

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор — проректор по научной деятельности ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

д. ф.-м.н. профессор _____ Д.А. Тарковский

« 14 » ноября 2025 г.



ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу
Рахимовой Алсу Ильдаровны «Динамические свойства
некоторых классических операторов в пространствах бесконечно
дифференцируемых и голоморфных функций»,
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация А.И. Рахимовой посвящена исследованию динамики классических линейных операторов в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций и пространствах функций, аналитических в областях комплексной плоскости. Основное внимание уделено исследованию поведения итераций операторов сдвига, дифференцирования, свертки и линейных операторов, коммутирующих с операторами сдвига и дифференцирования.

Отметим, что динамика линейных операторов в локально выпуклых пространствах – довольно молодая и быстро развивающаяся область функционального анализа, зарождение которой связывают с именем канадского математика Кэрол Китаи, сформулировавшей эффективное достаточное условие гиперцикличности линейных операторов (C. Kitai, Invariant Closed Sets for Linear Operators, Ph.D. thesis, University of Toronto in Canada, 1982). Эта тематика приобрела в последние 30-35 лет большую популярность благодаря и тесной связи с рядом направлений анализа (эргодическая теория, теория приближений, спектральная теория линейных операторов, теория инвариантных подпространств и др.), и усилиям многих математиков (Ж. Годфруа, Дж. Х. Шапиро, Р. Гефнер, Р. Девани, П. Бурдон, А. Перис, Р. Арон, Дж. Бес, Ж. Бонэ, А. Монтес-Родригес, А. Д. Баранов, А. А. Лишанский, А. В. Абанин, Т. И. Абанина и мн. др.). Значительное влияние на её внутреннее развитие оказали основополагающие работы К. Китаи, Ж. Годфруа и Дж. Х. Шапиро. Детальный обзор фундаментальных результатов теории дан в двух фундаментальных монографиях (K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris. Linear chaos, 2011; F. Bayart, É. Matheron.

Dynamics of linear operators, 2009). Таким образом, **актуальность исследований по данной тематике не вызывает сомнений.**

Основная цель работы — исследование свойств гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности для операторов сдвига, дифференцирования, свертки и линейных операторов, коммутирующих с операторами сдвига, дифференцирования в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций и пространствах функций, аналитических в областях комплексной плоскости.

Диссертация А. И. Рахимовой состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 132 страницы.

В первой главе рассматривается пространство $H(\Omega)$ функций, голоморфных в области Ω комплексной плоскости, наделенное стандартной топологией. Установлено, что если Ω — односвязная область, то линейный непрерывный оператор, коммутирующий с оператором дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественного отображения, является гиперциклическим (теорема 2.6), хаотическим (теорема 3.5) и часто-гиперциклическим (теорема 3.6). В частности, оператор дифференцирования является гиперциклическим (теорема 2.3), хаотическим (теорема 3.2) и часто-гиперциклическим (теорема 3.3). В случае, когда Ω — горизонтальная полоса $\Omega_\sigma := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$, где $\sigma > 0$, доказано, что оператор сдвига в пространстве $H(\Omega_\sigma)$ является гиперциклическим (теорема 2.2), хаотическим (теорема 3.1) и часто-гиперциклическим (теорема 3.4). Также в первой главе приведен интересный пример линейного непрерывного оператора в $H(\Omega_\sigma)$, не являющегося гиперциклическим (теорема 2.4). Отметим ещё, что теорема 2.6 представляет собой обобщение известной теоремы Маклейна, а теорема 2.2 дополняет результат Биркгофа.

Во второй главе рассматривается пространство $\mathcal{F}(\varphi)$, представляющее собой проективный предел банаховых весовых пространств целых функций в $\mathbb{C}^n$. В этом пространстве при тех или иных естественных допущениях о весовых функциях рассматриваются операторы дифференцирования, сдвига и свертки, а также линейные операторы, коммутирующие с операторами частного дифференцирования, сдвига. Найдены условия на характеристическую функцию дифференциального оператора бесконечного порядка, гарантирующих его гиперцикличность (теорема 5.3). При дополнительном условии i_4) на весовые функции доказано, что линейный непрерывный оператор, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественного отображения, является гиперциклическим (теорема 5.5), в частности, в этом случае оператор частного дифференцирования является гиперциклическим (теорема 5.1), а также и хаотическим (теорема 6.1), и часто-гиперциклическим (теорема 6.2).

В третьей главе рассматривается весовое пространство Фреше бесконечно дифференцируемых функций многих вещественных переменных. Здесь выделим результаты о гиперцикличности линейных непрерывных операторов, коммутирующих с операторами частного дифференцирования и не являющихся скалярными кратными тождественного отображения (теорема 9.1), полученный с помощью известной теоремы Годфруа-Шалиро, и серию интересных следствий из неё. Отметим и технически непростое доказательство теоремы 9.4.

В четвертой главе исследованы свойства обобщенного оператора Данкла в пространстве $H(\mathbb{C})$ и показано, что этот оператор является гиперциклическим (теорема

11.2), хаотическим и часто-гиперциклическим (теорема 11.3).

Все основные результаты диссертации являются новыми. Некоторые из них существенно дополняют и развивают известные результаты. При их получении существенную роль сыграли ставшие уже классическими в динамике линейных операторов теоремы Годфруа-Шапиро, Китаи-Гейфнера-Шапиро, Биркгофа о транзитивности.

Значимость для науки. Полученные в диссертации результаты являются новыми важными фактами для раздела функционального анализа, занимающегося динамикой линейных операторов в локально выпуклых пространствах, теории приближений и представляют собой практическую ценность для будущих исследований в этих областях математики.

По оформлению работы имеется несколько замечаний.

1. Условие i_2) в определении пространства $\mathcal{F}(\varphi)$ является излишним, его можно было бы опустить.

2. Стр. 35. В работе написано «а если $W_1 = \emptyset$, то $1/a_T(\lambda)$ ограничена». После этого следовало бы написать, какой вывод из этого следует.

3. Стр. 37. При доказательстве теоремы 3.1 достаточно было ограничиться замечанием, что множество Λ содержит предельную точку.

4. Стр. 39. Определение множества W нуждается в корректировке, поскольку при указанном в работе его задании оператор S_a определён некорректно.

5. Стр. 47. Следовало бы указать, что для функций из семейства $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ в силу условия i_1) их преобразования Юнга-Фенхеля $\tilde{\varphi}_m(z)$ принимают конечные значения в $\mathbb{C}^n$. В работе же написано, что $\tilde{\varphi}_m(z)$ ограничены во всем $\mathbb{C}^n$.

6. Стр. 65. Внизу вместо «функция $M_S[f]$ C -дифференцируема в точке» следовало написать «функция $M_S[f]$ C -дифференцируема в точке».

7. Стр. 66. Не указано, каким свойством обладает число l . Неравенство (5.24), вообще говоря, справедливо при любом $l \in \mathbb{N}$, а не только для $l \geq k$.

8. Стр. 73. Вместо « φ является открытым отображением в $\mathbb{C}$ » следовало бы написать « φ является открытым отображением из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$ ». То же касается текста на стр. 75.

9. Стр. 73. Доказательство леммы 6.1 можно было бы упростить, если бы в качестве множества A взять счетное всюду плотное множество точек на сфере $\{z \in \mathbb{C}^n : \|z - \lambda_0\| = R\}$.

10. Стр. 74. Имеется опечатка в предложении «Множество $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M$ плотно в $\mathbb{C}^n$ ».

Указанные замечания не влияют на достоверность полученных в диссертации результатов и не снижают общей высокой оценки работы.

Диссертация представляет собой завершённую научно-исследовательскую работу на актуальную тему. Научные результаты, полученные диссертантом, являются новыми, имеют важное значение для динамической теории классических линейных операторов и теории приближений. Список литературы является достаточно полным. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, из них 3 работы изданы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных Web of Science и

Scopus, 3 работы опубликованы в журналах из Перечня ВАК. Полученные результаты докладывались на многочисленных российских и международных конференциях. Оценивая диссертационную работу в целом, можно констатировать ее актуальность, научную новизну и квалифицировать ее как научное достижение в области функционального анализа и теории приближений.

На основании изложенного считаем, что диссертационная работа Рахимовой Алсу Ильдаровны «Динамические свойства некоторых классических операторов в пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, в частности, пп. 9–11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» (в редакции от 16.10.2024 г.), а ее автор, Рахимова Алсу Ильдаровна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и утвержден на объединенном заседании кафедр математического анализа и теории функций и приближений Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «КФУ», протокол № 3 от «5» ноября 2025 г.

Председательствующий на заседании,
заведующий кафедрой теории
функций и приближений
Института математики и механики
им. Н. И. Лобачевского
доктор физ.-мат. наук, профессор

Авхадиев Фарит Габидинович



Сведения о ведущей организации:

Полное наименование: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Сокращенное наименование: ФГАОУ ВО «КФУ»

Адрес: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Телефон: +7(843)233-74-00, +7(843)292-69-77

Адрес в сети Интернет: <https://www.kpfu.ru>

Адрес электронной почты: public.mail@kpfu.ru