

$$E_k(w) = f_k(w)e^{\langle \psi_k(w), z \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

в точках $w \in \gamma_k$ и $E_k(w) = 0$ в точках $w \notin \gamma_k$. Поскольку функция f_k C^2 -гладкая на $\mathbb{T}$ и $e^{\langle \psi_k(w), z \rangle}$ бесконечно дифференцируемая по w на $\mathbb{T}$, то функция E_k является C^2 -гладкой по w на $\mathbb{T}$.

Отметим, что при всех $k \in \mathbb{N}$ E_k — собственные функции оператора T , соответствующие изолированным собственным значениям $w_k = \varphi(\lambda_k)$, где $w_k \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{N}$. Значит, множество

$$\tilde{E} = \text{span}\{f_k(w)e^{\langle \psi_k(w), z \rangle} : w \in \gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \text{span}\{f_k(\varphi_k(\lambda))e^{\langle \lambda, z \rangle} : \lambda \in W\}_{k \in \mathbb{N}},$$

где $W = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : \lambda \in \psi_k(\gamma_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, определяет поле собственных функций оператора T , соответствующих собственным значениям с единичным модулем. Поскольку при всех $k \in \mathbb{N}$ E_k — C^2 -гладкие по w функции, то $\tilde{E}$ образует C^2 -гладкое поле собственных функций оператора T , которые соответствуют собственным значениям с единичным модулем.

Заметим, что $\tilde{E}$ содержит следующее подмножество:

$$V_0 = \text{span}\{e^{\langle \lambda, z \rangle}\}_{\lambda \in W},$$

где $W = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : \varphi(\lambda) = e^{\alpha \pi i}\}$. Как показано в теореме 6.1, V_0 плотно в $\mathcal{F}(\varphi)$. Тогда $\tilde{E}$ также плотно в $\mathcal{F}(\varphi)$. Таким образом, оператор T имеет в $\mathcal{F}(\varphi)$ C^2 -гладкое охватывающее поле собственных функций, соответствующих собственным значениям с единичным модулем. Следовательно, по теореме 1.5 оператор T часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Из теорем 6.1 и 6.2 вытекают следующие утверждения.

Следствие 6.1. Пусть полином $P(z) = \sum_{\alpha: |\alpha|=0}^m a_\alpha z^\alpha$, где $m \in \mathbb{N}$ и $a_\alpha \in \mathbb{C}$ при любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, отличен от постоянной. Тогда при выполнении условия i_4) оператор $T = \sum_{\alpha: |\alpha|=0}^m a_\alpha D_z^\alpha$ хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Очевидно, оператор T коммутирует с дифференцированием. В теореме 5.2 показаны его линейность и непрерывность в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Следствие 6.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и заданы числа $a_\alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $1 \leq |\alpha| \leq m$, причем не все c_α равны нулю, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$. Тогда при выполнении условия i_5) оператор $Tf(z) = \sum_{\alpha: |\alpha|=1}^m c_\alpha f(z + a_\alpha)$ хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

По следствию 5.1 T линейный и непрерывный. Очевидно, он коммутирует с дифференцированием.

Следствие 6.3. Пусть заданы числа $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ и $a_\beta \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, причем не все $c_{\alpha\beta}$ равны нулю, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$. Тогда при выполнении условия i_5) оператор $Tf(z) = \sum_{\alpha: |\alpha|=0}^N \sum_{\beta: |\beta|=1}^m c_{\alpha\beta} (D^\alpha f)(z + a_\beta)$ хаотичен и часто-гиперцикличесок в $\mathcal{F}(\varphi)$.

В силу следствия 5.2 для оператора выполняются линейность и непрерывность, а свойство коммутирования с дифференцированием очевидно.

Следствие 6.4. Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_4),

$\Phi(z) = \sum_{\alpha: |\alpha|=0}^\infty c_\alpha z^\alpha$ — непостоянная целая функция экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$, где $c_\alpha \in \mathbb{C}$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Определим оператор

$T : f \in \mathcal{F}(\varphi) \xrightarrow{\Phi(D)} \sum_{\alpha: |\alpha|=0}^\infty c_\alpha D_z^\alpha f(z)$. Тогда оператор T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Из теоремы 5.3 видно, что оператор линейный и непрерывный. Поскольку T коммутирует с дифференцированием, то утверждение верно.

Если семейство функций φ удовлетворяет условию i_5) и задана последовательность $\Lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha: |\alpha|=1}^\infty$ точек $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}^n$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, то при всех $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ можно определить зависящую от Λ последовательность чисел

$$b_{\alpha,m}(\Lambda) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z + \lambda_\alpha) - \varphi_m(z)).$$

Следствие 6.5. Пусть для семейства φ выполнено условие i_5) и заданы совокупность $(d_\alpha)_{\alpha: |\alpha|=1}^\infty$ чисел $d_\alpha \in \mathbb{C}$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, причем не все d_α равны нулю, и последовательность $\Lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha: |\alpha|=1}^\infty$ точек $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$,

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, таких, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |\lambda_\alpha| = \infty$ и $\sum_{\alpha: |\alpha|=1}^{\infty} |d_\alpha| e^{b_{\alpha,m}(\Lambda)} < \infty$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Определим в $\mathcal{F}(\varphi)$ оператор $T : f \in \mathcal{F}(\varphi) \rightarrow \sum_{\alpha: |\alpha|=1}^{\infty} d_\alpha f(z + \lambda_\alpha)$. Тогда T хаотичен и часто-гиперцикличесок в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Как показано в следствии [5.3](#), для оператора выполнены свойства линейности и непрерывности. Его свойство коммутирования с дифференцированием очевидно.

Следствие 6.6. Пусть S — линейный непрерывный функционал на $H(\mathbb{C}^n)$, причем его преобразование Лапласа $\hat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle})$ не тождественно постоянной. Тогда при выполнении условия i_5) оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z + t))$ является хаотическим и часто-гиперциклическим в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Поскольку S — линейный непрерывный функционал на $H(\mathbb{C}^n)$, то его определяющее множество компактно. Ввиду следствия [5.4](#) оператор линейный и непрерывный. В теореме [2.5](#) показано, что он коммутирующий с дифференцированием.

Следствие 6.7. Пусть семейство φ удовлетворяет условиям i_5) и

$$\forall m, k \in \mathbb{N} \exists l = l_{m,k} \in \mathbb{N}, r = r_{m,k} > 0 : \forall z, t \in \mathbb{C}^n \quad \varphi_l(z+t) \leq \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r,$$

а также определен S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}(\varphi)$, преобразование Лапласа которого $\hat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle})$ не является константой. Тогда оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z + t))$ хаотичен и часто-гиперцикличесок в $\mathcal{F}(\varphi)$.

В лемме [5.3](#) были доказаны линейность и непрерывность оператора. В лемме [5.2](#) показано, что он коммутирует с дифференцированием.

§ 7. Хаотичность и часто-гиперцикличность операторов дифференцирования и сдвига в $\mathcal{F}(\varphi)$

В этом разделе будем изучать свойства хаотичности и часто-гиперцикличности классических линейных непрерывных операторов в $\mathcal{F}(\varphi)$. Далее покажем справедливость следующих утверждений, используя определение хаотичности.

Теорема 7.1. Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_5), заданы числа $m \in \mathbb{N}$ и $c_\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_\alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$.

Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{\alpha: |\alpha|=0}^m c_\alpha f(z + a_\alpha)$ является хаотическим в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. По следствию 5.1 оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

В силу лемм 1.1 и 1.2 требования (А) и (В) из определения хаотичности выполнены. Теперь покажем справедливость условия (С).

Из теоремы 1.4 следует, что множество периодических точек оператора T образует линейное подпространство

$$V = \text{span} \left\{ f \in \mathcal{F}(\varphi) : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tf(z) = e^{\alpha\pi i} f(z) \right\}.$$

Рассмотрим подмножество множества V $V_0 = \text{span} \left\{ e^{\langle \lambda, z \rangle} \right\}_{\lambda \in W}$, где

$$W = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^n : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : \sum_{\beta: |\beta|=0}^m c_\beta e^{\langle \lambda, a_\beta \rangle} = e^{\alpha\pi i} \right\}.$$

Введем обозначение $\varphi(\lambda) = \sum_{\beta: |\beta|=0}^m c_\beta e^{\langle \lambda, a_\beta \rangle}$. Так как $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является непостоянной целой функцией в $\mathbb{C}^n$, то по теореме 6 [73, приложение В] φ — открытое отображение в $\mathbb{C}$. Поскольку по теореме Пикара [116, с. 219] непостоянная целая функция φ принимает все значения, кроме, может быть, одного, из $\mathbb{C}$, то пересечение $\varphi(\mathbb{C}^n)$ с единичной окружностью $\mathbb{T}$ всюду совпадает с $\mathbb{T}$, кроме, может быть, одной точки. Заметим, что на окружности $\mathbb{T}$ лежат как комплексные корни из единицы бесконечно много точек вида $e^{\alpha\pi i}$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, причем каждая точка на $\mathbb{T}$ является предельной для точек из $\mathbb{T}$. Поскольку φ — непрерывное открытое отображение, то в прообразе $\varphi^{-1}(\mathbb{T})$ имеется бесконечное число точек вида $\lambda = \varphi^{-1}(e^{\alpha\pi i})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, которые содержатся в некотором открытом поликруге D_r в $\mathbb{C}^n$. Возьмем некоторую точку $\lambda_0 \in D_r$ такую, что $w_0 = \varphi(\lambda_0) \in \mathbb{T}$. Очевидно, имеется последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset D_r$ такая, что $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_0$ и точки $\varphi(\lambda_k)$ имеют вид $e^{\alpha\pi i}$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$,

и $\varphi(\lambda_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(\lambda_0)$. В силу леммы [6.1](#) множество V_0 плотно в $\mathcal{F}(\varphi)$. Таким образом, оператор T хаотический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Теорема 7.2. Пусть для семейства φ выполнено условие i_5), заданы числа $N \in \mathbb{N}$ и $c_\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_\alpha \in \mathbb{C}^n$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, причем не все a_α равны нулю, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{\alpha: |\alpha|=0}^N c_\alpha (D^\alpha f)(z + a_\alpha)$ является хаотическим в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. По следствию [5.2](#) оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Из лемм [1.1](#) и [1.2](#) вытекает справедливость условий (А) и (В) из определения хаотичности. Необходимо доказать выполнение требования (С).

По теореме [1.4](#) совокупность периодических точек оператора T составляет линейное подпространство

$$V = \text{span} \left\{ f \in \mathcal{F}(\varphi) : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tf(z) = e^{\alpha\pi i} f(z) \right\}.$$

Рассмотрим подмножество множества V $V_0 = \text{span} \left\{ e^{\langle \lambda, z \rangle} \right\}_{\lambda \in W}$, где

$$W = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^n : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : \sum_{\beta: |\beta|=0}^N c_\beta \lambda^\beta e^{\langle \lambda, a_\beta \rangle} = e^{\alpha\pi i} \right\}.$$

Введем обозначение $\varphi(\lambda) = \sum_{\beta: |\beta|=0}^N c_\beta \lambda^\beta e^{\langle \lambda, a_\beta \rangle}$. Так как $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является непостоянной целой функцией в $\mathbb{C}^n$, то по теореме 6 [\[73\]](#), приложение В] φ — открытое отображение в $\mathbb{C}$. Поскольку по теореме Пикара [\[116\]](#), с. 219] непостоянная целая функция φ принимает все значения, кроме, может быть, одного, из $\mathbb{C}$, то пересечение $\varphi(\mathbb{C}^n)$ с единичной окружностью $\mathbb{T}$ всюду совпадает с $\mathbb{T}$, кроме, может быть, одной точки. На окружности $\mathbb{T}$ лежат как комплексные корни из единицы бесконечно много точек вида $e^{\alpha\pi i}$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, причем каждая точка на $\mathbb{T}$ является предельной для точек из $\mathbb{T}$. Поскольку φ — непрерывное открытое отображение, то в прообразе $\varphi^{-1}(\mathbb{T})$ имеется бесконечное число точек вида $\lambda = \varphi^{-1}(e^{\alpha\pi i})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, которые содержатся в некотором открытом поликруге D_r в $\mathbb{C}^n$. Возьмем некоторую точку $\lambda_0 \in D_r$ такую, что $w_0 = \varphi(\lambda_0) \in \mathbb{T}$. Очевидно, имеется последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset D_r$ такая, что $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_0$ и точки $\varphi(\lambda_k)$ имеют вид $e^{\alpha\pi i}$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, и $\varphi(\lambda_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(\lambda_0)$. По лемме [6.1](#) множество V_0 плотно в $\mathcal{F}(\varphi)$. Следовательно, T — хаотический оператор в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Теперь покажем хаотичность и часто-гиперцикличность оператора дифференцирования в $\mathcal{F}(\varphi)$, используя теорему [1.3](#).

Теорема 7.3. При выполнении условия i_4) оператор дифференцирования $Tf(z) = D^\alpha f(z) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} f(z)$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha \neq (0, 0, \dots, 0)$, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Доказательство. Непрерывность оператора $T : \mathcal{F}(\varphi) \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$ доказана в лемме [5.1](#). Докажем с помощью теоремы [1.3](#) хаотичность и часто-гиперцикличность T в $\mathcal{F}(\varphi)$. В качестве множества W определим линейную оболочку множества мономов $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n}$, где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. По лемме [4.1](#) W плотно в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Действие оператора T на мономы z^β для произвольных $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ имеет вид

$$T^k z^\beta = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} z^{\beta - k\alpha} & \text{при } k \leq k_0, \\ 0 & \text{при } k > k_0, \end{cases}$$

где k_0 — минимальное из чисел $\left\lfloor \frac{\beta_j}{\alpha_j} \right\rfloor$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда получим равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k z^\beta = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} z^{\beta - k\alpha}.$$

Очевидно, условие 1) теоремы [1.3](#) выполнено.

Определим оператор $S : W \rightarrow W$ в виде

$$S^k z^\beta = \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} z^{\beta + k\alpha} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Условие 3) теоремы [1.3](#) справедливо при любых $z^\beta \in W$:

$$TSz^\beta = \frac{(\beta + \alpha)!}{\beta!} \frac{\beta!}{(\beta + \alpha)!} z^{\beta + \alpha - \alpha} = z^\beta.$$

Проверим выполнение условия 2) теоремы [1.3](#) на W . Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} S^k z^\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} z^{\beta + k\alpha}.$$

Ввиду условия i_1) для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ существует постоянная $C_M \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая при произвольном $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ оценке

$$\varphi_m(z_1, \dots, z_n) \geq M(|z_1| + \dots + |z_n|) - C_M,$$

поэтому выполняется неравенство

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n, z_j \neq 0, j \in (1;n)} \left((\beta_1 + k\alpha_1) \ln |z_1| + \dots + (\beta_n + k\alpha_n) \ln |z_n| - \varphi_m(z_1, \dots, z_n) \right) \leq e^{C_M} \frac{(\beta + k\alpha)^{\beta+k\alpha}}{(Me)^{|\beta|+k|\alpha|}}.$$

Ряд сходится в $\mathcal{F}_m$ при всех $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_m \left(\sum_{k=0}^{\infty} S^k z^\beta \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|z|^{\beta+k\alpha} e^{-\varphi_m(z)}) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} e^{\sup_{z \in \mathbb{C}^n, z_j \neq 0, j \in (1;n)} ((\beta_1 + k\alpha_1) \ln |z_1| + \dots + (\beta_n + k\alpha_n) \ln |z_n| - \varphi_m(z))} \leq \\ &\leq \frac{e^{C_M} \beta!}{M^{|\beta|}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{n/2} M^{k|\alpha|}} < \infty. \end{aligned}$$

Итак, условие 2) теоремы [1.3](#) справедливо, так как в силу i_1) число M может быть сколь угодно большим. Следовательно, оператор T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Приведем пример не часто-гиперциклического оператора в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Теорема 7.4. Пусть для семейства φ выполнено условие i_6). Тогда оператор $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f \right)(z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j + b, z_{j+1}, \dots, z_n)$, где $j \in (1; n)$, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}$ фиксированные, не часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$ при условии $|\lambda| < 1$.

Доказательство. Как показано в теореме [5.7](#), оператор T линейный и непрерывный в $\mathcal{F}(\varphi)$ и $T : \mathcal{F}(\varphi) \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$. Действие T^k на функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$T^k f(z) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f \right)(z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda^k z_j + b(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1}), z_{j+1}, \dots, z_n).$$

Определим множество W как линейную оболочку всех мономов $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n}$, где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. В силу леммы [4.1](#) W плотно в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Как показано в теореме [5.8](#),

$$p_m(T^k f) \leq |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{k!}{r_j^k} p_{m+1}(f) e^{C_M}.$$

Отсюда следует, что $T^k f \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{F}(\varphi)$. Поэтому не существует функции $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ такой, что

$$\overline{\{T^k f\}_{k=0}^\infty}^\infty = \mathcal{F}(\varphi).$$

Итак, в случае $|\lambda| < 1$ оператор T не часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Приведем пример оператора, который нельзя представить в виде свертки. В условиях теоремы 5.7 приведено дополнительное условие i_6).

Теорема 7.5. Пусть семейство φ удовлетворяет условию i_6). Тогда оператор $Tf(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f\right)(z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda z_j + b, z_{j+1}, \dots, z_n)$, где $j \in (1; n)$, $f \in \mathcal{F}(\varphi)$, числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{C}$ фиксированные, является хаотическим и часто-гиперциклическим в $\mathcal{F}(\varphi)$ при условии $|\lambda| \geq 1$.

Доказательство. В силу теоремы 5.7 оператор T линейный и непрерывный в $\mathcal{F}(\varphi)$. Используя теорему 1.3, покажем хаотичность и часто-гиперциклическость T в $\mathcal{F}(\varphi)$.

Определим множество $W = \{z^\beta\}_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n}$. По теореме 4.1 W плотно в пространстве $\mathcal{F}(\varphi)$. Действие оператора T^k на функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi)$ для произвольных $k \in \mathbb{N}$ равно

$$T^k f(z) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f \right) (z_1, \dots, z_{j-1}, \lambda^k z_j + b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s, z_{j+1}, \dots, z_n).$$

Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$T^k z^\beta = \begin{cases} \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\beta_j!}{(\beta_j - k)!} z_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot z_{j-1}^{\beta_{j-1}} \left(\lambda^k z_j + b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^{\beta_j - k} z_{j+1}^{\beta_{j+1}} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n} & \text{при } k \leq \beta_j, \\ 0 & \text{при } k > \beta_j. \end{cases}$$

Теперь определим операторы S_k для мономов $t^\gamma \in \mathbb{C}^n$ для произвольных $k \in \mathbb{N}$ и $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ в виде

$$S_k t^\gamma = \frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k)! \lambda^{k\gamma_j} \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \left(\left(t_j - b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^{\gamma_j + k} - \sum_{r=\gamma_j+1}^{\gamma_j+k} (-1)^r \frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} t_j^{\gamma_j + k - r} b^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^r \right) t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n}.$$

Тогда справедливо условие 3) теоремы 1.3 на W для всех $k \in \mathbb{N}$:

$$T^k S_k t^\gamma = \frac{(\gamma_j + k)! \gamma_j! \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(\gamma_j + k)! \gamma_j! \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \left(\lambda^k \left(\frac{t_j}{\lambda^k} - \frac{b}{\lambda^k} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right) + b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^{\gamma_j} t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n} = t^\gamma.$$

В силу $i_1)$ для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ найдется постоянная $C_M = C_M(m, M) \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая при всех $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ условию

$$\varphi_m(t_1, \dots, t_n) \geq M(|t_1| + \dots + |t_n|) - C_M,$$

поэтому получается оценка

$$\sup_{t \in \mathbb{C}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n)} \left(\gamma_1 \ln |t_1| + \dots + \gamma_n \ln |t_n| - \varphi_m(t_1, \dots, t_n) \right) \leq e^{C_M} \frac{\gamma^\gamma}{(Me)^{|\gamma|}}.$$

Отсюда для любых $k \in \mathbb{N}$ следует, что

$$\sup_{t \in \mathbb{C}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n)} \left(\gamma_1 \ln |t_1| + \dots + (\gamma_j + k) \ln |t_j| + \dots + \gamma_n \ln |t_n| - \varphi_m(t_1, \dots, t_n) \right) \leq e^{C_M} \frac{(\gamma_j + k)^{\gamma_j + k} \gamma^\gamma}{\gamma_j^{\gamma_j} (Me)^{|\gamma| + k}}.$$

Покажем выполнение условия 1) теоремы [1.3](#) на множестве W . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(|T^k z^\beta| e^{-\varphi_m(z)} \right) \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^{\beta_j} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\beta_j!}{(\beta_j - k)!} 2^{\beta_j - k} |\lambda|^{k(\beta_j - k)} (|b|^{\beta_j - k} k^{\beta_j - k} + 1) \cdot \\ & \quad \cdot \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\left| z_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot z_j^{\beta_j} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n} \right| e^{-\varphi_m(z)} \right) \leq \\ & \leq e^{C_M} \frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}} \sum_{k=0}^{\beta_j} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\beta_j!}{(\beta_j - k)!} 2^{\beta_j - k} |\lambda|^{k(\beta_j - k)} (|b|^{\beta_j - k} k^{\beta_j - k} + 1) < \infty. \end{aligned}$$

Итак, условие 1) верно.

Докажем условие 2) теоремы [1.3](#) на W . В силу оценок из теоремы [5.8](#) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{t \in \mathbb{C}^n} \left(|S_k t^\gamma| e^{-\varphi_m(t)} \right) \leq \\ & \leq e^{C_M} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_j \gamma^\gamma \gamma_j! |b|^{\gamma_j} k^{\gamma_j}}{\gamma_j^{\gamma_j} e^{|\gamma| - \gamma_j} |\lambda|^{\gamma_j} (\gamma_j + k)^{1/2} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} M^{|\gamma| + k}} \leq \\ & \leq e^{C_M} \frac{\gamma_j \gamma^\gamma \gamma_j! |b|^{\gamma_j}}{\gamma_j^{\gamma_j} e^{|\gamma| - \gamma_j} |\lambda|^{\gamma_j}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\gamma_j}}{(\gamma_j + k)^{1/2} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} M^{|\gamma| + k}} < \infty. \end{aligned}$$

Значит, условие 2) выполнено. Следовательно, при условии $|\lambda| \geq 1$ T — хаотический и часто-гиперциклический оператор в $\mathcal{F}(\varphi)$. $\square$

Глава 3. Динамические свойства классических операторов в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций

§ 8. Определение пространства $\mathcal{E}(\varphi)$

В этой главе будем изучать гиперцикличность классических линейных операторов в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, инвариантных относительно дифференцирования или сдвига. Такие пространства рассматривались в работах Н.Т. Ахтямова, И.Х. Мусина [70, 71], а в статье И.Х. Мусина [89] доказано, что дифференциальные операторы конечного порядка с постоянными коэффициентами гиперциклические в весовом пространстве Фреше $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. Определим весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство непрерывных вещественнозначных функций $\varphi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих для всех $m \in \mathbb{N}$ требованиям:

- $\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty;$
- $\beta) \lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty.$

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ определим

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n), f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : p_m(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \leq m}} \frac{|(D_x^\alpha f)(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty \right\}.$$

Очевидно, при любом $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{E}(\varphi_m)$ — банахово пространство. В силу условия $\beta)$ вложения $\mathcal{E}(\varphi_{m+1}) \subset \mathcal{E}(\varphi_m)$ вполне непрерывны для всех $m \in \mathbb{N}$.

Теперь положим

$$\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}(\varphi_m).$$

Снабдим его операциями сложения элементов и умножения на комплексные числа, тогда $\mathcal{E}(\varphi)$ — линейное пространство. Наделим $\mathcal{E}(\varphi)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}(\varphi_m)$, $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\mathcal{E}(\varphi)$ — пространство Фреше и оно инвариантно относительно дифференцирования, а операторы частного дифференцирования в нем непрерывны. Также пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ сепарабельно [90, теорема 1].

Определим для произвольного $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ оператор сдвига на вектор a в $\mathcal{E}(\varphi)$

$$T_a : f \in \mathcal{E}(\varphi) \rightarrow f(x + a), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что $\mathcal{E}(\varphi)$ не обязательно инвариантно относительно сдвига, причем этот факт сужает класс линейных операторов, действующих в $\mathcal{E}(\varphi)$, и ограничивает возможности для описания гиперциклических операторов в нем.

Далее на семейство функций φ в зависимости от задачи будем накладывать одно из трех условий, гарантирующих инвариантность $\mathcal{E}(\varphi)$ относительно сдвига, для любого $m \in \mathbb{N}$:

γ_1) найдутся постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что

$$\varphi_{m+1}(x + \eta) \leq \varphi_m(x) + b_m,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathbb{R}^n : \|\eta\| \leq a_m$;

или более жесткое условие

γ_2) при любом $R > 0$ найдется постоянная $b_m = b_m(R) > 0$ такая, что

$$\varphi_{m+1}(x + \eta) \leq \varphi_m(x) + b_m,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathbb{R}^n : \|\eta\| \leq R$;

или другое условие

γ_3) для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют числа $l = l_{m,k} \in \mathbb{N}$ и $r = r_{m,k} > 0$ такие, что при произвольных $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_l(x + y) \leq \varphi_m(x) + \varphi_k(y) + r.$$

Пример. Примерами функций φ_m из семейства $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, удовлетворяющих условиям $\gamma_1)$ – $\gamma_3)$, являются:

1) функция $\varphi_m(x) = 2^{-mp}\|x\|^p$, где $p > 1$;

2) функция $\varphi_m(x) = \sum_{j=1}^q c_j 2^{-mp_j} \|x\|^{p_j}$, где $q \in \mathbb{N}$, $2 \leq q < \infty$ и при всех $j \in (1; n)$ $p_j > 1$, $c_j \geq 0$, причем хотя бы один коэффициент c_j не равен нулю.

Для чисел $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) и $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) определим скалярное произведение $\langle u, v \rangle = u_1 \bar{v}_1 + \dots + u_n \bar{v}_n$ и евклидову норму

$\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}$. Обозначим в виде $\text{span } E$ линейную оболочку множества E в $\mathcal{E}(\varphi)$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и переменных $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ определим длину мультииндекса $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, мономы $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ и операторы дифференцирования

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D_z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}.$$

Для вещественнозначной функции ψ в $\mathbb{R}^n$ такой, что

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{\|x\|} = +\infty,$$

преобразование Юнга-Фенхеля определяется в виде

$$\tilde{\psi}(x) = - \inf_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle + \psi(y)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для функций из семейства $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ в силу условия α) их преобразования Юнга-Фенхеля $\tilde{\varphi}_m(z)$ ограничены во всем $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения:

Теорема 8.1. [89, лемма 1] Пусть W — непустое открытое множество в $\mathbb{C}^n$, тогда система экспонент $\{e^{i\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W}$ полна в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Теорема 8.2. [89, теорема B] Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ — семейство вещественнозначных функций $\varphi_m \in C(\mathbb{R}^n)$, для которых выполняются условия α) и β), тогда полиномы плотны в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Очевидно, дифференциальный оператор конечного порядка с постоянными коэффициентами является коммутирующим с операторами частного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_j}$ для любых $j \in (1; n)$. Из этого факта и теоремы 5.1 из статьи Р.М. Гетнера, Дж.Х. Шапиро [39] о гиперцикличности в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ с топологией компактной сходимости линейных непрерывных операторов, коммутирующих с операторами частного дифференцирования, возникает задача о гиперцикличности операторов такого типа в пространстве $\mathcal{E}(\varphi)$.

Ее решение получено в теореме [9.1]. Далее как следствия из нее приведены утверждения о гиперцикличности для операторов сдвига, дифференцирования, их композиций и свертки.

§ 9. Гиперциклические операторы в $\mathcal{E}(\varphi)$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 9.1. *Пусть семейство φ удовлетворяет условию γ_1). Тогда если линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{E}(\varphi)$ коммутирует с операторами частного дифференцирования и не является скалярным кратным тождественному отображению, то он гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.*

Доказательство. Отметим, что функция

$$f_z(\xi) := \exp(i\langle \xi, z \rangle)$$

для любых $z \in \mathbb{C}^n$ принадлежит пространству $\mathcal{E}(\varphi)$, так как при всех $m \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$p_m(f_z) \leq (1 + \|z\|)^m \exp(\tilde{\varphi}_m(\operatorname{Im} z)).$$

В силу этого функция

$$F_T(\xi, z) := T(f_z)(\xi)$$

корректно определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n$.

Оператор T по условию коммутирующий с операторами частного дифференцирования, поэтому при всех $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$$D_j T(f_z) = T D_j(f_z) = T(i z_j f_z) = i z_j T(f_z), \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда следует, что можно найти функцию $a_T(z) \in \mathbb{C}^n$, для которого выполняется равенство

$$T(f_z) = a_T(z) f_z. \quad (9.1)$$

Итак, для всех $z \in \mathbb{C}^n$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ получим

$$F_T(\xi, z) = a_T(z) e^{i\langle \xi, z \rangle}.$$

Отметим, что функция F_T целая по переменной z . Действительно, оператор T является линейным и непрерывным на $\mathcal{E}(\varphi)$, поэтому при любом $k \in \mathbb{N}$ существуют числа $m \in \mathbb{N}$, $m > k$ и $c_k > 0$, удовлетворяющие условию

$$p_k(T(g)) \leq c_m p_m(g), \quad g \in \mathcal{E}(\varphi). \quad (9.2)$$

Возьмем произвольные точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Для всех точек $z \in \mathbb{C}^n$ из шара $\|z - \zeta\| < 1$ определим функцию

$$g_{z, \zeta}(\xi) := e^{i\langle \xi, z \rangle} - e^{i\langle \xi, \zeta \rangle} - i\langle \xi, z - \zeta \rangle e^{i\langle \xi, \zeta \rangle}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Используя формулу (9.2), для нее получим оценку

$$|T(g_{z,\zeta})(\xi)| \leq c_m p_m(g_{z,\zeta}) e^{\varphi_m(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определим функцию

$$f_{j,\zeta}(\xi) := i\xi_j \exp(i\langle \xi, \zeta \rangle), \quad j = 1, \dots, n.$$

Из последней оценки и неравенства (см. [90, теорема 2])

$$p_m(g_{z,\zeta}) \leq C \|z - \zeta\|^2,$$

где C — некоторая положительная постоянная, зависящая от точки ζ , а также линейности оператора T вытекает для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ равенство

$$F_T(\xi, z) - F_T(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^n T(f_{j,\zeta})(\xi)(z_j - \zeta_j) + o(\|z - \zeta\|), \quad z \rightarrow \zeta.$$

Итак, для каждого фиксированного значения $\xi \in \mathbb{R}^n$ $F_T(\xi, z)$ как функция переменной z голоморфна в точке ζ . Точка $\zeta \in \mathbb{C}^n$ произвольная, поэтому функция F_T по переменной z целая. Отсюда и из формулы (9.1) вытекает, что a_T — целая функция в $\mathbb{C}^n$. По условию оператор T не тождественен умножению на константу, значит, a_T — непостоянная функция.

Если Ω — непустое открытое множество в $\mathbb{C}^n$, то по теореме 8.1 система функций $\{f_z\}_{z \in \Omega}$ полна в $\mathcal{E}(\varphi)$. Определим множества $W_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |a_T(z)| < 1\}$ и $W_2 = \{z \in \mathbb{C}^n : |a_T(z)| > 1\}$. Так как a_T — целая функция в $\mathbb{C}^n$, то W_1 и W_2 непустые и открытые в $\mathbb{C}^n$. Положим $X_0 = \text{span}\{f_z\}_{z \in W_1}$ и $Y_0 = \text{span}\{f_z\}_{z \in W_2}$. По теореме 8.1 система функций $\{f_z\}_{z \in \Omega}$ полна в $\mathcal{E}(\varphi)$, поэтому X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Таким образом, линейные оболочки множеств $\bigcup_{|\lambda| < 1} \ker(T - \lambda)$ и $\bigcup_{|\lambda| > 1} \ker(T - \lambda)$ плотны в пространстве $\mathcal{E}(\varphi)$. Следовательно, все условия теоремы 1.1 выполнены, оператор T гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$. $\square$

В силу теоремы 9.1 выполняются следующие следствия.

Следствие 9.1. Пусть семейство φ удовлетворяет требованию γ_1) и полином $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$, где $x \in \mathbb{R}^n$, отличен от постоянной. Тогда оператор $T = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D_x^\alpha$ является гиперциклическим в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Следствие 9.1 совпадает с теоремой 1 из статьи [89].

Следствие 9.2. Пусть для семейства φ выполнено условие γ_1). Тогда для любого $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ оператор сдвига $T_a : f \in \mathcal{E}(\varphi) \rightarrow f(x + a)$ гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Доказательство. Очевидно, оператор T_a коммутирующий с операторами частного дифференцирования. Теперь покажем непрерывность линейного оператора T_a .

Возьмем число $m \in \mathbb{N}$ произвольным образом. Ввиду условия γ_1) на семейство функций φ можно найти числа $l \in \mathbb{N}$ и $c_m > 0$ такие, что

$$\varphi_{m+l}(x + a) - \varphi_m(x) \leq c_m, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (9.3)$$

Пусть $f \in \mathcal{E}(\varphi)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m + l$

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq p_{m+l}(f)e^{\varphi_{m+l}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пользуясь этой оценкой и неравенством (9.3), для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m$ и $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|(D^\alpha T_a f)(x)| = |(D^\alpha f)(x + a)| \leq p_{m+l}(f)e^{\varphi_{m+l}(x+a)} \leq p_{m+l}(f)e^{\varphi_m(x) + c_m}.$$

Отсюда следует, что

$$p_m(T_a f) \leq \tilde{c}_m p_{m+l}(f),$$

где $\tilde{c}_m = e^{c_m}$. Таким образом, $T_a f \in \mathcal{E}(\varphi)$ для любого $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, а линейное отображение T_a непрерывно. Применяя теперь теорему 9.1, заключаем, что T_a — гиперциклический оператор в $\mathcal{E}(\varphi)$. $\square$

Следствие 9.3. Пусть семейство φ удовлетворяет требованию γ_1) и заданы числа $N \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{C}$ и $a^j \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, $j = 1, 2, \dots, N$, причем не все c_j равны нулю. Тогда оператор $T : f \in \mathcal{E}(\varphi) \rightarrow \sum_{j=1}^N c_j f(x + a^j)$ гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Доказательство. Очевидно, T коммутирует с операторами частного дифференцирования. Из доказательства предыдущего следствия вытекает, что при любом $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ T_a — непрерывный оператор в $\mathcal{E}(\varphi)$. Поэтому линейный оператор T также непрерывен в $\mathcal{E}(\varphi)$. Тогда по теореме 9.1 оператор T гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$. $\square$

Следствие 9.4. Пусть для семейства φ выполнено условие γ_1), заданы номер $N \in \mathbb{N}$, числа $c_j \in \mathbb{C}$, $a^j \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ и мультииндексы $\alpha^j \in \mathbb{Z}_+^n$, где $j = 1, 2, \dots, N$, причем не все c_j равны нулю, $f \in \mathcal{E}(\varphi)$. Тогда оператор $Tf(x) = \sum_{j=1}^N c_j (D_x^{\alpha^j} f)(x + a^j)$, действующий в $\mathcal{E}(\varphi)$, гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 [89] следует, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ оператор D^α непрерывно отображает $\mathcal{E}(\varphi)$ в $\mathcal{E}(\varphi)$. Согласно следствию 9.2 оператор сдвига T_a также непрерывен в $\mathcal{E}(\varphi)$. Тогда линейный оператор T непрерывен. Очевидно, оператор T коммутирует с операторами частного дифференцирования. Значит, по теореме 9.1 оператор T является гиперциклическим. $\square$

Пусть семейство φ удовлетворяет условию γ_2) и задана последовательность $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty$ точек $\lambda_j \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}$ можно определить зависящую от Λ последовательность чисел

$$b_{j,m}(\Lambda) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\varphi_{m+1}(x + \lambda_j) - \varphi_m(x)).$$

Следствие 9.5. Пусть семейство φ удовлетворяет требованию γ_2), заданы последовательность $(d_j)_{j=1}^\infty$ чисел $d_j \in \mathbb{C}$, причем не все d_j равны нулю, и совокупность $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty$ точек $\lambda_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ таких, что $\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = \infty$ и $\sum_{j=1}^\infty |d_j| e^{b_{j,m}(\Lambda)} < \infty$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Тогда оператор T , определенный на $\mathcal{E}(\varphi)$ в виде $T(f)(x) = \sum_{j=1}^\infty d_j f(x + \lambda_j)$, $x \in \mathbb{R}^n$, гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{E}(\varphi)$. Тогда каково бы ни было $m \in \mathbb{N}$, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m$

$$|D^\alpha(f(x + \lambda_j))| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(x + \lambda_j)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пользуясь условием γ_2), получим формулу

$$|D^\alpha(f(x + \lambda_j))| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_m(x) + b_{j,m}(\Lambda)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, выполняется оценка

$$p_m(Tf) \leq \sum_{j=1}^\infty |d_j| e^{b_{j,m}(\Lambda)} p_{m+1}(f).$$

Итак, линейный оператор T действует из $\mathcal{E}(\varphi)$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ и является непрерывным. Поскольку оператор T коммутирующий с операторами частного дифференцирования, то в силу теоремы 9.1 T является гиперциклическим в $\mathcal{E}(\varphi)$. $\square$

Следствие 9.6. Пусть для семейства φ выполнено условие γ_1), S — линейный непрерывный функционал на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такой, что его преобразование Фурье–Лапласа $\hat{S}(z) = S_\xi(e^{-i\langle \xi, z \rangle})$ не тождественно постоянной. Тогда определяемый по функционалу S оператор свертки $M_S[f](x) = S_y(f(x+y))$ гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Доказательство. Поскольку S — линейный непрерывный функционал на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, то он имеет компактный носитель. Тогда всякая функция f из $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$, поэтому $M_S[f] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Убедимся, что $M_S[f] \in \mathcal{E}(\varphi)$ для любой функции $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ и линейный оператор M_S действует непрерывно из $\mathcal{E}(\varphi)$ в $\mathcal{E}(\varphi)$. Найдутся компакт K в $\mathbb{R}^n$ и числа $p \in \mathbb{Z}_+$ и $C > 0$ такие, что

$$|S(f)| \leq C \max_{y \in K, |\alpha| \leq p} |(D^\alpha f)(y)|, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому для $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ выполняется оценка

$$|M_S[f](x)| \leq C_1 \max_{y \in K, |\alpha| \leq p} |(D^\alpha f)(x+y)|. \quad (9.4)$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Ввиду условия γ_1) на семейство функций φ можно найти числа $l \in \mathbb{N}$ и $c_m > 0$ такие, что

$$\varphi_{m+l}(x+y) - \varphi_m(x) \leq c_m, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in K. \quad (9.5)$$

Можно считать, что $m+l \geq p$. Тогда из (9.4) следует неравенство

$$|M_S[f](x)| \leq C_1 p_{m+l}(f) e^{\max_{y \in K} \varphi_{m+l}(x+y)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда с учетом (9.5) получим, что

$$|M_S[f](x)| \leq C_2 p_{m+l}(f) e^{\varphi_m(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $C_2 = C_1 e^{c_m}$. Таким образом, M_S отображает $\mathcal{E}(\varphi)$ в $\mathcal{E}(\varphi)$, а из оценки

$$p_m(M_S[f]) \leq C_2 p_{m+l}(f)$$

вытекает, что оператор M_S непрерывный в $\mathcal{E}(\varphi)$.

По теореме 2.5 M_S коммутирует с операторами частного дифференцирования, по условию он не совпадает с оператором умножения на константу. Тогда в силу теоремы 9.1 оператор M_S гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$. $\square$

Далее покажем гиперцикличность оператора свертки. Для него справедливы следующие утверждения.

Лемма 9.1. Пусть семейство φ удовлетворяет условию γ_1 , S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}(\varphi)$. Тогда для любого $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ функция $M_S[f]$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$, а оператор $M_S[f]$ коммутирует с операторами частного дифференцирования.

Доказательство. В силу условия γ_1 пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ инвариантно относительно сдвига. Поэтому оператор M_S корректно определен на $\mathcal{E}(\varphi)$ и для любой функции $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ функция $M_S[f]$ определена в $\mathbb{R}^n$.

Покажем, что если $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, то функция $M_S[f]$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка, $h = (h_1, \dots, h_n)$ — вектор из $\mathbb{R}^n$ с $\|h\| \leq 1$.

По определению верно равенство

$$\begin{aligned} M_S[f](x_0+h) - M_S[f](x_0) - \sum_{j=1}^n M_S[D_j f](x_0)h_j &= S_y(f(x_0+h+y)) - S_y(f(x_0+y)) - \\ &- \sum_{j=1}^n S_y((D_j f)(x_0+y))h_j = S_y(f(x_0+h+y) - f(x_0+y) - \sum_{j=1}^n (D_j f)(x_0+y)h_j). \end{aligned}$$

Существуют номер $m \in \mathbb{N}$ и постоянная $C_m > 0$ такие, что

$$|S(f)| \leq C_m p_m(f), \quad f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Из двух предыдущих формул вытекает оценка

$$|M_S[f](x_0+h) - M_S[f](x_0) - \sum_{j=1}^n M_S[D_j f](x_0)h_j| \leq C_m p_m(g_{x_0,h}), \quad (9.6)$$

где $g_{x_0,h}(y) = f(x_0+h+y) - f(x_0+y) - \sum_{j=1}^n (D_j f)(x_0+y)h_j$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Действуя с помощью формулы Тейлора на вещественную и мнимую части функции $D^\beta g_{x_0,h}$, для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ получим неравенство

$$|(D^\beta g_{x_0,h}(y))| \leq n^2 \|h\|^2 \max_{\xi \in [x_0+y, x_0+y+h], \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha|=2} |(D^{\alpha+\beta} f)(\xi)|. \quad (9.7)$$

где $[x_0 + y, x_0 + y + h]$ — отрезок, соединяющий точки $x_0 + y$ и $x_0 + y + h$. Пользуясь условием γ_1), найдем натуральное число $k \geq m + 2$ и число $C = C(x_0) > 0$, удовлетворяющие неравенству

$$\varphi_k(\xi) \leq \varphi_m(y) + C$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\|\xi - y\| \leq \|x_0\| + 1.$$

Тогда для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta| \leq m$

$$\max_{\xi \in [x_0 + y, x_0 + y + h], \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha|=2} |(D^{\alpha+\beta}f)(\xi)| \leq e^C p_k(f) e^{\varphi_m(y)}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда и из (9.7) следует, что для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta| \leq m$

$$|(D^\beta g_{x_0, h}(y))| \leq n^2 e^C \|h\|^2 p_k(f) e^{\varphi_m(y)}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Значит, выполняется оценка

$$p_m(g_{x_0, h}) \leq n^2 e^C \|h\|^2 p_k(f). \quad (9.8)$$

Пользуясь неравенством (9.6) и оценкой (9.8), имеем

$$|M_S[f](x_0 + h) - M_S[f](x_0) - \sum_{j=1}^n M_S[D_j f](x_0) h_j| \leq C_m n^2 e^C \|h\|^2 p_k(f).$$

Это означает, что функция $M_S[f]$ дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и поэтому

$$D_j(M_S[f])(x_0) = M_S[D_j f](x_0).$$

Точка x_0 произвольная, поэтому функция $M_S[f]$ дифференцируема всюду в $\mathbb{R}^n$.

Тогда справедливо равенство

$$D_j(M_S[f]) = M_S[D_j f], \quad j = 1, \dots, n.$$

Из этой формулы и инвариантности $\mathcal{E}(\varphi)$ относительно дифференцирования получается, что функция $M_S[f]$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Лемма 9.2. Пусть для семейства φ выполнено условие γ_3),

S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}(\varphi)$. Тогда оператор свертки $M_S[f](x) = S_y(f(x+y))$ отображает $\mathcal{E}(\varphi)$ в $\mathcal{E}(\varphi)$, а также является линейным и непрерывным в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Доказательство. В силу γ_3) $\mathcal{E}(\varphi)$ инвариантно относительно сдвига. Тогда оператор M_S корректно определен на $\mathcal{E}(\varphi)$. Очевидно, он линейный. Поскольку S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}(\varphi)$, то существуют номер $k \in \mathbb{N}$ и постоянная $C_k > 0$ такие, что

$$|S(f)| \leq C_k p_k(f), \quad f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Отсюда следует, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и произвольной функции $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ выполняется оценка

$$|M_S[f](x)| \leq C_k p_k(T_x f) = C_k \sup_{y \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq k} \frac{|(D^\alpha f)(x+y)|}{\exp(\varphi_k(y))}.$$

Возьмем число $m \in \mathbb{N}$ произвольным образом. Пусть $l \in \mathbb{N}$ — число из условия γ_3). Так как $l \geq k$, то в силу принадлежности f пространству $\mathcal{E}(\varphi)$ выполняется оценка

$$|M_S[f](x)| \leq C_k p_l(f) \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{\exp(\varphi_l(x+y))}{\exp(\varphi_k(y))}.$$

Теперь, воспользовавшись условием γ_3), получим неравенство

$$|M_S[f](x)| \leq C_k e^{r_{m,k}} p_l(f) \exp(\varphi_m(x)).$$

Тогда справедлива формула

$$p_m(M_S[f]) \leq C_k e^{r_{m,k}} p_l(f), \quad f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Следовательно, линейный оператор M_S действует из $\mathcal{E}(\varphi)$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ и является непрерывным. $\square$

В силу лемм 9.1 и 9.2 справедлива следующая теорема.

Теорема 9.2. Пусть семейство φ удовлетворяет требованиям γ_1) и γ_3), S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}(\varphi)$. Тогда оператор свертки $M_S[f]$ гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Теперь приведем пример не гиперциклического оператора в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Наложим на семейство φ дополнительное условие при всех $m \in \mathbb{N}$:

γ_4) при фиксированном $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ для любого $R > 0$ существует постоянная $b_m = b_m(R) > 0$, удовлетворяющая условию

$$\varphi_{m+1}(\tilde{x} + t) \leq \varphi_m(x) + b_m,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \|t\| \leq R$ и $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $j \in (1; n)$.

Пример. Примерами функций φ_m из семейства $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, удовлетворяющих условию γ_4), являются:

1) при $|\lambda| \leq 1$ $\varphi_m(x) = 2^{-mp} \|x\|^p$,

при $|\lambda| > 1$ $\varphi_m(x) = 2^{-mp} |\lambda|^{-mp} \|x\|^p$, где $p > 1$;

2) при $|\lambda| \leq 1$ $\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^q c_k 2^{-mp_k} \|x\|^{p_k}$,

при $|\lambda| > 1$ $\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^q c_k 2^{-mp_k} |\lambda|^{-mp_k} \|x\|^{p_k}$,

где $q \in \mathbb{N}$, $2 \leq q < \infty$ и при всех $k \in (1; n)$ $p_k > 1$, $c_k \geq 0$,

причем хотя бы один коэффициент c_k не равен нулю;

3) при $|\lambda| \leq 1$ $\varphi_m(x) = 2^{-m\alpha_j} |x_j|^{\alpha_j} + c 2^{-mp} \|x'\|^p$,

при $|\lambda| > 1$ $\varphi_m(x) = 2^{-m\alpha_j} |\lambda|^{-m\alpha_j} |x_j|^{\alpha_j} + c 2^{-mp} \|x'\|^p$,

где номер j задан в условии γ_4), $\alpha_j > 1$, $p > 1$, $c \geq 0$,

$x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Теорема 9.3. Пусть для семейства φ выполнено условие γ_4). Тогда оператор $Tf(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j + b, x_{j+1}, \dots, x_n)$, где $j \in (1; n)$, $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, числа $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ фиксированные, не гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$ при условии $|\lambda| < 1$.

Доказательство. Покажем корректность оператора T в $\mathcal{E}(\varphi)$. Возьмем число $m \in \mathbb{N}$ произвольным образом. Ввиду условия γ_4) на семейство функций φ для любого номера $l \in \mathbb{N}$ при произвольном $R > 0$ существует постоянная $c_{m+l} = c_{m+l}(R) > 0$ такая, что

$$\varphi_{m+l}(\tilde{x} + t) - \varphi_m(x) \leq c_{m+l}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^n : \|t\| \leq R.$$

Пусть $f \in \mathcal{E}(\varphi)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m + l$

$$|(D^\alpha T f)(x)| = |(D^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} f)(x)| \leq p_{m+l+1}(f) e^{\varphi_{m+l+1}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим $x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j + b, x_{j+1}, \dots, x_n)$. Пользуясь этими оценками, для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m$ и $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} |(D^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} f)(x')| &\leq p_{m+l+1}(f) e^{\varphi_{m+l+1}(x')} \leq \\ &\leq p_{m+l+1}(f) e^{\varphi_{m+l+1}(x''+u)} \leq p_{m+l+1}(f) e^{\varphi_m(x) + c_{m+l+1}}, \end{aligned}$$

где $x'' = (x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $u = (0, \dots, 0, b, 0, \dots, 0)$.

Отсюда следует, что

$$p_m(Tf) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} \frac{|(D^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} f)(x')|}{\exp(\varphi_m(x))} \leq \tilde{c}_{m+l+1} p_{m+l+1}(f),$$

где $\tilde{c}_{m+l+1} = e^{c_{m+l+1}}$. Таким образом, T действует из $\mathcal{E}(\varphi)$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ для любого $f \in \mathcal{E}(\varphi)$. Значит, оператор T определен корректно в $\mathcal{E}(\varphi)$. Очевидно, оператор T линейный и является непрерывным.

Действие оператора T^k на функцию $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$T^k f(x) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_j^k} f \right) (x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda^k x_j + b(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1}), x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Обозначим $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda^k x_j + b(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1}), x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} p_m(T^k f) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} \left(|D^\alpha(T^k f)(x)| e^{-\varphi_m(x)} \right) = \\ &= |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m}} \left(|D^\alpha \left(\left(\frac{\partial^k}{\partial x_j^k} f \right) (\tilde{x}) \right)| e^{-\varphi_m(x)} \right) \leq \\ &\leq |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n: |\beta| \leq m+k, k \leq \beta_j \leq k+m}} \left(|(D^\beta f)(\tilde{x})| e^{-\varphi_m(x)} \right) \leq \\ &\leq |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} p_{m+k}(f) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(e^{\varphi_{m+k}(\tilde{x})} e^{-\varphi_m(x)} \right) \leq |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} e^{b_{m+k}} p_{m+k}(f). \end{aligned}$$

Следовательно, для любых $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ $T^k f \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{E}(\varphi)$. Значит, не существует функции $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ такой, что

$$\overline{\{T^k f\}}_{k=0}^\infty = \mathcal{E}(\varphi).$$

Итак, в случае $|\lambda| < 1$ оператор T не гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$. □

Далее приведем пример гиперциклического оператора, который не является сверткой.

Теорема 9.4. Пусть семейство φ удовлетворяет условию γ_4). Тогда оператор $Tf(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j + b, x_{j+1}, \dots, x_n)$, где $j \in (1; n)$, $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, числа $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ фиксированы, гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$ при условии $|\lambda| \geq 1$.

Доказательство. Очевидно, оператор T линейный. Его непрерывность показана в теореме 9.3. С помощью теоремы 1.2 докажем его гиперциклическость. Определим $X = Y = \text{span}\{x^\beta\}_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n}$, в силу теоремы 8.2 множества X и Y плотны в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Действие оператора T^k на функцию $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ для произвольных $k \in \mathbb{N}$ равно

$$T^k f(x) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_j^k} f \right)(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda^k x_j + b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$T^k x^\beta = \begin{cases} \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\beta_j!}{(\beta_j - k)!} x_1^{\beta_1} \dots x_{j-1}^{\beta_{j-1}} \left(\lambda^k x_j + b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^{\beta_j - k} x_{j+1}^{\beta_{j+1}} \dots x_n^{\beta_n} & \text{при } k \leq \beta_j, \\ 0 & \text{при } k > \beta_j. \end{cases}$$

Тогда $T^k x^\beta \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{E}(\varphi)$. Итак, условие 1) теоремы 1.2 выполнено.

Теперь определим операторы S_k для мономов $t^\gamma \in \mathbb{R}^n$ для произвольных $k \in \mathbb{N}$ и $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ в виде

$$S_k t^\gamma = \frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k)! \lambda^{k\gamma_j} \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \dots t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \left(\left(t_j - b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^{\gamma_j + k} - \sum_{r=\gamma_j+1}^{\gamma_j+k} (-1)^r \frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} t_j^{\gamma_j + k - r} b^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^r \right) t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \dots t_n^{\gamma_n}.$$

Справедливо условие 3) теоремы 1.2 на Y для всех $k \in \mathbb{N}$:

$$T^k S_k t^\gamma = \frac{(\gamma_j + k)! \gamma_j! \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(\gamma_j + k)! \gamma_j! \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \dots t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \left(\lambda^k \left(\frac{t_j}{\lambda^k} - \frac{b}{\lambda^k} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right) + b \sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^{\gamma_j} t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \dots t_n^{\gamma_n} = t^\gamma.$$

Операторы S_k для любых $k \in \mathbb{N}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
S_k t^\gamma &= \frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k)! \lambda^{k\gamma_j} \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \\
&\cdot \left(\sum_{r=0}^{\gamma_j+k} (-1)^r \frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} t_j^{\gamma_j+k-r} b^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^r - \right. \\
&- \sum_{r=\gamma_j+1}^{\gamma_j+k} (-1)^r \frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} t_j^{\gamma_j+k-r} b^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^r \Big) \cdot t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n} = \\
&= \frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k)! \lambda^{k\gamma_j} \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}}} t_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot t_{j-1}^{\gamma_{j-1}} \cdot \\
&\cdot \sum_{r=0}^{\gamma_j} \left((-1)^r \frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} t_j^{\gamma_j+k-r} b^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} \lambda^s \right)^r \right) \cdot t_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \cdot \dots \cdot t_n^{\gamma_n}.
\end{aligned}$$

В силу α) для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ найдется постоянная $C_M = C_M(m, M) \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая при всех $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ условию

$$\varphi_m(t_1, \dots, t_n) \geq M(|t_1| + \dots + |t_n|) - C_M,$$

поэтому получается оценка

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n), \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \alpha_s \leq \gamma_s, s \in (1;n)}} \left((\gamma_1 - \alpha_1) \ln |t_1| + \dots + (\gamma_n - \alpha_n) \ln |t_n| - \varphi_m(t_1, \dots, t_n) \right) \\
&e^{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \alpha_s \leq \gamma_s, s \in (1;n)} \leq e^{C_M} \frac{\gamma^\gamma}{(Me)^{|\gamma|}}.
\end{aligned}$$

Отсюда для любых $k \in \mathbb{N}$ следует, что

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n), \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \alpha_s \leq \gamma_s, s \in (1;n)}} \left((\gamma_1 - \alpha_1) \ln |t_1| + \dots + (\gamma_j - \alpha_j + k) \ln |t_j| + \dots + (\gamma_n - \alpha_n) \ln |t_n| - \varphi_m(t_1, \dots, t_n) \right) \\
&e^{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \alpha_s \leq \gamma_s, s \in (1;n)} \leq e^{C_M} \frac{(\gamma_j + k)^{\gamma_j+k} \gamma^\gamma}{\gamma_j^{\gamma_j} (Me)^{|\gamma|+k}}.
\end{aligned}$$

Для любых $m \in \mathbb{N}$ и $t^\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ получим

$$\begin{aligned}
p_m(S_k t^\gamma) &\leq \frac{\gamma_j!}{(\gamma_j + k)! |\lambda|^{k\gamma_j} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}}} \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \\ \alpha_s \leq \gamma_s, s \in (1;n)}} \left(|t_1|^{\gamma_1 - \alpha_1} \cdot \dots \cdot |t_{j-1}|^{\gamma_{j-1} - \alpha_{j-1}} \cdot \right. \\
&\cdot \sum_{r=0}^k \left(\frac{(\gamma_j + k)!}{(\gamma_j + k - r)! r!} |t_j|^{\gamma_j+k-r-\alpha_j} |b|^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} |\lambda|^s \right)^r \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot |t_{j+1}|^{\gamma_{j+1}-\alpha_{j+1}} \cdot \dots \cdot |t_n|^{\gamma_n-\alpha_n} e^{-\varphi_m(t)} \Big) \leq \\
& \leq \sum_{r=0}^{\gamma_j} \left(\frac{\gamma_j!}{(\gamma_j+k-r)!r!|\lambda|^{k\gamma_j}|\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}}} |b|^r \left(\sum_{s=0}^{k-1} |\lambda|^s \right)^r \right) \cdot \\
& \cdot \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \\ \alpha_s \leq \gamma_s, s \in (1;n)}} \left(|t_1|^{\gamma_1-\alpha_1} \cdot \dots \cdot |t_{j-1}|^{\gamma_{j-1}-\alpha_{j-1}} \cdot |t_j|^{\gamma_j+k-r-\alpha_j} \cdot \right. \\
& \left. \cdot |t_{j+1}|^{\gamma_{j+1}-\alpha_{j+1}} \cdot \dots \cdot |t_n|^{\gamma_n-\alpha_n} e^{-\varphi_m(t)} \right) \leq \\
& \leq e^{C_M} \sum_{r=0}^{\gamma_j} \frac{\gamma_j! |b|^r k^r |\lambda|^{r(k-1)}}{(\gamma_j+k-r)!r!|\lambda|^{k\gamma_j}|\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}}} \frac{(\gamma_j+k-r)^{\gamma_j+k-r} \gamma^\gamma}{\gamma_j^{\gamma_j} (Me)^{|\gamma|+k-r}} \leq \\
& \leq e^{C_M} \sum_{r=0}^{\gamma_j} \frac{\gamma_j! \gamma^\gamma |b|^r k^r}{\gamma_j^{\gamma_j} e^{|\gamma|-\gamma_j} r! (\gamma_j+k-r)^{1/2} |\lambda|^{k(\gamma_j-r)+r} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} M^{|\gamma|+k-r}} \leq \\
& \leq e^{C_M} \frac{\gamma_j! \gamma^\gamma \gamma_j! |b|^{\gamma_j} k^{\gamma_j}}{\gamma_j^{\gamma_j} e^{|\gamma|-\gamma_j} |\lambda|^{\gamma_j} (\gamma_j+k)^{1/2} |\lambda|^{\frac{k(k-1)}{2}} M^{|\gamma|+k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Тогда $S_k t^\gamma \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{E}(\varphi)$. Значит, условие 2) теоремы [1.2](#) выполнено.

Все условия теоремы [1.2](#) выполнены. Следовательно, в случае $|\lambda| \geq 1$ оператор T гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$. $\square$

Заметим, что в случае $\lambda = 1$ в следствии [9.4](#) показано, что при выполнении условия γ_1) оператор

$$Tf(x) = \sum_{j=1}^N c_j (D_x^{\alpha_j} f)(x + a^j)$$

гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

§ 10. Хаотические и часто-гиперциклические операторы в $\mathcal{E}(\varphi)$

Используя теорему [1.3](#), докажем следующие утверждения.

Теорема 10.1. Пусть семейство φ удовлетворяет условию γ_1). Тогда оператор частного дифференцирования $Tf(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ для любых $j \in (1; n)$, где $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Доказательство. Непрерывность оператора T в $\mathcal{E}(\varphi)$ и его действие $T : \mathcal{E}(\varphi) \rightarrow \mathcal{E}(\varphi)$ показаны в теореме 1 из статьи [\[89\]](#). Далее применим теорему [1.3](#). В качестве W определим множество мономов x^β при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. По теореме [8.2](#) множество W плотно в $\mathcal{E}(\varphi)$.

В силу α) для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ найдется постоянная $C_M = C_M(m, M) \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая при всех $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ условию

$$\varphi_m(t_1, \dots, t_n) \geq M(|t_1| + \dots + |t_n|) - C_M,$$

поэтому получается оценка

$$e^{\sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n, t_j \neq 0, j \in (1; n), \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \alpha_k \leq \beta_k, k \in (1; n)}} ((\beta_1 - \alpha_1) \ln |t_1| + \dots + (\beta_n - \alpha_n) \ln |t_n| - \varphi_m(t_1, \dots, t_n))} \leq e^{C_M} \frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}}.$$

Тогда $x^\beta \in \mathcal{E}(\varphi)$ для любых $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, поскольку при всех $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_m(x^\beta) &\leq e^{\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, x_j \neq 0, j \in (1; n), \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \alpha_k \leq \beta_k, k \in (1; n)}} ((\beta_1 - \alpha_1) \ln |x_1| + \dots + (\beta_n - \alpha_n) \ln |x_n| - \varphi_m(x_1, \dots, x_n))} \\ &\leq e^{C_M} \frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}} < \infty. \end{aligned}$$

Определим оператор $S : W \rightarrow W$ в виде

$$Sx^\beta = \int_0^{x_j} \xi_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \xi_j^{\beta_j} \cdot \dots \cdot \xi_n^{\beta_n} d\xi_j.$$

Очевидно, условие 3) на W выполнено.

Проверим выполнение условия 1) на множестве W . Действие оператора T на моном x^β при любых $s \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ имеет вид

$$T^s x^\beta = \begin{cases} \frac{\beta_j!}{(\beta_j - s)!} x^\beta \cdot x_j^{-s} & \text{при } s \leq \beta_j, \\ 0 & \text{при } s > \beta_j. \end{cases}$$

Таким образом, при всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\begin{aligned}
 p_m(\sum_{s=1}^{\infty} T^s x^\beta) &\leq \sum_{s=1}^{\beta_j} \frac{\beta_j!}{(\beta_j - s)!} \cdot \\
 &\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, x_j \neq 0, j \in (1;n), \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \alpha_k \leq \beta_k, k \in (1;n)}} \left((\beta_1 - \alpha_1) \ln |x_1| + \dots + (\beta_n - \alpha_n) \ln |x_n| - \varphi_m(x) \right) \\
 &\cdot e^{\dots} \leq \\
 &\leq e^{C_M} \frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}} \sum_{s=1}^{\beta_j} \frac{\beta_j!}{(\beta_j - s)!} < \infty.
 \end{aligned}$$

Условие 1) выполнено.

Проверим выполнение условия 2) на множестве W . Действие оператора S на моном x^β для произвольных $r \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ равно

$$S^r x^\beta = \frac{\beta_j!}{(\beta_j + r)!} x^\beta \cdot x_j^r \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Значит, при всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
 p_m(\sum_{r=1}^{\infty} S^r x^\beta) &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta_j!}{(\beta_j + r)!} \cdot \\
 &\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, x_j \neq 0, j \in (1;n), \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m, \alpha_k \leq \beta_k, k \in (1;n)}} \left((\beta_1 - \alpha_1) \ln |x_1| + \dots + (\beta_j - \alpha_j + r) \ln |x_j| + \dots + (\beta_n - \alpha_n) \ln |x_n| - \varphi_m(x) \right) \\
 &\cdot e^{\dots} \leq \\
 &\leq e^{C_M} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta_j!}{(\beta_j + r)!} \frac{\beta^\beta (\beta_j + r)^{\beta_j + r}}{\beta_j^{\beta_j} (Me)^{|\beta| + r}} \leq \\
 &\leq e^{C_M} \frac{\beta_j! \beta^\beta}{\beta_j^{\beta_j} e^{|\beta| - \beta_j}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{M^{|\beta| + r} (\beta_j + r)^{1/2}} < \infty.
 \end{aligned}$$

Условие 2) выполнено. Следовательно, оператор T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$. $\square$

Теорема 10.2. Пусть для семейства φ выполнено условие γ_1). Тогда дифференциальный оператор $Tf(x) = D_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x)$ для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha \neq (0, 0, \dots, 0)$, где $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Доказательство. Непрерывность оператора T в $\mathcal{E}(\varphi)$ и его действие $T : \mathcal{E}(\varphi) \rightarrow \mathcal{E}(\varphi)$ показаны в теореме 1 из статьи [89]. Докажем утверждение по теореме 1.3. В качестве W определим множество мономов x^β при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. По теореме 8.2 W плотно в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Определим оператор $S : W \rightarrow W$ в виде

$$Sx^\beta = \int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_1} \xi_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{\beta_n} d^{\alpha_1} \xi_1 \dots d^{\alpha_n} \xi_n.$$

Очевидно, условие 3) на W выполнено.

В силу α) для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ найдется постоянная $C_M = C_M(m, M) \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая при всех $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ условию

$$\varphi_m(t_1, \dots, t_n) \geq M(|t_1| + \dots + |t_n|) - C_M,$$

поэтому получается оценка

$$e^{\sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n), \\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^n: |\gamma| \leq m, \gamma_k \leq \beta_k, k \in (1;n)}} ((\beta_1 - \gamma_1) \ln |t_1| + \dots + (\beta_n - \gamma_n) \ln |t_n| - \varphi_m(t_1, \dots, t_n))} \leq e^{C_M} \frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}}.$$

Проверим выполнение условия 1) на множестве W . Действие оператора T на моном x^β для произвольных $s \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ имеет вид

$$T^s x^\beta = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta - s\alpha)!} x^{\beta - s\alpha} & \text{при } s \leq s_0, \\ 0 & \text{при } s > s_0, \end{cases}$$

где $s_0 = \min_{j \in (1;n)} \left[\frac{\beta_j}{\alpha_j} \right]$. Тогда получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} T^s x^\beta = \sum_{s=1}^{s_0} \frac{\beta!}{(\beta - s\alpha)!} x^{\beta - s\alpha}.$$

Значит, при всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} p_m \left(\sum_{s=1}^{\infty} T^s x^\beta \right) &\leq \sum_{s=1}^{s_0} \frac{\beta!}{(\beta - s\alpha)!} \cdot \\ &\cdot e^{\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, x_j \neq 0, j \in (1;n), \\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^n: |\gamma| \leq m, \gamma_k \leq \beta_k, k \in (1;n)}} ((\beta_1 - s\alpha_1 - \gamma_1) \ln |x_1| + \dots + (\beta_n - s\alpha_n - \gamma_n) \ln |x_n| - \varphi_m(x))} \\ &\leq e^{C_M} \sum_{s=1}^{s_0} \frac{\beta!}{(\beta - s\alpha)!} \frac{(\beta - s\alpha)^{(\beta - s\alpha)}}{(Me)^{|\beta| - s|\alpha|}} \leq \\ &\leq e^{C_M} \sum_{s=1}^{s_0} \frac{\beta!}{M^{|\beta| - s|\alpha|} (\beta_1 - s\alpha_1)^{1/2} \dots (\beta_n - s\alpha_n)^{1/2}} < \infty. \end{aligned}$$

Условие 1) выполнено.

Проверим выполнение условия 2) на множестве W . Действие оператора S на моном x^β при любых $r \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ равно

$$S^r x^\beta = \frac{\beta!}{(\beta + r\alpha)!} x^{\beta+r\alpha} \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} S^r x^\beta = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta + r\alpha)!} x^{\beta+r\alpha}.$$

Поэтому при всех $m \in \mathbb{N}$ получим оценку

$$\begin{aligned} p_m \left(\sum_{r=1}^{\infty} S^r x^\beta \right) &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta + r\alpha)!} \cdot e^{\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, x_j \neq 0, j \in (1;n), \\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^n: |\gamma| \leq m, \gamma_k \leq \beta_k, k \in (1;n)}} \left((\beta_1 + r\alpha_1 - \gamma_1) \ln |x_1| + \dots + (\beta_n + r\alpha_n - \gamma_n) \ln |x_n| - \varphi_m(x) \right)} \\ &\leq e^{C_M} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta + r\alpha)!} \frac{(\beta + r\alpha)^{(\beta+r\alpha)}}{(Me)^{|\beta|+r|\alpha|}} \leq \\ &\leq e^{C_M} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta!}{M^{|\beta|+r|\alpha|} (\beta_1 + r\alpha_1)^{1/2} \dots (\beta_n + r\alpha_n)^{1/2}} < \infty. \end{aligned}$$

Условие 2) выполнено. Следовательно, оператор T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$. $\square$

С помощью теоремы 1.3 изучим свойства оператора композиции дифференцирования и сдвига.

Теорема 10.3. Пусть семейство φ удовлетворяет условию γ_1). Тогда оператор $Tf(x) = D_x^\alpha f(x+b) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x+b)$ для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha \neq (0, 0, \dots, 0)$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$, где $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Доказательство. Непрерывность оператора T в $\mathcal{E}(\varphi)$ и его действие $T : \mathcal{E}(\varphi) \rightarrow \mathcal{E}(\varphi)$ показаны в следствии 9.4. Далее применим теорему 1.3. В качестве W определим множество мономов x^β при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. По теореме 8.2 множество W плотно в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Определим операторы $S_k : W \rightarrow W$ для любых $k \in \mathbb{N}$ в виде

$$S_k x^\beta = \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} \left((x - kb)^{\beta + k\alpha} - \sum_{\gamma: |\gamma|=|\beta|+|\alpha|} \frac{(\beta + k\alpha)!}{\gamma!(\beta + k\alpha - \gamma)!} x^{\beta + k\alpha - \gamma} k^\gamma b^\gamma \right).$$

Тогда условие 3) выполнено на W при всех $k \in \mathbb{N}$

$$T^k S_k x^\beta = \frac{(\beta + k\alpha)! \beta!}{\beta! (\beta + k\alpha)!} (x - kb + kb)^\beta = x^\beta.$$

В силу $\alpha)$ для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ найдется постоянная $C_M = C_M(m, M) \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая при всех $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ условию

$$\varphi_m(t_1, \dots, t_n) \geq M(|t_1| + \dots + |t_n|) - C_M,$$

поэтому получается оценка

$$\sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n), \\ e^{\delta \in \mathbb{Z}_+^n: |\delta| \leq m, \delta_s \leq \beta_s, s \in (1;n)}}} \left((\beta_1 - \delta_1) \ln |t_1| + \dots + (\beta_n - \delta_n) \ln |t_n| - \varphi_m(t_1, \dots, t_n) \right) \leq e^{C_M} \frac{\beta^\beta}{(Me)^{|\beta|}}.$$

Проверим выполнение условия 1) на множестве W . Действие оператора T на моном x^β при любых $k \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ имеет вид

$$T^k x^\beta = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} (x + kb)^{\beta - k\alpha} & \text{при } k \leq k_0, \\ 0 & \text{при } k > k_0, \end{cases}$$

где $k_0 = \min_{j \in (1;n)} \left[\frac{\beta_j}{\alpha_j} \right]$. Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} T^k x^\beta = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} (x + kb)^{\beta - k\alpha}.$$

Таким образом, при всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} p_m \left(\sum_{k=1}^{\infty} T^k x^\beta \right) &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} e^{k|b|}. \\ &\cdot e^{\sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n), \\ \delta \in \mathbb{Z}_+^n: |\delta| \leq m, \delta_s \leq \beta_s - k\alpha_s, s \in (1;n)}}} \left((\beta_1 - k\alpha_1 - \delta_1) \ln |t_1| + \dots + (\beta_n - k\alpha_n - \delta_n) \ln |t_n| - \varphi_m(t) \right) \leq \\ &\leq e^{C_M} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\beta!}{(\beta - k\alpha)!} e^{k|b|} \frac{(\beta - k\alpha)^{\beta - k\alpha}}{(Me)^{|\beta| - k|\alpha|}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq e^{C_M} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\beta! e^{k|b|}}{M^{|\beta|-k|\alpha|} (\beta_1 - k\alpha_1)^{1/2} \dots (\beta_n - k\alpha_n)^{1/2}} < \infty.$$

Условие 1) выполнено.

Проверим выполнение условия 2) на множестве W .

Операторы S_k для любых $k \in \mathbb{N}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_k x^\beta &= \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} \left(\sum_{\gamma: |\gamma|=0}^{\beta+|\alpha|} \frac{(\beta + k\alpha)!}{\gamma!(\beta + k\alpha - \gamma)!} x^{\beta+k\alpha-\gamma} k^\gamma b^\gamma - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma: |\gamma|=|\beta|+|\alpha|}^{\beta+|\alpha|} \frac{(\beta + k\alpha)!}{\gamma!(\beta + k\alpha - \gamma)!} x^{\beta+k\alpha-\gamma} k^\gamma b^\gamma \right) = \\ &= \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} \sum_{\gamma: |\gamma|=0}^{\beta+|\alpha|-1} \frac{(\beta + k\alpha)!}{\gamma!(\beta + k\alpha - \gamma)!} x^{\beta+k\alpha-\gamma} k^\gamma b^\gamma. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} \sum_{\gamma: |\gamma|=0}^{\beta+|\alpha|-1} \frac{(\beta + k\alpha)!}{\gamma!(\beta + k\alpha - \gamma)!} x^{\beta+k\alpha-\gamma} k^\gamma b^\gamma.$$

Значит, при всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} p_m \left(\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^\beta \right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta!}{(\beta + k\alpha)!} \sum_{\gamma: |\gamma|=0}^{\beta+|\alpha|-1} \frac{(\beta + k\alpha)! k^\gamma b^\gamma}{\gamma!(\beta + k\alpha - \gamma)!} \\ &\quad \cdot e^{\sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n, t_j \neq 0, j \in (1;n), \\ \delta \in \mathbb{Z}_+^n: |\delta| \leq m, \delta_s \leq \beta_s - \gamma_s, s \in (1;n)}} \left((\beta_1 + k\alpha_1 - \gamma_1 - \delta_1) \ln |t_1| + \dots + (\beta_n + k\alpha_n - \gamma_n - \delta_n) \ln |t_n| - \varphi_m(t) \right)} \leq \\ &\leq e^{C_M} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\gamma: |\gamma|=0}^{\beta+|\alpha|-1} \frac{\beta! k^\gamma b^\gamma}{\gamma!(\beta + k\alpha - \gamma)!} \frac{(\beta + k\alpha - \gamma)^{\beta+k\alpha-\gamma}}{(Me)^{|\beta|+k|\alpha|-|\gamma|}} \leq \\ &\leq e^{C_M} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\gamma: |\gamma|=0}^{\beta+|\alpha|-1} \frac{\beta! k^\gamma b^\gamma}{\gamma! (\beta_1 + k\alpha_1 - \gamma_1)^{1/2} \dots (\beta_n + k\alpha_n - \gamma_n)^{1/2} M^{|\beta|+k|\alpha|-|\gamma|}} \leq \\ &\leq e^{C_M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(|\beta| + |\alpha|) \beta! k^{|\beta|+|\alpha|-1} b^{|\beta|+|\alpha|-1}}{\gamma! M^{k(|\alpha|-1)} (\beta_1 + k\alpha_1)^{1/2} \dots (\beta_n + k\alpha_n)^{1/2}} < \infty. \end{aligned}$$

Условие 2) выполнено. Следовательно, оператор T хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{E}(\varphi)$. $\square$

Глава 4. Свойства обобщенного оператора Данкла

§ 11. Динамические свойства обобщенного оператора Данкла в $H(\mathbb{C})$

Далее рассмотрим пространство целых функций $H(\mathbb{C})$, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Обозначим через $H^*(\mathbb{C})$ сопряженное пространство, а через $P_{\mathbb{C}}$ — пространство целых функций экспоненциального типа. Обозначим в виде $\text{span } E$ линейную оболочку множества E в $H(\mathbb{C})$. Определим топологию в $H(\mathbb{C})$ с помощью системы норм

$$p_s(f) = \sup_{z \in K_s} |f(z)|, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где K_s — компакты в $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью такие, что $K_s \subset K_{s+1}$, $s \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{s=1}^{\infty} K_s = \mathbb{C}$. По аппроксимационной теореме Рунге [87, гл. 4, § 2], [116, п. 23] система полиномов плотна в $H(\mathbb{C})$, значит, пространство $H(\mathbb{C})$ сепарабельно. Хорошо известно, что $H(\mathbb{C})$ является пространством Фреше. Отметим, что $H(\mathbb{C})$ инвариантно относительно дифференцирования и сдвига.

Обобщенный оператор Данкла для любых функций f из пространства $H(\mathbb{C})$ определяется по формуле:

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f(\alpha_j z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где число $c = \text{const} > 0$, $c \in \mathbb{R}_+$ и параметр $m = \text{const} \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ — некоторые заданные величины, а коэффициенты α_j имеют вид

$$\alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}}, \quad j \in (0; m-1).$$

Тогда в зависимости от рассматриваемых значений c и m получаются различные операторы Данкла. Оператор Данкла определяется как его частный случай при условии $m = 2$:

$$\Lambda_0 f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} (f(z) - f(-z)).$$

Очевидно, обобщенный оператор Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$ линейный, а также он непрерывный, как показано в теореме 11.1 ниже.

Действие оператора Λ на моном z^n при любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$\Lambda^k z^n = \begin{cases} q(n)q(n-1)\dots q(n-k+1)z^{n-k} & \text{при } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n, \end{cases}$$

где через $q(k)$ обозначим полученные коэффициенты

$$q(n) = n + c \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(n+1)}{m}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда находим результат его действия для любых $k \in \mathbb{N}$ на целую функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

$$\Lambda^k f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n q(n)q(n-1)\dots q(n-k+1)z^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Изучим некоторые свойства функции q .

Лемма 11.1. *Функция*

$$q(z) = z + c \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(z+1)}{m}}$$

при произвольных $k \in \mathbb{Z}$ принимает значения

$$q(k) = \begin{cases} k + cm & \text{при } k = lm - 1, \text{ где } l \in \mathbb{Z}, \\ k & \text{при } k \neq lm - 1, \text{ где } l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда справедлива формула

$$k! < q(1)q(2)\dots q(k-1)q(k) < \frac{(k+cm)!}{(cm)!}.$$

Доказательство. Отметим, что число $c = \text{const} > 0$, $c \in \mathbb{R}_+$ и параметр $m = \text{const} \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ — некоторые заданные величины.

Сначала рассмотрим выражение

$$s(k) = \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}.$$

Вычислим его значение как конечную сумму первых m членов геометрической прогрессии:

$$s(k) = \frac{e^{2\pi i(k+1)} - 1}{e^{\frac{2\pi i(k+1)}{m}} - 1} = \frac{-ie^{-\frac{\pi i(k+1)}{m}}(e^{2\pi i(k+1)} - 1)}{-i(e^{\frac{\pi i(k+1)}{m}} - e^{-\frac{\pi i(k+1)}{m}})} = \frac{-i(e^{\frac{2\pi i(k+1)(m-1/2)}{m}} - e^{-\frac{\pi i(k+1)}{m}})}{-i(e^{\frac{\pi i(k+1)}{m}} - e^{-\frac{\pi i(k+1)}{m}})}.$$

Используя формулу Эйлера, получим соотношение:

$$\begin{aligned} s(k) &= \frac{-i \left(\cos \frac{2\pi(k+1)(m-1/2)}{m} - \cos \frac{\pi(k+1)}{m} \right) + \left(\sin \frac{2\pi(k+1)(m-1/2)}{m} + \sin \frac{\pi(k+1)}{m} \right)}{2 \sin \frac{\pi(k+1)}{m}} = \\ &= \frac{\sin \pi(k+1)}{\sin \frac{\pi(k+1)}{m}} \left(\cos \frac{\pi(k+1)(m-1)}{m} - i \sin \frac{\pi(k+1)(m-1)}{m} \right). \end{aligned}$$

Для последней суммы возможны несколько случаев.

Если $\sin \frac{\pi(k+1)}{m} = 0$, то числа k имеют вид $k = ml - 1$, $l \in \mathbb{Z}$. Тогда справедлива формула

$$s(k) = \sum_{j=0}^{m-1} e^{2\pi i l j} = \sum_{j=0}^{m-1} 1 = m, \quad q(k) = k + cm.$$

Если $\sin \frac{\pi(k+1)}{m} \neq 0$, то сумма равна

$$s(k) = \frac{\sin \pi(k+1)}{\sin \frac{\pi(k+1)}{m}} \left(\cos \frac{\pi(k+1)(m-1)}{m} - i \sin \frac{\pi(k+1)(m-1)}{m} \right) = 0, \quad q(k) = k.$$

Итак, функция q при произвольных $k \in \mathbb{Z}$ представляется в виде

$$q(k) = \begin{cases} k + cm & \text{при } k = lm - 1, \text{ где } l \in \mathbb{Z}, \\ k & \text{при } k \neq lm - 1, \text{ где } l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ввиду того, что при фиксированном параметре m для всех целых k равенство $k = lm - 1$ не выполняется одновременно, то справедливы строгие оценки:

$$q(1)q(2) \dots q(k) > 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k = k!,$$

$$q(1)q(2) \dots q(k) < (cm + 1) \cdot (cm + 2) \cdot \dots \cdot (cm + k) = \frac{(cm + k)!}{(cm)!}.$$

Отсюда получается выражение

$$k! < q(1)q(2) \dots q(k) < \frac{(k + cm)!}{(cm)!}.$$

□

Отметим, что значение $q(k)$ при условии $k = 0$ равно

$$q(0) = cs(0) = c \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j}{m}} = \frac{\sin \pi}{\sin \frac{\pi}{m}} \left(\cos \frac{\pi(m-1)}{m} - i \sin \frac{\pi(m-1)}{m} \right) = 0.$$

Значит, для функции q верны формулы $q(0) = 0$ и $q(k) \neq 0$ при $k \in \mathbb{N}$.

Как показано в статье [78, с. 60], функцию

$$q(z) = z + c \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(z+1)}{m}}$$

в силу изоморфности пространств $H^*(\mathbb{C})$ и $H_0(\{\infty\})$ можно представить в виде

$$q(z) = \hat{F}_0(z) = F_{0\xi}(e^{\xi z}),$$

где функционал $F_0 \in H^*(\mathbb{C})$ такой, что ассоциированная к нему функция $g_0 \in H_0(\{\infty\})$ имеет вид

$$g_0(z) = \frac{1}{z^2} + c \sum_{j=0}^{m-1} \frac{e^{\frac{2\pi i j}{m}(k+1)}}{z - \frac{2\pi i j}{m}}.$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 11.2. Действие обобщенного оператора Данкла Λ на функцию f в $H(\mathbb{C})$ можно представить в виде действия функционала $F_0 \in H^*(\mathbb{C})$ на функцию f по формуле

$$\Lambda f(z) = \frac{1}{z} F_{0\xi}(f(e^{\xi})),$$

где функционал F_0 такой, что ассоциированная к нему функция имеет вид

$$g_0(z) = \frac{1}{z^2} + c \sum_{j=0}^{m-1} \frac{e^{\frac{2\pi i j}{m}(k+1)}}{z - \frac{2\pi i j}{m}}.$$

Доказательство. Возьмем целую функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. В силу приведенной выше формулы действие оператора Λ на функцию f можно записать в следующем виде:

$$\Lambda f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q(n) z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \hat{F}_0(n) z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n F_{0\xi}(e^{\xi n}) z^{n-1},$$

где функционал $F_0 \in H^*(\mathbb{C})$ определяется таким, что ассоциированная к нему функция имеет вид

$$g_0(z) = \frac{1}{z^2} + c \sum_{j=0}^{m-1} \frac{e^{\frac{2\pi i j}{m}(k+1)}}{z - \frac{2\pi i j}{m}}.$$

По теореме 11.1 оператор Λ непрерывен в $H(\mathbb{C})$, тогда $\Lambda f(z) \in H(\mathbb{C})$ и рассматриваемый ряд сходится, поэтому получим соотношение:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n F_{0\xi}(e^{\xi n}) z^{n-1} = F_{0\xi}\left(\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (e^{\xi} z)^n\right) = \frac{1}{z} F_{0\xi}(f(e^{\xi} z)).$$

Следовательно, действие оператора Λ на функцию f в $H(\mathbb{C})$ равносильно действию на нее функционала $F_0 \in H^*(\mathbb{C})$ по формуле

$$\Lambda f(z) = \frac{1}{z} F_{0\xi}(f(e^{\xi} z)).$$

□

Для обобщенного оператора Данкла справедливы следующие утверждения.

Теорема 11.1. *Обобщенный оператор Данкла Λ отображает непрерывно пространство целых функций $H(\mathbb{C})$ в пространство $H(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую целую функцию $f \in H(\mathbb{C})$, положим, что $f(0) = 1$. Введем обозначение $R_s = \sup_{z \in K_s} |z|$, $s \in \mathbb{N}$. Образ функции имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda f(z) &= f'(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j (f(\alpha_j z) - 1) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j = \\ &= f'(z) + c \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \frac{(f(\alpha_j z) - f(0))}{z} = f'(z) + c \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j^2 \int_0^1 f'(\alpha_j z t) dt. \end{aligned}$$

По интегральной формуле Коши для производной функции выполняется оценка

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad p_s(f') \leq \frac{p_s(f)}{R_s}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{N} \quad p_s(\Lambda f(z)) &\leq p_s(f') + c \sum_{j=0}^{m-1} |\alpha_j|^2 p_s(f') \leq \\ &\leq (cm + 1) p_s(f') \leq (cm + 1) \frac{p_s(f)}{R_s} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор Λ непрерывно отображает $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$.

□

Теорема 11.2. *Обобщенный оператор Данкла Λ гиперциклический в $H(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Очевидно, оператор Λ линейный в $H(\mathbb{C})$, его непрерывность показана в теореме 11.1. Проверим условия 1)–3) теоремы 1.2.

Положим $X_0 = Y_0 = \text{span}\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Множества X_0 и Y_0 плотны в $H(\mathbb{C})$. Введем обозначение $R_s = \sup_{z \in K_s} |z|$, $s \in \mathbb{N}$. Действие оператора Λ на моном z^n для любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$\Lambda^k z^n = \begin{cases} q(n)q(n-1) \dots q(n-k+1)z^{n-k} & \text{при } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n; \end{cases}$$

где через $q(k)$ обозначим коэффициент $q(k) = k + c \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}$.

Определим оператор $S : Y_0 \rightarrow H(\mathbb{C})$ в виде

$$S^k z^t = \frac{1}{q(t+k)q(t+k-1) \dots q(t+1)} z^{t+k}, \quad k, t \in \mathbb{N}.$$

Положим $S_k = S^k$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, справедливо условие 3) на Y_0 .

Проверим выполнение условия 1) на множестве X_0 . Для произвольных $s \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ при условии $k > n$, где $k \in \mathbb{N}$, $p_s(\Lambda^k z^n) = 0$. Таким образом, условие 1) выполнено.

Проверим условие 2) на множестве Y_0 . Тогда при любых $s \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_s(S^k z^n) &= \frac{1}{|q(n+k)q(n+k-1) \dots q(n+1)|} \sup_{z \in K_s} |z|^{n+k} \leq \\ &\leq \frac{n!}{(n+k)!} R_s^{n+k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

В силу этого условие 2) верно. Итак, для Λ справедливы все требования теоремы 1.2. Следовательно, оператор Λ гиперциклический в $H(\mathbb{C})$. $\square$

Теорема 11.3. *Обобщенный оператор Данкла Λ хаотический и частогиперциклический в $H(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Непрерывность оператора $\Lambda : H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$ показана в теореме 11.1. Проверим условия 1)–3) теоремы 1.3. Введем множество

$W = \text{span}\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Оно плотно в $H(\mathbb{C})$. Обозначим $R_s = \sup_{z \in K_s} |z|$, $s \in \mathbb{N}$. Действие оператора Λ на моном z^n при любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$\Lambda^k z^n = \begin{cases} q(n)q(n-1) \dots q(n-k+1)z^{n-k} & \text{при } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n; \end{cases}$$

где через $q(k)$ обозначим коэффициент $q(k) = k + c \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}$.

Определим оператор $S : W \rightarrow W$ в виде

$$S^k z^t = \frac{1}{q(t+k)q(t+k-1)\dots q(t+1)} z^{t+k}, \quad k, t \in \mathbb{N}.$$

Положим $S_k = S^k$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, условие 3) на W выполнено.

Проверим справедливость условия 1) на W . Тогда при всех $s \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{z \in K_s} |\Lambda^k z^n| &= \sup_{z \in K_s} |z|^n + \sum_{k=1}^n |q(n)q(n-1)\dots q(n-k+1)| \sup_{z \in K_s} |z|^{n-k} = \\ &= R_s^n + \sum_{k=1}^n |q(n)q(n-1)\dots q(n-k+1)R_s^{n-k}| < \infty, \end{aligned}$$

поскольку числа s и n фиксированы. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^k z^n$ безусловно сходится в $H(\mathbb{C})$. Условие 1) выполнено.

Проверим условие 2) на W . Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{z \in K_s} |S^k z^n| &= \sup_{z \in K_s} |z|^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|q(n+k)q(n+k-1)\dots q(n+1)|} \sup_{z \in K_s} |z|^{n+k} \leq \\ &\leq R_s^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} R_s^{n+k} < \infty. \end{aligned}$$

Итак, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} S^k z^n$ безусловно сходится в $H(\mathbb{C})$. Условие 2) верно.

Следовательно, оператор Λ хаотический и часто-гиперциклический в $H(\mathbb{C})$. □

§ 12. Динамические свойства обобщенного оператора Данкла в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$

Обозначим через $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$ пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ при $n = 1$ с условиями $i_1) - i_4)$ на семейство φ и для всех $m \in \mathbb{N}$ $\varphi_m(z) = \varphi_m(|z|)$, где $z \in \mathbb{C}$. Определим обобщенный оператор Данкла Λ для любых функций f из пространства $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$ по формуле

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f(\alpha_j z),$$

где число $c = \text{const} > 0$, $c \in \mathbb{R}_+$ и параметр $m = \text{const} \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ — некоторые заданные величины, а коэффициенты α_j имеют вид

$$\alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}}, \quad j \in (0; m-1).$$

Для него справедливы следующие утверждения.

Теорема 12.1. *Обобщенный оператор Данкла Λ в пространстве $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$ непрерывен и отображает его в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Возьмем некоторую функцию $f \in \mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$, положим, что $f(0) = 1$. В силу аналитичности функции f $\Lambda f \in H(\mathbb{C})$.

Используя интегральную формулу Коши, получим равенство

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{\Pi_z} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2},$$

где $R > 0$ и $r \geq R$ — некоторые постоянные, z — фиксированная точка из некоторого ограниченного круга $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, а ξ — точка из окружности $\Pi_z = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| = r, r > 0\}$. Далее найдем оценку сверху:

$$\left| \frac{d}{dz} f(z) \right| \leq \frac{r + R}{r^2} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)| \leq \frac{2}{r} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)|.$$

Так как для всех $s \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$ $p_s(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}} (|f(z)| e^{-\varphi_s(z)})$, где $f \in \mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$, то

$$|f(z)| \leq p_{s+1}(f) e^{\varphi_{s+1}(z)}.$$

В силу $i_4)$ при всех $s \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \left(\exp(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{s+1}(\xi)) \exp(-\varphi_s(z)) \right) \leq \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}} (\varphi_{s+1}(z) - \varphi_s(z)) \right) \leq e^{c_s}.$$

Для любых $s \in \mathbb{N}$ получим

$$p_s\left(\frac{d}{dz}f(z)\right) \leq \frac{2}{r}p_{s+1}(f) \sup_{z \in \mathbb{C}} \left(\exp(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{s+1}(\xi)) \exp(-\varphi_s(z)) \right) \leq \frac{2e^{c_s}}{r}p_{s+1}(f) < \infty.$$

Образ функции при любых $f \in \mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda f(z) &= \frac{d}{dz}f(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j (f(\alpha_j z) - 1) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j = \\ &= \frac{d}{dz}f(z) + c \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \frac{(f(\alpha_j z) - f(0))}{z} = \frac{d}{dz}f(z) + c \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j^2 \int_0^1 \frac{d}{dz}f(\alpha_j z t) dt. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_s(z) = \varphi_s(|z|)$ для всех $s \in \mathbb{N}$, где $z \in \mathbb{C}$, то при всех $s \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} p_s(\Lambda f(z)) &\leq p_s\left(\frac{d}{dz}f\right) + c \sum_{j=0}^{m-1} |\alpha_j|^2 p_s\left(\frac{d}{dz}f(\alpha_j z)\right) \leq \\ &\leq 2\frac{e^{c_s}}{r}p_{s+1}(f) + c \sum_{j=0}^{m-1} 2\frac{e^{c_s}}{r}p_{s+1}(f) \leq 2(ct + 1)\frac{e^{c_s}}{r}p_{s+1}(f) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор Λ непрерывно отображает $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$ в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$. $\square$

Теорема 12.2. *Обобщенный оператор Данкла Λ гиперциклический в пространстве $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Как показано в теореме [12.1](#), оператор Λ линейный и непрерывный в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$. Проверим условия 1)–3) теоремы [1.2](#). Определим множества $X_0 = Y_0 = \text{span}\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. По лемме [4.1](#) X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.

Действие оператора Λ на моном z^n для любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид:

$$\Lambda^k z^n = \begin{cases} q(n)q(n-1) \dots q(n-k+1)z^{n-k} & \text{при } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n; \end{cases}$$

где через $q(k)$ обозначим коэффициент $q(k) = k + c \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}$.

Определим оператор $S : Y_0 \rightarrow \mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$ в виде

$$S^k z^t = \frac{1}{q(t+k)q(t+k-1) \dots q(t+1)} z^{t+k}, \quad k, t \in \mathbb{N}.$$

Положим $S_k = S^k$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, справедливо условие 3) на Y_0 .

Проверим выполнение условия 1) на множестве X_0 . Для произвольных $s \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ при условии $k > n$, где $k \in \mathbb{N}$, $p_s(\Lambda^k z^n) = 0$. Таким образом, условие 1) выполнено.

Проверим условие 2) на множестве Y_0 . Из условия i_1) следует, что при всех $s \in \mathbb{N}$ для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ существует постоянная $C_M \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\varphi_s(z) \geq M|z| - C_M$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Поэтому для всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется соотношение

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} (n \ln |z| - \varphi_s(z)) \leq e^{C_M} \frac{n^n}{(Me)^n}.$$

Тогда для любых $s \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ следует, что

$$p_s(S^k z^n) \leq \frac{n!}{(n+k)!} e^{\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} ((n+k) \ln |z| - \varphi_s(z))} \leq \frac{e^{C_M} n!}{(n+k)^{(1/2)} M^{k(n+1)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

В силу этого условие 2) верно, поскольку по условию число M можно взять сколь угодно большим. Итак, для оператора Λ справедливы все требования теоремы 1.2. Следовательно, Λ гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$. $\square$

Теорема 12.3. *Обобщенный оператор Данкла Λ хаотический и часто-гиперциклический в пространстве $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Непрерывность оператора Λ в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$ показана в теореме 12.1. Проверим условия 1)–3) теоремы 1.3. В качестве множества W определим линейную оболочку множества мономов $W = \text{span}\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. По лемме 4.1 W плотно в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.

Действие оператора Λ на моном z^n при произвольных $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид:

$$\Lambda^k z^n = \begin{cases} q(n)q(n-1) \dots q(n-k+1) z^{n-k} & \text{при } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n; \end{cases}$$

где через $q(k)$ обозначим коэффициент $q(k) = k + c \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}$.

Определим оператор $S : W \rightarrow W$ в виде

$$S^k z^t = \frac{1}{q(t+k)q(t+k-1) \dots q(t+1)} z^{t+k}, \quad k, t \in \mathbb{N}.$$

Положим $S_k = S^k$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, условие 3) на W выполнено.

Проверим справедливость условия 1) на W . Из условия i_1) следует, что при всех $s \in \mathbb{N}$ для любого сколь угодно большого $M \in \mathbb{R}_+$ существует постоянная $C_M \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\varphi_s(z) \geq M|z| - C_M$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Поэтому для произвольных $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется соотношение

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \left(n \ln |z| - \varphi_s(z) \right) \leq e^{C_M} \frac{n^n}{(Me)^n}.$$

Тогда при всех $s \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ получим, что

$$\begin{aligned} p_s \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\Lambda^k z^n| \right) &\leq \sum_{k=0}^n \sup_{z \in \mathbb{C}} (|\Lambda^k z^n| e^{-\varphi_s(z)}) \leq e^{C_M} \frac{n^n}{(Me)^n} + \\ &+ e^{C_M} \sum_{k=1}^n |q(n)q(n-1) \dots q(n-k+1)| \frac{(n-k)^{n-k}}{(Me)^{n-k}} < \infty, \end{aligned}$$

поскольку числа s и n фиксированы. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^k z^n$ безусловно сходится на W . Условие 1) выполнено.

Проверим условие 2) на W . Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} p_s \left(\sum_{k=0}^{\infty} |S^k z^n| \right) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{z \in \mathbb{C}} (|S^k z^n| e^{-\varphi_s(z)}) \leq \\ &\leq e^{C_M} \frac{n^n}{(Me)^n} + \frac{e^{C_M} n!}{M^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M^k (n+k)^{1/2}} < \infty. \end{aligned}$$

Итак, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} S^k z^n$ безусловно сходится на W , поскольку по условию число M можно взять сколь угодно большим. Условие 2) верно. Следовательно, оператор Λ хаотический и часто-гиперциклический в $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$. $\square$

Заключение

В работе изучены свойства гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности классических линейных непрерывных операторов в следующих пространствах:

пространство $H(\Omega)$ аналитических в Ω функций;
 весовое пространство $\mathcal{F}(\varphi)$ целых в $\mathbb{C}^n$ функций;
 весовое пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Показано, что линейный непрерывный оператор в пространстве $H(\Omega)$, коммутирующий с оператором дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим (теорема [2.6](#)). Также он хаотический (теорема [3.5](#)) и часто-гиперциклический (теорема [3.6](#)) в $H(\Omega)$.
2. Изучены свойства плотности полиномов, полноты системы экспонент в пространстве $\mathcal{F}(\varphi)$, доказана гиперцикличность операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций в $\mathcal{F}(\varphi)$. Линейный непрерывный оператор в $\mathcal{F}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не совпадающий со скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим в этом пространстве (теорема [5.5](#)). Доказано, что рассматриваемый оператор обладает свойствами хаотичности (теорема [6.1](#)) и часто-гиперцикличности (теорема [6.2](#)) в $\mathcal{F}(\varphi)$.
3. В пространстве $\mathcal{E}(\varphi)$ рассмотрено свойство гиперцикличности операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций. Показано, что линейный непрерывный оператор в $\mathcal{E}(\varphi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественному отображению, является гиперциклическим в этом пространстве (теорема [9.1](#)). Приведены теоремы о хаотичности и

- часто-гиперцикличности оператора дифференцирования (теорема 10.2) и оператора композиции дифференцирования и сдвига (теорема 10.3) в $\mathcal{E}(\varphi)$.
4. Изучены некоторые свойства обобщенного оператора Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$ целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, а именно приведен вид функции, получаемой при действии этого оператора на функцию из $H(\mathbb{C})$, показано, что действие обобщенного оператора Данкла на целую функцию равносильно действию на нее функционала определенного вида. Доказаны утверждения, что обобщенный оператор Данкла является гиперциклическим (теорема 11.2), а также хаотическим и часто-гиперциклическим (теорема 11.3) в $H(\mathbb{C})$. Показано, что обобщенный оператор Данкла обладает свойствами гиперцикличности (теорема 12.2), хаотичности и часто-гиперцикличности (теорема 12.3) в пространстве $\mathcal{F}(\varphi, \mathbb{C})$.

Список литературы

- [1] Agneessens, K. Frequently hypercyclic random vectors / K. Agneessens // Proc. Amer. Math. Soc. — 2023. — Vol. 151, no. 3. — P. 1103–1117.
- [2] Ansari, S.I. Hypercyclic and cyclic vectors / S.I. Ansari // Jour. of Funct. Anal. — 1995. — Vol. 128, no. 2. — P. 374–383.
- [3] Ansari, M. Dynamics of unbounded linear operators / M. Ansari // Jour. of Math. Anal. and Appl. — 2024. — Vol. 531, no. 2. — P. 1–12.
- [4] Aron, R. Hypercyclic differentiation operators / R. Aron, J. Bés // Function Spaces, Contemporary Mathematics, Am. Math. Soc., Providence. — 1999. — Vol. 232. — P. 39–46.
- [5] Aron, R. On universal functions / R. Aron, D. Markose // Jour. Korean Math. Soc. — 2004. — Vol. 41, no. 1. — P. 65–76.
- [6] Banks, J. On Devaney’s definition of chaos / J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey // Amer. Math. Monthly. — 1992. — Vol. 99, no. 4. — P. 332–334.
- [7] Baranov, A.D. Hypercyclic Toeplitz operators / A.D. Baranov, A.A. Lishanskii // B: Results in Mathematics. — 2016. — Vol. 70, no. 3–4. — P. 337–347.
- [8] Bayart, F. Two problems on weighted shifts in linear dynamics / F. Bayart // Proc. of the Amer. Math. Soc. — 2021. — Vol. 149, no. 2. — P. 5255–5266.
- [9] Bayart, F. Frequently hypercyclic operators / F. Bayart, S. Grivaux // Trans. of the Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol. 358, no. 11. — P. 5083–5117.
- [10] Bayart, F. Dynamics of linear operators / F. Bayart, É. Matheron. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — 322 p.

- [11] Bayart, F. Difference sets and frequently hypercyclic weighted shifts / F. Bayart, I.Z. Ruzsa // *Ergod. Theory Dynam. Syst.* — 2015. — Vol. 35, no. 3. — P. 691–709.
- [12] Bel'tran, M.J. Dynamics of differentiation and integration operators on weighted spaces of entire functions / M.J. Bel'tran // *Stud. Mathem.* — 2014. — Vol. 221, no. 1. — P. 35–60.
- [13] Bensaid, I.F.Z. Hypercyclicity of operators that λ -commute with the differentiation operator on the space of entire functions / I.F.Z. Bensaid, M. González, F. León-Saavedra, M.P. Romero de la Rosa // *Jour. of Funct. Anal.* — 2022. — Vol. 282, no. 8. — P. 1–23.
- [14] Bernal-Gonzalez, L. Compositional frequent hypercyclicity on weighted Dirichlet spaces / L. Bernal-Gonzalez, A. Bonilla // *Bull. of the Belgian Math. Soc. of Simon Stevin.* — 2010. — Vol. 17, no. 1. — P. 1–11.
- [15] Bés, J. Denseness of hypercyclic operators on a Fréchet space / J. Bés, K.C. Chan // *Houston Jour. of Math.* — 2003. — Vol. 29, no. 1. — P. 195–206.
- [16] Bés, J. Recurrence properties of hypercyclic operators / J. Bés, Q. Menet, A. Peris, Y. Puig // *Mathem. Annal.* — 2016. — Vol. 366, no. 1–2. — P. 545–572.
- [17] Bés, J. Hereditarily hypercyclic operators / J. Bés, A. Peris // *Jour. of Funct. Anal.* — 1999. — Vol. 167, no. 1. — P. 94–112.
- [18] Betancor, J.J. Hypercyclic and chaotic convolution operators in Chébli–Triméche hypergroups / J.J. Betancor, J.D. Betancor, J.M. Méndez // *Rocky Mountain Jour. Math.* — 2004. — Vol. 34, no. 4. — P. 1207–1237.
- [19] Betancor, J.J. Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operators on $\mathbb{C}$ / J.J. Betancor, M. Sifi, K. Triméche // *Acta Math. Hungar.* — 2005. — Vol. 106, no. 1–2. — P. 101–116.
- [20] Birkhoff, G.D. Demonstration d'un theoreme elementaire sur les fonctions entieres / G.D. Birkhoff // *Compt. Rend. Acad. Scien.* — 1929. — Vol. 189. — P. 473–475.

- [21] Bonet, J. Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions / J. Bonet // Math. Zeit. — 2009. — Vol. 261, no. 3. — P. 649–657.
- [22] Bonet, J. Chaos of the differentiation operator on weighted Banach spaces of entire functions / J. Bonet, A. Bonilla // Compl. Anal. Oper. Theory. — 2013. — Vol. 7, no. 1. — P. 33–42.
- [23] Bonet, J. Dynamics of shift operators on non-metrizable sequence spaces / J. Bonet, T. Kalmes, A. Peris // Revista Mat. Iberoamer. — 2021. — Vol. 37, no. 6. — P. 2373–2397.
- [24] Bonet, J. Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces / J. Bonet, A. Peris // Jour. of Funct. Anal. — 1998. — Vol. 159, no. 2. — P. 587–595.
- [25] Bongiorno, D. Rolewicz-type chaotic operators / D. Bongiorno, U.B. Darji, L. Di Piazza // Jour. Math. Anal. Appl. — 2015. — Vol. 431, no. 1. — P. 518–528.
- [26] Bonilla, A. On a theorem of Godefroy and Shapiro / A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann // Integr. Equat. Oper. Theory. — 2006. — Vol. 56, no. 2. — P. 151–162.
- [27] Bonilla, A. Frequently hypercyclic operators and vectors / A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann // Ergod. Theor. and Dynam. Syst. — 2007. — Vol. 27, no. 2. — P. 383–404.
- [28] Chan, K.C. Hypercyclic shift factorizations for bilateral weighted shift operators / K.C. Chan, R. Sanders // Jour. of Oper. Theory. — 2021. — Vol. 85, no. 2. — P. 323–345.
- [29] Chan, K.C. Hypercyclic shift factorizations for unilateral weighted backward shift operators / K.C. Chan, R. Sanders // Jour. of Oper. Theory. — 2018. — Vol. 80, no. 2. — P. 349–374.
- [30] Charpentier, S. Chaos and frequent hypercyclicity for weighted shifts / S. Charpentier, K.-G. Grosse-Erdmann, Q. Menet // Ergod. Theory Dynam. Syst. — 2019. — Vol. 41, no. 12. — P. 3634–3670.

- [31] Darji, U.B. Chaos and frequent hypercyclicity for composition operators / U.B. Darji, B. Pires // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2020. — Vol. 64, no. 3. — P. 513–531.
- [32] De Jeu, M.F.E. The Dunkl transform / M.F.E. De Jeu // Intern. Math. Res. Not. — 1993. — Vol. 113, no. 1. — P. 147–162.
- [33] Devaney, R.L. An introduction to chaotic dynamical systems / R.L. Devaney. — New York: Addison-Wesley Publ. Comp., 1989. — 336 p.
- [34] Dunkl, C.F. Differential-difference operators associated with reflections groups / C.F. Dunkl // Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 311, no. 1. — P. 167–183.
- [35] Dunkl, C.F. Integral kernels with reflection group invariance / C.F. Dunkl // Canad. Jour. Math. — 1991. — Vol. 43, no. 6. — P. 1213–1227.
- [36] Ehrenpreis, L. Fourier analysis in several complex variables / L. Ehrenpreis. — New York: Wiley-Interscience publ., 1970. — 506 p.
- [37] El Hamma, M. Lipschitz functions class for the generalized Dunkl transform / M. El Hamma, A. Laamimi, H. El Harrak // Filomat. — 2023. — Vol. 37, no. 8. — P. 2377–2385.
- [38] Emamirad, H. Chaotic weighted shifts in Bargmann space / H. Emamirad, G.S. Heshmati // Jour. of Math. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 308, no. 1. — P. 36–46.
- [39] Gethner, R.M. Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions / R.M. Gethner, J. Shapiro // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 100, no. 2. — P. 281–288.
- [40] Godefroy, G. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds / G. Godefroy, J.H. Shapiro // Jour. of Funct. Anal. — 1991. — Vol. 98, no. 2. — P. 229–269.
- [41] Grivaux, S. A new class of frequently hypercyclic operators / S. Grivaux // Indiana Univ. Math. Jour. — 2011. — Vol. 60, no. 4. — P. 1177–1202.

- [42] Grivaux, S. Linear dynamical systems on Hilbert spaces: typical properties and explicit examples / S. Grivaux, É. Matheron, Q. Menet. — Lille: University Lille, 2016. — 126 p.
- [43] Grosse-Erdmann, K.-G. Frequently hypercyclic bilateral shifts / K.-G. Grosse-Erdmann // Glasgow Math. Jour. — 2019. — Vol. 61, no. 2. — P. 271–286.
- [44] Grosse-Erdmann, K.-G. Linear chaos / K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris. — London: Springer, 2011. — 388 p.
- [45] Grosse-Erdmann, K.-G. Universal families and hypercyclic operators / K.-G. Grosse-Erdmann // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36, no. 3. — P. 345–381.
- [46] Gulisashvili, A. Linear chaos in the unforced quantum harmonic oscillator / A. Gulisashvili, C.R. MacCluer // Jour. of Dynam. Syst., Measurem. and Contr. — 1996. — Vol. 118, no. 2. — P. 337–338.
- [47] Haslinger, F. Weighted spaces of entire functions / F. Haslinger // Indiana Univer. Mathem. Jour. — 1986. — Vol. 35, no. 1. — P. 193–208.
- [48] Hirsch, M.W. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos / M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney. — New York: Elsevier Inc., 2013. — 418 p.
- [49] Kalmes, T. Dynamics of weighted composition operators on function spaces defined by local properties / T. Kalmes // Stud. Mathem. — 2019. — Vol. 249, no. 3. — P. 259–301.
- [50] Kitai, C. Invariant closed sets for linear operators. Ph.D Thesis / C. Kitai. — Toronto: University of Toronto, 1982. — 110 p.
- [51] Komatsu, H. Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces / H. Komatsu // Jour. Math. Soc. Japan. — 1967. — Vol. 19, no. 3. — P. 366–383.
- [52] León-Saavedra, F. A note on frequent hypercyclicity of operators that λ -commute with the differentiation operator / F. León-Saavedra, M.P. Romero de la Rosa // Jour. of Math. Scienc. — 2022. — Vol. 266, no. 4. — P. 615–620.

- [53] León-Saavedra, F. Rotations of hypercyclic and supercyclic operators / F. León-Saavedra, V. Müller // Integr. Equat. and Oper. Theor. — 2004. — Vol. 50, no. 3. — P. 385–391.
- [54] MacLane, G.R. Sequences of derivatives and normal families / G.R. MacLane // Jour. Anal. Math. — 1952. — Vol. 2. — P. 72–87.
- [55] Martínez-Giménez, F. Chaos for backward shift operators / F. Martínez-Giménez, A. Peris. Internat. Jour. Bifur. Chaos. — 2002. — Vol. 12, no. 8. — P. 1703–1715.
- [56] Menet, Q. Linear chaos and frequent hypercyclicity / Q. Menet // Trans. Amer. Math. Soc. — 2017. — Vol. 369, no. 7. — P. 4977–4994.
- [57] Neishtadt, A. Lectures of dynamical systems / A. Neishtadt. — Loughborough: Loughborough University, 2007. — Part. 1–2. — 400 p.
- [58] Petersson, H. Supercyclic and hypercyclic non-convolution operators / H. Petersson // Jour. Oper. Theory. — 2006. — Vol. 55, no. 1. — P. 133–151.
- [59] Rakhimova, A.I. On chaotic and frequently hypercyclic properties of classical operators in the weighted space of entire functions / A.I. Rakhimova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, no. 2. — P. 838–851.
- [60] Rolewicz, S. On orbits of elements / S. Rolewicz // Studia Math. — 1969. — Vol. 32, no. 1. — P. 18–22.
- [61] Romero de la Rosa, M.P. Frequent hypercyclicity, chaos and unconditional Schauder decompositions / M.P. Romero de la Rosa, L. Frerick, S. Grivaux, A. Peris // Israel Jour. of Math. — 2012. — Vol. 190, no. 1. — P. 389–399.
- [62] Rösler, M. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators / M. Rösler // Comm. Math. Phys. — 1998. — Vol. 192, no. 3. — P. 519–542.
- [63] Rösler, M. Dunkl operators: theory and applications / M. Rösler // Orthogonal polynomials and special functions. — Leuven: Springer-Verlag, 2002. — P. 93–135.

- [64] Salas, H.N. Hypercyclic weighted shifts / H.N. Salas // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 347, no. 3. — P. 993–1004.
- [65] Taylor, B.A. On weighted polynomial approximation of entire functions / B.A. Taylor // Pacif. Jour. of Mathem. — 1971. — Vol. 36, no. 2. — P. 523–539.
- [66] Xu, Z. Hypercyclic exponential of the differential operator on Banach spaces related to Fock spaces / Z. Xu, Z. Zhou // Ann. Funct. Anal. — 2023. — Vol. 14, no. 46. — P. 1–9.
- [67] Yang, X.-J. Theory and applications of special functions for scientists and engineers / X.-J. Yang. — Singapore: Springer, 2021. — 896 p.
- [68] Абанин, А.В. О композиционных операторах в гильбертовых пространствах целых функций / А.В. Абанин, Т.И. Абанина // Изв. вузов. Матем. — 2017. — № 10. — С. 3–7.
- [69] Абанин, А.В. Классические операторы в весовых банаховых пространствах голоморфных функций / А.В. Абанин, Ф.Ч. Тиен // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2017. — Вып. 142. — С. 3–13.
- [70] Ахтямов, Н.Т. О весовом пространстве целых функций в $\mathbb{C}^n$ / Н.Т. Ахтямов // Матем. зам. — 2008. — Т. 83, № 4. — С. 483–492.
- [71] Ахтямов, Н.Т. О существовании базиса в весовом пространстве целых функций / Н.Т. Ахтямов, И.Х. Мусин // Уфим. матем. журн. — 2009. — Т. 1, № 1. — С. 3–15.
- [72] Братищев, А.В. Хаотичность коммутирующих с дифференцированием Данкла преобразований пространства аналитических функций / А.В. Братищев // Вестн. Дон. госуд. технич. унив. Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 9, № 2. — С. 196–207.
- [73] Ганнинг, Р. Аналитические функции многих комплексных переменных / Р. Ганнинг, Х. Росси. — М.: Мир, 1969. — 396 с.
- [74] Жаринов, В.В. Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS / В.В. Жаринов // Успехи матем. наук. — 1979. — Т. 34, № 4. — С. 97–131.

- [75] Забирова, К.Р. Операторы свертки Данкла и их свойства / К.Р. Забирова, В.В. Напалков // Докл. Акад. наук. — 2013. — Т. 449, № 6. — С. 632–634.
- [76] Забирова, К.Р. Операторы свертки Данкла и многоточечная задача Валле–Пуссена / К.Р. Забирова, В.В. Напалков // Вестн. Самар. госуд. технич. унив. Сер. Физ.-матем. науки. — 2013. — Т. 30, № 1. — С. 70–81.
- [77] Иванов, В.И. Неравенства для преобразований Данкля–Рисса и градиента Данкля с радиальными кусочно-степенными весами / В.И. Иванов // Чебыш. сборн. — 2021. — Т. 79, № 3. — С. 122–132.
- [78] Карамов, И.И. Обобщенный оператор Данкла / И.И. Карамов, В.В. Напалков // Уфим. матем. журн. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 59–68.
- [79] Ким, В.Э. Гиперциклические и хаотические операторы на пространстве целых функций / В.Э. Ким // Труды Инстит. матем. с ВЦ УНЦ РАН. — 2008. — Вып. 1. — С. 126–130.
- [80] Ким, В.Э. Обобщение оператора Данкла на пространстве целых функций / В.Э. Ким, В.В. Напалков // Доклады Акад. наук. — 2008. — Т. 420, № 2. — С. 166–167.
- [81] Ким, В.Э. Гиперциклическость и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда–Леонтьева / В.Э. Ким // Матем. заметки. — 2009. — Т. 85, № 6. — С. 849–856.
- [82] Ким, В.Э. Полнота систем производных функций Эйри и гиперциклические операторы / В.Э. Ким // Уфим. матем. журн. — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 52–57.
- [83] Ким, В.Э. Линейные хаотические системы в обобщенных пространствах Фока–Баргмана / В.Э. Ким, В.В. Напалков // Докл. Акад. наук. Матем. — 2011. — Т. 438, № 5. — С. 603–605.
- [84] Ким, В.Э. Динамика линейных операторов, связанных с алгеброй $su(1,1)$ / В.Э. Ким // Уфим. матем. журн. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 69–74.
- [85] Кроновер, Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р.М. Кроновер. — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.

- [86] Лишанский, А.А. Существование гиперциклических подпространств у операторов Теплица / А.А. Лишанский // Уфим. мат. журн. — 2015. — Т. 7, № 2. — С. 109–113.
- [87] Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. — СПб.: Лань, 2009. — В 2 т. Т. 1. — 496 с.
- [88] Мусин, И.Х. О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ / И.Х. Мусин // Матем. сборн. — 2004. — Т. 195, № 10. — С. 83–108.
- [89] Мусин, И.Х. О гиперциклическости некоторых дифференциальных операторов в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ / И.Х. Мусин // Труды междунар. конфер. "Крымск. осенн. матем. школа-симпозиум". — Симферополь: Изд. Дияйпи, 2010. — С. 21–27.
- [90] Мусин, И.Х. О весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ / И.Х. Мусин, С.В. Попенов // Уфим. матем. журн. — 2010. — Т. 2, № 3. — С. 52–60.
- [91] Напалков, В.В. Уравнения свертки в многомерных пространствах / В.В. Напалков. — М.: Наука, 1982. — 240 с.
- [92] Напалков, В.В. Операторы Данкла как операторы свертки / В.В. Напалков, В.В. Напалков (мл.) // Доклады Акад. наук. — 2008. — Т. 423, № 3. — С. 300–302.
- [93] Паламодов, В.П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / В.П. Паламодов // М.: Наука, 1967. — 488 с.
- [94] Попенов, С.В. О весовом пространстве функций, аналитических в неограниченной выпуклой области в C^m / С.В. Попенов // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 3. — С. 374–384.
- [95] Рахимова, А.И. Некоторые свойства обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Вестник Башкирского университета. — 2017. — Т. 22, № 3. — С. 603–606.

- [96] Рахимова, А.И. Свойства обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Вестник Башкирского университета. — 2018. — Т. 23, № 1. — С. 4–8.
- [97] Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций / А.И. Рахимова // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — Т. 58, № 1. — С. 88–110.
- [98] Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций / А.И. Рахимова // Математические заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 297–305.
- [99] Рахимова, А.И. Гиперциклические и хаотические операторы в пространстве функций, аналитических в области / А.И. Рахимова // Уфимский математический журнал. — 2024. — Т. 16, № 3. — С. 88–95.
- [100] Рахимова, А.И. Свойства обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Современная математика и ее приложения. Материалы Международной научно-практической конференции. — Стерлитамак: СФ БашГУ, 2017. — В 2 ч. Ч. II. — С. 144–147.
- [101] Рахимова, А.И. Обобщенный оператор свертки Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы XIII международной Казанской летней научной школы-конференции. — Казань: Изд. АН РТ, 2017. — Т. 54. — С. 307–308.
- [102] Рахимова, А.И. Оператор свертки Данкла / А.И. Рахимова // Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». Сборник тезисов. — Уфа: Изд. БГПУ, 2018. — С. 68.
- [103] Рахимова, А.И. Оператор свертки обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов — 2018» [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 148.
- [104] Рахимова, А.И. Об обобщенном операторе Данкла / А.И. Рахимова // Уфимская осенняя математическая школа. Сборник тезисов Международной научной конференции. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. — С. 195–196.

- [105] Рахимова, А.И. Об операторе дифференцирования / А.И. Рахимова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов XI Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: Аэтерна, 2020. — С. 3.
- [106] Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций / А.И. Рахимова // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». — Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — Т. 1. — С. 166–167.
- [107] Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах $\mathcal{E}(\varphi)$ / А.И. Рахимова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов XIII Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — С. 3.
- [108] Рахимова, А.И. Гиперциклическость оператора сдвига в весовом пространстве / А.И. Рахимова // Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения»: сборник материалов Международной научной конференции. — Уфа: Аэтерна, 2023. — С. 92.
- [109] Рахимова, А.И. Гиперциклические операторы в пространстве функций, аналитических в полосе / А.И. Рахимова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Материалы Всероссийской школы-конференции «Лобачевские чтения — 2023». — Казань: Изд. КФУ, 2023. — Т. 67. — С. 82–83.
- [110] Рахимова, А.И. Гиперциклические операторы в $\mathcal{E}(\varphi)$ / А.И. Рахимова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов XIV Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: РИЦ УУНиТ, 2023. — С. 3.
- [111] Рахимова, А.И. О гиперциклических операторах в $\mathcal{F}_\varphi$ / А.И. Рахимова // Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения»: сборник материалов Международной научной конференции. — Уфа: Аэтерна, 2024. — С. 62–63.

- [112] Рахимова, А.И. Гиперциклические операторы в пространстве целых функций / А.И. Рахимова // Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения»: сборник материалов Международной научной конференции. — Уфа: Аэтерна, 2024. — С. 18–19.
- [113] Рахимова, А.И. Хаотические и часто-гиперциклические операторы в весовом пространстве целых функций / А.И. Рахимова // Математика и теоретические компьютерные науки. — 2024. — Т. 2, № 2. — С. 84–106.
- [114] Рахимова, А.И. Динамические свойства некоторых операторов / А.И. Рахимова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов XV Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — Уфа: РИЦ УУНиТ, 2024. — С. 7.
- [115] Рахимова, А.И. Динамические свойства некоторых операторов / А.И. Рахимова // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2025. — С. 286–287.
- [116] Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. — СПб.: Лань–Пресс, 2004. — В 2 ч. Ч. 1. — 336 с.