

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу
Рахимовой Алсу Ильдаровны

«Динамические свойства некоторых классических операторов в
пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций»,
представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Рахимовой Алсу Ильдаровны «Динамические свойства некоторых классических операторов в пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций» посвящена изучению динамических характеристик классических операторов в пространстве голоморфных в области функций и в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций. Цель работы состоит в изучении свойств гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности для некоторых классических операторов: операторы сдвига, дифференцирования, конечные суммы операторов сдвига, дифференцирования и их композиций, ряды из таких операторов, оператор свертки. Они рассмотрены в пространстве функций, аналитических в области с топологией равномерной сходимости на компактах, и в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций.

Динамика линейных операторов в топологических векторных пространствах является интенсивно развивающейся областью функционального анализа. Она тесно связана со многими направлениями современного анализа: спектральная теория линейных операторов, пространства аналитических функций и действующие в них операторы, теория динамических систем, эргодическая теория. Динамика линейных операторов имеет применения в физике и естествознании, поскольку она изучает математические модели процессов или явлений, которые принимают различные состояния, а именно описывает процессы перехода изучаемого явления из одного состояния в другое. Важное место в динамике линейных операторов занимает понятие гиперциклического оператора в топологическом векторном пространстве. В статье 1929 г. Дж. Биркгоф доказал гиперцикличность оператора сдвига в пространстве целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. В работе 1952 г. Дж.Р. Маклейн показал, что оператор дифференцирования является гиперциклическим в данном пространстве. По этой теме были опубликованы статьи К. Китаи, Дж.Х. Шапиро, Р.М. Гефнера и Ж. Годфруа, которые внесли большой вклад в эту теорию. В настоящее время динамические свойства операторов широко изучаются отечественными и зарубежными учеными, публикуются новые статьи в этой области и ее приложениях. Этой теме посвящены работы следующих ученых из Франции и Испании: М.Дж. Бельтран, Ж. Боне, А. Бонилья, Дж. Бэс, А. Пэрис, Ф. Байяр, С. Гриво, К.-Г. Гроссе-Эрдманн, Э. Матерон, К. Мене, Ф. Леон-Сааведра, М.П. Ромеро де ла Роса и других. В России изучением динамики линейных операторов занимались А.В. Абанин, Т.И. Абанина, А.Д. Баранов, А.В. Братищев, А.А. Лишанский, В.Э. Ким.

Таким образом, актуальность темы диссертации не вызывает сомнений.

Остановимся на структуре и содержании диссертации.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Она состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 132 страницы.

Во введении проведен исторический обзор исследуемой области, на основании этого обоснована актуальность диссертационного исследования, поставлены цели и задачи работы, обоснована научная новизна и приведено краткое содержание диссертации.

В первой главе рассматривается пространство функций, аналитических в односвязной области комплексной плоскости с топологией равномерной сходимости на компактах. Доказано, что в нем линейный непрерывный оператор, коммутирующий с оператором дифференцирования

и не являющийся скалярным кратным тождественного отображения, является гиперциклическим (теорема 2.6). Также он хаотический (теорема 3.2) и часто-гиперциклический (теорема 3.3) в этом пространстве. Приведены примеры различных операторов, обладающих данными динамическими свойствами.

Во второй главе изучены динамические свойства линейных операторов в весовом пространстве Фреше-Шварца целых функций. Доказано, что в этом пространстве линейный непрерывный оператор, коммутирующий с оператором дифференцирования и не совпадающий со скалярным кратным тождественного отображения, является гиперциклическим (теорема 5.5). Показано, что рассматриваемый оператор обладает свойствами хаотичности (теорема 6.1) и часто-гиперциклическости (теорема 6.2). Проверены свойства гиперциклическости, хаотичности и часто-гиперциклическости некоторых классических операторов в этом пространстве.

В третьей главе в весовом пространстве Фреше бесконечно дифференцируемых функций рассмотрено свойство гиперциклическости операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций. Показано, что в этом пространстве линейный непрерывный оператор, коммутирующий с оператором дифференцирования и не являющийся скалярным кратным тождественного отображения, гиперциклический (теорема 9.1). Также приведены различные примеры таких операторов. Доказаны теоремы о хаотичности и часто-гиперциклическости операторов дифференцирования (теорема 10.2) и композиции дифференцирования и сдвига в данном пространстве (теорема 10.3).

В четвертой главе доказаны утверждения, что обобщенный оператор Данкла является гиперциклическим (теорема 11.2), а также хаотическим и часто-гиперциклическим (теорема 11.3) в пространстве целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. При наложении дополнительного условия на семейства весовых функций обобщенный оператор Данкла обладает свойствами гиперциклическости (теорема 12.2), хаотичности и часто-гиперциклическости (теорема 12.3) в весовом пространстве целых функций. **В заключении автор** формулирует основные результаты работы.

Теоретическая значимость диссертации заключается в том, что полученные в работе теоремы могут быть использованы для изучения динамических свойств различных операторов в пространстве функций, аналитических в области с топологией равномерной сходимости на компактах, и в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций.

Новизна диссертационного исследования состоит в том, что в более ранних публикациях поставленные в диссертации задачи не изучались в рассматриваемых в работе функциональных пространствах.

В работе для линейного непрерывного оператора, коммутирующего с оператором дифференцирования и не являющегося скалярным кратным тождественного отображения, **получены следующие результаты:**

1. В пространстве функций, аналитических в односвязной области комплексной плоскости, он гиперциклический (теорема 2.6), хаотический (теорема 3.2) и часто-гиперциклический (теорема 3.3).

2. В весовом пространстве целых функций он гиперциклический (теорема 5.5). Этот оператор обладает свойствами хаотичности (теорема 6.1) и часто-гиперциклическости (теорема 6.2).

3. В весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций данный оператор гиперциклический (теорема 9.1).

4. Обобщенный оператор Данкла гиперциклический (теорема 11.2), хаотический и часто-гиперциклический (теорема 11.3) в пространстве целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. При дополнительном условии на семейства весовых функций этот оператор является гиперциклическим (теорема 12.2), хаотическим и часто-гиперциклическим (теорема 12.3) в весовом пространстве целых функций.

По диссертационной работе можно сделать следующие замечания.

1. Работа содержит небольшое количество опечаток и орфографических ошибок. С. 43. В первой выносной формуле слева не хватает z .

2. В определении пространства $\mathcal{F}(\varphi)$ условие i_2) является лишним.

3. С. 32. Написано: „Действие оператора T на моном z^n при всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид ...“.

Должно быть: „Действие оператора T^k на моном z^n при всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}_0$ имеет вид ...“.

4. С. 32. Написано: „Действие оператора S на моном z^n при всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид ...“.

Должно быть: „Действие оператора S^k на моном z^n при всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}_0$ имеет вид ...“.

5. С. 37. Написано: „По теореме 1.4 множество периодических точек оператора T_a в $H(\Omega_\sigma)$ имеет вид ...“.

Замечание: Вначале надо было привести общий вид решения уравнения $g(z+a) = e^{\alpha\pi i}g(z)$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$.

6. С. 38. В Теореме 3.3. выполнение условий Теоремы 1.3 должно было быть проверено на полиномах. Автор ограничился проверкой на мономах. Этого достаточно, чтобы убедиться в справедливости утверждения. Однако об этом следовало сказать.

7. С. 39. Не проверена корректность действия оператора S_a .

8. С. 47. Написано: „Тогда для функций из семейства $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ в силу условия i_1) их преобразования Юнга-Фенхеля $\tilde{\varphi}_m(z)$ ограничены во всем $\mathbb{C}^n$...“.

Вместо этого следовало отметить, что для функций из семейства $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ в силу условия i_1) их преобразования Юнга-Фенхеля $\tilde{\varphi}_m(z)$ принимают конечные значения в $\mathbb{C}^n$.

9. С. 60, третье выносное снизу равенство. Вместо $e^{C(\xi)}$ должно стоять, видимо, $C(\xi)$. Вообще говоря, промежуточное выражение в этом равенстве – лишнее.

10. С. 109. Написано: „Действие оператора Λ на моном z^n при любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет вид ...“.

Должно быть: „Действие оператора Λ^k на моном z^n при всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}_0$ имеет вид ...“.

11. С. 112. Теорема 11.1 верна, однако первое выносное неравенство нуждается в уточнении.

Указанные замечания не влияют на достоверность результатов и не снижают общей высокой оценки работы.

Оценивая диссертационную работу в целом, можно констатировать ее актуальность, научную новизну и квалифицировать ее как научное достижение в теории функций.

Полученные результаты докладывались на многочисленных ведущих научных семинарах, а также на ряде российских и международных конференциях. Все основные результаты, изложенные в диссертации, являются новыми и представляют научный интерес, они получены лично соискателем и обоснованы в виде четких математических доказательств. Они достаточно полно опубликованы в виде 6 статей в рецензируемых журналах из Перечня ВАК и международных реферативных баз данных Web of Science и Scopus. Из них 3 статьи изданы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus, 3 работы размещены в журналах из Перечня ВАК.

Диссертация является научно-квалификационной работой, ее автором разработано новое научное направление, а созданные при этом методы позволили решить ряд сложных, актуальных и давно стоящих задач.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа Рахимовой Алсу Ильдаровны «Динамические свойства некоторых классических операторов в пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций» удовлетворяет п. 9-11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» (в редакции от 16.10.2024 г.), а ее автор, Рахимова Алсу Ильдаровна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического
анализа и прикладной математики
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения
высшего образования «Курский
государственный университет»

Малютин Константин Геннадьевич

13.11.2025.

Даю согласие на обработку персональных данных.

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Адрес основного места работы:

305000, Российская Федерация, г. Курск, ул. Радищева, 33,
ФГБОУ ВО «Курский государственный университет»

Рабочий тел.: +7 (919) 210-70-19

E-mail: malyutinkg@gmail.com

