На правах рукописи

Белова Анна Сергеевна

Методы теории возмущений в задачах об устойчивости и параметрическом резонансе для автономных и периодических гамильтоновых систем

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа — 2023

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и теории управления Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, **Юмагулов Марат Гаязович**
Официальные оппоненты:	**Каменский Михаил Игоревич,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой функционального анализа и операторных уравнений Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет».
	Наимов Алижон Набиджанович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Вологодский государственный университет».
Ведущая организация:	Нижегородской филиал Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород.

Защита состоится 16 февраля 2024 г. в 13^{00} часов на заседании объединенного диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте https://uust.ru/.

Автореферат разослан «______» __________________ 202___г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Вопросы разработки методов исследования задач об устойчивости и о параметрическом резонансе для гамильтоновых систем привлекали и продолжают привлекать повышенное внимание многих исследователей. Интерес к изучению этих вопросов связан как с многочисленными приложениями, так и потребностями самой теории. Из большого многообразия литературных источников отметим работы отечественных и зарубежных ученых: А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда, Ю. Мозера, А.П. Маркеева, Дж. Биркгофа, В.В. Козлова, И.Г. Малкина, Д. Трещева, Л.П. Шильникова и др.

Одно из центральных мест в исследовании задач об устойчивости и о параметрическом резонансе гамильтоновых систем занимает задача об устойчивости систем с малым параметром в критических случаях; здесь условно следует выделить два подхода.

Первый подход основан на методах нормализации гамильтоновых систем, восходящих к работам Дж. Биркгофа. Дальнейшее развитие метод нормализации получил в работах Дж. Хори, А. Деприи, А.П. Маркеева, А.Г. Сокольского, С.А. Хованского, В.Ф. Журавлева, Ф.Г. Петрова, В.А. Мерсмана, А.Д. Брюно, А.Б. Батхина, К.Р. Мейера, Е. Э. Кабрала, К. Майера, О.В. Холостовой, Л.М. Лермана и других. Особо следует отметить работы А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда и Ю. Мозера, положивших начало КАМ-теории.

Второй подход основан на классических методах теории возмущений линейных операторов. В основе этого подхода лежат классические работы И.М. Гельфанда, В.Б. Лидского, М.Г. Крейна, Г.Я. Любарского в спектральной теории и ее приложений к исследованию поведения мультипликаторов гамильтоновых систем. Дальнейшее развитие подход получил в работах В.А. Якубовича, А.А. Майлыбаева, А.П. Сейраняна, Дж.Х. Маддокса, М.Л. Овертона и других.

При исследовании задач об устойчивости и параметрическом резонансе возникает множество резонансных случаев, каждый из которых требует отдельного детального изучения, разработки новых подходов и методов. Несмотря на то, что анализу различных аспектов движения гамильтоновых систем при резонансах было посвящено много работ, эта область теории динамических систем остается актуальной и привлекает немалый интерес. Представляется актуальным и важным дальнейшее развитие методов исследования устойчивости гамильтоновых систем в резонансных случаях.

Целью исследования является разработка новых подходов, основанных на методах теории возмущений и позволяющих проводить качественный и приближенный анализ задач об устойчивости и о параметрическом резонансе для линейных и нелинейных автономных и периодических гамильтоновых систем.

Задачи исследования:

1. Получение асимптотических формул для возмущений собственных значений гамильтоновых матриц, зависящих от малого параметра. Разработка приложений в задаче об устойчивости решений автономных гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра.
2. Получение асимптотических формул для возмущений кратных дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра. Разработка приложений в задаче об устойчивости решений периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра.
3. Разработка новых подходов исследования задачи о параметрическом резонансе для периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра.

Научная новизна определяется впервые проведенными исследованиями, в результате которых разработан новый математический аппарат для качественного и приближенного исследования задач об устойчивости и о параметрическом резонансе для автономных и периодических гамильтоновых систем.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. В ней предложены и обоснованы качественный и приближенный методы исследования задачи об устойчивости и о параметрическом резонансе гамильтоновых систем. Полученные результаты доведены до расчетных формул. Предлагаемые методы могут быть использованы в задаче о построении границ областей устойчивости гамильтоновых систем в пространстве их параметров, в задачах о локальных бифуркациях динамических систем.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории гамильтоновых систем, теории устойчивости. Используются также методы теории возмущений линейных операторов, в том числе разработанные ранее автором схемы получения формул первого приближения для возмущений собственных значений линейных автономных гамильтоновых систем и дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. получены новые формулы первого приближения для возмущений собственных значений автономных гамильтоновых матриц;
2. получены новые признаки устойчивости линейных автономных гамильтоновых систем и точек равновесия нелинейных автономных гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра;

3. получены новые формулы первого приближения для возмущений дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем;
4. получены новые признаки устойчивости линейных периодических гамильтоновых систем и точек равновесия нелинейных периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра;
5. разработан новый подход исследования задач о параметрическом резонансе, в основных резонансах приводящий к новым признакам устойчивости решений линейных и нелинейных периодических гамильтоновых систем.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на заседаниях научных семинаров: на научном семинаре лаборатории динамических систем и приложений Нижегородского филиала ФГБОУ ВО Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (руководители: д.ф.-м.н., профессор В.З. Гринес и д.ф.-м.н., профессор Д.В. Тураев); на Общегородском семинаре им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (руководители: д.ф.-м.н., профессор Л.А. Калякин и д.ф.-м.н., профессор В.Ю. Новокшенов); на постоянно действующем научном семинаре кафедр математического анализа и дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (руководители: д.ф.-м.н., профессор М.Г. Юмагулов и д.ф.-м.н., доцент З.Ю. Фазуллин).

Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях: Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 2019 – 2023 гг.); Международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (Якты-Куль, 2020 – 2023 гг.); Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева (г. Уфа, 2017); Международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, 2020, 2021), XII Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (г. Москва, 2017), Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 2020, 2021), Конференция международных математических центров мирового уровня (г. Сочи, 2021).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах [1 – 8] в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК РФ или приравненных к ним, в том числе работы [1 – 7] в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus. Кроме того, в сборниках трудов конференций [9 – 20] опубликованы как тезисы докладов основные идеи и результаты исследований, проведенных в диссертации.

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

При выполнении работы [1], опубликованной в соавторстве, соискателем был предложен алгоритм построения границ областей устойчивости гамильтоновых систем в случае чисто мнимого собственного значения линеаризованной задачи. Соавторами, Л.С. Ибрагимовой и И.Ж. Мустафиной, в данной работе было проведено исследование построения границ областей устойчивости в случае нулевого собственного значения.

При выполнении работы [3], опубликованной в соавторстве, соискателем было проведено исследование задачи о параметрическом резонансе для периодических гамильтоновых систем и вопроса об устойчивости системы Лурье в случаях простого и комбинационного резонанса. Соавторами Л.С. Ибрагимовой и М.Г. Юмагуловым было проведено и обосновано построение для уравнения Лурье эквивалентной гамильтоновой системы.

В совместных публикациях [4 – 7], опубликованных в соавторстве, соискателем были предложены формулы первого приближения в задаче о возмущении дефинитных и индефинитных мультипликаторов, не равных ± 1. Кроме этого, соискателем было проведено исследование устойчивости положения равновесия автономных гамильтоновых систем в случае чисто мнимого собственного значения линеаризованной задачи. Соавторами Л.С. Ибрагимовой и М.Г. Юмагуловым были получены формулы первого приближения в задаче о возмущении мультипликаторов равных 1 или -1, а также рассмотрен вопрос об устойчивости автономных гамильтоновых систем в случае нулевого собственного значения линеаризованной задачи.

При выполнении работы [8], опубликованной в соавторстве, соискателем была разработана программа, основанная на предложенном в работе алгоритме построения областей устойчивости гамильтоновых систем. Теоретическое обоснование алгоритма было проведено соавтором М.Г. Юмагуловым.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Главы разбиты на параграфы. Нумерация формул двойная – первая цифра означает номер главы, вторая – номер формулы в главе. Такая же нумерация принята для лемм, теорем. Полный объем диссертации составляет 118 страниц. Список литературы содержит 107 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

Первая глава посвящена построению формул теории возмущений линейных операторов, зависящих от малого параметра и их приложениям в задаче исследования устойчивости точек равновесия автономных и периодических дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра. Глава носит вспомогательный характер для решения основных задач диссертации, представленных во второй и третьей главах.

В первом параграфе главы изучается задача о возмущении собственных значений вещественного линейного оператора $A(\varepsilon):\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}^N$, гладко зависящего от малого параметра ε. В этом параграфе приводятся некоторые формулы теории возмущений, полученные автором и представленные в удобном для работы формате.

Во втором параграфе обсуждается вопрос об устойчивости нулевого решения автономной системы, зависящей от малого параметра ε, вида

$$\frac{dx}{dt}=A(\varepsilon)x+a(x,\varepsilon),\qquad x\in\mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Здесь $A(\varepsilon)$ – вещественная квадратная матрица порядка N, гладко зависящая от ε; $a(x,\varepsilon)$ – вектор-функция, гладко зависящая от x и ε и удовлетворяющая условию: $\|a(x,\varepsilon)\|=O(\|x\|^2)$ при $\|x\|\to 0$ равномерно по ε.

Предложены утверждения относительно устойчивости положения равновесия $x=0$ системы (1) в следующих основных критических случаях (в предположении, что остальные собственные значения матрицы $A(0)$ имеют отрицательные вещественные части), когда:

1^0. матрица $A(0)$ имеет простое нулевое собственное значение;
2^0. матрица $A(0)$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений;
3^0. матрица $A(0)$ имеет полупростое (кратности 2) чисто мнимое собственное значение;
4^0. матрица $A(0)$ имеет неполупростое (кратности 2) чисто мнимое собственное значение.

В третьем параграфе основным объектом изучения является периодическая система

$$\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x+a(x,t,\varepsilon),\qquad x\in\mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Здесь вещественная квадратная матрица $A(t,\varepsilon)$ и вектор-функция $a(x,t,\varepsilon)$ непрерывно зависят от t, гладкие от x и ε и являются T-периодическими по t. Предполагается также, что $\|a(x,t,\varepsilon)\|=O(\|x\|^2)$ при $\|x\|\to 0$ равномерно по t и ε.

Наравне с системой (2) рассматривается линейная периодическая система

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

При $\varepsilon = 0$ система (3) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t,0)x, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4}$$

Обозначим через $X(t,\varepsilon)$ – фундаментальную матрицу решений системы (3), а через $V(\varepsilon) = X(T,\varepsilon)$ – матрицу монодромии. Собственные значения матрицы $V(\varepsilon)$ называются мультипликаторами системы (3).

В данном параграфе основное внимание уделяется рассмотрению трех взаимосвязанных задач. Во-первых, решается задача о построении матрицы монодромии $V(\varepsilon)$ системы (3) в виде $V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \ldots + \varepsilon^k V_k + O(|\varepsilon|^{k+1})$.

Во-вторых, решается задача приближенного построения мультипликаторов системы (3). Наконец, в-третьих, решается задача исследования устойчивости положения равновесия $x = 0$ системы (2) в критических случаях, когда система (4) имеет:

P_1. простой мультипликатор μ_0 так, что $|\mu_0| = 1$;

P_2. полупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 так, что $|\mu_0| = 1$;

P_3. неполупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 так, что $|\mu_0| = 1$.

Отдельно в параграфе рассмотрены представленные задачи в случае, если матрица $A(t,0)$ является постоянной: $A(t,0) \equiv A_0$.

Основные результаты диссертации представлены во второй и третьей главах.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию устойчивости автономных гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра.

В первом параграфе главы основным объектом изучения является линейная автономная гамильтонова система (ЛАГС)

$$\frac{dx}{dt} = JA(\varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{5}$$

в которой $A(\varepsilon)$ – вещественная симметрическая $(2N \times 2N)$ матрица, зависящая от малого скалярного параметра ε, а ее элементы являются гладкими функциями; матрица J определена равенством:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{здесь } I \text{ – единичная } (N \times N) \text{ матрица.}$$

При $\varepsilon = 0$ система (5) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = JA_0x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \quad \text{где} \quad A_0 = A(0). \tag{6}$$

В параграфе рассматривается вопрос об устойчивости системы (5) при малых значениях $|\varepsilon|$ по имеющейся информации относительно спектра матрицы JA_0.

Говорят, что система (6) является *сильно устойчивой*, если она и все ее достаточно малые линейные автономные гамильтоновы возмущения устойчивы по Ляпунову. Собственное значение λ_0 матрицы JA_0 будем называть *дефинитным*, если для любых соответствующих собственных векторов $e \in \mathbb{C}^{2N}$ выполняется неравенство $(Je, e) \neq 0$. Будем говорить, что собственное значение λ_0 матрицы JA_0 явлется *индефинитным*, если существует соответствующий собственный вектор $e \in \mathbb{C}^{2N}$ такой, что выполняется равенство $(Je, e) = 0$.

Имеет место

Теорема 1. *Система (6) является сильно устойчивой если и только если все собственные значения матрицы JA_0 являются дефинитными.*

Далее рассматривается задача об устойчивости системы (5) в критических случаях, когда матрица JA_0 имеет полупростое или неполупростое (кратности 2) чисто мнимое собственное значение.

Ограничимся здесь рассмотрением случая, когда матрица JA_0 имеет полупростое индефинитное собственное значение $i\omega_0$ кратности 2, где $\omega_0 \geq 0$. Определим два линейно независимых вектора $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ так, что выполняются равенства $JA_0 e = i\omega_0 e$, $JA_0 g = i\omega_0 g$. Так как собственное значение $i\omega_0$ является индефинитным, то эти векторы можно нормировать в соответствии с равенствами

$$(iJe, e) = 1, \qquad (iJg, g) = -1, \qquad (Je, g) = 0. \tag{7}$$

При малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ (возможно, совпадающих) таких, что функции $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ являются непрерывно дифференцируемыми. Указанные функции представимы в виде

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = i\omega_0 + i\varepsilon\xi_1 + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = i\omega_0 + i\varepsilon\xi_2 + O(|\varepsilon|^{3/2}); \tag{8}$$

здесь ξ_1, ξ_2 – это корни квадратного уравнения

$$\xi^2 + (a - b)\xi - ab + c\bar{c} = 0, \tag{9}$$

где $a = (A_1 e, e)$, $b = (A_1 g, g)$, $c = (A_1 g, e)$, $A_1 = A'(0)$. Дискриминант $\Delta = (a + b)^2 - 4|c|^2$ уравнения (9) является вещественным.

Теорема 2. *Если $\Delta > 0$, то при малых $|\varepsilon|$ для данного возмущения JA_1 система (5) устойчива. Если $\Delta < 0$, то при малых ненулевых $|\varepsilon|$ для данного возмущения JA_1 система (5) неустойчива.*

Во втором параграфе рассматривается нелинейная автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы, непрерывно зависящая от малого скалярного параметра ε вида

$$\frac{du}{dt} = J\left(A_0 + \varepsilon A_1 + A_2(\varepsilon)\right)u + a(u,\varepsilon), \quad u \in \mathbb{R}^4; \tag{10}$$

здесь вещественные симметрические матрицы A_0, A_1 не зависят от ε, а элементы вещественной симметричной матрицы $A_2(\varepsilon)$ являются гладкими функциями, причем $\|A_2(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Функция $a(u,\varepsilon)$ является гладкой по u и ε и удовлетворяет условию: $\|a(u,\varepsilon)\| = O(\|u\|^2)$ при $\|u\| \to 0$ равномерно по ε.

В параграфе рассматривается задача об устойчивости нулевого положения равновесия нелинейной гамильтоновой системы (10) при малых значениях $|\varepsilon|$ в критических случаях, когда матрица JA_0 имеет

P_1. две пары простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$;

P_2. полупростое (кратности 2) нулевое собственное значение и пару простых собственных значений $\pm i\omega_1$, $\omega_1 > 0$;

P_3. полупростое (кратности 2) чисто мнимое собственное значение $i\omega_0$, $\omega_0 \geq 0$;

P_4. неполупростое (кратности 2) чисто мнимое собственное значение $i\omega_0$, $\omega_0 \geq 0$.

Ограничимся здесь рассмотрением случая P_3. Пусть матрица JA_0 системы (10) имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geq 0$; в данном случае выполняются условия резонанса. Если $i\omega_0$ является дефинитным собственным значением матрицы JA_0, то нулевое положение равновесия системы (10) является устойчивым при всех малых $|\varepsilon|$.

Пусть $i\omega_0$ является индефинитным собственным значением матрицы JA_0. Определим два линейно независимых вектора $e, g \in \mathbb{C}^4$ так, что выполняются равенства: $JA_0e = i\omega_0 e$, $JA_0 g = i\omega_0 g$. Векторы можно считать нормированными в соответствии с равенствами (7).

При малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$, при $\varepsilon \to 0$ представимых в виде (8). Дискриминант $\Delta = (a+b)^2 - 4|c|^2$ уравнения (9) является вещественным.

Теорема 3. *Если $\Delta < 0$, то при малых ненулевых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (10) неустойчиво.*

Пусть $\Delta > 0$. В этом случае в работе обсуждаются условия, при выполнении которых нулевое положение равновесия системы (10) будет устойчивым при малых ненулевых $|\varepsilon|$. Выполняемость этих условий зависит от коэффициентов ξ_1 и ξ_2 в представлениях (8) собственных значений $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$. Существенную роль в указанных условиях играет теорема Арнольда-Мозера об устойчивости ЛАГС с двумя степенями свободы.

В третьем параграфе в качестве приложения рассматривается одноконтурная система управления (уравнения Лурье), состоящая из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией $M(p,\varepsilon)/L(p,\varepsilon)$ и нелинейной обратной связи f :

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2},\varepsilon\right)u = M\left(\frac{d^2}{dt^2},\varepsilon\right)f(u).$$

Здесь $L(p,\varepsilon)$, $M(p,\varepsilon)$ – взаимно простые многочлены степеней l и m ($l > m$):

$$L(p,\varepsilon) = p^l + \alpha_1(\varepsilon)p^{l-1} + \ldots + \alpha_l(\varepsilon),$$

$$M(p,\varepsilon) = \beta_0(\varepsilon)p^m + \beta_1(\varepsilon)p^{m-1} + \ldots + \beta_m(\varepsilon), \quad \beta_0(\varepsilon) \neq 0,$$

коэффициенты которых являются гладкими функциями от малого параметра ε. Функция $f(u)$ гладкая по u и удовлетворяет условию $f(0) = 0$.

Уравнение Лурье сводится к гамильтоновой системе вида (10). В диссертации определены условия устойчивости нулевого решения $u = 0$ уравнения Лурье в основных критических случаях.

Третья глава посвящена исследованию устойчивости точек равновесия периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра. Основное внимание уделяется изучению задачи о параметрическом резонансе.

В первом параграфе главы рассматривается линейная периодическая гамильтонова система (ЛПГС), зависящая от малого параметра ε вида

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0(t) + \varepsilon A_1(t) + A_2(t,\varepsilon)\right]x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{11}$$

в котором $A_0(t)$, $A_1(t)$ и $A_2(t,\varepsilon)$ – вещественные, симметрические и T-периодические по t матрицы, при этом матрица $A_2(t,\varepsilon)$ является гладкой по ε и удовлетворяет соотношению: $\|A_2(t,\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по t. При $\varepsilon = 0$ система (11) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = JA_0(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}. \tag{12}$$

Систему (12) называют *сильно (параметрически) устойчивой*, если она и все ее достаточно малые линейные периодические гамильтоновы возмущения устойчивы по Ляпунову. Вопрос о сильной устойчивости системы (12) особо важен в случае, когда все мультипликаторы системы (12) удовлетворяют условию $|\mu| = 1$ и среди них имеется хотя бы один кратный мультипликатор.

Мультипликатор μ_0 системы (12) называют *дефинитным*, если для любых соответствующих собственных векторов $e \in \mathbb{C}^{2N}$ выполняется неравенство $(Je, e) \neq 0$. Мультипликатор μ_0 системы (12) явлется *индефинитным*, если существует соответствующий собственный вектор $e \in \mathbb{C}^{2N}$ такой, что выполняется равенство $(Je, e) = 0$.

В параграфе приводятся новые формулы для возмущений дефинитных и индефинитных мультипликаторов системы (12) в следующих основных случаях, когда эта система имеет:

P_1. полупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 так, что $|\mu_0| = 1$;

P_2. неполупростой (кратности 2) мультипликатор $\mu_0 : |\mu_0| = 1$.

Будем предполагать, что остальные (отличные от μ_0) мультипликаторы μ системы (12) удовлетворяют условию $|\mu| = 1$ и являются простыми.

Ограничимся здесь рассмотрением подслучая случая P_1, когда мультипликатор μ_0 является индефинитным. Для матрицы монодромии V_0 системы (12) существуют линейно независимые векторы $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ такие, что

$$V_0 e = \mu_0 e, \quad V_0 g = \mu_0 g, \tag{13}$$

и имеет место нормировка (7).

При малых $|\varepsilon|$ матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (11), имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ являются непрерывно дифференцируемыми, причем $\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu_0$. Эти функции при $\varepsilon \to 0$ представимы в виде

$$\mu^{(1)}(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon i \mu_0 \lambda_1 + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \mu^{(2)}(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon i \mu_0 \lambda_2 + O(|\varepsilon|^{3/2}), \tag{14}$$

где λ_1 и λ_2 – корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (a - b)\lambda - ab + c\bar{c} = 0. \tag{15}$$

Здесь $a =< e, e >$, $b =< g, g >$, $c =< g, e >$, где выражение $< v, w >$ (здесь $v, w \in \mathbb{C}^{2N}$) обозначает билинейный функционал

$$< v, w >= \int_0^T (X^{-1}(t) J A_1(t) X(t) v, Jw) dt,$$

в котором $A_1(t)$ – матрица из системы (11), $X(t)$ – ФМР системы (12).

Дискриминант $\Delta = (a+b)^2 - 4c\bar{c}$, уравнения (15) является вещественным числом.

Теорема 4. *Если $\Delta > 0$, то при малых $|\varepsilon|$ система (12) устойчива. Если $\Delta < 0$, то при малых ненулевых $|\varepsilon|$ система (12) неустойчива.*

Во втором параграфе главы изучается задача о параметрическом резонансе для ЛПГС

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0 + \varepsilon A_1(t) + A_2(t, \varepsilon)\right] x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{16}$$

в следующих основных случаях, когда матрица JA_0 имеет:

1^0. полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k.

2^0. неполупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k.

3^0. два простых собственных значения $i\omega_1$ и $i\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 > 0$, $\omega_1, \omega_2 \neq \pi k/T$ при натуральных k, при этом $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi k_0/T$ при некотором натуральном k_0.

4^0. простое собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 = \pi k_0/T$ при некотором натуральном k_0.

Во всех этих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы JA_0 являются простыми и чисто мнимыми, не удовлетворяющими резонансным соотношениям.

Ограничимся рассмотрением здесь в краткой форме полученных результатов для случая 1^0. В рассматриваемом случае матрица монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$ системы

$$\frac{dx}{dt} = JA_0x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}. \tag{17}$$

имеет полупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ кратности 2. Отметим, что мультипликатор μ_0 может быть как дефинитным, так и индефинитным, а при $\omega_0 = 0$ он является индефинитным.

Если μ_0 является дефинитным мультипликатором системы (17), то при малых $|\varepsilon|$ система (16) является устойчивой, а система (17) – сильно устойчивой.

Пусть μ_0 является индефинитным мультипликатором системы (17). Определим линейно независимые векторы $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ такие, что $JA_0e = i\omega_0e$, $JA_0g = i\omega_0g$, и имеет место нормировка (7). Далее положим

$$S_0 = \int_0^T A_1(t)dt, \quad a = (S_0e, e), \quad b = (S_0g, g), \quad c = (S_0g, e).$$

Отметим, что числа a и b являются вещественными, а число c, вообще говоря, комплексное. Определим число $\Delta = (a+b)^2 - 4c\bar{c}$, оно вещественное.

Теорема 5. *Пусть $\Delta > 0$. Тогда для данного возмущения $JA_1(t)$ системы (16) и всех малых ненулевых $|\varepsilon|$ система (16) устойчива. Пусть $\Delta < 0$. Тогда для данного возмущения $JA_1(t)$ и всех малых ненулевых $|\varepsilon|$ система (16) неустойчива.*

В третьем параграфе рассматривается задача об устойчивости нулевого положения равновесия нелинейных периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы вида

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0 + \varepsilon A_1(t) + A_2(t,\varepsilon)\right]x + a(x,t,\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^4, \tag{18}$$

где A_0, $A_1(t), A_2(t,\varepsilon)$ – вещественные симметрические матрицы, $A_1(t), A_2(t,\varepsilon)$ являются T-периодическими. Функция $a(x,t,\varepsilon)$ и матрица $A_2(t,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям: $\|a(x,t,\varepsilon)\| = O(\|x^2\|)$ при $\|x\| \to 0$ и $\|A_2(t,\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\|\varepsilon\| \to 0$, равномерно по ε и t. Все входящие в уравнение (18) функции и матрицы предполагаются непрерывными по t и гладкими по x и ε.

Точку равновесия $x = 0$ системы (18) называют *формально устойчивой*, если существует формальный знакоопределенный интеграл $G(x,t,\varepsilon) = G_2(x,t,\varepsilon) + G_3(x,t,\varepsilon) + G_4(x,t,\varepsilon) + \ldots$ системы (18). Формальность понимается в том смысле, что ряд $G(x,t,\varepsilon)$ может расходиться в окрестности точки $x = 0$.

В параграфе рассматривается вопрос об устойчивости точки равновесия $x = 0$ системы (18) при малых значениях $|\varepsilon|$ в критических случаях, когда матрица JA_0 имеет:

1^0. два простых собственных значения $i\omega_1$ и $i\omega_2$, где $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$, $\omega_1, \omega_2 \neq \pi k/T$ и $\omega_1 - \omega_2 \neq 2\pi k/T$ при натуральных k;

2^0. два простых собственных значения $i\omega_1$ и $i\omega_2$ таких, что $\omega_1 = \pi k_0/T$ при некотором натуральном k_0 ($\omega_2 > 0$ и $\omega_2 \neq \pi k/T$ при натуральных k);

3^0. два простых собственных значения $i\omega_1$ и $i\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 \geq 0$, при этом выполняется условие комбинационного резонанса $\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi k_0}{T}$ при некотором целом k_0.

Ограничимся здесь рассмотрением случая 2^0. Определим ненулевой вектор $e + ig \in \mathbb{C}^4$ (где $e, g \in \mathbb{R}^4$) такой, что $JA_0(e+ig) = i\omega_1(e+ig)$. Определим постоянную матрицу $S_0 = \int_0^T A_1(t)dt$, где $A_1(t)$ – матрица, участвующая в системе (18). Положим $\Delta_1 = a^2 + b_1 b_2$, где

$$
\begin{aligned}
a &= \int_0^T \{\cos(2\omega_1 t)\,(A_1(t)e, g) - \frac{1}{2}\sin(2\omega_1 t)\,[(A_1(t)g, g) - (A_1(t)e, e)]\}dt,\\
b_1 &= \int_0^T [\cos^2(\omega_1 t)\,(A_1(t)g, g) + \sin^2(\omega_1 t)\,(A_1(t)e, e) + \sin(2\omega_1 t)\,(A_1(t)e, g)]dt,\\
b_2 &= b_1 - [(S_0 e, e) + (S_0 g, g)].
\end{aligned}
$$

Обозначим через $V(\varepsilon)$ матрицу монодромии системы (16); при малых $|\varepsilon|$ матрица $V(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$, $\mu_0 = e^{i\omega_1 T}$. При этом, функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ гладкие и представимы в виде:

$$
\mu^{(1)}(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(1)}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2}), \qquad \mu^{(2)}(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(2)}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2}). \quad (19)
$$

Здесь коэффициенты $\mu_1^{(1)}$и $\mu_1^{(2)}$ – это числа определенные формулами:

$$
\mu_1^{(1)} = \frac{1}{(e, Jg)}\mu_0\sqrt{\Delta_1}, \qquad \mu_1^{(2)} = -\mu_1^{(1)}.
$$

Теорема 6. *Если $\Delta_1 > 0$, то при малых ненулевых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (18) неустойчиво.*

Пусть $\Delta_1 < 0$. В этом случае в работе обсуждаются условия, при выполнении которых нулевое положение равновесия системы (18) будет формально устойчивым при малых ненулевых $|\varepsilon|$. Выполняемость этих условий зависит от коэффициентов $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в представлениях (19) мультипликаторов $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$. Существенную роль в указанных условиях играет теорема Арнольда-Мозера о формальной устойчивости ЛПГС с двумя степенями свободы.

В четвертом и пятом параграфах рассматриваются приложения.

В четвертом параграфе главы рассматривается *уравнение Матье*:

$$u'' + (\alpha + \varepsilon \cos 2t)u = 0,$$

где α и ε – вещественные параметры. Решается задача исследования устойчивости этого уравнения и, в частности, задача построения границ областей устойчивости в плоскости параметров (α, ε).

В пятом параграфе главы рассматривается задача о построении и изучении границ областей устойчивости плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел, описываемой гамильтоновой системой с 2π-периодической правой частью вида:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = -x_1 + x_4, \\ x_3' = -x_1 + x_4 + \rho \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \\ x_4' = -x_2 - x_3 + \rho \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_2}; \end{cases}$$

здесь $\Omega(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \dfrac{1-\mu}{\sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}} + \dfrac{\mu}{\sqrt{(x_1+\mu-1)^2 + x_2^2}}$,

$\rho = \dfrac{1}{1 + \varepsilon \cos t}$, ε – эксцентриситет кеплеровской орбиты $(0 \le \varepsilon < 1)$, t – истинная аномалия, $\mu = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$ – параметр масс $(0 < \mu < 1)$, m_1 и m_2 – массы активно гравитирующих тел.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Разработаны новые формулы первого приближения для возмущений собственных значений гамильтоновых матриц, зависящих от малого параметра. На основе разработанных формул получены новые признаки устойчивости решений автономных гамильтоновых систем в критических случаях.

2. Разработаны новые формулы первого приближения в задаче о возмущении мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра. На основе разработанных формул получены новые признаки устойчивости решений периодических гамильтоновых систем в критических случаях.
3. Разработаны новые подходы исследования задачи о параметрическом резонансе для линейных и нелинейных периодических гамильтоновых систем. Изучен ряд приложений в задачах теории управления и механики.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

1. Belova, A. S. Boundaries of the region of stability of autonomous Hamiltonian systems / A. S. Belova, L. S. Ibragimova, I. G. Mustafina // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – V. 44, № 5 – P. 1823—1828.
2. Belova, A. S. Stability of equilibrium points for a Hamiltonian systems with two degrees of freedom in the problem of parametric resonance / A. S. Belova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – V. 43, № 6 – P. 1486—1491.
3. Юмагулов, М. Г. Исследование задачи о параметрическом резонансе в системах Лурье со слабоосциллирующими коэффициентами / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова // Автомат. и телемех. – 2022. – Т. 2, С. 107–121.
4. Юмагулов, М. Г. Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова // Уфимск. матем. журн. – 2021. – Т. 13, № 3, С.178–195.
5. Yumagulov, M. G. Methods for studying the stability of linear periodic systems depending on a small parameter / M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova, A. S. Belova // J. Math. Sci., New York. – 2021. – V. 258, № 1 – P. 115—127.
6. Yumagulov, M. G. First approximation formulas in the problem of perturbation of definite and indefinite multipliers of linear Hamiltonian systems / M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova, A. S. Belova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – V. 42, № 15 – P. 3773—3783.
7. Yumagulov, M. G. Approximate research of problems on perturbation of periodic and autonomous Hamiltonian systems in critical cases / M.

G. Yumagulov, L. S. Ibragimova, A. S. Belova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – V. 41, № 9 – P. 1924—1931.

8. Юмагулов, М. Г. Алгоритмы построения границ областей устойчивости линейных гамильтоновых систем с помощью пакета Matlab / М. Г. Юмагулов, А. С. Белова // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2017. – Т. 13, № 4 – С. 270—275.

Материалы конференций

9. Белова А.С. Построение границ областей устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы / А. С. Белова, Л. С. Ибрагимова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции (оз. Банное, 13 – 17 марта 2023 г.) – Уфа: ООО "Аэтерна". — 2023. – С. 20.

10. Белова, А. С. Устойчивость точек равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в задаче о параметрическом резонансе / А. С. Белова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения : сборник материалов Международной научной конференции, оз. Банное, 14–18 марта 2022 года. – Уфа: ООО "Аэтерна". — 2022. – С. 13—14.

11. Ибрагимова, Л. С. О сильной и слабой устойчивости автономных и периодических гамильтоновых систем / Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа : Материалы Международной научной конференции, Уфа, 28 сентября – 01 2022 года. Т. 2. – Уфа: ФГБОУ ВО УУНиТ, 2022. – С. 180—181.

12. Белова, А. С. Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем / А. С. Белова // Конференция международных математических центров мирового уровня 13 августа 2021 г. 15:10–15:30, Математическая физика, г. Сочи. — 2021.

13. Белова, А. С. Устойчивость системы двух связанных осцилляторов / А. С. Белова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: спутник Международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа-2021". Тезисы докладов XII Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 100-летию профессора БашГУ Фарзтдинова Миркашира Минигалиевича. Отв. редактор Л.А. Габдрахманова. — 2021. – С. 7.

14. Белова, А. С. Исследование задачи о параметрическом резонансе в системах Лурье со слабоосциллирующими коэффициентами / А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа - 2021 : Материалы международной научной конференции, Уфа, 06–09 октября 2021 года. Том 2. – Уфа: ООО "Аэтерна". — 2021. – С. 31—32.

15. Белова, А. С. Формулы первого приближения для дефинитных и индефинитных мультипликаторов гамильтоновых систем и их приложения / А. С. Белова, Л. С. Ибрагимова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения : Сборник тезисов Международной научной конференции, оз. Банное, 15–19 марта 2021 года. – Уфа: ООО "Аэтерна". — 2021. – С. 81—82.
16. Юмагулов, М. Г. Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа - 2021 : Материалы международной научной конференции, Уфа, 06–09 октября 2021 года. Т. 1. – Уфа: ООО "Аэтерна 2021. – С. 236—237.
17. Белова, А. С. Признаки локальных бифуркаций в окрестностях точек равновесий гамильтоновых систем / А. С. Белова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения : Сборник тезисов Международной научной конференции, оз. Банное, 10–14 марта 2020 года / Отв. редактор Р.Н. Гарифуллин. – оз. Банное: Башкирский государственный университет, — 2020. – С. 17—18.
18. Юмагулов, М. Г. Формулы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для гамильтоновых систем / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа - 2020 : Сборник тезисов международной научной конференции. В 2 ч., Уфа, 11–14 ноября 2020 года. Том 2. – Уфа: ООО "Аэтерна". — 2020. — С. 156—158.
19. Белова, А. С. О достаточных условиях локальных бифуркаций в гамильтоновых динамических системах / А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа : Сборник тезисов Международной научной конференции, Уфа, 16–19 октября 2019 года / Ответственный редактор З.Ю. Фазуллин. – Уфа: БашГУ. — 2019. – С. 38—39.
20. Белова, А. С. О построении границ областей устойчивости в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел / А. С. Белова // Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева, Сборник тезисов, Уфа, 24–27 мая 2017 года. – Уфа: БашГУ, 2017. – С. 22—23.