

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель Федерального
государственного бюджетного
научного учреждения
Уфимского федерального
исследовательского центра
Российской академии наук,
доктор биологических наук

Б.Б. Мартыненко
« 25 » мая 2025 г.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Федерального государственного бюджетного научного учреждения
Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук
Министерства науки и высшего образования
Российской Федерации

Диссертация Рахимовой Алсу Ильдаровны «Динамические свойства некоторых классических операторов в пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций» выполнена в отделе теории функций и функционального анализа Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

В период подготовки диссертации соискатель Рахимова Алсу Ильдаровна работала инженером-исследователем и младшим научным сотрудником в отделе теории функций и функционального анализа Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

В настоящее время Рахимова А.И. является младшим научным сотрудником отдела теории функций и функционального анализа Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

В 2015 году окончила с отличием Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального

образования «Башкирский государственный университет» по направлению подготовки 01.04.01 Математика с присвоением квалификации Магистр.

В 2019 году окончила аспирантуру по очной форме обучения Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный университет» по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, научной специальности 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ с присвоением квалификации «Исследователь. Преподаватель-исследователь».

Диплом об окончании аспирантуры выдан Федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования «Башкирский государственный университет» в 2019 году. Справка об обучении со сведениями о сданных кандидатских экзаменах выдана Федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего образования «Уфимский университет науки и технологий» в 2024 году.

Тема диссертационной работы и научный руководитель утверждены на заседании Ученого совета Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (протокол № 5 от 23 мая 2024 г.).

Научный руководитель — Мусин Ильдар Хамитович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела теории функций и функционального анализа, и.о. директора Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

По итогам обсуждения диссертации Рахимовой А.И. «Динамические свойства некоторых классических операторов в пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций» принято следующее заключение.

Диссертационная работа Рахимовой Алсу Ильдаровны «Динамические свойства некоторых классических операторов в пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций» посвящена изучению динамических свойств, а именно гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности для некоторых классических операторов: операторы сдвига, дифференцирования, конечные суммы операторов сдвига, дифференцирования и их композиций, ряды из таких операторов, оператор свертки. Они рассмотрены в пространстве функций, аналитических в области, а также в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций.

Тема диссертации непосредственно связана с научно-исследовательской темой отдела теории функций и функционального анализа Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН «Комплексный анализ, теория операторов, аппроксимации и их приложения» и соответствует паспорту научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, а именно: пункту 5 — «Комплексный анализ, аналитические функции одного и многих комплексных переменных и их свойства, аналитическое продолжение, граничные свойства аналитических функций»; пункту 11 — «Теория операторов, в том числе теория дифференциальных операторов».

Основы теории гиперциклических операторов были заложены Дж.Д. Биркхофом и Дж.Р. Маклейном. Также большой вклад внесли С. Ролевич, К. Китаи, Дж.Х. Шапиро, Р.М. Гетнер и Ж. Годфруа. В области хаотических и часто-гиперциклических операторов важную роль играют работы Р.Л. Девани, Ж. Годфруа, Дж.Х. Шапиро, Ф. Байяр и С. Гриво, А. Бонильи, К.-Г. Гроссе-Эрдманна, Э. Матерона, А. Пэрис.

В настоящее время этой темой занимаются многие ученые во Франции и Испании: М.Дж. Бельтран, Ж. Боне, А. Бонилья, Дж. Бэс, А. Пэрис, Ф. Байяр, С. Гриво, К.-Г. Гроссе-Эрдманн, Э. Матерон, К. Мене, Ф. Леон-Сааведра, М.П. Ромеро де ла Роса и другие. В России изучению динамических свойств операторов посвящены работы А.В. Абанина, Т.И. Абаниной, А.Д. Баранова, А.В. Братищева, А.А. Лишанского, В.Э. Кима.

Основные результаты диссертации изложены в четырех главах.

В главе 1 рассматривается пространство функций, аналитических в области комплексной плоскости. Доказано, что в нем линейный непрерывный оператор, коммутирующий с оператором дифференцирования и не совпадающий с тождественным отображением, является гиперциклическим. Показано, что он также обладает свойствами хаотичности и часто-гиперцикличности в этом пространстве. Приведены примеры различных операторов, обладающих данными динамическими свойствами.

В главе 2 изучены динамические свойства некоторых классических операторов в весовом пространстве целых функций. Доказано, что в нем линейный непрерывный оператор, коммутирующий с оператором дифференцирования и не совпадающий с тождественным отображением, гиперциклический. Приведено утверждение, что рассматриваемый оператор является хаотическим и часто-гиперциклическим в этом пространстве. Проверены свойства гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности некоторых классических операторов.

В главе 3 в весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций рассмотрено свойство гиперцикличности операторов дифференцирования, сдвига, свертки и их различных композиций. Показано, что в этом пространстве линейный непрерывный оператор, коммутирующий с оператором дифференцирования и не совпадающий с тождественным отображением, является гиперциклическим. Также приведены различные примеры таких операторов. Доказаны теоремы о хаотичности и

часто-гиперцикличности операторов дифференцирования и композиции дифференцирования и сдвига в данном пространстве.

В главе 4 доказано, что обобщенный оператор Данкла является гиперциклическим, а также хаотическим и часто-гиперциклическим в пространстве целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Показано, что при выполнении определенного условия для семейства весовых функций обобщенный оператор Данкла обладает свойствами гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности в весовом пространстве целых функций.

Актуальность темы исследования. Динамика линейных операторов в топологических векторных пространствах является интенсивно развивающейся областью функционального анализа. Она тесно связана со многими направлениями современного анализа: спектральная теория линейных операторов, пространства аналитических функций и действующие в них операторы, теория динамических систем, эргодическая теория. Динамика линейных операторов имеет применения в физике и естествознании, поскольку она изучает математические модели процессов или явлений, которые принимают различные состояния, а именно описывает процесс перехода изучаемого явления из одного состояния в другое.

В настоящее время динамические свойства операторов широко изучаются отечественными и зарубежными учеными, публикуются новые статьи в этой области и ее приложениях. Этой темой занимаются многие ученые во Франции и Испании: М.Дж. Бельтран, Ж. Боне, А. Бонилья, Дж. Бэс, А. Пэрис, Ф. Байяр, С. Гриво, К.-Г. Гроссе-Эрдманн, Э. Матерон, К. Мене, Ф. Леон-Сааведра, М.П. Ромеро де ла Роса и другие. В России изучению динамики линейных операторов посвящены работы А.В. Абанина, Т.И. Абаниной, А.Д. Баранова, А.В. Братищева, А.А. Лишанского, В.Э. Кима.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты диссертации носят теоретический характер. Теоретическая значимость диссертации заключается в том, что полученные в работе теоремы могут быть использованы для изучения динамических свойств различных операторов в пространстве функций, аналитических в области, а также в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций. Динамика линейных операторов используется в физике и естествознании для изучения поведения различных процессов, связанных с переходом из одного состояния в другое, например, в неравновесной термодинамике и в теории динамического хаоса.

Личное участие соискателя в получении научных результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора 1–6. В совместных публикациях 1, 2 В.В. Напалкову принадлежат постановки задач, а также в статье 1 — теорема 1, в работе 2 — теорема 1, а соискателю — все остальные утверждения и их доказательства. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Степень достоверности результатов проведенных исследований обеспечивается их публикацией в рецензируемых журналах из Перечня ВАК и международных реферативных баз данных Web of Science и Scopus. Все основные результаты, изложенные в диссертации Рахимовой А.И., достоверны и строго обоснованы. Они получены соискателем лично и опубликованы в виде 6 статей в рецензируемых журналах, которые рекомендованы ВАК для публикации результатов диссертаций. Из них 3 статьи изданы в журналах, включенных в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus, 3 статьи размещены в журналах из Перечня ВАК.

Новизна и значение выводов диссертационной работы состоит в том, что в опубликованных ранее статьях и книгах отечественных и зарубежных ученых поставленные в диссертации задачи не изучались в рассматриваемых в работе функциональных пространствах, причем как для одной переменной, так и в многомерном случае. Все основные результаты диссертации являются новыми и представляют научный интерес. Они значительно дополняют исследования предыдущих авторов и вносят вклад в теорию гиперциклических, хаотических и часто-гиперциклических операторов в изучаемых пространствах. В работе получены результаты для линейных непрерывных операторов по свойствам гиперцикличности, хаотичности и часто-гиперцикличности в пространстве функций, аналитических в области, а также в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых и целых функций.

Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем. Все основные результаты, изложенные в диссертационной работе, опубликованы в виде статей в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. По теме диссертации имеются 6 статей, из них статьи 1–3 изданы в журналах из Перечня ВАК, работы 4–6 опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных Web of Science и Scopus, приравненных к изданиям из Перечня ВАК.

Основные публикации по теме диссертации:

1. Рахимова А.И. Некоторые свойства обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Вестник Башкирского университета. — 2017. — Т. 22, № 3. — С. 603–606.
2. Рахимова А.И. Свойства обобщенного оператора Данкла / А.И. Рахимова, В.В. Напалков // Вестник Башкирского университета. — 2018. — Т. 23, № 1. — С. 4–8.
3. Рахимова А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций / А.И. Рахимова // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — Т. 58, № 1. — С. 88–110.
4. Рахимова А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций / А.И. Рахимова // Математические заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 297–305.

5. Рахимова А.И. Гиперциклические и хаотические операторы в пространстве функций, аналитических в области / А.И. Рахимова // Уфимский математический журнал. — 2024. — Т. 16, № 3. — С. 88–95.
6. Rakhimova A.I. On chaotic and frequently hypercyclic properties of classical operators in the weighted space of entire functions / A.I. Rakhimova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, no. 2. — P. 838–851.

Основные результаты диссертации обсуждались на семинарах по комплексному и гармоническому анализу Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, а также неоднократно докладывались на международных конференциях по комплексному анализу: «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2020 г.); «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2020 г.); «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2020 г.); «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2021 г.); «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2022 г.); «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2022 г.); «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2023 г.); «Лобачевские чтения — 2023» (Казань, 2023 г.); «Комплексный анализ и его приложения» (Уфа, 2024 г.); «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2024 г.); «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2025 г.); «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2025 г.).

Текст диссертации представляет собой самостоятельную научно-квалификационную работу, не содержит заимствованного материала без ссылок на автора или источник.

Диссертация «Динамические свойства некоторых классических операторов в пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций» Рахимовой Алсу Ильдаровны удовлетворяет п. 9–11, 13, 14 постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» (в редакции от 16.10.2024 г.) и рекомендуется к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Заключение принято на расширенном заседании отдела теории функций и функционального анализа Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

ПРИСУТСТВОВАЛИ: Абузярова Н.Ф., доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник; Вильданова В.Ф., кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник; Гайсин А.М., доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник;

Мусин И.Х., доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник; Мукминов Ф.Х., доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник; Напалков В.В., доктор физ.-мат. наук, научный сотрудник; Хабибуллин Б.Н., доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник; Юлмухаметов Р.С., доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник; Кордюков Ю.А., доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник; Мурясов Р.Р., аспирант; Рахимова А.И., соискатель.

На заседании присутствовало 11 человек (в том числе 8 докторов наук, 1 кандидат наук), с правом голоса 8 человек.

Результаты голосования: «за» – 8 чел., «против» – 0 чел., «воздержалось» – 0 чел. (протокол № 1 от 14 мая 2025 г.).

Председатель заседания
д.ф.-м.н., главный научный сотрудник,
заведующий отделом
теории функций и функционального
анализа ИМВЦ УФИЦ РАН



А.М. Гайсин

Подпись Гайсина А.М. заверяю:
Ученый секретарь ИМВЦ УФИЦ РАН
кандидат физико-математических наук

В.Ф. Вильданова

