ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

На правах рукописи

БЕЛОВА АННА СЕРГЕЕВНА

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Юмагулов Марат Гаязович

Уфа – 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Вопросы разработки методов исследования задач об устойчивости и о параметрическом резонансе гамильтоновых систем привлекали и продолжают привлекать повышенное внимание многих исследователей. Интерес к изучению этих вопросов связан как с многочисленными приложениями, так и потребностями самой теории. Из большого многообразия литературных источников отметим работы отечественных и зарубежных ученых: А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда, Ю. Мозера, Дж. Биркгофа, А.Д. Брюно, Дж. Гукенхеймера, Ю.С. Ильяшенко, В.В. Козлова, И.Г. Малкина, Д. Трещева, Л.П. Шильникова, М.А. Красносельского, А.П. Маркеева, В.Ф. Журавлева, Ф.Г. Петрова, В.В. Козлова, В.А. Якубовича, В.М. Старжинского, И.М. Гельфанда и В.Б. Лидского, М.Г. Крейна, К. Мейера, Дж. Холла, Д. Оффина, А.Х. Гелига, Дж.М.Т. Томпсона, Й.Й. Томсена, К. Хусейна, Г. Циглера, В. Ланчареса, Р.Р. Мухина и др. (см. [1—20] и имеющуюся там библиографию).

Одно из центральных мест в исследовании задач об устойчивости и о параметрическом резонансе гамильтоновых систем занимает задача об устойчивости систем с малым параметром в критических случаях; здесь условно следует выделить два подхода.

Первый подход основан на методах нормализации гамильтоновых систем, т.е. на преобразовании переменных таким образом, чтобы уравнения движения стали как можно более простыми и удобными для анализа. Первый математический аппарат, схожий с методом нормализации автономных гамильтоновых систем, был предложен Ш. Делоне и С. Ньюкомбом (см, например, [21; 22]) в теории движения Луны и больших планет; первый завершенный метод нормализации гамильтонианов был изложен Дж. Биркгофом (см. [2]). Дальнейшее развитие классический метод Биркгофа получил в работах Дж. Хори и А. Депри ([23; 24]), в которых предложен новый способ построения канонического преобразования. После работ Хори и Депри появился ряд исследований, посвященных более детальной разработке метода нормализации Хори–Депри и его различным модификациям. Среди них наиболее значительными являются работы А.П. Маркеева ([25; 26]), А.Г. Сокольского и С.А. Хованского ([27]), В.Ф. Журавлева и Ф.Г. Петрова ([9]), А.Д. Брюно и А.Б. Батхина (см. работы [28—31] и имеющуюся там библиографию).

Стоит также отметить, что А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд и Ю. Мозер добились значительных результатов в своих исследованиях, известных как КАМ теория (см. работы [4; 32; 33]). Эти результаты позволили сделать выводы о стабильности и общей природе движения систем близких к интегрируемым гамильтоновым системам. Отметим, что процедура нормализации автономных гамильтоновых систем была распространена на случай неавтономных гамильтоновых систем, что было представлено в работах В.А. Мерсмана ([34]), А.Д. Брюно и А.Б. Батхина ([28; 29]), К. Мейера и Д. Оффина ([35]). Однако, если в автономном случае нормализация требует решения алгебраических уравнений, то в неавтономном случае необходимо решать системы дифференциальных уравнений. В работах А.П. Иванова и А.Г. Сокольского (см., например, [27; 36]) был предложен алгоритм нормализации неавтономных гамильтоновых систем, а также определены условия устойчивости и неустойчивости положения равновесия. В работе В.Ф. Журавлева, Ф.Г. Петрова и М.М. Шундерюк ([9]) был предложен алгоритм симметризации с помощью производящего гамильтониана.

Второй подход основан на классических методах теории возмущений линейных операторов и общих методов малого параметра без предварительной нормализации. Этот подход условно можно назвать операторным методом.

В работах А.А. Майлыбаева и А.П. Сейраняна ([37]) рассматривался случай нескольких параметров в задачах о возмущении собственных значений матриц с использованием метода возмущений по направлению в пространстве параметров. Интерес к возмущениям собственных значений также проявляли И.М. Гельфанд и В.Б. Лидский ([1]), М.Г. Крейн и Г.Я. Любарский ([12]) в отношении матриц монодромии линейных канонических систем с периодическими коэффициентами. Случай гамильтоновых матриц был изучен Дж.Х. Маддоксом и М.Л. Овертоном ([38]). В большинстве работ (см., например, [39—41]) было отмечено, что в исследованиях гамильтоновых систем возникает множество резонансных случаев, каждый из которых требует отдельного детального изучения, разработки новых подходов и методов.

Несмотря на то, что анализу различных аспектов движения гамильтоновых систем при резонансах было посвящено много работ, эта область нелинейной динамики остается актуальной и привлекает немалый интерес.

Представляется актуальным и важным дальнейшее развитие операторного подхода для изучения задач исследования устойчивости гамильтоновых систем в резонансных случаях.

Целью исследования является разработка новых формул, позволяющих производить качественное и приближенное исследование в задаче об устойчивости и о параметрическом резонансе для линейных и нелинейных автономных и периодических гамильтоновых систем.

Задачи исследования::

1. Получение формул первого приближения для возмущений собственных значений гамильтоновых матриц, зависящих от малого параметра. Разработка приложений в задаче об устойчивости решений автономных гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра.
2. Получение формул первого приближения для возмущений кратных дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем. Разработка приложений в задаче об устойчивости решений периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра.
3. Разработка приложений к исследованию задачи о параметрическом резонансе периодических гамильтоновых систем.

Научная новизна определяется впервые проведенными исследованиями, в результате которых разработан математический аппарат для качественного и приближенного исследования задачи об устойчивости и о параметрическом резонансе гамильтоновых систем.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. В ней предложены и обоснованы качественный и приближенный методы исследования задачи об устойчивости и о параметрическом резонансе гамильтоновых систем. Полученные результаты доведены до расчетных формул. Предлагаемые методы могут быть использованы в задаче о построении границ областей устойчивости гамильтоновых систем в пространстве их параметров.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории гамильтоновых систем, теории устойчивости. Используются также методы теории возмущений линейных операторов, в том числе разработанные ранее автором работы схемы получения формул первого приближения для возмущений собственных значений линейных автономных гамильтоновых систем и дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. получены новые формулы первого приближения для возмущений собственных значений автономных гамильтоновых матриц;
2. получены новые признаки устойчивости линейных автономных гамильтоновых систем и точек равновесия нелинейных автономных гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра;
3. получены новые формулы первого приближения для возмущений дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем;
4. получены новые признаки устойчивости линейных периодических гамильтоновых систем и точек равновесия нелинейных периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра;
5. разработан новый подход исследования задач о параметрическом резонансе, приводящий к новым признакам устойчивости линейных и нелинейных периодических гамильтоновых систем.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на заседаниях научных семинаров: на научном семинаре лаборатории динамических систем и приложений ФГБОУ ВО Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (руководители: д.ф.-м.н., профессор В.З. Гринес и д.ф.-м.н., профессор Д.В. Тураев); на Общегородском семинаре им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (руководители: д.ф.-м.н., профессор Л.А. Калякин и д.ф.-м.н., профессор В.Ю. Новокшенов); на постоянно действующем научном семинаре кафедр математического анализа и дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Уфимского университета науки и технологий» (руководители: д.ф.-м.н., профессор М.Г. Юмагулов и д.ф.-м.н., доцент З.Ю. Фазуллин).

Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях: Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023); Международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (Южный Урал, Якты-Куль (озеро Банное), 2020, 2021, 2022, 2023); Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева (г. Уфа, 2017); Международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, 2020, 2021), XII Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (г. Москва, 2017), Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 2020, 2021), Конференция международных математических центров мирового уровня (г. Сочи, 2021).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах [42—49] в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК РФ или приравненных к ним, в том числе работы [42—48] в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

Кроме того, в сборниках трудов конференций [50—61] опубликованы как тезисы докладов основные идеи и результаты исследований, проведенных в диссертации.

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В совместных публикациях [44—49] научному руководителю, Юмагулову М.Г., принадлежат постановки задач. При выполнении работ [42; 44—47], опубликованных в соавторстве, соискателем были разработаны формулы приближенного построения собственных значений (мультипликаторов) автономных и периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра в основных критических случаях. При выполнении работы [49], опубликованной в соавторстве, соискателем были приведены основные этапы алгоритма построения областей устойчивости динамических систем, описываемых линейной гамильтоновой системой вида.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Главы разбиты на параграфы. Нумерация формул двойная – первая цифра означает номер главы, вторая – номер формулы в главе. Такая же нумерация принята для лемм, теорем. Полный объем диссертации составляет 118 страниц. Список литературы содержит 107 наименований.

Глава 1. Формулы теории возмущений и их приложения

Глава посвящена построению формул теории возмущений линейных операторов, зависящих от малого параметра и их приложениям в задаче исследования устойчивости точек равновесия автономных и периодических дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра.

1.1 Задача о возмущении спектра линейного оператора

В настоящей работе для простоты будем отождествлять понятие вещественного линейного оператора $A : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ и соответствующей матрицы A этого оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^N$.

Пусть $A(\varepsilon)$ – квадратная порядка N вещественная матрица, зависящая от скалярного параметра ε. Пусть ее элементы являются C^k-гладкими ($k \geqslant 1$) функциями по ε. Тогда матрица $A(\varepsilon)$ представима в виде

$$A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots + \varepsilon^k A_k + A_{k+1}(\varepsilon), \tag{1.1}$$

в котором матрицы $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ не зависят от ε, а элементы матрицы $A_{k+1}(\varepsilon)$ являются C^k-гладкими функциями, причем $\|A_{k+1}(\varepsilon)\| = o(|\varepsilon|^k)$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть матрица $A_0 = A(0)$ имеет собственное значение λ_0 (простое или кратное). В этом случае при малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет одно или несколько собственных значений $\lambda(\varepsilon)$ близких к λ_0.

Вопросам изучения задачи о возмущении собственных значений оператора $A(\varepsilon)$, а также связанных с ними вопросам об их приложений посвящена обширная литература (см., например, [62—64] и имеющуюся там библиографию). В этом параграфе будут приведены некоторые формулы теории возмущений линейных операторов, зависящих от малого параметра, в удобном для нас формате для дальнейшего исследования устойчивости автономных и периодических, в первую очередь, гамильтоновых систем.

Будем различать случаи, когда собственное значение λ_0 является простым, полупростым или неполупростым. Рассмотрим эти случаи более детально, приведя некоторые сведения из теории возмущений линейных операторов.

1.1.1 Простое собственное значение

Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Согласно теории возмущений линейных операторов (см., например, [64]) при малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет простое собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ такое, что функция $\lambda(\varepsilon)$ является C^k-гладкой и $\lambda(0) = \lambda_0$. Более того, функция $\lambda(\varepsilon)$ представима в виде

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots + \varepsilon^k\lambda_k + \lambda_{k+1}(\varepsilon), \tag{1.2}$$

в котором числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ не зависят от ε, а функция $\lambda_{k+1}(\varepsilon)$ является C^k-гладкой, причем $\lambda_{k+1}(\varepsilon) = o(|\varepsilon|^k)$ при $\varepsilon \to 0$.

То же самое (в естественном смысле) можно говорить и о собственных векторах матрицы $A(\varepsilon)$. А именно, пусть $e \in \mathbb{C}^N$ – собственный вектор матрицы A_0, отвечающий простому собственному значению λ_0, т.е. $A_0e = \lambda_0 e$. Тогда соответствующий собственному значению $\lambda(\varepsilon)$ матрицы $A(\varepsilon)$ собственный вектор $e(\varepsilon)$ также можно выбрать из условия непрерывности так, что $e(0) = e$. Более того, функцию $e(\varepsilon)$ можно выбрать C^k-гладкой и представимой в аналогичном (1.2) виде:

$$e(\varepsilon) = e + \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \ldots + \varepsilon^k e_k + e_{k+1}(\varepsilon), \tag{1.3}$$

в котором векторы $e, e_1, e_2, \ldots, e_k$ не зависят от ε, а вектор-функция $e_{k+1}(\varepsilon)$ является C^k-гладкой, причем $\|e_{k+1}(\varepsilon)\| = o(|\varepsilon|^k)$ при $\varepsilon \to 0$.

Укажем схему, позволяющую вычислить коэффициенты в разложении (1.2). Сопряженный оператор A_0^* имеет простое собственное значение $\bar{\lambda}_0$, которому отвечает собственный вектор $g \in \mathbb{C}^N$. Таким образом, имеем равенства:

$$A_0 e = \lambda_0 e, \qquad A_0^* g = \bar{\lambda}_0 g. \tag{1.4}$$

В этих равенствах векторы e и g определяются неоднозначно; нас больше интересует нормировка следующего плана.

Лемма 1.1. *Векторы e и g можно нормировать в соответствии с равенством*

$$(e, g) = 1. \tag{1.5}$$

Здесь и ниже символ $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов в пространствах $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{C}^N$.

Доказательство. Покажем, что $(e,g)\neq 0$. Доказательство построим от противного, т.е. пусть $(e,g)=0$. Обозначим через $E_0\subset\mathbb{C}^N$ – корневое (одномерное) подпространство оператора A_0, отвечающее части $\sigma_0=\{\lambda_0\}$ его спектра; таким образом, $e\in E_0$. Через E^0 обозначим дополнительное к E_0 инвариантное для A_0 подпространство; оно определяется равенством $E^0=\{v : v\in\mathbb{C}^N, (v,g)=0\}$.

Тогда при нашем предположении $(e,g)=0$ имеем: $e\in E^0$. Отсюда и из равенства $\mathbb{C}^N=E_0\oplus E^0$ получим, что $e=0$. Это противоречит тому, что вектор e является собственным и, следовательно, ненулевым.

Далее положим $C_0=(e,g)$ и определим новый вектор $e_1=e/C_0$. Векторы e_1,g удовлетворяют равенствам (1.4), и для них выполняется условие (1.5). □

Лемма 1.2. *Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение $\lambda_0\in\mathbb{C}$. Пусть векторы $e,g\in\mathbb{C}^N$, удовлетворяющие соотношениям (1.4), нормированы в соответствии с равенством (1.5). Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет простое собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ представимое в виде (1.2), где коэффициент λ_1 равен числу*

$$\lambda_1=(A_1e,g); \tag{1.6}$$

здесь $A_1=A'(0)$ – матрица из (1.1).

Доказательство. В наших предположениях имеем: $A(\varepsilon)e(\varepsilon)=\lambda(\varepsilon)e(\varepsilon)$. Подставив в это равенство выражения (1.1) – (1.3) получим:

$$(A_0+\varepsilon A_1+\ldots+\varepsilon^kA_k+A_{k+1}(\varepsilon))(e+\varepsilon e_1+\ldots+\varepsilon^ke_k+e_{k+1}(\varepsilon))=$$
$$(\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\ldots+\varepsilon^k\lambda_k+\lambda_{k+1}(\varepsilon))(e+\varepsilon e_1+\ldots+\varepsilon^ke_k+e_{k+1}(\varepsilon)).$$

Приравнивая в полученном равенстве выражения при одинаковых степенях ε, получим последовательность уравнений:

$$A_0e=\lambda_0e,$$
$$A_0e_1+A_1e=\lambda_0e_1+\lambda_1e,$$
$$A_0e_2+A_1e_1+A_2e=\lambda_0e_2+\lambda_1e_1+\lambda_2e \text{ и т.д.}$$

Первое уравнение – тривиально. Что касается последующих уравнений, то они однотипны; их можно представить в виде:

$$B_0e_1=(-A_1+\lambda_1I)e, \tag{1.7}$$

$$B_0 e_2 = (-A_1 + \lambda_1 I)e_1 + (-A_2 + \lambda_2 I)e \text{ и т.д.}; \tag{1.8}$$

здесь $B_0 = A_0 - \lambda_0 I$, где I – единичная $(N \times N)$ матрица.

Вектор e (вектор g) является собственным вектором матрицы B_0 (матрицы B_0^*), соответствующим простому собственному значению 0. Согласно теоремам Фредгольма (см., например, [65], стр. 238) уравнение $B_0 x = b$ разрешимо, если и только если $(b, g) = 0$. Поэтому уравнения (1.7), (1.8) и т.д. разрешимы, если и только если их правые части ортогональны вектору g.

Условие разрешимости уравнения (1.7), т.е. условие $((-A_1 + \lambda_1 I)e, g) = 0$, приводит к равенству $\lambda_1 = \frac{(A_1 e, g)}{(e, g)}$, которое в силу нормировки (1.5) совпадает с числом (1.6).

Продолжая этот процесс подобным образом можно определить и последующие коэффициенты $\lambda_3, \lambda_4, \ldots$ в разложении (1.2). □

1.1.1.1 Чисто мнимое собственное значение

Во многих приложениях возникает вопрос о формулах возмущений простых чисто мнимых собственных значений. Рассмотрим соответствующий случай, а именно, положим, что матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$. В этом случае остается верна нормировка (1.5), указанная в лемме 1.1, и имеет место лемма 1.2. При этом формула (1.6) может быть представлена в более информативном виде.

При малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет пару простых собственных значений $\lambda(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon)$ и $\bar{\lambda}(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) - i\beta(\varepsilon)$, при этом функции $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ являются C^k-гладкими $(k \geqslant 1)$ и представимыми в виде, аналогичном представлению (1.2):

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon) &= \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots + \varepsilon^k\alpha_k + \alpha_{k+1}(\varepsilon), \\ \beta(\varepsilon) &= \omega_0 + \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \ldots + \varepsilon^k\beta_k + \beta_{k+1}(\varepsilon), \end{aligned} \tag{1.9}$$

в котором числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_k$ не зависят от ε, а функции $\alpha_{k+1}(\varepsilon) = o(|\varepsilon|^k)$, $\beta_{k+1}(\varepsilon) = o(|\varepsilon|^k)$ при $\varepsilon \to 0$.

Для вычисления коэффициентов в разложениях (1.9) можно использовать схему, приведенную при доказательстве леммы 1.2 (с естественными модификациями, учитывающими, что в рассматриваемом случае собственные значения являются комплексными).

Пусть $e + ig$ – это собственный вектор, отвечающий собственному значению $i\omega_0$ (здесь $e, g \in \mathbb{R}^N$). Отметим, что матрица A_0^* имеет собственное значение

$\bar{\lambda}_0 = -i\omega_0$, а $e^* + ig^*$ – это соответствующий собственный вектор (здесь $e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$). Таким образом, имеем равенства:

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*). \tag{1.10}$$

Как было отмечено в лемме 1.1, вектора $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$ могут быть нормированы равенством (1.5): $(e + ig, e^* + ig^*) = 1$. Покажем, что возможна следующая эквивалентная нормировка этих векторов.

Лемма 1.3. *Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами*

$$(e, e^*) = (g, g^*) = \frac{1}{2}, \qquad (e, g^*) = 0. \tag{1.11}$$

Доказательство. Сперва покажем, что векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют соотношениям: $(e, e^*) = (g, g^*)$, $(e, g^*) = -(g, e^*)$, $(e, e^*)^2 + (e, g^*)^2 > 0$.

Действительно, имеем:

$$(e, e^*) = -\left(e, \frac{A^* g^*}{\omega_0}\right) = -\frac{1}{\omega_0}(Ae, g^*) = -\frac{1}{\omega_0}(-\omega_0 g, g^*) = (g, g^*) \, .$$

$$(e, g^*) = \left(e, \frac{A^* e^*}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\omega_0}(Ae, e^*) = \frac{1}{\omega_0}(-\omega_0 g, e^*) = -(g, e^*) \, .$$

Неравенство $(e, e^*)^2 + (e, g^*)^2 > 0$ можно доказать от противного. Пусть $(e, e^*) = (e, g^*) = 0$. Обозначим через $E_0 \subset \mathbb{C}^N$ – корневое подпространство оператора A_0, отвечающее части $\sigma_0 = \{\pm i\omega_0\}$ его спектра. Через E^0 обозначим дополнительное к E_0 инвариантное для A_0 подпространство; оно определяется равенством $E^0 = \{v : v \in R^N, (v, e^*) = (v, g^*) = 0\}$. Тогда, с одной стороны, $e \in E_0$, а с другой стороны, имеем $e \in E^0$. Отсюда и из равенства $\mathbb{C}^N = E_0 \oplus E^0$ получим, что $e = 0$. Аналогичным образом можно показать, что $g \in E_0$ и $g \in E^0$, т.е. $g = 0$. Это противоречит тому, что вектор $e + ig$ является собственным.

Для произвольных вещественных чисел $\rho, \alpha, \beta, \varphi$ положим:

$$\begin{aligned} &e_1 = \rho(e \cos\varphi + g \sin\varphi), \quad g_1 = \rho(g \cos\varphi - e \sin\varphi), \\ &e_1^* = \alpha e^* + \beta g^*, \quad g_1^* = \alpha g^* - \beta e^*. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Векторы (1.12) при любых $\rho, \alpha, \beta, \varphi$ удовлетворяют равенствам (1.10), в которых вместо e, g, e^*, g^* следует подставить e_1, g_1, e_1^*, g_1^*. Обратно, если некоторый набор векторов e_1, g_1, e_1^*, g_1^* удовлетворяет равенствам (1.10), то эти векторы представляются в виде (1.12).

Подберем $\rho > 0$ и φ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$(e_1, e_1) = (g_1, g_1) = 1. \tag{1.13}$$

Возможны следующие случаи:

S1. $(e, g) = 0$;

S2. $(e, g) \neq 0$.

В случае S1 в качестве ρ в (1.12) следует положить

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{(e, e) + (g, g)}}, \tag{1.14}$$

а в качестве φ следует взять любой из углов $\varphi = \pi/4 + n\pi/2$, где n – целое число.

В случае S2 в качестве ρ в (1.12) следует выбрать число (1.14), а в качестве φ следует взять любой из углов

$$\varphi = \frac{1}{2} arctg \frac{(g, g) - (e, e)}{2(e, g)} + \frac{n\pi}{2},$$

где n – целое число.

Пусть в равенствах (1.12) значения ρ и φ уже выбраны так, чтобы для векторов e_1, g_1 выполняются равенства (1.13). Выберем теперь векторы e_1^*, g_1^* в соответствии с равенствами (1.12) так, чтобы выполнялись нужные равенства (1.11):

$$(e_1, e_1^*) = (g_1, g_1^*) = \frac{1}{2}, \qquad (e_1, g_1^*) = 0. \tag{1.15}$$

С этой целью положим

$$\alpha = \frac{(e, e^*) \cos\varphi - (e, g^*) \sin\varphi}{\rho C_0}, \quad \beta = \frac{(e, g^*) \cos\varphi + (e, e^*) \sin\varphi}{\rho C_0},$$

где $C_0 = (e, e^*)^2 + (e, g^*)^2 > 0$. Тогда векторы $e_1^* = \alpha e^* + \beta g^*$ и $g_1^* = \alpha g^* - \beta e^*$ удовлетворяют равенствам (1.15). □

Отсюда и из леммы 1.2 следует

Лемма 1.4. *Пусть матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_0$, $(\omega_0 > 0)$. Пусть векторы $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющие соотношениям (1.10), нормированы в соответствии с равенствами (1.11). Тогда коэффициенты α_1 и β_1 в формулах (1.9) определяются равенствами*

$$\alpha_1 = (A_1 e, e^*) + (A_1 g, g^*), \quad \beta_1 = (A_1 g, e^*) - (A_1 e, g^*).$$

1.1.2 Полупростое собственное значение

Пусть теперь матрица A_0 имеет полупростое собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ кратности 2 (случаи большей кратности рассматриваются аналогично). В этом случае при малых возмущениях матрицы $A(\varepsilon)$ это собственное значение расщепляется на два собственных значения. А именно (см., например, [64]), при каждом малом $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ (возможно, совпадающих) так, что функции $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ являются гладкими, причем $\lambda^{(1)}(0) = \lambda^{(2)}(0) = \lambda_0$. При $\varepsilon \to 0$ указанные функции представимы в виде

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(2)} + O(|\varepsilon|^{3/2}). \tag{1.16}$$

Приведем утверждение относительно вычисления коэффициентов $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в разложениях (1.16). С этой целью отметим, что в рассматриваемом случае найдутся две пары линейно независимых собственных векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ матриц A_0 и A_0^* соответственно, такие, что выполняются равенства:

$$A_0 e = \lambda_0 e, \quad A_0 g = \lambda_0 g, \quad A_0^* e^* = \bar{\lambda}_0 e^*, \quad A_0^* g^* = \bar{\lambda}_0 g^*. \tag{1.17}$$

Векторы e и g, а также векторы e^* и g^* в равенствах (1.17) определяются неоднозначно. Здесь нас интересует следующая нормировка этих векторов.

Лемма 1.5. *Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами*

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \qquad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \tag{1.18}$$

Доказательство. Пусть e, g, e^*, g^* – выбраны согласно (1.17). Покажем, что данные векторы удовлетворяют неравенству: $(e, e^*)^2 + (e, g^*)^2 > 0$.

Неравенство $(e, e^*)^2 + (e, g^*)^2 > 0$ можно доказать от противного. Пусть $(e, e^*) = (e, g^*) = 0$. Обозначим через $E_0 \subset \mathbb{C}^N$ – корневое подпространство оператора A_0, отвечающее части $\sigma_0 = \{\pm i\omega_0\}$ его спектра. Через E^0 обозначим дополнительное к E_0 инвариантное для A_0 подпространство; оно определяется равенством $E^0 = \{v : v \in R^N, (v, e^*) = (v, g^*) = 0\}$. Тогда, с одной стороны, $e \in E_0$, а с другой стороны, имеем $e \in E^0$. Отсюда и из равенства $\mathbb{C}^N = E_0 \oplus E^0$ получим, что $e = 0$. Аналогичным образом можно показать, что $g \in E_0$ и $g \in E^0$, т.е. $g = 0$. Это противоречит тому, что вектор e, g является собственным. Аналогичным образом можно показать, что для вектора g выполняется неравенство $(g, e^*)^2 + (g, g^*)^2 > 0$.

Положим

$$e_1 = \rho(e\cos\varphi + g\sin\varphi), \quad g_1 = \rho(g\cos\varphi - e\sin\varphi),$$

$$e_1^* = r(e^*\cos\psi + g^*\sin\psi), \quad g_1^* = r(g^*\cos\psi - e^*\sin\psi),$$

где $\rho, r > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$. Далее вместо e, g, e^*, g^* следует подставить e_1, g_1, e_1^*, g_1^*. Множество векторов, удовлетворяющих равенствам (1.17), определяется четырьмя независимыми параметрами ρ, r, φ, ψ. Для завершения доказательства леммы 1.5 остается показать, что эти параметры можно подобрать так, что выполняются равенства (1.18). Это устанавливается прямым подсчетом по схеме, указанной при доказательстве леммы 1.3. □

Лемма 1.6. *Пусть матрица A_0 имеет полупростое собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ кратности 2. Пусть векторы $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$, удовлетворяющие соотношениям (1.17), нормированы в соответствии с равенствами (1.18). Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$, представимых в виде (1.16), где коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ – это собственные значения матрицы*

$$D = \begin{bmatrix} (A_1e, e^*) & (A_1g, e^*) \\ (A_1e, g^*) & (A_1g, g^*) \end{bmatrix}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Пространство $\mathbb{C}^N$ может быть представлено в виде $\mathbb{C}^N = E_0 \oplus E^0$, где E_0 – двумерное подпространство с базисом из векторов e и g, а E^0 – дополнительное к E_0 инвариантное для A_0 подпространство. Разложение $\mathbb{C}^N = E_0 \oplus E^0$ определяет спектральные проекторы $P_0 : \mathbb{C}^N \to E_0$ и $P^0 = I - P_0 : \mathbb{C}^N \to E^0$, где I – единичная $(N \times N)$ матрица. Операторы спектрального проектирования P_0 и P^0 могут быть определены равенствами

$$P_0x = (x, e^*)e + (x, g^*)g, \quad P^0x = (I - P_0)x. \tag{1.20}$$

Согласно теории возмущений линейных операторов (см., например, [64]) числа $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ – это собственные значения двумерного оператора $P_0A_1 : E_0 \to E_0$.

Найдем матрицу этого оператора в базисе из векторов $e, g \in E_0$. Имеем в соответствии с равенствами (1.20): $P_0A_1e = (A_1e, e^*)e + (A_1e, g^*)g$, $P_0A_1g = (A_1g, e^*)e + (A_1g, g^*)g$. Отсюда следует, что искомая матрица – это определенная равенством (1.19) матрица D. □

1.1.3 Неполупростое собственное значение

Пусть собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ матрицы A_0 является неполупростым кратности 2 (случаи большей кратности рассматриваются аналогично). Здесь (см., например, [64]), как и в полупростом случае, при каждом малом $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ $(j = 1, 2)$ таких, что $\lambda^{(j)}(0) = \lambda_0$. При этом функции $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ непрерывны, но при $\varepsilon = 0$ не являются дифференцируемыми. Эти функции при $\varepsilon \to 0$ удается представить в виде разложения по дробным степеням параметра ε (разложения Пюизье):

$$\lambda^{(j)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_1^{(j)} + \varepsilon\lambda_2^{(j)} + \varepsilon^{3/2}\lambda_3^{(j)} + \ldots + o(|\varepsilon|^k) \quad (j = 1, 2); \tag{1.21}$$

здесь числа $\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(j)}, \ldots$ не зависят от ε. Приведем утверждение относительно вычисления коэффициентов $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в разложении (1.21).

В рассматриваемом случае найдутся две пары линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ такие, что выполняются равенства

$$A_0 e = \lambda_0 e, \quad A_0 g = \lambda_0 g + e, \quad A_0^* e^* = \bar{\lambda}_0 e^*, \quad A_0^* g^* = \bar{\lambda}_0 g^* + e^*. \tag{1.22}$$

В равенствах (1.22) векторы e, g, e^*, g^* определяются неоднозначно. Нас будет интересовать нормировка следующего плана.

Лемма 1.7. *Векторы e, g, e^*, g^* можно выбрать удовлетворяющими равенству*

$$(e, g^*) = 1. \tag{1.23}$$

Доказательство. Сперва покажем, что $(e, e^*) = 0$. Это устанавливается прямыми вычислениями с учетом равенств (1.22):

$$(e, e^*) = (e, A_0^* g^* - \bar{\lambda}_0 g^*) = (e, A_0^* g^*) - \lambda_0 (e, g^*);$$

но $(e, A_0^* g^*) = (A_0 e, g^*) = (\lambda_0 e, g^*)$. Отсюда следует равенство $(e, e^*) = 0$.

Продемонстрируем теперь верность неравенства $(e, e^*)^2 + (e, g^*)^2 > 0$. Докажем от противного; пусть $(e, e^*) = (e, g^*) = 0$. Пусть E_0 – двумерное подпространство с базисом из векторов e и g, а E^0 – дополнительное к E_0 инвариантное для A_0 подпространство; E^0 может быть определено равенством $E^0 = \{v : v \in \mathbb{C}^N, (v, e^*) = (v, g^*) = 0\}$. Тогда, с одной стороны, $e \in E_0$, а с другой стороны имеем $e \in E^0$. Отсюда и из равенства $\mathbb{C}^N = E_0 \oplus E^0$ получим, что $e = 0$. Это противоречит тому, что вектор e является собственным и, следовательно, ненулевым.

Положим далее $e_1 = C_1 e^*$, $g_1 = C_1 g^*$, где $C_1 = 1/(e, g^*)$. Тогда векторы e_1 и g_1 удовлетворяют нормировке (1.23). $\square$

Лемма 1.8. *Пусть матрица A_0 имеет неполупростое собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ кратности 2. Пусть векторы $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$, удовлетворяющие соотношениям (1.22), нормированы в соответствии с равенством (1.23). Тогда при каждом малом $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ ($j = 1, 2$), представимых в виде (1.21), где коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ – это числа:*

$$\lambda_1^{(1)} = \sqrt{(A_1 e, e^*)}, \qquad \lambda_1^{(2)} = -\sqrt{(A_1 e, e^*)}. \tag{1.24}$$

Доказательство. Нам удобно формулы (1.21) представить в общем виде

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^{3/2}\lambda_3 + \ldots. \tag{1.25}$$

Этому собственному значению соответствует собственный вектор $e(\varepsilon)$, который (в соответствии с общей теорией возмущений линейных операторов) также можно выбрать из условия непрерывности, причем $e(0) = e$. Более того, функцию $e(\varepsilon)$ также можно представить в виде разложения Пюизье:

$$e(\varepsilon) = e + e_1\varepsilon^{1/2} + e_2\varepsilon + e_3\varepsilon^{3/2} + \ldots. \tag{1.26}$$

По построению имеем: $A(\varepsilon)e(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)e(\varepsilon)$. Подставим выражения (1.1), (1.25) и (1.26) в это равенство:

$$(A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \ldots)(e + e_1\varepsilon^{1/2} + e_2\varepsilon + e_3\varepsilon^{3/2} + \ldots) =$$

$$= (\lambda_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^{3/2}\lambda_3 + \ldots)(e + e_1\varepsilon^{1/2} + e_2\varepsilon + e_3\varepsilon^{3/2} + \ldots).$$

Приравнивая в полученном равенстве выражения при одинаковых степенях ε, получим последовательность уравнений:

$$A_0 e = \lambda_0 e, \tag{1.27}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (A_0 - \lambda_0 I)e_1 & = & \lambda_1 e \\ (A_0 - \lambda_0 I)e_2 & = & -A_1 e + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e \end{array}\right\}, \tag{1.28}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (A_0 - \lambda_0 I)e_3 & = & -A_1 e_1 + \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e \\ (A_0 - \lambda_0 I)e_4 & = & -A_1 e_2 - A_2 e + \lambda_1 e_3 + \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e \end{array}\right\}, \text{ и т.д.}$$

Уравнение (1.27) тривиально: на самом деле, это не уравнение, а верное равенство (см. (1.22)). Что касается последующих уравнений, то их удобно рассматривать попарно.

Умножив второе уравнение в паре (1.28) на оператор $(A_0 - \lambda_0 I)$ и учитывая, что $(A_0 - \lambda_0 I)e = 0$, получим:

$$(A_0 - \lambda_0 I)^2 e_2 = -(A_0 - \lambda_0 I)A_1 e + \lambda_1 (A_0 - \lambda_0 I)e_1.$$

Отсюда с учетом первого уравнения в паре (1.28) получим:

$$(A_0 - \lambda_0 I)^2 e_2 = -(A_0 - \lambda_0 I)A_1 e + \lambda_1^2 e. \tag{1.29}$$

Полученное уравнение имеет вид $Bx = b$ при $B = (A_0 - \lambda_0 I)^2$, $x = e_2$ и $b = -(A_0 - \lambda_0 I)A_1 e + \lambda_1^2 e$. При этом оператор B имеет полупростое собственное значение 0 кратности 2, которому отвечают собственные векторы e и g. Отсюда и согласно теоремам Фредгольма (см., например, [65], стр. 238) получим, что уравнение (1.29) разрешимо тогда и только тогда, когда $(b, e^*) = (b, g^*) = 0$.

Но в силу равенства $(A_0^* - \lambda_0 I)e^* = 0$ и равенства $(e, e^*) = 0$ (см., доказательство леммы 1.7) верно равенство $(b, e^*) = 0$. Поэтому уравнение (1.29) разрешимо тогда и только тогда, когда $(b, g^*) = 0$. Имеем:

$$(b, g^*) = (-(A_0 - \lambda_0 I)A_1 e + \lambda_1^2 e, g^*) = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda_1^2 (e, g^*) = ((A_0 - \lambda_0 I)A_1 e, g^*) = (A_1 e, (A_0^* - \lambda_0 I)g^*).$$

Но (см. (1.23) и (1.22)) так как $(e, g^*) = 1$ и $(A_0^* - \lambda_0 I)g^* = e^*$, то получим: $\lambda_1^2 = (A_1 e, e^*)$. Отсюда и следуют формулы (1.24), что завершает доказательство леммы 1.8. □

1.2 Устойчивость точек равновесия автономных систем, зависящих от малого параметра

В этом параграфе обсудим приложения формул, полученных в п. 1.1, в задаче исследования устойчивости точки равновесия автономной системы, зависящей от малого параметра $|\varepsilon|$ вида:

$$\frac{dx}{dt} = A(\varepsilon)x + a(x, \varepsilon), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.30}$$

Здесь $A(\varepsilon)$ – вещественная квадратная матрица порядка N, гладко зависящая от ε; $a(x,\varepsilon)$ – вектор-функция, гладко зависящая от x и ε и удовлетворяющая условию: $\|a(x,\varepsilon)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$ равномерно по ε.

Нас будет интересовать вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия системы (1.30) при малых $|\varepsilon|$ в предположении, что известна информация о спектре матрицы $A_0 = A(0)$. Этот вопрос решается относительно просто в следующих двух ситуациях:

1. если все собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части, то при всех малых $|\varepsilon|$ точка равновесия $x = 0$ системы (1.30) является асимптотически устойчивой;
2. если хотя бы одно собственное значение матрицы A_0 имеет положительную вещественную часть, то при всех малых $|\varepsilon|$ точка равновесия $x = 0$ системы (1.30) является неустойчивой.

Существенно более сложными являются критические случаи, когда матрица A_0 имеет одно или несколько собственных значений с нулевой вещественной частью, при этом она не имеет собственных значений с положительной вещественной частью. В этих случаях малейшее возмущение матрицы A_0 может привести к тому, что либо у нее появятся собственные значения с положительной вещественной частью (и тогда нулевое положение равновесия станет неустойчивым), либо у нее все собственные значения станут иметь отрицательные вещественные части (и тогда нулевое положение равновесия будет устойчивым).

Вопрос об устойчивости решений систем (1.30) в критических случаях обсуждался многими авторами (см., например, [62; 66—68] и имеющуюся библиографию). В данном параграфе он будет рассмотрен в следующих основных вариантах критических случаев, когда:

1^0. матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение;

2^0. матрица A_0 имеет простое чисто мнимое собственное значение;

3^0. матрица A_0 имеет полупростое (кратности 2) чисто мнимое собственное значение;

4^0. матрица A_0 имеет неполупростое (кратности 2) чисто мнимое собственное значение;

При этом будем предполагать, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части.

1.2.1 Простое нулевое собственное значение

Пусть матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение. В этом случае найдутся ненулевые векторы $e, g \in \mathbb{R}^N$ такие, что выполнены равенства

$$A_0 e = 0 \cdot e, \qquad A_0^* g = 0 \cdot g.$$

Будем считать, что векторы e и g нормированы в соответствии с равенством (1.5) (см. стр. 9).

Положим $L_1 = (A'(0)e, g)$. Из леммы 1.2 следует, что верна

Теорема 1.1. *Пусть $L_1 \neq 0$. При всех малых $|\varepsilon|$ таких, что $\varepsilon L_1 < 0$ ($\varepsilon L_1 > 0$), нулевая точка равновесия системы (1.30) является асимптотически устойчивой (неустойчивой).*

Доказательство. Согласно лемме 1.2 матрица $A(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ имеет простое собственное значение $\lambda(\varepsilon) = \varepsilon L_1 + O(|\varepsilon|^2)$ (см. равенство (1.2)).

Отсюда следует: если $\varepsilon L_1 < 0$, то при малых $|\varepsilon|$ собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ матрицы $A(\varepsilon)$ располагается слева от мнимой оси, а следовательно, точка равновесия $x = 0$ системы (1.30) асимптотически устойчива.

Если же $\varepsilon L_1 > 0$, то при малых $|\varepsilon|$ собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ матрицы $A(\varepsilon)$ имеет положительную вещественную часть, а следовательно, точка равновесия $x = 0$ системы (1.30) асимптотически устойчива (неустойчива). □

1.2.2 Простое чисто мнимое собственное значение

Пусть матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_0, \omega_0 > 0$. В этом случае найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$ такие, что выполняются равенства (1.10) и выполняется нормировка в соответствии с равенствами (1.11) (см. стр. 12). Положим

$$L_2 = (A'(0)e, e^*) + (A'(0)g, g^*).$$

Из леммы 1.4 (см. стр. 13) следует, что верна

Теорема 1.2. *Пусть $L_2 \neq 0$. При всех малых $|\varepsilon|$ таких, что $\varepsilon L_2 < 0$ ($\varepsilon L_2 > 0$), нулевая точка равновесия системы (1.30) является асимптотически устойчивой (неустойчивой).*

Доказательство. Согласно лемме 1.4 матрица $A(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ имеет простое собственное значение

$$\lambda(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\,[L_2 + i\,((A'(0)g, e^*) - (A'(0)e, g^*))] + O(|\varepsilon|^2).$$

Отсюда следует: если $\varepsilon L_2 < 0$ ($\varepsilon L_2 > 0$), то при малых $|\varepsilon|$ собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ располагается слева (справа) от мнимой оси, а следовательно, точка равновесия $x = 0$ системы (1.30) асимптотически устойчива (неустойчива). □

1.2.3 Полупростое собственное значение

Пусть матрица A_0 имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, $\omega_0 \geqslant 0$. Как ранее было отмечено, найдутся две пары линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ такие, что выполняются равенства

$$A_0 e = i\omega_0 e, \quad A_0 g = i\omega_0 g, \quad A_0^* e^* = -i\omega_0 e^*, \quad A_0^* g^* = -i\omega_0 g^*.$$

Будем считать, что векторы e, g, e^*, g^* нормированы в соответствии с равенствами (1.18) (см. лемму 1.5 на стр. 14).

Определим матрицу:

$$D_0 = \begin{bmatrix} (A'(0)e, e^*) & (A'(0)g, e^*) \\ (A'(0)e, g^*) & (A'(0)g, g^*) \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.3. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда если оба собственных значения матрицы D_0 имеют отрицательные вещественные части, то при всех малых $|\varepsilon|$ нулевая точка равновесия системы (1.30) является асимптотически устойчивой. Если хотя бы одно собственное значение матрицы D_0 имеет положительную вещественную часть, то нулевая точка равновесия системы (1.30) является неустойчивой.*

Пусть $\varepsilon < 0$. Тогда если оба собственных значения матрицы D_0 имеют положительные вещественные части, то при всех малых $|\varepsilon|$ нулевая точка равновесия системы (1.30) является асимптотически устойчивой. Если хотя бы одно собственное значение матрицы D_0 имеет отрицательную вещественную часть, то нулевая точка равновесия системы (1.30) является неустойчивой.

Доказательство. При малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$, представимых в виде (см. (1.16)):

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1^{(2)} + O(|\varepsilon|^{3/2}). \qquad (1.31)$$

Здесь, согласно лемме 1.6 (см. стр. 15), коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ – это собственные значения матрицы (1.19), которая в рассматриваемом случае имеет вид D_0. Отсюда следует: расположение собственных значений (1.31) матрицы $A(\varepsilon)$ напрямую зависит от расположения собственных значений матрицы D_0.

Пусть $\varepsilon > 0$ (случай $\varepsilon > 0$ рассматривается аналогичным образом). Тогда если оба собственных значения матрицы D_0 имеют отрицательные вещественные части (хотя бы одно из этих собственных значений имеет положительную вещественную часть), то при малых $|\varepsilon|$ собственные значения $\lambda^{(1,2)}(\varepsilon)$ располагаются слева (справа) от мнимой оси, а следовательно, точка равновесия $x = 0$ системы (1.30) асимптотически устойчива (неустойчива). $\square$

1.2.4 Неполупростое собственное значение

Пусть матрица A_0 имеет неполупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, $\omega_0 \geqslant 0$. Здесь найдутся две пары линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ такие, что выполняются равенства

$$A_0 e = i\omega_0 e, \quad A_0 g = i\omega_0 g + e, \quad A_0^* e^* = -i\omega_0 e^*, \quad A_0^* g^* = -i\omega_0 g^* + e^*.$$

Будем считать, что векторы e, g, e^*, g^* нормированы в соответствии с равенством (1.23). Положим $L_3 = (A'(0)e, e^*)$.

Теорема 1.4. *Пусть $L_3 \neq 0$. При всех малых ненулевых $|\varepsilon|$ таких, что $\mathbb{R}\mathrm{e}\sqrt{\varepsilon L_3} \neq 0$ нулевая точка равновесия системы (1.30) является неустойчивой.*

Доказательство. Согласно лемме 1.8 (см. стр. 17) при малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$, представимых в виде (см., (1.21)): $\lambda^{(j)}(\varepsilon) = i\omega_0 \pm \sqrt{\varepsilon L_3} + O(|\varepsilon|), (j = 1, 2)$.

Отсюда следует: если $\mathbb{R}\mathrm{e}\sqrt{\varepsilon L_3} \neq 0$, то при малых ненулевых $|\varepsilon|$ собственные значения $\lambda^{(1,2)}(\varepsilon)$ располагаются слева и справа от мнимой оси, а следовательно, точка равновесия $x = 0$ системы (1.30) неустойчива. $\square$

1.3 Устойчивость точек равновесия периодических систем, зависящих от малого параметра

В этом параграфе обсуждается вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия неавтономной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + a(x,t,\varepsilon), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.32}$$

Здесь вещественная квадратная матрица $A(t,\varepsilon)$ и вектор-функция $a(x,t,\varepsilon)$ непрерывно зависят от t, C^k-гладкие ($k \geqslant 1$) по параметру ε и являются T-периодическими по t. Предполагается также, что $\|a(x,t,\varepsilon)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$ равномерно по t и ε.

Наравне с системой (1.32) рассматривается линейная периодическая система

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.33}$$

Положим $A_0(t) = A(t,0)$; при $\varepsilon = 0$ система (1.33) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.34}$$

Обозначим через $X(t,\varepsilon)$ – фундаментальную матрицу решений системы (1.33), а через $V(\varepsilon) = X(T,\varepsilon)$ – матрицу монодромии (см., например, [69]) этой системы. Другими словами $X(t,\varepsilon)$ – это решение матричной задачи Коши

$$\left.\begin{aligned} X_t' &= A(t,\varepsilon)X \\ X(0,\varepsilon) &= I \end{aligned}\right\}, \tag{1.35}$$

где I – единичная $(N \times N)$ матрица. Собственные значения матрицы $V(\varepsilon)$ называются мультипликаторами системы (1.33).

Нас будет интересовать вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия периодической системы (1.32) при малых $|\varepsilon|$ в предположении, что известна информация о спектре матрицы монодромии $V(0) = V_0$ системы (1.34). Известно, (см., например, [68]):

- если все мультипликаторы системы (1.34) удовлетворяют условию $|\mu| < 1$, то при малых $|\varepsilon|$ нулевая точка равновесия системы (1.32) является устойчивой;
- если система (1.34) имеет мультипликатор $|\mu| > 1$, то при малых $|\varepsilon|$ нулевая точка равновесия системы (1.32) является неустойчивой.

Вопрос об устойчивости положения равновесия системы (1.32) остается открытым только в случае, когда имеется мультипликатор μ_0 системы (1.34) такой, что $|\mu_0| = 1$ (при этом все остальные мультипликаторы $|\mu| < 1$).

Исследование устойчивости положения равновесия системы (1.32) в критических случаях представляет собой одну из интересных проблем линейной и нелинейной динамики. Стоит отметить, что большинство известных работ (см., например, [70—72] и имеющуюся библиографию) посвящены исследованию автономных систем (1.30). Однако задачи, связанные с устойчивостью неавтономных систем (1.32), являются менее изученными, хотя они имеют важное значение как для теории, так и для практики. Основная сложность заключается в построении мультипликаторов, явное определение которых возможно лишь в самых простых случаях.

В настоящем параграфе основное внимание будет уделено рассмотрению трех взаимосвязанных задач. Это, во-первых, задача приближенного построения матрицы монодромии $V(\varepsilon)$ системы (1.33). Во-вторых, задача приближенного построения мультипликаторов системы (1.33). Наконец, в-третьих, задача исследования устойчивости положения равновесия системы (1.32) в критических случаях.

Отдельно будут рассмотрены представленные задачи в случае, если матрица $A_0(t)$ является постоянной. В этом случае системы (1.32) и (1.33) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + S(t,\varepsilon))\,x + a(x,t,\varepsilon), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.36}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + S(t,\varepsilon))\,x, \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.37}$$

Здесь A_0 и $S(t,\varepsilon)$ – вещественные квадратные матрицы. Предполагается, что матрица $S(t,\varepsilon)$ непрерывна по t и гладкая по ε до порядка k включительно, $S(t,\varepsilon)$ является T-периодической т.е. $S(t+T,\varepsilon) \equiv S(t,\varepsilon)$. Предполагается также, что выполнено тождество: $S(t,0) \equiv 0$.

Наравне с системой (1.37) будем рассматривать невозмущенную систему

$$x' = A_0 x, \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.38}$$

Касаемо устойчивости положения равновесия системы (1.36) при малых $|\varepsilon|$ известно, (см., например, [68]):

– если все собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части, тогда решение $x = 0$ системы (1.36) при малых $|\varepsilon|$ является асимптотически устойчивым;

– если хотя бы одно собственное значение матрицы A_0, имеет положительную вещественную часть, то решение $x = 0$ системы (1.36) является неустойчивым при всех малых $|\varepsilon|$.

Вопрос об устойчивости положения равновесия системы (1.36) остается открытым только в случае, когда имеется матрица A_0 имеет собственные значения с нулевой вещественной частью (при этом все остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части).

1.3.1 Приближенное построение матрицы монодромии

Будем предполагать, что матрица $A(t, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по ε до порядка k включительно ($k \geqslant 1$). Положим для простоты обозначений

$$A_j(t) = \frac{\partial^j A(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^j}\Big|_{\varepsilon=0}, \quad j = 1, 2, \dots k. \tag{1.39}$$

Приведем схему получения формул для приближенного вычисления ФМР системы (1.33). Строить ФМР будем в виде разложения по степеням малого параметра ε:

$$X(t, \varepsilon) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 \frac{X_2(t)}{2!} + \dots + \varepsilon^k \frac{X_k(t)}{k!} + \Psi(t, \varepsilon), \tag{1.40}$$

где $X_0(t)$ – ФМР системы (1.34), а матрицы $X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)$ требуют определения; $\Psi(t, \varepsilon)$ – непрерывная по t и C^k-гладкая по ε матрица, удовлетворяющая условию: $\|\Psi(t, \varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^{k+1})$ при $\varepsilon \to 0$.

Покажем, что имеет место

Теорема 1.5. *ФМР системы (1.33) представима в виде равенства (1.40), в котором $X_0(t)$ – ФМР системы (1.34), а матрицы $X_1(t), \dots, X_k(t)$ определяются рекуррентной формулой:*

$$X_m(t) = X_0(t) \int_0^t X_0^{-1}(\tau) \sum_{j=0}^{m-1} \left(C_m^j A_{m-j}(\tau) X_j(\tau)\right) d\tau \quad (m = 1, \dots, k); \tag{1.41}$$

здесь $C_m^j = \dfrac{m!}{(m-j)!j!}$ – биномиальный коэффициент.

В частности, например, матрицы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ определяются формулами:

$$X_1(t) = X_0(t)\int_0^t X_0^{-1}(\tau)A_1(\tau)X_0(\tau)d\tau, \tag{1.42}$$

$$X_2(t) = X_0(t)\int_0^t X_0^{-1}(\tau)\left(A_2(\tau)X_0(\tau) + A_1(\tau)X_1(\tau)\right)d\tau. \tag{1.43}$$

Доказательство. Формула (1.40) – это формула Тейлора для $X(t,\varepsilon)$, существование которой следует из общих теорем о C^k-гладкости по параметру ε решения задачи Коши (1.35). Участвующие в формуле (1.40) матрицы $X_j(t)$ – это производные матрицы $X(t,\varepsilon)$ по ε в точке $\varepsilon = 0$. А именно,

$$X_1(t) = X'_\varepsilon(t,0), \quad X_2(t) = X''_\varepsilon(t,0), \ldots. \tag{1.44}$$

Остается, таким образом, вычислить производные матрицы $X(t,\varepsilon)$ по ε до k-го порядка включительно.

Матрица $X(t,\varepsilon)$ является решением задачи Коши (1.35) и, следовательно, выполняется равенство

$$X(t,\varepsilon) = X_0(t) + X_0(t)\int_0^t X_0^{-1}(\tau)A(\tau,\varepsilon)X(\tau,\varepsilon)d\tau.$$

Продифференцировав по ε обе части этого равенства, получим:

$$X'_\varepsilon(t,\varepsilon) = X_0(t)\int_0^t X_0^{-1}(\tau)\left[A'_\varepsilon(\tau,\varepsilon)X(\tau,\varepsilon) + A(\tau,\varepsilon)X'_\varepsilon(\tau,\varepsilon)\right]d\tau. \tag{1.45}$$

Полагая здесь $\varepsilon = 0$ и учитывая выражения (1.39) и (1.44) придем к (1.42).

Для того, чтобы определить $X_2(t)$, следует продифференцировать равенство (1.45) по ε. Затем полагая в полученном равенстве $\varepsilon = 0$ и учитывая равенства (1.39) и (1.44) придем к равенству (1.43).

Общая формула (1.41) может быть получена по аналогичной схеме с использованием метода математической индукции. □

Так как $V(\varepsilon) = X(T,\varepsilon)$, то из формул (1.41) теоремы 1.5 следует

Следствие 1.1. *Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ системы (1.33) представима в виде равенства*

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2\frac{V_2}{2!} + \ldots + \varepsilon^k\frac{V_k}{k!} + \tilde{V}(\varepsilon),$$

в котором $V_0 = X_0(T)$, *матрицы* $V_1, \ldots, V_k$ *определяются рекуррентной формулой:*

$$V_m = X_0(T) \int_0^T X_0^{-1}(t) \sum_{j=0}^{m-1} \big(C_m^j A_{m-j}(t) X_j(t)\big)\, dt \qquad (m = 1, \ldots, k),$$

а $\tilde V(\varepsilon)$ – *гладкая по* ε *матрица, удовлетворяющая условию:* $\|\tilde V(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^{k+1})$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В случае, когда матрица $A(0,t) = A_0$ является постоянной, формулы приближенного построения матрицы монодромии системы (1.37) в значительной мере упрощаются. Положим для простоты обозначений:

$$S_j(t) = \frac{\partial^j S(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^j}\Big|_{\varepsilon=0}, \quad j = 1, 2, \ldots k. \tag{1.46}$$

Следствие 1.2. *ФМР системы (1.37) представима в виде равенства (1.40), в котором* $X_0(t) = e^{A_0 t}$, *а матрицы* $X_1(t), \ldots, X_k(t)$ *определяются рекуррентной формулой:*

$$X_m(t) = e^{A_0 t} \int_0^t e^{-A_0 \tau} \sum_{j=0}^{m-1} \big(C_m^j S_{m-j}(\tau) X_j(\tau)\big)\, d\tau \qquad (m = 1, \ldots, k); \tag{1.47}$$

здесь $C_m^j = \dfrac{m!}{(m-j)!j!}$ – *биномиальный коэффициент.*

Следствие 1.3. *Матрица монодромии* $V(\varepsilon)$ *системы (1.37) представима в виде равенства*

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 \frac{V_2}{2!} + \ldots + \varepsilon^k \frac{V_k}{k!} + \tilde V(\varepsilon),$$

в котором

$$V_0 = e^{A_0 T}, \quad V_1 = e^{A_0 T} \int_0^T e^{-A_0 t} S_1(t) e^{A_0 t} dt, \tag{1.48}$$

матрицы $V_2, \ldots, V_k$ *определяются рекуррентной формулой:*

$$V_m = e^{A_0 T} \int_0^T e^{-A_0 t} \sum_{j=0}^{m-1} \big(C_m^j S_{m-j}(t) X_j(t)\big)\, dt \qquad (m = 2, \ldots, k),$$

а $\tilde V(\varepsilon)$ – C^k*-гладкая по* ε *матрица, удовлетворяющая условию:* $\|\tilde V(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^{k+1})$ *при* $\varepsilon \to 0$.

1.3.2 Построение мультипликаторов в критических случаях

Рассмотрим теперь задачу о построении мультипликаторов системы (1.37) в следующих важных с точки зрения приложений критических случаях, когда:

1^0. матрица A_0 имеет простое собственное значение 0;

2^0. матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$), причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при целых k;

3^0. матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$), причем

$$\omega_0 T = \pi k_0 \qquad \text{при некотором целом} \quad k_0; \tag{1.49}$$

4^0. матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_1$, и $\pm i\omega_2$, где $\omega_{1,2} > 0$, причем $\omega_{1,2} T \neq \pi k$ при целых k, но

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi k_0}{T} \qquad \text{при некотором натуральном} \quad k_0; \tag{1.50}$$

5^0. матрица A_0 имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при натуральных k;

6^0. матрица A_0 имеет неполупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при натуральных k.

Во всех этих случаях предполагается, что другие собственные значения матрицы JA_0 системы (1.37) являются простыми, для которых не выполняются резонансные соотношения (1.49) и (1.50).

Соотношение типа (1.49) называют *простым резонансом*, а соотношение типа (1.50) – *комбинационным резонансом*; случай 2^0 часто (особенно в приложениях) называют *нерезонансным*.

1.3.2.1 Случай 1^0: простое нулевое собственное значение

Пусть сперва матрица A_0 системы (1.37) имеет простое нулевое собственное значение. В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ невозмущенной системы (1.38) имеет простое собственное значение 1.

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.37) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет простое вещественное собственное значение $\mu(\varepsilon)$ такое, что $\mu(0) = 1$ и функция $\mu(\varepsilon)$ является C^k-гладкой. При этом при $\varepsilon \to 0$ функция $\mu(\varepsilon)$ представима в виде, аналогичном равенству (1.2):

$$\mu(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\mu_1 + O(|\varepsilon|^2). \tag{1.51}$$

По схеме, изложенной в п. 1.1.1 (см. стр. 9) определим коэффициенты в разложении (1.51). Для этого обозначим через $e, g \in \mathbb{R}^N$ линейно независимые векторы, для которых верны равенства

$$A_0 e = 0 \cdot e, \qquad A_0^* g = 0 \cdot g. \tag{1.52}$$

Будем считать, что векторы e и g нормированы в соответствии с равенством (1.5) леммы 1.1.

Положим

$$S_{10} = \int_0^T S_1(t)dt, \tag{1.53}$$

здесь $S_1(t)$ – первая из матриц в формулах (1.46).

Теорема 1.6. *В разложении (1.51) коэффициент* μ_1 *определяется равенством*

$$\mu_1 = (S_{10}e, g).$$

Доказательство. Отметим, что векторы $e, g \in \mathbb{R}^N$ из равенств (1.52) являются собственными векторами матриц V_0 и V_0^*, соответственно. А именно, $V_0 e = 1 \cdot e$, и $V_0^* g = 1 \cdot g$. Согласно лемме 1.2 (см. стр. 10) применительно к возмущению простого собственного значения 1 матрицы монодромии $V(\varepsilon)$ имеем: коэффициент μ_1 определяется равенством $\mu_1 = (V_1 e, g)$, где V_1 – матрица, определенная вторым из равенств (1.48). После подстановки имеем:

$$\mu_1 = \int_0^T \left(e^{A_0 T} e^{-A_0 t} S_1(t) e^{A_0 t} e, g\right) dt = \int_0^T (S_1(t)e, g)dt = (S_{10}e, g).$$

□

1.3.2.2 Случай 2^0: пара простых собственных значений

Пусть матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$), для которых не выполняется резонансное соотношение (1.49). В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ невозмущенной системы (1.38) имеет пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm i\omega_0 T}$ ($e^{\pm i\omega_0 T} \neq \pm 1$).

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.37) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет простое собственное значение $\mu(\varepsilon)$. При этом функция $\mu(\varepsilon)$

является C^k-гладкой и выполняется $\mu(0) = \mu_0 = e^{i\omega_0 T}$. Более того, при $\varepsilon \to 0$ функция $\mu(\varepsilon)$ представима в виде, аналогичном представлению (1.2):

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + O(|\varepsilon|^2). \tag{1.54}$$

По схеме, изложенной в п. 1.1.1 определим коэффициенты в разложении (1.54). Для этого обозначим через e, g, e^*, $g^* \in \mathbb{R}^N$ такие линейно независимые векторы, что выполняются равенства

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*). \tag{1.55}$$

Будем считать, что векторы e, g, e^*, g^* нормированы в соответствии с равенствами (1.11).

Теорема 1.7. *В разложении (1.54) коэффициент μ_1 определяется равенством*

$$\mu_1 = \mu_0\,(\alpha_1 + i\beta_1)\,;$$

здесь $\alpha_1 = (S_{10}e, e^*) + (S_{10}g, g^*)$, $\beta_1 = (S_{10}g, e^*) - (S_{10}e, g^*)$, а матрица S_{10} – определена согласно (1.53).

Доказательство. Отметим, что векторы $e + ig$ и $e^* + ig^*$ из равенств (1.55), являются собственными векторами соответствующими собственным значениям $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ и $\mu_0^* = e^{-i\omega_0 T}$ для матриц V_0 и V_0^* соответственно.

Из леммы 1.4 (см. стр. 13) следует, что коэффициент μ_1 определяется равенством

$$\mu_1 = (V_1 e, e^*) + (V_1 g, g^*) + i[(V_1 g, e^*) - (V_1 e, g^*)];$$

здесь V_1 – матрица, определенная вторым из равенств (1.48).

После несложных вычислений получим:

$$\begin{aligned}(V_1 e, e^*) + (V_1 g, g^*) = \cos\omega_0 T\,[(S_{10}e, e^*) + (S_{10}g, g^*)] +\\ \sin\omega_0 T\,[(S_{10}e, g^*) - (S_{10}g, e^*)]\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(V_1 g, e^*) - (V_1 e, g^*) = \cos\omega_0 T\,[(S_{10}g, e^*) - (S_{10}e, g^*)]\,dt +\\ \sin\omega_0 T\,[(S_{10}e, e^*) + (S_{10}g, g^*)]\,.\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\mu_1 = [(S_{10}e, e^*) + (S_{10}g, g^*)]\,\mu_0 + i\mu_0\,[(S_{10}g, e^*) - (S_{10}e, g^*)]\,.$$

Откуда и следует утверждение теоремы. □

1.3.2.3 Случай 3^0: простой резонанс

Пусть матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_0$, для которых выполняется резонансное соотношение (1.49). В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ невозмущенной системы (1.38) имеет полупростое собственное значение μ_0 кратности 2, где $\mu_0 = 1$ (если k_0 четно) или $\mu_0 = -1$ (если k_0 нечетно).

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.37) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$ и функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются гладкими. При этом при $\varepsilon \to 0$ указанные функции представимы в виде, аналогичном представлению (1.16):

$$\mu^{(1)}(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon\mu_1^{(1)} + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \mu^{(2)}(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon\mu_1^{(2)} + O(|\varepsilon|^{3/2}). \tag{1.56}$$

В соответствии со схемой, изложенной в п 1.1.2 (см. стр. 14) приведем утверждение относительно вычисления коэффициентов $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (1.56).

С этой целью отметим, что в рассматриваемом случае найдутся две пары линейно независимых собственных векторов $e, g \in \mathbb{R}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$ матриц A_0 и A_0^* соответственно, что выполняются равенства (1.55). Отметим, что векторы $e, g \in \mathbb{R}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{R}^N$ являются собственными векторами матриц V_0 и V_0^* соответственно. А именно, выполняются $V_0 e = \mu_0 e$, $V_0 g = \mu_0 g$ и $V_0^* e^* = \mu_0 e^*$, $V_0^* g^* = \mu_0 g^*$. Будем считать выполненными условия нормировки (1.18).

Теорема 1.8. *Участвующие в формулах (1.56) коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ являются собственными значениями матрицы*

$$D = \begin{bmatrix} (V_1 e, e^*) & (V_1 g, e^*) \\ (V_1 e, g^*) & (V_1 g, g^*) \end{bmatrix}; \tag{1.57}$$

здесь V_1 – матрица, определенная вторым из равенств (1.48).

Доказательство. Пусть векторы e, g, e^*, g^* нормированы в соответствии с равенствами (1.18). Тогда выполняются все условия леммы 1.6 (см. стр. 15), согласно которой, коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$, участвующие в формулах (1.56), являются собственными значениями матрицы вида (1.57). □

Элементы матрицы (1.57) могут быть вычислены с использованием формул (1.48) и (1.55). В результате получим равенства:

$$(V_1e, e^*) = \mu_0 \int_0^T \{\cos^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)e, e^*) + \sin^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)g, g^*) -$$

$$-\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\,[(S_1(t)e, g^*) + (S_1(t)g, e^*)]\}dt, \qquad (1.58)$$

$$(V_1g, e^*) = \mu_0 \int_0^T \{\cos^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)g, e^*) - \sin^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)e, g^*) +$$

$$+\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\,[(S_1(t)e, e^*) - (S_1(t)g, g^*)]\}dt, \qquad (1.59)$$

$$(V_1e, g^*) = (V_1g, e^*) + \mu_0[(S_{10}e, g^*) - (S_{10}g, e^*)], \qquad (1.60)$$

$$(V_1g, g^*) = -(V_1e, e^*) + \mu_0[(S_{10}e, e^*) + (S_{10}g, g^*)]. \qquad (1.61)$$

1.3.2.4 Случай 4^0: комбинационный резонанс

Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$ для которых выполняется условие комбинационного резонанса (1.50). В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0T}$ невозмущенной системы (1.38) имеет полупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_1 T} = e^{i\omega_2 T} \neq 1$ кратности 2.

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.37) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$ и функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются гладкими. При этом указанные функции представимы в виде (1.56).

В рассматриваемом случае найдутся две пары линейно независимых собственных векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ таких, что выполняются равенства:

$$A_0e = i\omega_1 e, \quad A_0g = i\omega_2 g, \quad A_0^*e^* = -i\omega_1 e^*, \quad A_0^*g^* = -i\omega_2 g^*.$$

Отметим, что данные векторы являются собственными векторами матриц V_0 и V_0^* соответственно. А именно, выполняются равенства: $V_0e = \mu_0 e$, $V_0g = \mu_0 g$ и $V_0^*e^* = \mu_0 e^*$, $V_0^*g^* = \mu_0 g^*$. Здесь также будем считать выполненными условия нормировки (1.18).

Исследование этого случая можно провести по аналогии со случаем 3^0: здесь имеет место полный аналог теоремы 1.8, в которой числа (1.58) – (1.61) в матрице (1.57) будут равны:

$$(V_1e, e^*) = \mu_0\,(S_{10}e, e^*)\,, \qquad (V_1g, e^*) = \mu_0 \int_0^T e^{i(\omega_2-\omega_1)t}\,(S_1(t)g, e^*)\,dt,$$

$$(V_1 e, g^*) = \mu_0 \int_0^T e^{i(\omega_1-\omega_2)t} \left(S_1(t)e, g^*\right) dt, \qquad (V_1 g, g^*) = \mu_0 \left(S_{10} g, g^*\right).$$

1.3.2.5 Случай 5^0: полупростое собственное значение

Пусть теперь матрица A_0 имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 \geqslant 0$), $\omega_0 T \neq \pi k$ при натуральных k. В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ невозмущенной системы (1.38) имеет полупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ кратности 2. Соответственно, матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.37) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$ и функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются гладкими. При этом указанные функции представимы в виде (1.56).

В рассматриваем случае найдутся две пары линейно независимых собственных векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ таких, что выполняются равенства:

$$A_0 e = i\omega_0 e, \quad A_0 g = i\omega_0 g, \quad A_0^* e^* = -i\omega_0 e^*, \quad A_0^* g^* = -i\omega_0 g^*.$$

Отметим, что векторы e, g и e^*, g^* являются собственными векторами матриц V_0 и V_0^* соответственно. Здесь также будем считать выполненными условия нормировки (1.18).

Дальнейшее исследование этого случая можно провести по аналогии со случаем 3^0: здесь имеет место полный аналог теоремы 1.8, в которой матрица (1.57) примет вид:

$$D = \mu_0 \begin{bmatrix} (S_{10}e, e^*) & (S_{10}g, e^*) \\ (S_{10}e, g^*) & (S_{10}g, g^*) \end{bmatrix}.$$

1.3.2.6 Случай 6^0: неполупростое собственное значение

Пусть, наконец, матрица A_0 имеет неполупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 \geqslant 0$), $\omega_0 T \neq \pi k$ при натуральных k. В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ невозмущенной системы (1.38) имеет неполупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ кратности 2.

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.37) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ непрерывны так, что $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$. При $\varepsilon \to 0$ эти функции представимы в виде, аналогичном представлению (1.21):

$$\mu^{(j)}(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon^{1/2}\mu_1^{(j)} + O(|\varepsilon|) \quad (j = 1, 2). \tag{1.62}$$

Отметим, что в рассматриваем случае найдутся две пары линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ таких, что выполняются равенства:

$$A_0 e = i\omega_0 e, \quad A_0 g = i\omega_0 g + e, \quad A_0^* e^* = -i\omega_0 e^*, \quad A_0^* g^* = -i\omega_0 g^* + e^*. \tag{1.63}$$

Здесь также будем считать выполненными условия нормировки (1.23).

Теорема 1.9. *Участвующие в разложениях (1.62) коэффициенты* $\mu_1^{(1)}$ *и* $\mu_1^{(2)}$ *это числа*

$$\mu_1^{(1)} = \mu_0\sqrt{T\,(S_{10}e, e^*)}, \qquad \mu_1^{(2)} = -\mu_0\sqrt{T\,(S_{10}e, e^*)}.$$

Доказательство. По векторам $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ из равенств (1.63) определим новые векторы:

$$e_1 = \mu_0 T e, \quad g_1 = g, \quad e_1^* = e^*, \quad g_1^* = \frac{1}{\bar{\mu}_0 T} g^*.$$

Эти векторы удовлетворяют равенствам:

$$V_0 e_1 = \mu_0 e_1, \quad V_0 g_1 = \mu_0 g_1 + e_1, \quad V_0^* e_1^* = \bar{\mu}_0 e_1^*, \quad V_0^* g_1^* = \bar{\mu}_0 g_1^* + e_1^*.$$

Согласно лемме 1.8 (см. стр. 17) применительно к возмущению неполупростого собственного значения μ_0 матрицы монодромии $V(\varepsilon)$ имеем: $\mu_1^{(1,2)} = \pm\sqrt{(V_1 e_1, e_1^*)}$, где V_1 – матрица, определенная вторым из равенств (1.48). После подстановки получим:

$$\mu_1^{(1,2)} = \pm\sqrt{\int_0^T (e^{A_0 T}e^{-A_0 t}S_1(t)e^{A_0 t}e_1, e_1^*)\,dt} = \pm\sqrt{\mu_0\int_0^T (S_1(t)\mu_0 T e, e^*)\,dt},$$

отсюда и следует утверждение теоремы. □

1.3.3 Признаки устойчивости точек равновесия периодических систем

Перейдем к рассмотрению задачи об устойчивости нулевого положения равновесия периодической системы (1.36) при малых $|\varepsilon|$ в указанных выше на стр. 28 критических случаях 1^0 – 6^0. При этом будем предполагать, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части.

Рассмотрим сначала случай 1^0, т.е. пусть матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение. Из теоремы 1.6 следует:

Следствие 1.4. *Если* $\varepsilon(S_{10}e, g) < 0$, *то для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (1.36) при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *нулевое положение равновесия системы (1.36) является асимптотически устойчивым.*

Если $\varepsilon(S_{10}e, g) > 0$, *то для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (1.36) при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *нулевое положение равновесия системы (1.36) неустойчиво.*

Рассмотрим теперь случай 2^0, т.е. пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при целых k. Из теоремы 1.7 следует:

Следствие 1.5. *Если* $\varepsilon[(S_{10}e, e^*) + (S_{10}g, g^*)] < 0$, *то для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (1.36) при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *нулевое положение равновесия системы (1.36) является асимптотически устойчивым.*

Если $\varepsilon[(S_{10}e, e^*) + (S_{10}g, g^*)] > 0$, *то для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (1.36) при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *нулевое положение равновесия системы (1.36) неустойчиво.*

В случаях 3^0–5^0 вопрос об устойчивости нулевой точки равновесия системы (1.36) сводится к вопросу нахождения собственных значений матрицы $D_1 = \frac{1}{\mu_0} D$ (см. равенство (1.57)) и анализу формул (1.56) при малых $|\varepsilon|$.

Следствие 1.6. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Тогда если для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (1.36) при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *оба собственных значения матрицы* D_1 *имеют отрицательные действительные части, то нулевое положение равновесия системы (1.36) является асимптотически устойчивым. Если хотя бы одно собственное значение матрицы* D_1 *имеет положительную вещественную часть, то нулевое положение равновесия системы (1.36) неустойчиво.*

Пусть $\varepsilon < 0$. *Тогда если для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (1.36) при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *оба собственных значения матрицы* D_1

имеют положительные действительные части, то при всех малых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (1.36) является асимптотически устойчивым. Если хотя бы одно собственное значение матрицы D_1 имеет отрицательную вещественную часть, то нулевое положение равновесия системы (1.36) неустойчиво.

Рассмотрим, наконец, случай 6^0, т.е. когда матрица A_0 имеет неполупростое собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при натуральных k. Из теоремы 1.9 следует:

Следствие 1.7. *Если* $\mathbb{R}\mathrm{e}\sqrt{\varepsilon\,(S_{10}e, e^*)} \neq 0$, *то для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (1.36) при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *нулевое положение равновесия системы (1.36) неустойчиво.*

1.3.4 Исследование периодической системы в общем случае

Изложенные выше результаты могут быть обобщены на случай, когда матрица A_0 невозмущенной системы (1.38) является T-периодической по t. В этом случае для решения вопроса об устойчивости нулевого положения равновесия системы (1.32) построим формулы первого приближения для возмущений кратных мультипликаторов системы (1.33) в следующих основных случаях, когда система (1.34) имеет:

P_1. простой мультипликатор μ_0 так, что $|\mu_0| = 1$;

P_2. полупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 так, что $|\mu_0| = 1$;

P_3. неполупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 так, что $|\mu_0| = 1$.

Будем предполагать, что остальные отличные от μ_0 мультипликаторы μ системы (1.34) удовлетворяют условию $|\mu| < 1$.

Полученные формулы первого приближения для возмущения мультипликатора μ_0 будут использованы для изучения задачи анализа устойчивости по Ляпунову положения равновесия системы (1.32).

Ниже для удобства системы (1.32) и (1.33) будем рассматривать в равносильном виде:

$$\frac{dx}{dt} = [A_0(t) + \varepsilon S_1(t) + S_2(t,\varepsilon)]\,x + a(x,t,\varepsilon), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.64}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = [A_0(t) + \varepsilon S_1(t) + S_2(t,\varepsilon)]\,x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{1.65}$$

где $A_0(t)$ – матрица из системы (1.34), $S_1(t)$ и $S_2(t, \varepsilon)$ – вещественные и T-периодические по t матрицы, при этом матрица $S_2(t, \varepsilon)$ является C^k-гладкой по ε и удовлетворяет соотношению: $\|S_2(t, \varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по t. Вектор-функция $a(x, t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от t, C^k-гладкая по параметру ε и является T-периодической по t. Предполагается также, что $\|a(x, t, \varepsilon)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$ равномерно по t и ε.

1.3.4.1 Случай P_1 : простой мультипликатор

Пусть матрица монодромии V_0 системы (1.34) имеет простое собственное значение μ_0 такое, что $|\mu_0| = 1$. Соответственно, матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.65) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет простое собственное значение $\mu(\varepsilon)$ такое, что функция $\mu(\varepsilon)$ – C^k-гладкая, $\mu(0) = \mu_0$. При этом при $\varepsilon \to 0$ указанная функция $\mu(\varepsilon)$ представима в аналогичном (1.2) виде:

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + O(|\varepsilon|^2). \tag{1.66}$$

В рассматриваем случае найдутся линейно независимые векторы $e, g \in \mathbb{C}^N$ такие, что верны равенства $V_0 e = \mu_0 e$, $V_0^* g = \bar{\mu}_0 g$ и выполняется нормировка (1.5).

Лемма 1.9. *Участвующий в формуле (1.66) коэффициент μ_1 равен числу*

$$\mu_1 = \mu_0 \int_0^T \left(X_0^{-1}(t) S_1(t) X_0(t)\ e,\ g\right) dt.$$

Здесь $S_1(t)$ – матрица из системы (1.65), $X_0(t)$ – ФМР системы (1.34).

Справедливость предложенной леммы следует из леммы 1.2 (см. стр. 10).

Из данной леммы следует

Следствие 1.8. *Если $\varepsilon \mathbb{R}\mathrm{e} \left(\int_0^T \left(X_0^{-1}(t) S_1(t) X_0(t) e, g\right) dt \right) < 0$, то для данного возмущения $S_1(t)$ при соответствующих малых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (1.64) является асимптотически устойчивым.*

Если $\varepsilon \mathbb{R}\mathrm{e} \left(\int_0^T \left(X_0^{-1}(t) S_1(t) X_0(t) e, g\right) dt \right) > 0$, то для данного возмущения $S_1(t)$ при соответствующих малых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (1.64) неустойчиво.

1.3.4.2 Случай P_2 : полупростой мультипликатор

Пусть матрица монодромии V_0 системы (1.34) имеет кратное (кратности 2) полупростое собственное значение μ_0. Соответственно, матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.65) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$ и функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются гладкими. При этом указанные функции $\mu^{(j)}(\varepsilon)$ представимы в виде (1.56).

В рассматриваем случае найдутся две пары линейно независимых собственных векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ такие, что выполняются равенства

$$V_0 e = \mu_0 e, \quad V_0 g = \mu_0 g, \quad V_0^* e^* = \bar{\mu}_0 e^*, \quad V_0^* g^* = \bar{\mu}_0 g^*.$$

Здесь также будем считать выполненными условия нормировки (1.18).

Лемма 1.10. *Участвующие в формулах (1.56) коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ являются собственными значениями матрицы $\mu_0 D$, где*

$$D = \int_0^T \begin{bmatrix} (X_0^{-1}(t)S_1(t)X_0(t)e, e^*) & (X_0^{-1}(t)S_1(t)X_0(t)g, e^*) \\ (X_0^{-1}(t)S_1(t)X_0(t)e, g^*) & (X_0^{-1}(t)S_1(t)X_0(t)g, g^*) \end{bmatrix} dt; \tag{1.67}$$

здесь $X_0(t)$ – ФМР системы (1.34).

Справедливость предложенной леммы следует из леммы 1.6 (см. стр. 15).

Вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия системы (1.65) в рассматриваемом случае сводится к вопросу нахождения собственных значений матрицы (1.67) и анализу формул (1.56) при малых $|\varepsilon|$.

Следствие 1.9. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда если для данного возмущения $S_1(t)$ при соответствующих малых $|\varepsilon|$ оба собственных значения матрицы D имеют отрицательные действительные части, то нулевое положение равновесия системы (1.64) является асимптотически устойчивым. Если хотя бы одно собственное значение матрицы D имеет положительную вещественную часть, то нулевое положение равновесия системы (1.64) неустойчиво.*

Пусть $\varepsilon < 0$. Тогда если для данного возмущения $S_1(t)$ системы (1.65) при соответствующих малых $|\varepsilon|$ оба собственных значения матрицы D имеют положительные действительные части, то при всех малых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (1.64) является асимптотически устойчивым. Если хотя бы одно собственное значение матрицы D имеет *отрицательную вещественную часть, то нулевое положение равновесия системы (1.64) неустойчиво.*

1.3.4.3 Случай P_3 : неполупростой мультипликатор

Пусть матрица монодромии V_0 системы (1.34) имеет неполупростое (кратности 2) собственное значение μ_0: $|\mu_0| = 1$. Матрица монодромии системы (1.65) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ непрерывны, причем $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$. При этом указанные функции представимы в виде (1.62).

В рассматриваем случае найдутся две пары линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^N$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^N$ таких, что выполняются равенства:

$$V_0 e = \mu_0 e, \quad V_0 g = \mu_0 g + e, \quad V_0^* e^* = \bar{\mu}_0 e^*, \quad V_0^* g^* = \bar{\mu}_0 g^* + e^*,$$

и условия нормировки (1.23).

Лемма 1.11. *Участвующие в формулах (1.62) коэффициенты* $\mu_1^{(1)}$ *и* $\mu_1^{(2)}$ *– это числа*

$$\mu_1^{(j)} = \pm\sqrt{\mu_0 \int_0^T (X_0^{-1}(t) S_1(t) X_0(t) e, e^*) dt}, \qquad j = 1, 2;$$

здесь $X(t)$ *– ФМР системы (1.34).*

Справедливость этого утверждения следует из леммы 1.8 (см. стр. 17).

Из предложенной леммы следует

Следствие 1.10. *Если* $\mathbb{R}e\sqrt{\varepsilon\left(\mu_0 \int_0^T (X_0^{-1}(t) S_1(t) X_0(t) e, e^*) dt\right)} \neq 0$, *то для данного возмущения* $S_1(t)$ *при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *нулевое положение равновесия системы (1.64) неустойчиво.*

Глава 2. Исследование автономных гамильтоновых систем

Глава посвящена исследованию устойчивости точек равновесия автономных гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра.

2.1 Устойчивость линейных автономных гамильтоновых систем

Рассмотрим линейную автономную гамильтонову систему (ЛАГС)

$$\frac{dx}{dt} = JA(\varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{2.1}$$

в которой $A(\varepsilon)$ – вещественная симметрическая $(2N \times 2N)$ матрица, зависящая от малого скалярного параметра ε; матрица J определена равенством:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{здесь } I \text{ – единичная } (N \times N) \text{ матрица.} \tag{2.2}$$

Предполагается, что элементы матрицы $A(\varepsilon)$ являются C^k-гладкими ($k \geqslant 1$) функциями по ε.

При $\varepsilon = 0$ система (2.1) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = JA_0x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{2.3}$$

где $JA_0 = JA(0)$. Систему (2.3) будем называть невозмущенной, а систему (2.1) – возмущенной системой.

Нас будет интересовать вопрос об устойчивости линейной системы (2.1) при малых $|\varepsilon|$ при имеющейся информации относительно спектра матрицы JA_0. Приведенные ранее признаки устойчивости линейных автономных систем общего вида имеют место естественно и для гамильтоновой системы (2.1). Но гамильтоновы системы имеют свои особенности, которые влияют на свойства ее устойчивости.

Задаче исследования устойчивости линейных автономных гамильтоновых систем посвящено множество работ. Большинство исследований основаны на методах нормализации линейных гамильтоновых систем и на преобразовании гамильтониана системы (2.1) путем канонической замены переменных. В этом направлении получен ряд важных результатов (см., например, [8; 31; 73—75]).

Другие подходы исследования задачи основаны на классической теории возмущений линейных операторов. Следует указать на то, что интерес представляют не непосредственное применение методов общей теории (этот путь, как правило, чрезвычайно громоздок и поэтому практически не применяется), а модификации методов, максимально учитывающих специфику задачи, связанную с гамильтоновостью системы. Указанный подход также получил свое развитие в работах многих авторов (см., например, [19; 62; 76; 77]).

Исследования продолжаются в различных направлениях. Здесь особо актуальными представляются разработки общих подходов исследования задачи об устойчивости гамильтоновых систем в терминах исходных уравнений без необходимости предварительного (часто трудоемкого и громоздкого) их преобразования.

2.1.1 Сильная устойчивость

Перечислим некоторые особенности ЛАГС, влияющие на свойства ее устойчивости (см., например, [19; 78]):

– если матрица JA_0 имеет собственное значение λ, то числа $-\lambda$, $\overline{\lambda}$, $-\overline{\lambda}$ также являются собственными значениями этой матрицы, причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса;
– если матрица JA_0 имеет нулевое собственное значение $\lambda = 0$, то алгебраическая кратность этого собственного значения является четным числом.

Отсюда следует, что гамильтоновы системы (2.1) и (2.3) не могут быть асимптотически устойчивыми.

Будем говорить, что система (2.3) является *сильно устойчивой* (см., например, [79]), если она и все ее достаточно малые линейные автономные гамильтоновы возмущения устойчивы по Ляпунову. Другими словами, система (2.3) является сильно устойчивой, если она и все возмущенные системы (2.1) при достаточно малых $|\varepsilon|$ являются устойчивыми. Соответственно, будем говорить, что система (2.3) не обладает свойством сильной устойчивости, если сама система (2.3) устойчива, но существуют сколь угодно малые ее линейные автономные гамильтоновы возмущения, которые являются неустойчивыми.

Из приведенных выше свойств следует, что если матрица JA_0 системы (2.3) имеет собственное значение λ_0: $\mathbb{R}e(\lambda_0) \neq 0$, то при всех малых $|\varepsilon|$ система (2.1) неустойчива в силу непрерывной зависимости матрицы $A(\varepsilon)$ от параметра ε. Таким образом, вопрос о сильной устойчивости системы (2.3) остается открытым только в случае, когда все собственные значения системы (2.3) являются чисто мнимыми.

Пусть матрица JA_0 имеет простое чисто мнимое собственное значение вида $\lambda_0 = i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$. В этом случае, при всех малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет простое собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ такое, что $\lambda(0) = \lambda_0$ и функция $\lambda(\varepsilon)$ представима в виде (1.2). В силу свойств гамильтоновых систем собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ при всех малых $|\varepsilon|$ является чисто мнимым. Таким образом, если все собственные значения системы (2.3) являются простыми чисто мнимыми, то система (2.3) является сильно устойчивой.

Далее нас будут интересовать критические ситуации, когда все собственные значения матрицы JA_0 являются чисто мнимыми, причем некоторые из них являются кратными. Основное внимание будет уделено случаям, когда кратность чисто мнимого собственного значения равна двум, при этом все другие собственные значения являются простыми.

2.1.2 Дефинитные и индефинитные собственные значения

М.Г. Крейном (см. [12]) внес значительный вклад в теорию мультипликаторов периодических гамильтоновых систем, предложив классификацию мультипликаторов на дефинитные и индефинитные. В данном разделе расширено это разделение на собственные значения, применительно к случаям автономных гамильтоновых систем. Собственное значение λ_0 матрицы JA_0 будем называть *дефинитным*, если для любых соответствующих собственных векторов $e \in \mathbb{C}^{2N}$ выполняется неравенство $(Je, e) \neq 0$. Будем говорить, что собственное значение λ_0 матрицы JA_0 является *индефинитным*, если существует соответствующий собственный вектор $e \in \mathbb{C}^{2N}$ такой, что выполняется равенство $(Je, e) = 0$.

Основное внимание в этом параграфе будет уделено изучению сильной устойчивости системы (2.3), а также связанным с ними вопросам о свойствах дефинитных и индефинитных собственных значений матрицы JA_0.

Лемма 2.1. *Верны следующие утверждения:*

U_1. *Собственное значение матрицы JA_0 с ненулевой вещественной частью является индефинитным.*

U_2. *Простое чисто мнимое собственное значение $i\omega_0$ матрицы JA_0 является дефинитным.*

U_3. *Нулевое собственное значение матрицы JA_0 является индефинитным.*

U_4. *Неполупростое собственное значение $i\omega_0$, $\omega_0 \geqslant 0$ матрицы JA_0 является индефинитным.*

Доказательство. Докажем утверждение U_1. Пусть $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$) является собственным значением гамильтоновой матрицы JA_0. Пусть $e \in \mathbb{C}^{2N}$ – собственный вектор: $JA_0e = \lambda_0 e$. Рассмотрим значение (Je, e) :

$$(Je, e) = \left(J\frac{JA_0e}{\lambda_0}, e\right) = -\frac{1}{\lambda_0}(e, -JJA_0e) = -\frac{\bar{\lambda}_0}{\lambda_0}(-Je, e).$$

Здесь без специальных ссылок был использован факт: $J^{-1} = J^* = -J$.

Отсюда следует равенство: $(Je, e)\left(1 + \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta}\right) = 0$. Заметим, что $1 + \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} = 0$ только в случае, если $\alpha = 0$. Таким образом, если собственное значение гамильтоновой матрицы имеет ненулевую вещественную часть, то оно является индефинитным.

Докажем утверждение U_2. Пусть $i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) – простое собственное значение гамильтоновой матрицы JA_0. Согласно лемме 1.1 для линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$, удовлетворяющих равенствам $JA_0e = i\omega_0 e$ и $(JA_0)^*g = -i\omega_0 g$, выполняется неравенство $(e, g) \neq 0$.

Покажем, что вектор g можно положить равным $-Je$, т.е. $(JA_0)^*(-Je) = -i\omega_0(-Je)$. Действительно:

$$(JA_0)^*(-Je) + i\omega_0(-Je) = (-A_0J)(-Je) - i\omega_0 Je = J(JA_0e - i\omega_0 e) = 0.$$

Отсюда следует утверждение U_2: $(Je, e) = -(g, e) \neq 0$.

Докажем утверждение U_3. Доказательство данного утверждения следует из того, что по построению матрицы J для любого собственного вектора $e \in \mathbb{R}^{2N}$ соответствующего нулевому собственному значению выполняется: $(Je, e) = 0$.

Докажем утверждение U_4. Пусть $i\omega_0$ ($\omega_0 \geqslant 0$) – неполупростое (кратности $2k$, $k \in \mathbb{N}$) собственное значение матрицы JA_0. Пусть линейно независимые векторы $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ такие, что выполняются равенства $JA_0e = i\omega_0 e$ и $JA_0g = i\omega_0 g + e$. Тогда $(Je, e) = (Je, JAg - i\omega_0 g) = (Ae, g) + i\omega_0(Je, g) = (-JJAe, g) + i\omega_0(Je, g) = -i\omega_0(Je, g) + i\omega_0(Je, g) = 0$. □

Замечание. Полупростое собственное значение $i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ матрицы JA_0 может быть быть как дефинитным, так и индефинитным собственным значением.

Пример. Рассмотрим две гамильтоновы матрицы

$$JA_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad JA_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы JA_1 и JA_2 имеют полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

Матрица JA_1 имеет два собственных вектора, соответствующих собственному значению $i\omega_0$: $e_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Любой соответствующий собственному значению $i\omega_0$ собственный вектор может быть записан в виде линейной комбинацией $f = \alpha e_1 + \beta g_1$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Имеем:

$$(Jf, f) = (\alpha J e_1 + \beta J g_1, \alpha e_1 + \beta g_1) = 2i(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$$

Таким образом, при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (α, β не нулевые одновременно), для всякого собственного вектора, соответствующего собственному значению $i\omega_0$, выполняется неравенство $(Jf, f) \neq 0$. Следовательно, собственное значение $i\omega_0$ матрицы JA_2 является дефинитным.

Матрица JA_2 имеет соответствующий собственному значению $i\omega_0$ собственный вектор: $e = \begin{bmatrix} -i \\ i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Данный вектор удовлетворяет равенству $(Je, e) = 0$. Таким образом, собственное значение $i\omega_0$ матрицы JA_2 является индефинитным.

Для простоты доказательств нижеследующих утверждений укажем нормальные формы в некоторых критических случаях гамильтоновых двумерных и четырехмерных систем (см., например, [23; 80; 81]), т.е. систем вида

$$\frac{dx}{dt} = JA_0 x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.4}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = JA_0 x, \quad x \in \mathbb{R}^4. \tag{2.5}$$

1. Если матрица JA_0 системы (2.4) имеет полупростое нулевое собственное значение кратности 2, то нормальная форма матрицы JA_0 есть нулевая матрица.
2. Если матрица JA_0 системы (2.4) имеет неполупростое нулевое собственное значение кратности 2, то нормальная форма имеет вид

$$JA_0 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{здесь} \qquad \sigma = 1 \quad \text{или} \quad \sigma = -1. \tag{2.6}$$

3. Если матрица JA_0 системы (2.5) имеет полупростое чисто мнимое собственное значение $i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ кратности 2, то нормальная форма матрицы JA_0 системы (2.5) имеет вид

$$JA_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\omega_0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{здесь} \quad \sigma = 1 \quad \text{или} \quad \sigma = -1. \tag{2.7}$$

   Можно показать, что если $\sigma = 1$ ($\sigma = -1$), то собственное значение $i\omega_0$ является дефинитным (индефинитным).
4. Если матрица JA_0 системы (2.5) имеет неполупростое чисто мнимое собственное значение $i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ кратности 2, то нормальная форма матрицы JA_0 системы (2.5) имеет вид

$$JA_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & \sigma & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{здесь} \quad \sigma = 1 \quad \text{или} \quad \sigma = -1. \tag{2.8}$$

Теорема 2.1. *Система (2.3) является сильно устойчивой если и только если все собственные значения матрицы JA_0 являются дефинитными.*

Доказательство. Необходимость. Докажем необходимость теоремы от противного. А именно, пусть система (2.3) является сильно устойчивой, тем не менее матрица JA_0 имеет чисто мнимое индефинитное собственное значение (если собственное значение имеет ненулевую вещественную часть, то система (2.3), и соответственно система (2.1), неустойчива). Покажем, что тогда всегда можно построить гамильтоново возмущение системы (2.3), при котором система (2.1) будет неустойчива.

Для простоты доказательства положим, что кратность рассматриваемого индефинитного собственного значения $i\omega_0$, $\omega_0 \geqslant 0$ равна 2; пусть также размерность системы (2.3) не выше 4 (случаи, когда кратность собственного значения либо размерность системы больше, рассматриваются аналогично). Тогда при наших условиях возможны следующие варианты:

S_1. матрица JA_0 системы (2.4) имеет полупростое нулевое собственное значение кратности 2;

S_2. матрица JA_0 системы (2.4) имеет неполупростое нулевое собственное значение кратности 2;

S_3. матрица JA_0 системы (2.5) имеет полупростое индефинитное собственное значение $i\omega_0$ $(\omega_0 \neq 0)$ кратности 2;

S_4. матрица JA_0 системы (2.5) имеет неполупростое индефинитное собственное значение $i\omega_0$ $(\omega_0 \neq 0)$ кратности 2.

В случае S_1 нормальная форма матрицы JA_0 системы (2.4) есть нулевая матрица. Построим соответствующую возмущенную ЛАГС вида

$$\frac{dx}{dt} = J(A_0 + \varepsilon A_1)x, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.9}$$

Положим, что $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Полученная система (2.9) неустойчива при малых ненулевых $|\varepsilon|$, т.к. матрица $J(A_0 + \varepsilon A_1)$ имеет собственные значения $\pm\varepsilon$.

В случае S_2 матрица JA_0 системы (2.4) может быть представлена в нормальной форме (2.6). Положим, что $A_1 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Полученная система (2.9) неустойчива при малых $\varepsilon > 0$, т.к. матрица $J(A_0 + \varepsilon A_1)$ имеет собственные значения $\pm i\sigma\sqrt{\varepsilon}$.

В случае S_3 матрица JA_0 системы (2.5) может быть представлена в нормальной форме (2.7), где $\sigma = -1$. Построим соответствующую возмущенную ЛАГС вида

$$\frac{dx}{dt} = J(A_0 + \varepsilon A_1)x, \quad x \in \mathbb{R}^4, \quad \text{где} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Определим собственные значения матрицы $J(A_0+\varepsilon A_1)$. Для этого построим такие две пары линейно независимых векторов $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{C}^{2N}$, что выполняются равенства $JA_0e = i\omega_0 e$, $JA_0 g = i\omega_0 g$, $(JA_0)^* e^* = -i\omega_0 e^*$, $(JA_0)^* g^* = -i\omega_0 g^*$ и нормировка (1.18) леммы 1.5:

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^* = \frac{1}{2}e, \quad g^* = \frac{1}{2}g.$$

В силу леммы 1.6 матрица $J(A_0 + \varepsilon A_1)$ при малых $|\varepsilon|$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$, представимых в виде (1.16), где коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ – это собственные значения матрицы (1.19):

$$D = \begin{bmatrix} (JA_1e, e^*) & (JA_1g, e^*) \\ (JA_1e, g^*) & (JA_1g, g^*) \end{bmatrix} = \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ матрица $J(A_0 + \varepsilon A_1)$ имеет собственные значения

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = i\omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = i\omega_0 - \frac{1}{2}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2}).$$

Отсюда следует, что при малых ненулевых $|\varepsilon|$ система (2.10) – неустойчива. А следовательно, система (2.5) не обладает свойством сильной устойчивости.

В случае S_4 матрица JA_0 системы (2.5) может быть представлена в нормальной форме (2.8). В качестве матрицы возмущения JA_1 в системе (2.10) положим

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Определим собственные значения матрицы $J(A_0+\varepsilon A_1)$. Для этого построим две пары собственных векторов $e, g, e^*, g^* \in \mathbb{C}^{2N}$ такие, что выполняются равенства $JA_0e = i\omega_0 e$, $JA_0 g = i\omega_0 g + e$, $(JA_0)^* e^* = -i\omega_0 e^*$, $(JA_0)^* g^* = -i\omega_0 g^* + e^*$ и удовлетворяют нормировке (1.23) леммы 1.7:

$$e = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i\sigma \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad e^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i\sigma \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad g^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В силу леммы 1.8 матрица $J(A_0 + \varepsilon A_1)$ при малых $|\varepsilon|$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$, представимых в виде (1.21): $\lambda^{(1,2)}(\varepsilon) = i\omega_0 \pm \varepsilon^{1/2}\lambda_1 + O(|\varepsilon|)$, где коэффициент $\lambda_1 = \sqrt{(JA_1 e, e^*)}$. Подставляя значения матрицы JA_1 установим, что коэффициент $\lambda_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}$. Таким образом, при всех малых $|\varepsilon|$ система (2.10) имеет собственное значение $i\omega_0 \pm i\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. Отсюда следует, что при малых $\varepsilon < 0$ система (2.10) – неустойчива.

Достаточность. Пусть все собственные значения матрица JA_0 системы (2.3) являются дефинитными. Тогда согласно лемме 2.1 все собственные значения являются чисто мнимыми, ненулевыми (либо простыми либо полупростыми).

Пусть сначала все собственные значения матрицы JA_0 являются простыми. В этом случае при всех малых $|\varepsilon|$ возмущенная матрица $JA(\varepsilon)$ имеет также простые чисто мнимые собственные значения. Отсюда следует, что система (2.3) является сильно устойчивой (система (2.1) устойчива при всех малых $|\varepsilon|$).

Рассмотрим теперь случай, когда матрица JA_0 имеет дефинитное полупростое чисто мнимое собственное значение кратности 2, при этом все остальные ее собственные значения являются чисто мнимыми, простыми. Также здесь мы будем считать, что система (2.3) имеет две степени свободы (случаи при больших степенях свободы и с кратностью больше двух могут быть рассмотрены аналогичным образом). Таким образом, далее будет рассматриваться четырехмерная система (2.5), в которой матрица JA_0 системы (2.5) имеет полупростое чисто мнимое собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) кратности 2.

В системе (2.5) можно произвести такое симплектическое преобразование (см., например, [29])), что матрица JA_0 системы (2.5) будет представлена в нормальной форме (2.7), где $\sigma = 1$. Соответствующая функция Гамильтона возмущенной системы (2.1) в этом случае представима в виде:

$$H(x,\varepsilon) = \frac{\omega_0}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) + H_3(x,\varepsilon),$$

где $H_3(x,\varepsilon)$ – однородные многочлены порядка 3 и выше относительно x, $|H_3(x,\varepsilon)| = O(|\varepsilon|)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по x.

Таким образом, имеем: гамильтониан $H(x,\varepsilon)$ системы (2.1) есть положительно определенная функция при всех малых $|\varepsilon|$ (см., например, [82]). Тогда согласно теореме Ляпунова при всех малых $|\varepsilon|$ система (2.1) является устойчивой. Отсюда следует утверждение необходимости нашей леммы.

$\square$

2.1.3 Возмущения дефинитных и индефинитных собственных значений

Перейдем к изучению задачи о возмущении собственных значений гамильтоновой матрицы $JA(\varepsilon)$ в критических случаях. Ниже для удобства система (2.1) будет рассматриваться в равносильном виде:

$$\frac{dx}{dt} = J(A_0 + \varepsilon A_1 + A_2(\varepsilon))x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}; \tag{2.12}$$

здесь $A_0, A_1, A_2(\varepsilon)$ – вещественные симметрические $(2N \times 2N)$ матрицы, а J – это матрица (2.2). Элементы матрицы $A_2(\varepsilon)$ являются C^2-гладкими функциями, причем $\|A_2(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Будем различать случаи, когда собственное значение матрицы JA_0 является полупростым или неполупростым кратности 2. Случаи большей кратности могут быть рассмотрены по аналогичной схеме.

2.1.3.1 Случай полупростого чисто мнимого собственного значения

Пусть матрица JA_0 системы (2.12) имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$. Определим два линейно независимых вектора $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ так, что выполняются равенства

$$JA_0 e = i\omega_0 e, \qquad JA_0 g = i\omega_0 g. \tag{2.13}$$

Согласно изложенному ранее (см. п. 1.1.2 стр. 14) при малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ (возможно, совпадающих) таких, что функции $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ являются гладкими, причем $\lambda^{(1)}(0) = \lambda^{(2)}(0) = i\omega_0$. При этом при $\varepsilon \to 0$ указанные функции представимы в виде (1.16):

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1^{(2)} + O(|\varepsilon|^{3/2}). \tag{2.14}$$

Коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в формулах (2.14) могут быть получены согласно теореме 1.6. В нашем случае соответствующие формулы могут быть существенно упрощены, учитывая гамильтоновость системы (2.12). Приведем соответствующую схему.

Отметим, что для любого $x \in \mathbb{C}^{2N}$ значение (Jx, x) является чисто мнимым. Действительно, пусть вектор $x = (w_j + iv_j)_{j=1,\ldots,2N}$, где $w_j, v_j \in \mathbb{R}$. Тогда $(Jx, x) = 2i\left(v_{N+1}w_1 + \ldots + v_{2N}w_N - v_1 w_{N+1} - \ldots - v_N w_{2N}\right)$.

Лемма 2.2. *Полупростое собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) матрицы JA_0 является дефинитным, если и только если любая пара соответствующих собственных векторов e и g из (2.13) удовлетворяет неравенству*

$$(Je, e)(Jg, g) < 0. \tag{2.15}$$

Доказательство. Покажем необходимость леммы от противного. А именно, пусть $i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) – дефинитное полупростое собственное значение матрицы JA_0 системы (2.12), при этом существует пара линейно независимых векторов e и g из (2.13) удовлетворяющая неравенству

$$(Je, e)(Jg, g) \geqslant 0.$$

Отметим, что если выполняется равенство $(Je, e)(Jg, g) = 0$, это будет означать существования собственного вектора $f = e$ (или g) такого, что $(Jf, f) = 0$. Это будет означать, что $i\omega_0$ – индефинитное собственное значение.

Пусть теперь $(Je, e)(Jg, g) > 0$; нормируем векторы так, что выполняются равенства

$$(iJe, e) = 1, \qquad (iJg, g) = -1.$$

Это можно выполнить построив, например, векторы $e_1 = C_1 e$, $g_1 = C_2 g$ за счет выбора констант C_1, C_2. Далее продемонстрируем возможность построения такого собственного вектора $f = e + g$, соответствующего собственному значению $i\omega_0$, для которого выполнено равенство $(Jf, f) = 0$.

Имеем: $(iJf, f) = (iJe, e) + (iJe, g) + (iJg, e) + (iJg, g) = (iJe, g) + (iJg, e)$. Вектора e и g можно нормировать с помощью равенства $(Je, g) = 0$, например, положив $e_1 = \rho(e\cos\varphi + g\sin\varphi)$, $g_1 = \rho(g\cos\varphi - e\sin\varphi)$, где $\rho > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Заметим, что

$$(iJe_1, e_1) = \rho^2 \left[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\left((iJe, g) + (iJg, e)\right)\right].$$

Далее имеем:

$$(iJg_1, g_1) = \rho^2 \left[\sin^2\varphi - cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\left((iJe, g) + (iJg, e)\right)\right] = -(iJe_1, e_1).$$

Остается показать, что параметры ρ, φ можно подобрать так, что выполняются равенства

$$(Je_1, g_1) = 0, \qquad (iJe_1, e_1) = 1, \qquad (iJg_1, g_1) = -1.$$

Это устанавливается прямым подсчетом.

Таким образом, имеем существование собственного вектора $f = e + g$: $(iJf, f) = 0$. Что противоречит тому факту, что $i\omega_0$ – дефинитное собственное значение.

Покажем достаточность леммы. Для этого положим, что любая пара линейно независимых векторов e и g из (2.13) удовлетворяет неравенству (2.15). Покажем, что не существует собственного вектора $f = \alpha e + \beta g$ (здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), для которого $(Jf, f) = 0$.

Пусть также векторы e и g нормированы с помощью равенства $(Je, g) = 0$. Тогда имеем: $(iJf, f) = |\alpha|^2(iJe, e) + |\beta|^2(iJg, g)$. Уравнение $|\alpha|^2(iJe, e) + |\beta|^2(iJg, g) = 0$ в силу (2.15) имеет решение если только $\alpha = \beta = 0$. Что противоречит тому факту, что f – собственный вектор. □

Из леммы 2.2 следует

Лемма 2.3. *Если полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) матрицы JA_0 является дефинитным, то любую пару соответствующих собственных векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ из (2.13) можно нормировать в соответствии с одной из пар равенств*

$$(iJe, e) = 1, \quad (iJg, g) = 1 \tag{2.16}$$

или

$$(iJe, e) = -1, \quad (iJg, g) = -1. \tag{2.17}$$

Если полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 \geqslant 0$) матрицы JA_0 является индефинитным, то существует пара соответствующих собственных векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ из (2.13), нормированная в соответствии с равенствами

$$(iJe, e) = 1, \qquad (iJg, g) = -1. \tag{2.18}$$

2.1.3.1.1 Возмущение дефинитного собственного значения. Пусть сначала собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) матрицы JA_0 системы (2.12) является дефинитным. Пусть $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ – линейно независимые векторы, удовлетворяющие равенствам (2.13). В силу леммы 2.3 эти векторы можно считать нормированными в соответствии с одной из пар равенств (2.16) или (2.17). Определим числа:

$$a = (A_1 e, e), \quad b = (A_1 g, g), \quad c = (A_1 g, e). \tag{2.19}$$

Отметим, что числа a и b являются вещественными, а число c, вообще говоря, комплексное.

Теорема 2.2. *Пусть $i\omega_0$ $(\omega_0 > 0)$ – полупростое (кратности 2) дефинитное собственное значение матрицы JA_0 системы (2.12). Пусть для пары соответствующих собственных векторов e, g имеет место нормировка (2.16) (нормировка (2.17)) и выполняется равенство $(Je, g) = 0$. Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$, представимых в виде (2.14), где коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ имеют вид*

$$\lambda_1^{(1)} = -i\xi_1, \quad \lambda_1^{(2)} = -i\xi_2, \quad (\lambda_1^{(1)} = i\xi_1, \quad \lambda_1^{(2)} = i\xi_2);$$

здесь ξ_1, ξ_2 – это корни квадратного уравнения

$$\xi^2 - (a+b)\xi + ab - c\bar{c} = 0.$$

Доказательство. В силу леммы 1.6 (см., стр. 15) коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в разложениях (2.14) есть собственные значения матрицы (1.19), имеющей в нашем случае вид:

$$D = \begin{bmatrix} (JA_1e, e^*) & (JA_1g, e^*) \\ (JA_1e, g^*) & (JA_1g, g^*) \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Пусть для векторов e, g из (2.13) верна нормировка (2.16) (нормировка (2.17)). Тогда в качестве векторов e^* и g^* в матрице (2.20) будем использовать векторы

$$e^* = iJe, \qquad g^* = iJg, \quad (e^* = -iJe, \qquad g^* = -iJg)\,. \tag{2.21}$$

Векторы (2.21) являются собственными векторами матрицы $(JA_0)^*$, отвечающими собственному значению $-i\omega_0$. Векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют нормировке

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \qquad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \tag{2.22}$$

Отсюда следует, что матрица (2.20) примет вид:

$$D = -i \begin{bmatrix} a & c \\ \bar{c} & b \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

где a, b, c – числа, определенные равенствами (2.19).

Подставляя полученные выражения в (2.20) и учитывая равенства (2.21), установим: коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в формуле (2.14) – это собственные значения матрицы D (если выполнена нормировка (2.16)) или собственные значения матрицы $-D$ (если выполнена нормировка (2.17)). Отсюда и из того, что собственные значения D (2.23) имеют вид $\lambda_1^{(j)} = -i\xi_j$ $(\lambda_1^{(j)} = i\xi_j)$ получим справедливость теоремы 2.2. $\square$

2.1.3.1.2 Возмущение индефинитного собственного значения. Пусть теперь собственное значение $i\omega_0$ $(\omega_0 \geqslant 0)$ матрицы JA_0 системы (2.12) является индефинитным, полупростым кратности 2. Как и выше, пусть $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ – линейно независимые векторы, удовлетворяющие равенствам (2.13). В силу леммы 2.3 эти векторы можно считать нормированными в соответствии с равенствами (2.18). Как и выше, определим числа (2.19).

Теорема 2.3. *Пусть $i\omega_0$ $(\omega_0 \geqslant 0)$ – полупростое (кратности 2) индефинитное собственное значение матрицы JA_0 системы (2.12). Пусть для пары соответствующих собственных векторов e, g имеет место нормировка (2.18) и $(Je, g) = 0$. Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ $(j = 1, 2)$, представимых в виде (2.14), где коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ имеют вид*

$$\lambda_1^{(1)} = i\xi_1, \quad \lambda_1^{(2)} = i\xi_2;$$

здесь ξ_1, ξ_2 – это корни квадратного уравнения

$$\xi^2 + (a - b)\xi - ab + c\bar{c} = 0. \tag{2.24}$$

Доказательство. В силу леммы 1.6 коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в разложениях (2.14) есть собственные значения матрицы (2.20).

В качестве собственных векторов e^* и g^* матрицы $(JA_0)^*$, отвечающих собственному значению $-i\omega_0$, будем использовать векторы

$$e^* = iJe, \qquad g^* = -iJg, \tag{2.25}$$

где e и g – векторы из (2.13). Векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют нормировке (2.22).

Подставляя полученные выражения в (2.20), установим: коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в разложениях (2.14) – это собственные значения матрицы D_1 вида

$$D_1 = -i \begin{bmatrix} a & c \\ -\bar{c} & -b \end{bmatrix},$$

где a, b, c – числа, определенные равенствами (2.19). Отсюда и из того, что собственные значения матрицы D_1 имеют вид $\lambda_1^{(j)} = i\xi_j$ получим справедливость теоремы 2.3. $\square$

Стоит отметить, что если матрица JA_0 системы (2.12) имеет полупростое нулевое собственное значение кратности 2, то, формулы, указанные в теореме 2.3, могут быть значительно упрощены. Определим два линейно независимых вектора $e, g \in \mathbb{R}^{2N}$ таких, что выполняются равенства

$$JA_0 e = 0 \cdot e, \quad JA_0 g = 0 \cdot g. \tag{2.26}$$

В рассматриваемом случае имеют место равенства $(Je, e) = (Jg, g) = 0$.

Лемма 2.4. *Пусть e и g – линейно независимые векторы, удовлетворяющие равенствам (2.26). Тогда $(e, Jg) \neq 0$, при этом набор векторов*

$$e, g, e^* = \nu Jg, \quad g^* = -\nu Je \quad \left(\text{здесь} \quad \nu = \frac{1}{(e, Jg)}\right), \tag{2.27}$$

удовлетворяет равенствам

$$(JA_0)^* e^* = 0 \cdot e^*, \quad (JA_0)^* g^* = 0 \cdot g^*, \tag{2.28}$$

и условиям нормировки (2.22).

Доказательство. Покажем, что $(e, Jg) \neq 0$. Для этого по линейно независимым векторам e и g, удовлетворяющим паре равенств (2.26), определим новые линейно независимые векторы: $e^* = Jg$ и $g^* = -Je$. Для векторов e^* и g^* выполняются равенства (2.28), что проверяется прямыми вычислениями. Далее имеем: $(e, e^*) = (e, Jg)$, $(g, g^*) = (g, -Je) = (Jg, e)$, т.е. $(e, e^*) = (g, g^*)$. Таким образом, верность неравенства $(e, Jg) \neq 0$ будет следовать из выполнения неравенства $(e, e^*) \neq 0$. Докажем это.

Предположим противное, т.е. пусть $(e, e^*) = 0$. Пусть E_0 – двумерное подпространство с базисом из векторов e и g, а $E^0 = \left\{x : x \in \mathbb{R}^{2N}, (x, e^*) = (x, g^*) = 0\right\}$ – дополнительное к E_0 инвариантное для JA_0 подпространство. Тогда при предположении, что $(e, e^*) = 0$, имеем $e \in E^0$. Но одновременно $e \in E_0$, следовательно $e = 0$. Полученное противоречие доказывает соотношение $(e, e^*) \neq 0$.

Для завершения доказательства остается проверить выполнение для векторов (2.27) условий нормировки (2.22), что проверяется прямыми вычислениями. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть матрица JA_0 имеет полупростое нулевое собственное значение кратности 2 и пусть e и g – ненулевые векторы, удовлетворяющие соотношениям (2.26). Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару* *собственных значений* $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ *и* $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ *(возможно, совпадающих) так, что функции* $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ *являются гладкими и представимыми в виде*

$$\lambda^{(j)}(\varepsilon) = \pm\nu\varepsilon\sqrt{\Delta} + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad (j = 1, 2), \tag{2.29}$$

где

$$\Delta = (A_1 e, g)^2 - (A_1 e, e)\,(A_1 g, g)\,, \quad \nu = \frac{1}{(e, Jg)}. \tag{2.30}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.6 при малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$, представимых в виде (2.14), где коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ – это собственные значения матрицы (2.20).

Из леммы 2.4 следует, что если в качестве векторов e, g, e^*, g^* выбрать векторы (2.27), то матрица (2.20) примет вид

$$D = \frac{1}{(e, Jg)} \begin{bmatrix} (A_1 e, g) & (A_1 g, g) \\ -(A_1 e, e) & -(A_1 e, g) \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Отсюда и из того, что собственные значения матрицы (2.31) имеют вид $\lambda_{1,2}^{(j)} = \pm\nu\sqrt{\Delta}$, где числа ν и $\sqrt{\Delta}$ определены согласно (2.30), получим справедливость теоремы 2.4. □

Обратим внимание на то обстоятельство, что для получения формул (2.29) достаточно найти собственные векторы e и g матрицы JA_0, отвечающие полупростому нулевому собственному значению. Нормировка этих векторов не требуется.

2.1.3.2 Случай неполупростого чисто мнимого собственного значения

Пусть матрица JA_0 имеет неполупростое собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 \geqslant 0$) кратности 2; оно является индефинитным. Согласно изложенному ранее (см. п. 1.1.3 стр. 16), при каждом малом $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ $(j = 1, 2)$ таких, что $\lambda^{(j)}(0) = \lambda_0$. При этом функции $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ непрерывны и при $|\varepsilon| \to 0$ их удается представить в виде разложения Пюизье:

$$\lambda^{(j)}(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_1^{(j)} + O(|\varepsilon|), \qquad j = 1, 2. \tag{2.32}$$

Приведем утверждение относительно вычисления коэффициентов $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в разложении (2.32).

Отметим, что в рассматриваемом случае найдется пара линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ таких, что выполняются равенства

$$JA_0 e = i\omega_0 e, \quad JA_0 g = i\omega_0 g + e. \tag{2.33}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Пусть e и g – линейно независимые векторы, удовлетворяющие равенствам (2.33). Тогда число (e, Jg) является вещественным, ненулевым. При этом набор векторов*

$$e, g, e^* = -\nu Je, \quad g^* = \nu Jg \quad \left(\text{здесь} \quad \nu = \frac{1}{(e, Jg)} \right), \tag{2.34}$$

удовлетворяет соотношениям

$$(JA_0)^* e^* = -i\omega_0 e^*, \quad (JA_0)^* g^* = -i\omega_0 g^* + e^*, \tag{2.35}$$

и условию нормировки

$$(e, g^*) = 1. \tag{2.36}$$

Доказательство. Покажем, что $(e, Jg) \neq 0$. Для этого заметим, что если положить $e^* = -Je$, $g^* = Jg$, то построенные векторы e^* и g^* удовлетворяют равенствам (2.35). Действительно, $(JA_0)^* e^* + i\omega_0 e^* = (-A_0 J)(-Je) + i\omega_0(-Je) = (-A_0 e - i\omega_0 Je) = J\left(JA_0 e - i\omega_0 e\right) = 0$. Также можно заметить, что $(JA_0)^* g^* + i\omega_0 g^* - e^* = (-A_0 J)(Jg) + i\omega_0(Jg) + Je = (A_0 g + i\omega_0 Jg + Je) = -J\left(JA_0 g - i\omega_0 g - e\right) = 0$.

В доказательстве леммы 1.7 был отмечен следующий факт: векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют неравенству $(e, g^*) \neq 0$. В силу $g^* = Jg$ имеем: $(e, Jg) \neq 0$.

Покажем теперь, что число $(e, Jg) \in \mathbb{R}$. Действительно, с одной стороны $(e, Jg) = (-J(JA_0 g - i\omega_0 g), g) = (A_0 g, g) + i\omega_0(Jg, g)$. С другой стороны имеем: $(Jg, e) = (Jg, JA_0 - i\omega_0 g) = (g, A_0 g) + i\omega_0(Jg, g)$. В силу симметричности вещественной матрицы A_0 получаем: $(e, Jg) = (Jg, e)$. Отсюда и следует, что число (e, Jg) – вещественное.

Остается показать, что векторы (2.34) удовлетворяют условию нормировки (2.36). Имеем: $(e, g^*) = (e, \nu Jg) = \nu(e, Jg) = 1$. □

Теорема 2.5. *Пусть матрица JA_0 имеет неполупростое собственное значение $i\omega_0$ $(\omega_0 \geqslant 0)$ кратности 2 и пусть e и g – линейно независимые векторы,* *удовлетворяющие соотношениям (2.33). Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ (возможно, совпадающих), представимых в виде разложения (2.32). При этом коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в этих формулах – это числа*

$$\lambda_1^{(1)} = \sqrt{-\nu(A_1e, e)}, \quad \lambda_1^{(2)} = -\sqrt{-\nu(A_1e, e)}. \tag{2.37}$$

Отметим, что в силу симметричности A_1 под знаком корня в равенствах (2.37) находятся вещественные числа.

Доказательство. Согласно лемме 1.8 коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ в разложении (2.32) – это числа (1.24): $\lambda_1^{(1)} = \sqrt{(JA_1e, e^*)}$, $\lambda_1^{(2)} = -\sqrt{(JA_1e, e^*)}$, где векторы e, e^* удовлетворяют условию нормировки (2.36). В силу равенств (2.34) получаем: $\pm\sqrt{(JA_1e, e^*)} = \pm\sqrt{(JA_1e, -\nu Je)} = \pm\sqrt{-\nu(A_1e, e)}$. $\square$

Обратим внимание на то обстоятельство, что для получения формул (2.37) достаточно найти собственный и присоединенный векторы e и g матрицы JA_0, отвечающие неполупростому собственному значению $i\omega_0$. Нормировка этих векторов не требуется.

2.1.4 Признаки устойчивости в критических случаях

Вернемся к рассмотрению линейной гамильтоновой системы (2.12). Приложения теорем 2.2 – 2.5 к анализу устойчивости системы (2.12) очевидны. Для этого надо выяснить, какая из альтернатив для собственных значений матрицы JA_0 имеет место.

2.1.4.1 Случай полупростого чисто мнимого собственного значения

Пусть матрица JA_0 системы (2.12) имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 \geqslant 0$), а все ее остальные собственные значения являются простыми, чисто мнимыми. Пусть $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ – линейно независимые векторы, для которых выполняются равенства (2.13).

Согласно лемме 2.3, если $(Je, e)(Jg, g) < 0$, то $i\omega_0$ – дефинитное собственное значение. Таким образом, согласно теореме 2.1 при малых $|\varepsilon|$ система (2.12) является устойчивой (система (2.3) является сильно устойчивой).

Пусть $(Je, e)(Jg, g) \geqslant 0$; тогда согласно лемме 2.3 имеем: $i\omega_0$ – индефинитное собственное значение. Пусть векторы e и g нормированы равенствами (2.18) и $(Je, g) = 0$. Определим число δ – дискриминант уравнения (2.24):

$$\delta = (a + b)^2 - 4|c|^2, \tag{2.38}$$

где числа a, b, c определены согласно равенствам (2.19); $\delta \in \mathbb{R}$. Из теоремы 2.3 следует.

Следствие 2.1. *Пусть $\delta > 0$. Тогда при малых $|\varepsilon|$ собственное значение $i\omega_0$ системы (2.12) расщепляется, оставаясь на мнимой оси. При малых $|\varepsilon|$ для данного возмущения JA_1 система (2.12) устойчива.*

Пусть $\delta < 0$. Тогда при малых ненулевых $|\varepsilon|$ собственное значение $i\omega_0$ системы (2.12) расщепляется, покидая мнимую ось. При малых ненулевых $|\varepsilon|$ для данного возмущения JA_1 система (2.12) неустойчива.

Отметим, что если матрица JA_0 системы (2.12) имеет полупростое (кратности 2) нулевое собственное значение, то устойчивость системы (2.12) можно определить по значению числа Δ, определенного согласно равенству (2.30). Согласно теореме 2.4 следует.

Следствие 2.2. *Пусть $\Delta < 0$. Тогда при малых $|\varepsilon|$ нулевое собственное значение системы (2.12) расщепляется, оставаясь на мнимой оси. При малых $|\varepsilon|$ для данного возмущения JA_1 система (2.12) устойчива.*

Пусть $\Delta > 0$. Тогда при малых ненулевых $|\varepsilon|$ нулевое собственное значение системы (2.12) расщепляется, покидая мнимую ось. При малых ненулевых $|\varepsilon|$ для данного возмущения JA_1 система (2.12) неустойчива.

2.1.4.2 Случай неполупростого собственного значения

Пусть матрица JA_0 имеет неполупростое собственное значение $i\omega_0$ ($\omega_0 \geqslant 0$) кратности 2, при этом все ее остальные собственные значения являются простыми, чисто мнимыми. Пусть $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ – линейно независимые векторы, для которых выполняются равенства (2.33). Определим число $\nu = \frac{1}{(e, Jg)}$, указанное в лемме 2.5. Из теоремы 2.5 следует.

Следствие 2.3. *Пусть $\varepsilon\nu(A_1 e, e) > 0$. Тогда при малых ненулевых $|\varepsilon|$ собственное значение $i\omega_0$ системы (2.12) расщепляется, оставаясь на мнимой оси. При малых ненулевых $|\varepsilon|$ для данного возмущения JA_1 система (2.12) устойчива.*

Пусть $\varepsilon\nu(A_1 e, e) < 0$. *Тогда при малых ненулевых* $|\varepsilon|$ *собственное значение* $i\omega_0$ *системы* (2.12) *расщепляется, покидая мнимую ось. При малых ненулевых* $|\varepsilon|$ *для данного возмущения* JA_1 *система* (2.12) *неустойчива.*

2.1.5 Приложения

В данном параграфе будут рассмотрены некоторые приложения вышеизложенных результатов к задачам об устойчивости линейных автономных гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра.

2.1.5.1 Маятник Фуко

В качестве первого приложения рассмотрим задачу о колебаниях маятника Фуко (см., например, [83]) в ситуации, когда соответствующая функция Гамильтона имеет вид:

$$H(\varepsilon, x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2\right)/2 + \varepsilon x_1 y_2 - \varepsilon y_1 x_2;$$

здесь ε – малый параметр. Соответствующая гамильтонова система описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H(\varepsilon, x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial x_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial H(\varepsilon, x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial y_2}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\partial H(\varepsilon, x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial x_1}, \\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H(\varepsilon, x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial y_1}. \end{cases} \tag{2.39}$$

В работах В.Ф. Журавлева, А.Г. Петрова и М.М. Шундерюк ([9; 83]) задача об устойчивости системы (2.39) при малых $|\varepsilon|$ решалась с помощью симметризации гамильтониана. Здесь же поставленная задача решается на основе вышеизложенных методов (см п. 2.1.3).

Система (2.39) может быть записана в виде

$$\frac{du}{dt} = JA(\varepsilon)u, \quad \text{где} \quad u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad JA(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -\varepsilon \\ 0 & -1 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Матрица $JA(0)$ имеет полупростое собственное значение i кратности 2. Найдем собственные векторы $e, g \in \mathbb{C}^4$, для которых выполняются равенства (2.13) при $\omega_0 = 1$:

$$e = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $(Je, e)(Jg, g) = -4 < 0$. Таким образом, из леммы 2.2 следует, что собственное значение i является дефинитным. И в соответствии с леммой 2.1 заключаем, что система 2.40 устойчива при всех малых $|\varepsilon|$.

2.1.5.2 Задача об устойчивости трубы, проводящей жидкость

В качестве второго приложения рассмотрим вопрос об устойчивости линейной автономной гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{dt} = JA(\alpha, \beta)x\,, \qquad x \in R^4\,, \tag{2.41}$$

в которой

$$JA(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha^2 + \beta - 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha^2 + 4\beta - 16 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}; \tag{2.42}$$

здесь α и β – неотрицательные параметры. Данная система возникает в задаче о малых колебаниях шарнирно опертой трубы, проводящей жидкость (см. [84]).

Характеристическое уравнение для матрицы (2.42) имеет вид:

$$\lambda^4 + \left(4\alpha^2 - 5\beta + 17\right)\lambda^2 + 4\beta^2 - 20\beta + 16.$$

Из исследования данного уравнения получаем:

– если $0 \leqslant \beta < 1$, то для любых малых $\alpha > 0$ система (2.41) устойчива;

– если $1 < \beta < 4$, то для любых малых $\alpha > 0$ система (2.41) неустойчива.

Рассмотрим вопрос об устойчивости системы (2.41) при значениях (α,β) близких к $(0, 1)$ (исследование системы (2.41) при $\beta \geqslant 4$ подробно приведено в [84]), а именно, для значений (α,β), располагающихся на прямой:

$$\alpha = \varepsilon \sin\varphi\,, \quad \beta = 1 + \varepsilon\cos\varphi\,; \tag{2.43}$$

здесь φ фиксировано $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$, а ε – малый параметр. Подставляя (2.43) в (2.41), после несложных преобразований получим систему

$$\frac{dx}{dt} = J[A_0 + \varepsilon A_1(\varphi) + A_2(\varphi,\varepsilon)]x\,, \quad x \in R^4\,; \tag{2.44}$$

здесь

$$JA_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; JA_1(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 4\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

матрица $A_2(\varphi,\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению $\|A_2(\varphi,\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Матрица JA_0 системы (2.44) имеет неполупростое нулевое собственное значение кратности 2 и пару простых собственных значений $\pm 2i\sqrt{3}$. Для изучения сформулированного выше вопроса применимы теорема 2.5 и лемма 2.5. Согласно которым необходимо вычислить число

$$L = -\frac{\varepsilon}{(e\,,Jg)}(A_1(\varphi)e,e)\,.$$

После несложных вычислений получим: $L_1 = -\varepsilon\cos\varphi$. Отсюда и из следствия 2.3 следует, что изменение характера устойчивости системы (2.41) происходит при $\varphi = \pi/2$. Поэтому прямую (2.43) при $\varphi = \pi/2$ можно рассматривать как касательную к границе области устойчивости системы (2.41) в точке $(0, 1)$ на плоскости параметров (α,β). Другими словами, этой касательной является прямая $\beta = 1$. Из следствия 2.3 следует также, что область устойчивости системы (2.41) располагается ниже прямой $\beta = 1$, а область неустойчивости – выше этой прямой.

2.2 Задача об устойчивости нелинейных автономных гамильтоновых систем

В этом параграфе рассматривается задача об устойчивости точек равновесия нелинейных автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (системы большей размерности могут быть рассмотрены аналогичным образом). А именно, рассматривается гладко зависящая от малого скалярного параметра ε система

$$\frac{du}{dt} = J\nabla H(u, \varepsilon), \quad u \in \mathbb{R}^4. \tag{2.45}$$

Здесь матрица J определена равенством (2.2), гамильтониан $H(u,\varepsilon)$ – скалярная вещественная функция, дважды непрерывно дифференцируемая по u; $\nabla H(u,\varepsilon)$ – градиент функции $H(u,\varepsilon)$ по u. Предположим, что начало координат $u=0$ является точкой равновесия системы (2.45) при всех значениях параметра ε. Тогда функция $J\nabla H(u,\varepsilon)$ представима в виде $J\nabla H(u,\varepsilon) = JA(\varepsilon)u + a(u,\varepsilon)$, $u \in \mathbb{R}^4$, где $JA(\varepsilon) = J\nabla H'_u(0,\varepsilon)$ – матрица Якоби, $A(\varepsilon)$ – вещественная квадратная симметрическая порядка 4 матрица; функция $a(u,\varepsilon)$ удовлетворяет условию: $\|a(u,\varepsilon)\| = O(\|u\|^2)$ при $\|u\| \to 0$ равномерно по ε. Таким образом, система (2.45) может быть представлена в виде

$$\frac{du}{dt} = J\left(A_0 + \varepsilon A_1 + A_2(\varepsilon)\right)u + a(u,\varepsilon), \quad u \in \mathbb{R}^4; \tag{2.46}$$

здесь вещественные симметрические матрицы A_0, A_1 не зависят от ε, а элементы вещественной симметричной матрицы $A_2(\varepsilon)$ являются гладкими функциями, причем $\|A_2(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Перейдем к изучению вопроса об устойчивости нулевого положения равновесия нелинейной гамильтоновой системы (2.46) при малых значениях $|\varepsilon|$ при имеющейся информации относительно спектра матрицы JA_0. В силу общих свойств гамильтоновых систем (см., например, [19]) верно следующее: если матрица JA_0 имеет хотя бы одно собственное значение с ненулевой вещественной частью, то при всех малых $|\varepsilon|$ точка равновесия $u=0$ системы (2.46) является неустойчивой.

Далее будут рассматриваться случаи, когда все собственные значения матрицы JA_0 являются чисто мнимыми.

2.2.1 Простые чисто мнимые собственные значения

Пусть матрица JA_0 системы (2.46) имеет две пары простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$. Как было показано ранее (см. п. 2.1.1 стр. 41), матрица $JA(\varepsilon)$ при малых значениях $|\varepsilon|$ также имеет две пары простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_1(\varepsilon)$, $\pm i\omega_2(\varepsilon)$. При малых значениях $|\varepsilon|$ имеем: $\omega_1(\varepsilon) > 0$, $\omega_2(\varepsilon) > 0$, $\omega_1(\varepsilon) \neq \omega_2(\varepsilon)$.

Соответствующий гамильтониан системы (2.46) может быть представлен в нормальной форме Биркгофа вида (см., например, [9]):

$$H(u,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\omega_1(\varepsilon)(u_1^2+u_3^2) + \sigma\omega_2(\varepsilon)(u_2^2+u_4^2)\right) + O(|u_1+u_2+u_3+u_4|^3),$$

где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$.

Пусть $\sigma = 1$. В этом случае $H(u, \varepsilon)$ – знакоопределенная функция; тогда согласно теореме Ляпунова (см. [85]) нулевое положение равновесия системы (2.46) является устойчивым.

Пусть $\sigma = -1$. Положим также, что для собственных значений $i\omega_1$ и $i\omega_2$ выполнено условие:

U^0. $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \neq 0$, здесь $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $0 < |m_1| + |m_2| \leqslant 4$.

Отметим, что в силу непрерывной зависимости от малого параметра $|\varepsilon|$ собственные числа $i\omega_1(\varepsilon)$ и $i\omega_2(\varepsilon)$ матрицы $JA(\varepsilon)$ удовлетворяют условию

U^1. $m_1\omega_1(\varepsilon) + m_2\omega_2(\varepsilon) \neq 0$, здесь $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $0 < |m_1| + |m_2| \leqslant 4$.

В этом случае функция Гамильтона системы (2.46) может быть представлена в нормальной форме (см., например, [8]) следующего вида:

$$H(u, \varepsilon) = \tfrac{1}{2}\omega_1(\varepsilon)\left(u_1^2 + u_3^2\right) - \tfrac{1}{2}\omega_2(\varepsilon)\left(u_2^2 + u_4^2\right) + \tfrac{1}{4}c_{20}(\varepsilon)\left(u_1^2 + u_3^2\right)^2 +$$
$$\tfrac{1}{4}c_{11}(\varepsilon)\left(u_1^2 + u_3^2\right)\left(u_2^2 + u_4^2\right) + \tfrac{1}{4}c_{02}(\varepsilon)\left(u_2^2 + u_4^2\right)^2 + O(|u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2|^{5/2}),$$

где $c_{20}(\varepsilon), c_{11}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon)$ – гладкие функции. Предположим, что при малых $|\varepsilon|$ данные функции удовлетворяют условию

U^2. $c_{20}(\varepsilon)\omega_2^2(\varepsilon) + c_{11}(\varepsilon)\omega_1(\varepsilon)\omega_2(\varepsilon) + c_{02}(\varepsilon)\omega_1^2(\varepsilon) \neq 0$.

Таким образом при малых ненулевых $|\varepsilon|$ выполнены условия U^1 и U^2 теоремы Арнольда - Мозера ([6; 86; 87]), согласно которой нулевое положение равновесия устойчиво.

2.2.2 Полупростое нулевое собственное значение

Рассмотрим случай, когда матрица JA_0 системы (2.46) имеет полупростое (кратности 2) нулевое собственное значение и пару простых собственных значений $\pm i\omega_1$, $\omega_1 > 0$. Определим два линейно независимых вектора $e, g \in \mathbb{R}^4$ так, что выполняются равенства

$$JA_0 e = 0 \cdot e, \qquad JA_0 g = 0 \cdot g.$$

Согласно теореме 2.4 при малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ (возможно, совпадающих) так, что функции $\lambda^{(1,2)}(\varepsilon)$ являются гладкими и при $\varepsilon \to 0$ представимы в виде (2.29):

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon\sqrt{\Delta}}{(e, Jg)} + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = -\lambda^{(1)}(\varepsilon), \tag{2.47}$$

Здесь (см. (2.30) на стр. 54):

$$\Delta = (A_1 e, g)^2 - (A_1 e, e)\,(A_1 g, g)\,.$$

Пусть $\Delta > 0$. В этом случае при малых ненулевых $|\varepsilon|$ получаемые собственные значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ имеют ненулевые вещественные части. Таким образом, нулевое положение равновесия системы (2.46) неустойчиво.

Пусть $\Delta < 0$. В этом случае при малых ненулевых $|\varepsilon|$ при соответствующем возмущении JA_1 системы (2.46) полупростое нулевое собственное значение распадается на пару чисто мнимых собственных значений $\lambda^{(1,2)}(\varepsilon)$ согласно разложению (2.47). Другая пара собственных значений матрицы $JA(\varepsilon)$ является простой чисто мнимой $\pm i\omega_1(\varepsilon)$. Тогда при малых ненулевых $|\varepsilon|$ для данного возмущения рассматриваемый гамильтониан $H(u,\varepsilon)$ можно представить в нормальной форме (см., например, [8]):

$$H(u,\varepsilon) = \tfrac{1}{2} i\lambda^{(1)}(\varepsilon)\left(u_1^2+u_3^2\right) + \sigma\tfrac{1}{2}\omega_1(\varepsilon)\left(u_2^2+u_4^2\right) + \tfrac{1}{4}c_{20}(\varepsilon)\left(u_1^2+u_3^2\right)^2 + \tfrac{1}{4}c_{11}(\varepsilon)\left(u_1^2+u_3^2\right)\left(u_2^2+u_4^2\right) + \tfrac{1}{4}c_{02}(\varepsilon)\left(u_2^2+u_4^2\right)^2 + O(|u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2|^{5/2}).$$

здесь $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$, функции $c_{20}(\varepsilon), c_{11}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon)$ являются гладкими.

Пусть $\sigma = 1$. Тогда функция Гамильтона $H(u,\varepsilon)$ – знакоопределенная функция. тогда согласно теореме Ляпунова (см. [85]) нулевое положение равновесия системы (2.46) является устойчивым.

Пусть $\sigma = -1$. Положим, что при малых $|\varepsilon|$ функции $c_{20}(\varepsilon), c_{11}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon)$ удовлетворяют условию U^2. Таким образом, при малых ненулевых $|\varepsilon|$ выполнены условия U^1 и U^2 теоремы Арнольда - Мозера, согласно которой нулевое положение равновесия устойчиво.

2.2.3 Полупростое (ненулевое) чисто мнимое собственное значение

Пусть матрица JA_0 системы (2.46) имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

Пусть $i\omega_0$ является дефинитным собственным значением матрицы JA_0. Тогда соответствующий гамильтониан системы (2.46) может быть представлен в нормальной форме Биркгофа (см., например, [8]) вида:

$$H(u,\varepsilon) = \frac{\omega(\varepsilon)}{2}\left(u_1^2+u_3^2+u_2^2+u_4^2\right) + O(|u_1+u_2+u_3+u_4|^3),$$

где $\omega(\varepsilon)$ такая положительная гладкая функция, что $\omega(0) = \omega_0$. Рассматриваемый гамильтониан $H(u,\varepsilon)$ есть знакоопределенная функция при всех малых

$|\varepsilon|$. Тогда, согласно теореме Ляпунова (см. [85]), нулевое положение равновесия системы (2.46) является устойчивым.

Пусть $i\omega_0$ является индефинитным собственным значением матрицы JA_0. Определим два линейно независимых вектора $e, g \in \mathbb{C}^4$ так, что выполняются равенства (2.13): $JA_0 e = i\omega_0 e$, $JA_0 g = i\omega_0 g$. Согласно лемме 2.3 векторы можно считать нормированными в соответствии с равенствами (2.18) и $(Je, g) = 0$. Положим

$$\delta = (a+b)^2 - 4|c|^2, \quad \text{где} \quad a = (A_1 e, e), \quad b = (A_1 g, g), \quad c = (A_1 g, e). \qquad (2.48)$$

Число δ – вещественно (см. п. 2.1.4.1).

Согласно теореме 2.3 при малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$, при $\varepsilon \to 0$ представимых в виде (2.14):

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1^{(2)} + O(|\varepsilon|^{3/2}); \qquad (2.49)$$

здесь коэффициенты $\lambda_1^{(1)} = i\xi_1$ и $\lambda_1^{(2)} = i\xi_2$, где $\xi_{1,2}$ – это корни квадратного уравнения

$$\xi^2 + (a-b)\xi - ab + c\bar{c} = 0, \qquad (2.50)$$

а числа a, b, c определены согласно равенствам (2.48). Число δ есть дискриминант данного уравнения.

Пусть $\delta < 0$. Тогда при малых ненулевых $|\varepsilon|$ получаемые собственные значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ имеют ненулевые вещественные части. Таким образом, нулевое положение равновесия системы (2.46) неустойчиво.

Пусть $\delta > 0$. В этом случае согласно теореме 2.3 при малых ненулевых $|\varepsilon|$ при соответствующем возмущении JA_1 системы (2.46) полупростое чисто мнимое собственное значение распадается на пару собственных значений $i\lambda^{(1)}(\varepsilon)$, $i\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ согласно разложению (2.49). Тогда при малых ненулевых $|\varepsilon|$ для данного возмущения рассматриваемый гамильтониан $H(u, \varepsilon)$ можно представить (см., например, [8]) в нормальной форме

$$H(u,\varepsilon) = \tfrac{1}{2}i\lambda^{(1)}(\varepsilon)\left(u_1^2+u_3^2\right) - \tfrac{1}{2}i\lambda^{(2)}(\varepsilon)\left(u_2^2+u_4^2\right) + \tfrac{1}{4}c_{20}(\varepsilon)\left(u_1^2+u_3^2\right)^2 +$$
$$\tfrac{1}{4}c_{11}(\varepsilon)\left(u_1^2+u_3^2\right)\left(u_2^2+u_4^2\right) + \tfrac{1}{4}c_{02}(\varepsilon)\left(u_2^2+u_4^2\right)^2 + O(|u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2|^{5/2}),$$

здесь функции $c_{20}(\varepsilon), c_{11}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon)$ являются гладкими.

Далее будем полагать, что при малых ненулевых $|\varepsilon|$ функции $c_{20}(\varepsilon), c_{11}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon)$ удовлетворяют условию U^2 и выполнено условие

U^{00}. $m_1 i\lambda^{(1)}(\varepsilon) + m_2 i\lambda^{(2)}(\varepsilon) \neq 0$, здесь $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $0 < |m_1| + |m_2| \leqslant 4$.
Таким образом при малых ненулевых $|\varepsilon|$ выполнены условия теоремы Арнольда - Мозера, согласно которой нулевое положение равновесия устойчиво.

2.2.4 Неполупростое чисто мнимое собственное значение

Пусть матрица JA_0 системы (2.46) имеет неполупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$. Определим два линейно независимых вектора $e, g \in \mathbb{C}^4$ так, что выполняются равенства

$$JA_0 e = i\omega_0 e, \quad JA_0 g = i\omega_0 g + e.$$

Согласно лемме 2.5 (см., стр. 56) определено вещественное число $\nu = 1/(e, Jg)$.

Согласно теореме 2.5 при малых $|\varepsilon|$ матрица $JA(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ (возможно, совпадающих) так, что при $\varepsilon \to 0$ функции $\lambda^{(j)}(\varepsilon)$ представимы в виде разложения Пюизье (2.32):

$$\lambda^{(j)}(\varepsilon) = i\omega_0 \pm \sqrt{-\varepsilon\nu(A_1 e, e)} + O(|\varepsilon|), \qquad j = 1, 2. \tag{2.51}$$

Как было отмечено ранее, число $(A_1 e, e)$ является вещественным.

Пусть $\varepsilon\nu(A_1 e, e) < 0$. Тогда при малых ненулевых $|\varepsilon|$ получаемые собственные значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ имеют ненулевые вещественные части. Таким образом, нулевое положение равновесия системы (2.46) неустойчиво.

Пусть $\varepsilon\nu(A_1 e, e) < 0$. Тогда при соответствующем возмущении JA_1 системы (2.46) неполупростое чисто мнимое собственное значение $i\omega_0$ распадается на пару чисто мнимых собственных значений $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ согласно разложению (2.51). Тогда для данного возмущения рассматриваемый гамильтониан можно представить в нормальной форме

$$\begin{gathered} H(u,\varepsilon) = \tfrac{1}{2} i\lambda^{(1)}(\varepsilon)\left(u_1^2 + u_3^2\right) - \tfrac{1}{2} i\lambda^{(2)}(\varepsilon)\left(u_2^2 + u_4^2\right) + \tfrac{1}{4} c_{20}(\varepsilon)\left(u_1^2 + u_3^2\right)^2 + \\ \tfrac{1}{4} c_{11}(\varepsilon)\left(u_1^2 + u_3^2\right)\left(u_2^2 + u_4^2\right) + \tfrac{1}{4} c_{02}(\varepsilon)\left(u_2^2 + u_4^2\right)^2 + O(|u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2|^{5/2}), \end{gathered} \tag{2.52}$$

здесь функции $c_{20}(\varepsilon), c_{11}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon)$ являются гладкими.

Далее будем полагать, что при малых ненулевых $|\varepsilon|$ функции $c_{20}(\varepsilon), c_{11}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon)$ удовлетворяют условию U^2 и выполнено условие U^{00}. Таким образом при малых ненулевых $|\varepsilon|$ выполнены условия теоремы Арнольда - Мозера, согласно которой нулевое положение равновесия устойчиво.

2.3 Приложение: система Лурье

Рассмотрим в качестве приложения одноконтурную систему управления, состоящую из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией $M(p, \varepsilon)/L(p, \varepsilon)$ и нелинейной обратной связи $f(u)$ (см., например, [88—90]):

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, \varepsilon\right) u = M\left(\frac{d^2}{dt^2}, \varepsilon\right) f(u). \tag{2.53}$$

Здесь $L(p, \varepsilon)$, $M(p, \varepsilon)$ – взаимно простые многочлены степеней l и m ($l > m$):

$$\begin{aligned} &L(p, \varepsilon) = p^l + \alpha_1(\varepsilon)p^{l-1} + \ldots + \alpha_l(\varepsilon), \\ &M(p, \varepsilon) = \beta_0(\varepsilon)p^m + \beta_1(\varepsilon)p^{m-1} + \ldots + \beta_m(\varepsilon), \quad \beta_0(\varepsilon) \neq 0, \end{aligned}$$

коэффициенты которых являются непрерывными функциями от малого параметра ε. Положим, что нелинейность $f(u)$ – скалярная функция, начинающаяся с квадратичных слагаемых по u. Все входящие в уравнение (2.53) функции и коэффициенты предполагаются вещественными. Отметим также, что уравнения вида (2.53) часто называют уравнениями Лурье (см., [91; 92]).

Известно (см. [7]), что уравнение (2.53) имеет гамильтоново представление. Проведем исследование уравнения Лурье в двумерном и четырехмерном случаях.

2.3.1 Устойчивость решения уравнения Лурье 2-го порядка

Рассмотрим случай, когда $l = 1$, $m = 0$; таким образом, рассматривается уравнение Лурье вида

$$u'' + \alpha(\varepsilon)u = \beta(\varepsilon)f(u), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Стандартная замена переменных $x_1 = u$, $x_2 = u'$ позволяет данное уравнение представить в виде нелинейной автономной гамильтоновой системы

$$x' = JA(\varepsilon)x + a(\varepsilon, x), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.54}$$

$$\text{где} \quad A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \alpha(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a(\varepsilon, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta(\varepsilon)f(x_1) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия системы (2.54) в зависимости от малого параметра $|\varepsilon|$. Отметим, что если $\alpha(0) < 0$, то собственные значения матрицы $JA(0)$ имеют ненулевые вещественные части, следовательно нулевое положение равновесия системы (2.54) неустойчиво.

Если $\alpha(0) > 0$, то матрица $JA(0)$ системы (2.54) имеет простое чисто мнимое собственное значение $\pm i\sqrt{\alpha(0)}$; в этом случае нулевое положение системы (2.54) устойчиво для всех малых $|\varepsilon|$.

Рассмотрим наконец случай, когда $\alpha(0) = 0$. В этом случае матрица $JA(0)$ системы (2.54) имеет неполупростое нулевое собственное значение. Для исследования вопроса об устойчивости положения равновесия в этом случае определим пару линейно независимых векторов $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Построенные векторы удовлетворяют равенствам: $JA(0)e = 0 \cdot e$, $JA(0)g = e$. Определим число $\nu = 1/(e, Jg) = 1$ (см. лемму 2.5). Согласно изложенному в п. 2.2.4 имеем:

– если $\varepsilon\nu(A_1 e, e) = \varepsilon\alpha'(0) < 0$, то при соответствующих малых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (2.54) неустойчиво;
– если $\varepsilon\nu(A_1 e, e) = \varepsilon\alpha'(0) > 0$, то при соответствующих малых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (2.54) устойчиво.

2.3.2 Устойчивость решения уравнения Лурье 4-го порядка

Пусть теперь $l = 2$, $m = 0$, тогда $L(p) = p^2 + \alpha_1(\varepsilon)p + \alpha_2(\varepsilon)$, $M(p) = \beta(\varepsilon)$. Таким образом, рассматривается уравнение вида

$$u^{IV} + \alpha_1(\varepsilon)u'' + \alpha_2(\varepsilon)u = \beta(\varepsilon)f(u). \tag{2.55}$$

Уравнение (2.55) с помощью замены $x_1 = u''' + \alpha_1(\varepsilon)u'$, $x_2 = u'$, $x_3 = u$, $x_4 = u''$ может быть представлено в виде

$$x' = JA(\varepsilon)x + a(x), \qquad x \in R^4, \tag{2.56}$$

где

$$JA(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_2(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha_1(\varepsilon) & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad a(x) = \begin{bmatrix} \beta(\varepsilon)f(x_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $\alpha_1(0) > 0, \alpha_2(0) > 0$, тогда матрица JA_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений. В этом случае при малых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (2.56) устойчиво.

Пусть $\alpha_1(0) > 0, \alpha_2(0) = 0$. Тогда матрица JA_0 имеет неполупростое нулевое собственное значение (кратности 2) и чисто мнимое собственное значение $\pm i\sqrt{\alpha_1(0)}$. Согласно изложенному в п. 2.2.4 имеем:

– Пусть $\varepsilon\alpha_2'(0) > 0$. Тогда при соответствующих малых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (2.56) неустойчиво;
– Пусть $\varepsilon\alpha_2'(0) < 0$. Далее будем полагать, что при малых ненулевых $|\varepsilon|$ функции $c_{20}(\varepsilon), c_{11}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon)$ гамильтониана (2.52) удовлетворяют условию U^2 и выполнено условие U^{00}. Тогда при соответствующих малых ненулевых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (2.56) устойчиво.

Пусть $\alpha_1(0) > 0$, $4\alpha_2(0) = -\alpha_1^2(0)$, тогда матрица JA_0 имеет неполупростое чисто мнимое собственное значение (кратности 2). Согласно изложенному в п. 2.2.4 имеем:

– Пусть $\varepsilon a_1'(0)a_1(0) + 2a_2'(0) < 0$. Тогда при соответствующих малых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (2.56) неустойчиво;
– Пусть $\varepsilon a_1'(0)a_1(0) + 2a_2'(0) > 0$. Далее будем полагать, что при малых ненулевых $|\varepsilon|$ функции $c_{20}(\varepsilon), c_{11}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon)$ гамильтониана (2.52) удовлетворяют условию U^2 и выполнено условие U^{00}. Тогда при соответствующих малых ненулевых $|\varepsilon|$ нулевое положение равновесия системы (2.56) устойчиво.

Глава 3. Исследование периодических гамильтоновых систем

Глава посвящена исследованию устойчивости точек равновесия периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра. Основное внимание уделяется изучению задачи о параметрическом резонансе.

3.1 Устойчивость линейных периодических гамильтоновых систем

Рассмотрим линейную периодическую гамильтонову систему (ЛПГС), зависящую от малого параметра ε, вида

$$\frac{dx}{dt} = JA(t,\varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{3.1}$$

где $A(t,\varepsilon)$ – вещественная симметрическая $(2N \times 2N)$ матрица, а J – это матрица (2.2). Предполагается, что матрица $A(t,\varepsilon)$ является T-периодической по t, непрерывно зависит от t и гладкая по параметру ε.

При $\varepsilon = 0$ система (3.1) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = JA_0(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{3.2}$$

где $A_0(t) = A(t,0)$. Систему (3.2) будем называть невозмущенной, а систему (3.1) – возмущенной системой. Нас будет интересовать вопрос об устойчивости линейной системы (3.1) при малых $|\varepsilon|$, в предположении, что известна информация о спектре матрицы монодромии V_0 системы (3.2).

3.1.1 Сильная устойчивость

Мультипликаторы системы (3.2) – это собственные значения ее матрицы монодромии V_0, т.е. матрицы $V_0 = X(T)$, где $X(t)$ – фундаментальная матрица решений (ФМР) системы (3.2). В качестве ФМР системы (3.2) будем рассматривать решение матричной задачи Коши:

$$X' = JA_0(t)X, \qquad X(0) = I,$$

где I – единичная матрица размерности $2N$.

Имеют место следующие факты (см., например, [73]):

- Пусть ЛПГС (3.2) имеет мультипликатор μ_0. Тогда $\mu_0 \neq 0$ и числа $1/\mu_0$, $\overline{\mu}_0$, $1/\overline{\mu}_0$ также являются мультипликаторами ЛПГС (3.2), причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса.
- Если ЛПГС (3.2) имеет мультипликатор 1 (или -1), то этот мультипликатор имеет четную алгебраическую кратность.

Из приведенных выше свойств ЛПГС следует, что система (3.2) не может быть асимптотически устойчивой. Также если система (3.2) имеет мультипликатор μ_0: $|\mu_0| \neq 1$, то при всех малых $|\varepsilon|$ система (3.1) неустойчива.

Говорят (см., например, [93]), что система (3.2) является *сильно (параметрически) устойчивой*, если она и все ее достаточно малые линейные периодические гамильтоновы возмущения устойчивы по Ляпунову. Другими словами, система (3.2) является сильно (параметрически) устойчивой, если она и все возмущенные системы (3.1) при достаточно малых $|\varepsilon|$ являются устойчивыми. Соответственно, будем говорить, что система (3.2) не обладает свойством *сильной (параметрической) устойчивости*, если сама система (3.2) устойчива, но существуют сколь угодно малые ее линейные периодические гамильтоновы возмущения, которые являются неустойчивыми.

Отметим, что если все мультипликаторы системы (3.2) удовлетворяют условию $|\mu| = 1$ и при этом являются простыми, то система (3.2) является сильно устойчивой. Это следует из того, что при при всех малых $|\varepsilon|$ система (3.1) имеет простые мультипликаторы $\mu(\varepsilon)$, такие, что $|\mu(\varepsilon)| = 1$ (неравенство $|\mu(\varepsilon)| \neq 1$ означало бы, что мультипликатор $|\mu|$ расщепляется на два мультипликатора ЛПГС (3.1) $\mu(\varepsilon)$ и $1/\mu(\varepsilon)$, а следовательно является кратным, а не простым).

Таким образом, вопрос о сильной устойчивости системы (3.2) остается открытым только в случае, когда все мультипликаторы системы (3.2) удовлетворяют условию $|\mu| = 1$ и среди них имеется хотя бы один кратный мультипликатор.

3.1.2 Дефинитные и индефинитные мультипликаторы

Пусть V_0 – матрица монодромии системы (3.2). Мультипликатор μ_0 системы (3.2) называют *дефинитным* (см., например, [12; 19]), если для любых соответствующих собственных векторов $e \in \mathbb{C}^{2N}$ выполняется неравенство

$(Je, e) \neq 0$. Мультипликатор μ_0 системы (3.2) называют *индефинитным*, если существует соответствующий собственный вектор $e \in \mathbb{C}^{2N}$ такой, что выполняется равенство $(Je, e) = 0$.

Вопросам изучения сильной устойчивости системы (3.2), а также связанным с ними вопросам о свойствах дефинитных и индефинитных мультипликаторов посвящены исследования многих авторов (см., например, [28; 29]). Одним из базовых здесь является следующее утверждение (см., например, [19], стр. 172; [76], стр. 80).

Теорема 3.1. *(Крейн-Гельфанд-Лидский) Для сильной устойчивости системы (3.2) необходимо и достаточно, чтобы все ее мультипликаторы лежали на единичной окружности и были дефинитными.*

Из этой теоремы получим справедливость следующего утверждения:

– если все мультипликаторы системы (3.2) лежат на единичной окружности и являются дефинитными, то при всех малых $|\varepsilon|$ система (3.1) устойчива.

Случай, когда мультипликаторы системы (3.2) лежат на единичной окружности и являются индефинитными, представляет особый интерес.

Ниже изучается вопрос об устойчивости периодических линейных гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра, основное внимание уделяется изучению задачи о параметрическом резонансе. С этой целью на первом этапе приводятся новые формулы для возмущений дефинитных и индефинитных мультипликаторов.

3.1.3 Признаки устойчивости в критических случаях

Как было отмечено выше, основной интерес представляет изучение системы (3.2), когда мультипликаторы являются кратными. Здесь будет рассмотрен вопрос о построении формул первого приближения для возмущений кратных дефинитных и индефинитных мультипликаторов системы (3.2) в следующих основных случаях, когда эта система имеет:

P_1. полупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 так, что $|\mu_0| = 1$;

P_2. неполупростой (кратности 2) мультипликатор $\mu_0 : |\mu_0| = 1$.

Будем предполагать, что остальные (отличные от μ_0) мультипликаторы μ системы (3.2) удовлетворяют условию $|\mu| = 1$ и являются простыми.

Полученные формулы первого приближения для возмущения мультипликатора μ_0 будут использованы для изучения задачи анализа устойчивости по Ляпунову ЛПГС (3.1). Ниже для удобства систему (3.1) будем рассматривать в равносильном виде:

$$\frac{dx}{dt} = J\,[A_0(t) + \varepsilon A_1(t) + A_2(t,\varepsilon)]\,x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{3.3}$$

в котором $A_0(t)$ – матрица из системы (3.2), $A_1(t)$ и $A_2(t,\varepsilon)$ – вещественные, симметрические и T-периодические по t матрицы, при этом матрица $A_2(t,\varepsilon)$ является гладкой по ε и удовлетворяет соотношению: $\|A_2(t,\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по t.

3.1.3.1 Случай P_1 : полупростой мультипликатор

Рассмотрим сначала случай, когда матрица монодромии V_0 системы (3.2) имеет полупростое (кратности 2) собственное значение μ_0. В этом случае существуют соответствующие собственные векторы $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$:

$$V_0 e = \mu_0 e, \quad V_0 g = \mu_0 g. \tag{3.4}$$

Согласно приведенным выше формулам теории возмущений линейных операторов (см. п. 1.1.2 стр. 14) при малых $|\varepsilon|$ матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (3.3), имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются гладкими, причем $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$. Эти функции при $\varepsilon \to 0$ представимы в виде

$$\mu^{(1)}(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon\mu_1^{(1)} + O(|\varepsilon|^{3/2}), \quad \mu^{(2)}(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon\mu_1^{(2)} + O(|\varepsilon|^{3/2}). \tag{3.5}$$

Приведем утверждение относительно вычисления коэффициентов $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.5) с учетом свойств гамильтоновости системы (3.3). С этой целью установим справедливость следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 3.1. *Если полупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 является дефинитным мультипликатором, то любую пару соответствующих собственных векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ из (3.4) можно нормировать в соответствии с одной из пар равенств*

$$(iJe, e) = (iJg, g) = 1, \tag{3.6}$$

$$(iJe, e) = (iJg, g) = -1. \tag{3.7}$$

Если полупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 *является индефинитным мультипликатором, то существует пара соответствующих собственных векторов* $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ *из (3.4), нормированная в соответствии с равенствами*

$$(iJe, e) = 1, \qquad (iJg, g) = -1. \tag{3.8}$$

Доказательство предложенной леммы может быть построено по схеме доказательства леммы 2.3.

Приведем схему построения коэффициентов $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.5). Эти формулы будут зависеть от вариантов нормировки (3.6), (3.7) или (3.8).

3.1.3.1.1 Возмущение дефинитного мультипликатора. Пусть сначала полупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 системы (3.2) является дефинитным. Пусть e и g – линейно независимые векторы, удовлетворяющие равенствам (3.4). В силу леммы 3.1 эти векторы можно считать нормированными в соответствии с одной из пар равенств (3.6) или (3.7).

Для произвольных векторов $v, w \in \mathbb{C}^{2N}$ определим билинейный функционал

$$< v, w >= \int_0^T (X^{-1}(t)JA_1(t)X(t)v, Jw)dt, \tag{3.9}$$

в котором $A_1(t)$ – матрица из системы (3.3), $X(t)$ – ФМР системы (3.2).

Определим числа:

$$a =< e, e >, \quad b =< g, g >, \quad c =< g, e > . \tag{3.10}$$

Отметим, что числа a и b являются вещественными, а число c, вообще говоря, комплексное.

Теорема 3.2. *Пусть* μ_0 *является полупростым (кратности 2) дефинитным мультипликатором системы (3.2), при этом для векторов* e, g *из (3.4) имеет место нормировка (3.6) (нормировка (3.7)) и выполняется равенство* $(Je, g) = 0$. *Тогда коэффициенты* $\mu_1^{(1)}$ *и* $\mu_1^{(2)}$ *в разложениях (3.5) имеют вид*

$$\mu_1^{(1)} = -i\mu_0\lambda_1, \quad \mu_1^{(2)} = -i\mu_0\lambda_2, \qquad (\mu_1^{(1)} = i\mu_0\lambda_1, \quad \mu_1^{(2)} = i\mu_0\lambda_2), \tag{3.11}$$

где λ_1 *и* λ_2 *– корни квадратного уравнения* $\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c\bar{c} = 0$.

Доказательство. В силу леммы 1.6 (см. стр. 15) коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.5) – это собственные значения матрицы

$$D = \begin{bmatrix} (V_1 e, e^*) & (V_1 g, e^*) \\ (V_1 e, g^*) & (V_1 g, g^*) \end{bmatrix}; \quad \text{здесь} \quad V_1 = V'(0). \tag{3.12}$$

Пусть в условиях нашей теоремы имеет место нормировка (3.6) (нормировка (3.7)). Тогда в качестве векторов e^* и g^* в матрице (3.12) будем использовать векторы:

$$e^* = iJe, \quad g^* = iJg, \quad (e^* = -iJe, \quad g^* = -iJg)\,, \tag{3.13}$$

где e и g – векторы из (3.4). Векторы (3.13) являются собственными векторами матрицы V^*, отвечающими собственному значению μ_0^*, т.е. для них выполнены равенства $V^*e^* = \overline{\mu}_0 e^*$, $V^*g^* = \overline{\mu}_0 g^*$. Векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют нормировке (1.18) леммы 1.5 (см. стр. 14).

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ системы (3.2) представима (см. п. 1.3.1 стр. 25) в виде:

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + V_2(\varepsilon), \tag{3.14}$$

$$\text{где} \quad V_1 = V'(0) = V_0 \int_0^T X^{-1}(t) J A_1(t) X(t) dt, \tag{3.15}$$

а $V_2(\varepsilon)$ – непрерывно дифференцируемая матрица такая, что $\|V_2(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Подставляя матрицу (3.15) в (3.12) и учитывая равенства (3.13) имеем:

$$D = -i\mu_0 \begin{bmatrix} a & c \\ \bar{c} & b \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

где a, b, c – числа, определенные равенствами (3.10). Таким образом, получим: коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.5) – это собственные значения матрицы D (если выполнена нормировка (3.6)) или собственные значения матрицы $-D$ (если выполнена нормировка (3.7)). Отсюда и из того, что собственные значения матрицы (3.16) имеют вид (3.11), получим справедливость теоремы 3.2. □

Отметим, что в силу теоремы 3.1 система (3.2) в рассматриваемом случае сильно устойчивая, а система (3.1) при малых $|\varepsilon|$ является устойчивой.

3.1.3.1.2 Возмущение индефинитного мультипликатора. Пусть теперь система (3.2) имеет индефинитный полупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0. Как и выше, пусть e и g – линейно независимые векторы, удовлетворяющие равенствам (3.4). Как и выше, определим числа (3.10).

Теорема 3.3. *Пусть μ_0 является полупростым (кратности 2) индефинитным мультипликатором системы (3.2), при этом для векторов e, g из (3.4) имеет место нормировка (3.8) и выполняется равенство $(Je, g) = 0$. Тогда коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.5) имеют вид*

$$\mu_1^{(1)} = i\mu_0\lambda_1, \quad \mu_1^{(2)} = i\mu_0\lambda_2, \tag{3.17}$$

где λ_1 и λ_2 – корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (a - b)\lambda - ab + c\bar{c} = 0. \tag{3.18}$$

Доказательство. В силу леммы 1.6 (см. стр. 15) коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.5) – это собственные значения матрицы (3.12). В качестве векторов e^* и g^* в матрице (3.12) будем использовать векторы

$$e^* = iJe, \qquad g^* = -iJg, \tag{3.19}$$

где e и g – векторы из (3.4). Векторы (3.19) являются являются собственными векторами матрицы V^*, отвечающими собственному значению μ_0^*, т.е. для них выполнены равенства $V^*e^* = \bar{\mu}_0 e^*$, $V^*g^* = \bar{\mu}_0 g^*$. Векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют нормировке (1.18) леммы 1.5 (см. стр. 14).

Подставляя матрицу (3.15) в (3.12) и учитывая (3.19), получим матрицу:

$$D = -i\mu_0 \begin{bmatrix} a & c \\ -\bar{c} & -b \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

где a, b, c – числа, определенные равенствами (3.10). Отсюда и из того, что собственные значения матрицы (3.20) имеют вид (3.17), получим справедливость теоремы. □

Заметим, что дискриминант уравнения (3.18):

$$\Delta = (a + b)^2 - 4c\bar{c},$$

является вещественным числом. Следовательно, корни λ_1 и λ_2 могут быть как вещественными, так и комплексными в зависимости от знака дискриминанта Δ.

Следствие 3.1. *Пусть* $\Delta > 0$. *Тогда при малых* $|\varepsilon|$ *индефинитный мультипликатор* μ_0 *системы (3.3) расщепляется, оставаясь на единичной окружности:* $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| = |\mu^{(2)}(\varepsilon)| = 1$. *При малых* $|\varepsilon|$ *система (3.2) устойчива.*

Пусть $\Delta < 0$. *Тогда при малых ненулевых* $|\varepsilon|$ *индефинитный мультипликатор* μ_0 *системы (3.3) расщепляется, покидая единичную окружность:* $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| < 1$ *и* $|\mu^{(2)}(\varepsilon)| > 1$. *При малых ненулевых* $|\varepsilon|$ *система (3.2) неустойчива.*

3.1.3.2 Случай P_2 : неполупростой мультипликатор

Рассмотрим теперь случай, когда система (3.2) имеет неполупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 такой, что $|\mu_0| = 1$. Как было отмечено ранее, в этом случае мультипликатор μ_0 является индефинитным; система (3.2) не является сильно устойчивой.

Согласно изложенному ранее (см. п. 1.3.4.3) матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (3.2) имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются непрерывными, причем $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$. При малых $|\varepsilon|$ эти функции представимы в виде разложения Пюизье:

$$\mu^{(1)}(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(1)}\varepsilon^{1/2} + O(|\varepsilon|), \quad \mu^{(2)}(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(2)}\varepsilon^{1/2} + O(|\varepsilon|). \tag{3.21}$$

Приведем схему построения коэффициентов $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.21).

Отметим, что найдутся линейно независимые векторы $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$, которые удовлетворяют равенствам:

$$V_0 e = \mu_0 e, \quad V_0 g = \mu_0 g + e. \tag{3.22}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Пусть* e *и* g *– линейно независимые векторы, удовлетворяющие равенствам (3.22). Тогда число* (e, Jg) *является вещественным, ненулевым и при этом набор векторов*

$$e^* = -\nu Je, \quad g^* = \nu Jg \quad \left(\text{здесь} \quad \nu = \frac{1}{(e, Jg)}\right), \tag{3.23}$$

удовлетворяет соотношениям:

$$V_0^* e^* = \bar{\mu}_0 e^*, \quad V_0^* g^* = \bar{\mu}_0 g^* + e^*, \tag{3.24}$$

и условию нормировки:

$$(e, g^*) = 1. \tag{3.25}$$

Доказательство. Перед тем, как показать, что $(e, Jg) \neq 0$, отметим существование двух пар линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^{2N}$, удовлетворяющих равенствам (3.22) и (3.24). При доказательстве леммы 1.7 (см. стр. 16) был отмечен следующий факт: векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют неравенству $(e, g^*) \neq 0$. Можно показать, что векторы $e^* = -Je$, $g^* = Jg$ в силу симплектичности матрицы V_0 удовлетворяют равенствам (3.24): $V_0^* e^* - \bar{\mu}_0 e^* = -V_0^* Je + \bar{\mu}_0 Je = -J(V_0^{-1} e - \bar{\mu}_0 e) = 0$. Здесь также было использовано равенство $V_0^{-1} e = \frac{1}{\mu_0} e$ и тот факт, что $\frac{1}{\mu_0} = \frac{\bar{\mu}_0}{|\mu_0|^2} = \bar{\mu}_0$. Аналогичным образом можно показать, что $g^* = Jg$ также удовлетворяет равенствам (3.24). Таким образом, в силу $g^* = Jg$ и леммы 1.7 имеем: $(e, Jg) \neq 0$.

Покажем, что число (e, Jg) вещественное. Действительно, $(e, Jg) = (V_0 g - \mu_0 g, Jg) = (g, V_0^* Jg - \bar{\mu}_0 Jg) = (g, JV_0^{-1} g - \bar{\mu}_0 Jg) = (Jg, \bar{\mu}_0 g - V_0^{-1} g) = (Jg, \bar{\mu}_0 g - \bar{\mu}_0 g + \bar{\mu}_0 V_0^{-1} e) = (Jg, e)$. Остается показать, что векторы (3.23) удовлетворяют условию нормировки (3.25). Имеем: $(e, g^*) = (e, \nu Jg) = \nu (e, Jg) = 1$. □

Теорема 3.4. *Пусть система (3.2) имеет неполупростой (кратности 2) мультипликатор μ_0 так, что $|\mu_0| = 1$; пусть e и g – линейно независимые векторы, удовлетворяющие соотношениям (3.22). Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (3.2) имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ (возможно, совпадающих), представимых в виде разложения (3.21). При этом коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в этих формулах – это числа:*

$$\mu_1^{(1)} = \sqrt{-\nu \mu_0 < e, e >}, \quad \mu_1^{(2)} = -\mu_1^{(1)}; \tag{3.26}$$

здесь $< \cdot, \cdot >$ – функционал (3.9).

Доказательство. Согласно лемме 1.8 имеем: коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложении (3.21) – это числа: $\mu_1^{(1,2)} = \pm\sqrt{(V_1 e, e^*)}$, где e, e^* – векторы, удовлетворяющие равенствам (3.22), (3.24) и нормировке (3.25). Подставляя в данную формулу вектор e^* из (3.23) и матрицу V_1, определенную равенством (3.15), получим требуемое. □

Положим: $\Delta_1 = \dfrac{\nu < e, e >}{\mu_0}$. Приведем следствие теоремы 3.4.

Следствие 3.2. *Если $\mathbb{R}\mathrm{e}\sqrt{\varepsilon \Delta_1} \neq 0$, то система (3.3) неустойчива.*

Доказательство. Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (3.2) имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$, представимых в виде разложения

$$\mu^{(1,2)}(\varepsilon) = \mu_0 \pm \sqrt{-\nu\varepsilon\mu_0 < e, e >} + O(|\varepsilon|) = \mu_0 \left(1 \pm \sqrt{-\varepsilon\Delta_1}\right) + O(|\varepsilon|).$$

Если $\mathbb{R}e\sqrt{\varepsilon\Delta_1} \neq 0$, то при малых $|\varepsilon|$ мультипликаторы возмущенной системы (3.3) покидают единичную окружность: $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| < 1$ и $|\mu^{(2)}(\varepsilon)| > 1$. Таким образом, в этом случае система (3.3) неустойчива. □

3.2 Задача о параметрическом резонансе

Важным частным случаем задачи об устойчивости линейной периодической гамильтоновой системы является ситуация, когда в системе (3.3) матрица $A_0(t)$ является постоянной: $A_0(t) \equiv A_0$. Тогда система (3.3) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0 + \varepsilon A_1(t) + A_2(t, \varepsilon)\right] x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{3.27}$$

а соответствующая невозмущенная система вид

$$\frac{dx}{dt} = JA_0 x, \qquad x \in \mathbb{R}^{2N}. \tag{3.28}$$

В этом случае приведенные выше формулы и утверждения в значительной мере упрощаются.

Для невозмущенной автономной системы (3.28) матрица монодромии V_0 в T-периодической задаче имеет вид $V_0 = e^{JA_0T}$. При этом мультипликаторы μ системы (3.28) связаны с собственными значениями λ матрицы JA_0 равенством $\mu = e^{T\lambda}$. В силу указанных выше свойств линейных гамильтоновых систем и в соответствии с теорией возмущений линейных операторов (см., например, [64]) верно следующее: если матрица JA_0 имеет хотя бы одно собственное значение с ненулевой вещественной частью, то возмущенная ЛПГС (3.27) будет неустойчивой при всех малых $|\varepsilon|$.

Пусть все собственные значения матрицы JA_0 системы (3.27) являются чисто мнимыми вида $\pm i\omega_m$ ($\omega_m \geqslant 0, m = 1, \ldots, N$). Говорят, что в системе (3.28) возникает параметрический резонанс если при некотором целом k_0 выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\omega_m - \omega_n = \frac{2\pi k}{T}, \quad \text{где} \quad m, n = 1, \ldots, N.$$

Эта задача подробно изучена в работах А.М. Ляпунова, М.Г. Крейна, В.А. Якубовича, В.М. Старжинского, И.М. Гельфанда и В.Б. Лидского, Ю. Мозера и др. (см. [1; 5; 6; 12; 94]).

В данном параграфе будет изучаться задачуа о параметрическом резонансе для ЛПГС (3.27) в следующих основных случаях, соответствующих условиям P_1 и P_2 (см. стр. 72):

1^0. Матрица JA_0 имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k.

2^0. Матрица JA_0 имеет неполупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k.

3^0. Матрица JA_0 имеет простое собственное значение $i\omega_0$, где

$$\omega_0 = \pi k_0/T \tag{3.29}$$

при некотором натуральном k_0.

4^0. Матрица JA_0 имеет два простых собственных значения $i\omega_1$ и $i\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 > 0$, $\omega_1, \omega_2 \neq \pi k/T$ при натуральных k, при этом

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\pi k_0/T \tag{3.30}$$

при некотором натуральном k_0.

Условия типа 3^0 обычно называют (см., например, [95—97]) условиями *простого резонанса*, а условия типа 4^0 – условиями *комбинационного резонанса.*

Далее мы будем считать, что остальные собственные значения матрицы JA_0 являются простыми и чисто мнимыми, не совпадающими ни с одним из чисел (3.30) и (3.29).

3.2.1 Случай 1^0 : полупростое чисто мнимое собственное значение

Пусть матрица JA_0 имеет полупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k. Тогда матрица V_0 имеет полупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ кратности 2 такое, что $|\mu_0| = 1$. Отметим также, что мультипликатор μ_0 системы (3.28) может быть как дефинитным, так и индефинитным, а при $\omega_0 = 0$ он является индефинитным.

Рассматриваемый случай может быть исследован в соответствии со случаем P_1 (см. п. 3.1.3 стр. 72). А именно, при малых $|\varepsilon|$ матрица $V(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ представимы в виде (3.5). Приведем схему построения коэффициентов $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.5). С этой целью отметим, что существуют линейно независимые векторы $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ такие, что

$$JA_0 e = i\omega_0 e, \quad JA_0 g = i\omega_0 g. \tag{3.31}$$

Векторы e, g будут собственными и для матрицы монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$, отвечающими полупростому собственному значению $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ кратности 2.

В рассматриваемом случае остается верна лемма 3.1. Определим постоянную матрицу

$$S_0 = \int_0^T A_1(t)dt, \tag{3.32}$$

где $A_1(t)$ – матрица, участвующая в системе (3.27). Далее положим

$$a = (S_0 e, e), \quad b = (S_0 g, g), \quad c = (S_0 g, e). \tag{3.33}$$

Отметим, что числа a и b являются вещественными, а число c, вообще говоря, комплексное.

Лемма 3.3. *Пусть μ_0 является полупростым (кратности 2) дефинитным мультипликатором системы (3.28), при этом для векторов e, g из (3.31) имеет место нормировка (3.6) (нормировка (3.7)) и выполняется равенство $(Je, g) = 0$. Тогда коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.5) имеют вид*

$$\mu_1^{(1)} = -i\mu_0\lambda_1, \quad \mu_1^{(2)} = -i\mu_0\lambda_2, \qquad (\mu_1^{(1)} = i\mu_0\lambda_1, \quad \mu_1^{(2)} = i\mu_0\lambda_2), \tag{3.34}$$

где λ_1 и λ_2 – корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c\bar{c} = 0. \tag{3.35}$$

Представленная лемма 3.3 следует из теоремы 3.2, где вместо чисел (3.10) используются числа (3.33). Отметим, что при малых $|\varepsilon|$ в силу теоремы 3.1 система (3.27) является устойчивой (система (3.28) – сильно устойчивой).

Лемма 3.4. *Пусть μ_0 является полупростым (кратности 2) индефинитным мультипликатором системы (3.28), при этом для векторов e, g из (3.31) имеет место нормировка (3.8) и выполняется равенство $(Je, g) = 0$. Тогда коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.5) имеют вид*

$$\mu_1^{(1)} = i\mu_0\lambda_1, \quad \mu_1^{(2)} = i\mu_0\lambda_2,$$

где λ_1 и λ_2 – корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (a-b)\lambda - ab + c\bar{c} = 0. \tag{3.36}$$

Представленная лемма 3.4 следует из теоремы 3.3, где вместо чисел (3.10) используются числа (3.33).

Обозначим через

$$\Delta = (a+b)^2 - 4c\bar{c} \tag{3.37}$$

дискриминант уравнения (3.36); он является вещественным.

Приведем следствие леммы 3.4.

Следствие 3.3. *Пусть $\Delta > 0$. Тогда для данного возмущения $JA_1(t)$ системы (3.27) и всех малых ненулевых $|\varepsilon|$ индефинитный мультипликатор μ_0 системы (3.27) расщепляется, оставаясь на единичной окружности: $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| = |\mu^{(2)}(\varepsilon)| = 1$. Система (3.27) при всех малых $|\varepsilon|$ устойчива.*

Пусть $\Delta < 0$. Тогда для данного возмущения $JA_1(t)$ системы (3.27) и всех малых ненулевых $|\varepsilon|$ индефинитный мультипликатор μ_0 системы (3.27) расщепляется, покидая единичную окружность: $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| < 1$ и $|\mu^{(2)}(\varepsilon)| > 1$. При малых ненулевых $|\varepsilon|$ система (3.27) неустойчива.

3.2.2 Случай 2^0 : неполупростое чисто мнимое собственное значение

Пусть теперь матрица JA_0 имеет неполупростое (кратности 2) собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k. Тогда матрица монодромии V_0 невозмущенной системы (3.28) имеет неполупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ кратности 2. Рассматриваемый случай может быть исследован в соответствии со случаем P_2 (см. п. 3.1.3.2 стр. 77). А именно, при малых $|\varepsilon|$ матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (3.27) имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются непрерывными, причем $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$. Более того, они представимы в виде разложения Пюизье (3.21).

Перейдем к решению задачи вычисления коэффициентов $\mu_1^{(j)}$ в формулах (3.21). С этой целью отметим, что в рассматриваемом случае найдется пара линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ таких, что выполняются равенства

$$JA_0 e = i\omega_0 e, \quad JA_0 g = i\omega_0 g + e. \tag{3.38}$$

В рассматриваемом случае имеет место лемма 2.5, в силу которой определено вещественное число $\nu = \frac{1}{(e, Jg)}$.

Лемма 3.5. *Коэффициенты* $\mu_1^{(1)}$ *и* $\mu_1^{(2)}$ *в разложениях (3.21) – это числа*

$$\mu_1^{(1)} = \mu_0\sqrt{-T\nu(S_0e,e)}, \quad \mu_1^{(2)} = -\mu_1^{(1)}, \tag{3.39}$$

где S_0 *– матрица* (3.32).

Доказательство. По векторам e и g из равенств (3.38) определим новые векторы:

$$e_1 = T\mu_0 e, \quad g_1 = g, \quad e_1^* = -\nu Je, \quad g_1^* = \nu\frac{1}{T\bar{\mu}_0}Jg.$$

Эти векторы удовлетворяют равенствам:

$$V_0e_1 = \mu_0e_1, \quad V_0g_1 = \mu_0g_1 + e_1, \quad V_0^*e_1^* = \bar{\mu}_0e_1^*, \quad V_0^*g_1^* = \bar{\mu}_0g_1^* + e_1^*.$$

При этом векторы e_1, g_1, e_1^*, g_1^* удовлетворяют нормировке (3.25).

Для завершения доказательства, отметим что из теоремы 1.9 (см. стр. 34) следует, что участвующий в разложениях (3.21) коэффициент $\mu_1^{(1)}$ удовлетворяет равенству:

$$\mu_1^{(1)} = \sqrt{(V_1e_1, e_1^*)} = \sqrt{\mu_0\int_0^T (JA_1(t)e_1, e_1^*)\,dt} = \sqrt{\mu_0\int_0^T (JA_1(t)T\mu_0e, -\nu Je)\,dt}.$$

Отсюда и следует утверждение леммы. □

Отметим, что подкоренное выражение в формуле (3.39) является вещественным. Приведем следствие леммы 3.5.

Следствие 3.4. *Пусть* $\varepsilon\nu(S_0e,e) > 0$. *Тогда для данного возмущения* $JA_1(t)$ *системы (3.27) при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *мультипликатор* μ_0 *системы (3.28) остается на единичной окружности:* $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| = |\mu^{(2)}(\varepsilon)| = 1$. *В этом случае при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *система (3.27) устойчива.*

Пусть $\varepsilon\nu(S_0e,e) < 0$. *Тогда для данного возмущения* $JA_1(t)$ *системы (3.27) при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *мультипликатор* μ_0 *системы (3.28) покидает единичную окружность:* $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| < 1$ *и* $|\mu^{(2)}(\varepsilon)| > 1$. *В этом случае при соответствующих малых* $|\varepsilon|$ *система (3.27) неустойчива.*

3.2.3 Случай 3^0 : простой резонанс

Пусть матрица JA_0 имеет простое собственное значение $i\omega_0$, где $\omega_0 = \pi k_0/T$ при некотором натуральном k_0. Тогда матрица монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$

невозмущенной системы (3.28) имеет полупростое собственное значение μ_0 кратности 2, где $\mu_0 = 1$ (если k_0 четно) или $\mu_0 = -1$ (если k_0 нечетно).

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ возмущенной системы (3.27) при малых $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$. Более того, функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ гладкие и представимы в виде (3.5).

Приведем утверждение относительно вычисления коэффициентов $\mu_1^{(1,2)}$ в формулах (3.5). С этой целью отметим, что в рассматриваемом случае имеется ненулевой вектор $e + ig \in \mathbb{C}^{2N}$ (где $e, g \in \mathbb{R}^{2N}$) такой, что

$$JA_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig). \tag{3.40}$$

При этом векторы $e, g \in \mathbb{R}^{2N}$ будут собственными и для матрицы монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$, отвечающими полупростому собственному значению μ_0 кратности 2, а именно, выполняются равенства

$$V_0 e = \mu_0 e, \qquad V_0 g = \mu_0 g. \tag{3.41}$$

Стоит отметить, что $(Je, e) = (Jg, g) = 0$, поэтому рассматриваемый полупростой мультипликатор μ_0 является индефинитным.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть e и g – линейно независимые векторы, удовлетворяющие равенствам (3.41). Тогда $(e, Jg) \neq 0$, при этом набор векторов*

$$e, g, e^* = \nu Jg, \quad g^* = -\nu Je \quad \left(\text{здесь} \quad \nu = \frac{1}{(e, Jg)}\right), \tag{3.42}$$

удовлетворяет равенствам

$$V_0^* e^* = \mu_0 e^*, \quad V_0^* g^* = \mu_0 g^*, \tag{3.43}$$

и условиям нормировки (2.22).

Доказательство. Покажем, что $(e, Jg) \neq 0$. Для этого по линейно независимым векторам e и g, удовлетворяющим паре равенств (3.41), определим новые линейно независимые векторы: $e^* = Jg$ и $g^* = -Je$. Для векторов e^* и g^* выполняются равенства (3.43), что проверяется прямыми вычислениями. Далее имеем: $(e, e^*) = (e, Jg)$, $(g, g^*) = (g, -Je) = (Jg, e)$, т.е. $(e, e^*) = (g, g^*)$. Таким образом, верность неравенства $(e, Jg) \neq 0$ будет следовать из выполнения неравенства $(e, e^*) \neq 0$. Докажем это.

Предположим противное, т.е. пусть $(e, e^*) = 0$. Пусть E_0 – двумерное подпространство с базисом из векторов e и g, а $E^0 = \{x : x \in \mathbb{R}^{2N}, (x, e^*) = (x, g^*) = 0\}$ – дополнительное к E_0 инвариантное для V_0 подпространство. Тогда при предположении, что $(e, e^*) = 0$, имеем $e \in E^0$. Но одновременно $e \in E_0$, следовательно $e = 0$. Полученное противоречие доказывает соотношение $(e, e^*) \neq 0$.

Для завершения доказательства остается проверить выполнение для векторов (3.42) условий нормировки (2.22), что проверяется прямыми вычислениями. □

Определим матрицу

$$D = \nu\mu_0 \begin{bmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -a \end{bmatrix}, \tag{3.44}$$

в которой числа a, b_1 и b_2 определяются равенствами:

$$\begin{cases} a = \int_0^T \{\cos(2\omega_0 t)\,(A_1(t)e, g) - \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\,[(A_1(t)g, g) - (A_1(t)e, e)]\}dt, \\ b_1 = \int_0^T [\cos^2(\omega_0 t)\,(A_1(t)g, g) + \sin^2(\omega_0 t)\,(A_1(t)e, e) + \sin(2\omega_0 t)\,(A_1(t)e, g)]dt, \\ b_2 = b_1 - [(S_0 e, e) + (S_0 g, g)]; \end{cases} \tag{3.45}$$

здесь S_0 – матрица (3.32).

Лемма 3.7. *Коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.5) – это собственные значения матрицы (3.44).*

Доказательство. В силу леммы 1.6 (см. стр. 15) коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (3.5) – это собственные значения матрицы

$$D = \begin{bmatrix} (V_1 e, e^*) & (V_1 g, e^*) \\ (V_1 e, g^*) & (V_1 g, g^*) \end{bmatrix}; \tag{3.46}$$

Здесь

$$V_1 = e^{JA_0 T} \int_0^T e^{-JA_0 t} J A_1(t) e^{JA_0 t} dt, \tag{3.47}$$

В качестве векторов e^* и g^* в матрице (3.46) будем использовать векторы из (3.42).

Подставляя матрицу (3.47) в (3.46) и учитывая равенства (3.42) имеем:

$$D = \nu\mu_0 \begin{bmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -a \end{bmatrix},$$

в которой числа a, b_1 и b_2 определяются равенствами (3.45). $\square$

Собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы (3.44) – это числа $\lambda_{1,2} = \pm\nu\mu_0\sqrt{a^2+b_1b_2}$, которые могут быть как вещественными, так и чисто мнимыми. Соответственно, коэффициенты $\mu_1^{(1)}$и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.5) – это числа

$$\mu_1^{(1)} = \nu\mu_0\sqrt{a^2+b_1b_2}, \qquad \mu_1^{(2)} = -\mu_1^{(1)}. \tag{3.48}$$

Положим

$$\Delta = a^2 + b_1b_2 \tag{3.49}$$

и приведем следствие леммы 3.7.

Следствие 3.5. *Пусть $\Delta < 0$. Тогда для данного возмущения $JA_1(t)$ системы (3.27) при малых $|\varepsilon|$ мультипликатор μ_0 системы (3.27) остается на единичной окружности: $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| = |\mu^{(2)}(\varepsilon)| = 1$. В этом случае при малых $|\varepsilon|$ система (3.27) устойчива.*

Пусть $\Delta > 0$. Тогда для данного возмущения $JA_1(t)$ системы (3.27) при малых ненулевых $|\varepsilon|$ мультипликатор μ_0 системы (3.27) покидает единичную окружность: $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| < 1$ и $|\mu^{(2)}(\varepsilon)| > 1$. В этом случае при малых ненулевых $|\varepsilon|$ система (3.27) неустойчива.

3.2.4 Случай 4^0 : комбинационный резонанс

Рассмотрим теперь задачу о параметрическом резонансе системы (3.27) в ситуации комбинационного резонанаса. Т.е. пусть матрица JA_0 имеет два простых собственных значения $\lambda_1 = i\omega_1$ и $\lambda_2 = i\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 > 0$, при этом $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi k_0/T$ для некоторого натурального k_0. Пусть, как и выше, $V(\varepsilon)$ – матрица монодромии возмущенной системы (3.27). Тогда матрица монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$ невозмущенной системы (3.28) имеет полупростое собственное значение μ_0 кратности 2, а именно, $\mu_0 = e^{i\omega_1T} = e^{i\omega_2T}$. При этом в силу того, что $\omega_1, \omega_2 \neq \pi k/T$ при натуральных k, имеем $\mu_0 \neq \pm 1$.

При малых $|\varepsilon|$ матрица $V(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются гладкими и представимыми в виде (3.5).

Так как в рассматриваемом случае 4^0 мультипликатор μ_0 системы (3.27) является полупростым, то задачу построения коэффициентов $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в формулах (3.5) здесь можно проводить по той же схеме, что была приведена для случая 1^0 (см. п. 3.2.1). Укажем здесь лишь особенности, присущие случаю 4^0.

Во-первых, вместо равенств (3.31), выполненных в случае 1^0, в случае 4^0 следует говорить о том, что найдется пара линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ таких, что выполняются равенства: $JA_0e = i\omega_1 e$, $JA_0g = i\omega_2 g$. Эти векторы будут собственными и для матрицы монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$, отвечающими полупростому собственному значению μ_0 кратности 2.

Во-вторых, здесь имеет место полный аналог леммы 3.1. Наконец, в-третьих, вместо чисел (3.33) в уравнениях (3.35) и (3.36) в случае 3^0 следует использовать числа

$$a = (S_0e, e), \quad b = (S_0g, g), \quad c = \int_0^T e^{-2\pi i k_0 t/T}(A_1(t)g, e)dt; \tag{3.50}$$

здесь S_0 – матрица (3.32).

С учетом указанных особенностей в рассматриваемом случае 4^0 верны полные аналоги лемм 3.3 и 3.4, а также их следствия.

Отметим, что при $k_0 = 0$ формулы для случая 4^0 совпадают с соответствующими формулами рассмотренного выше случая 1^0. Это естественно, так как равенство $k_0 = 0$ означает, что $\omega_1 = \omega_2$, т.е. матрица JA_0 имеет кратное полупростое собственное значение $\lambda = i\omega_0$; здесь $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$.

3.3 Задача об устойчивости нелинейных периодических гамильтоновых систем

В этом параграфе рассматривается задача об устойчивости точек равновесия нелинейных периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (системы большей размерности могут быть рассмотрены аналогичным образом). А именно, рассматривается гладко зависящая от малого скалярного параметра ε система

$$\frac{dx}{dt} = J\nabla H(x, t, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^4, \tag{3.51}$$

здесь гамильтониан $H(x, t, \varepsilon)$ – скалярная вещественная функция, дважды непрерывно дифференцируемая по x и T-периодическая по t. Предположим, что начало координат $x = 0$ является точкой равновесия системы (3.51) при всех значениях параметра ε, так что разложение $H(x, t, \varepsilon)$ начинается с квадратичных слагаемых: $H(x, t, \varepsilon) = H_2(x, t, \varepsilon) + H_3(x, t, \varepsilon) + \ldots$; где

$H_j(x,t,\varepsilon)$ – однородные многочлены порядка j относительно x. Будем также считать, что при $\varepsilon = 0$ гамильтониан не зависит от времени, т.е. $H(x,t,0) = H(x)$. В этом случае систему (3.51) удается представить виде

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0 + \varepsilon A_1(t) + A_2(t,\varepsilon)\right]x + a(x,t,\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^4, \tag{3.52}$$

где A_0, $A_1(t), A_2(t,\varepsilon)$ – вещественные симметрические матрицы, $A_1(t), A_2(t,\varepsilon)$ являются T-периодическими. Функция $a(x,t,\varepsilon)$ и матрица $A_2(t,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям: $\|a(x,t,\varepsilon)\| = O(\|x^2\|)$ при $\|x\| \to 0$ и $\|A_2(t,\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\|\varepsilon\| \to 0$, равномерно по ε и t.

Наряду с уравнением (3.52) будем рассматривать также линейную периодическую гамильтонову систему (ЛПГС) вида

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0 + \varepsilon A_1(t) + A_2(t,\varepsilon)\right]x, \qquad x \in \mathbb{R}^4. \tag{3.53}$$

В силу общих свойств гамильтоновых систем верно следующее (см. п. 3.2 стр. 79): если матрица JA_0 имеет хотя бы одно собственное значение с ненулевой вещественной частью, то ЛПГС (3.53) будет неустойчивой при всех малых $|\varepsilon|$. Неустойчивой будет и точка равновесия $x = 0$ нелинейной системы (3.52).

Наряду с понятием устойчивости по Ляпунову точки равновесия $x = 0$ системы (3.52) ниже используется также более общее понятие формальной устойчивости (см. [28]). Точку равновесия $x = 0$ системы (3.52) называют *формально устойчивой*, если существует формальный знакоопределенный интеграл $G(x,t,\varepsilon) = G_2(x,t,\varepsilon) + G_3(x,t,\varepsilon) + G_4(x,t,\varepsilon) + \ldots$ системы (3.52). Формальность понимается в том смысле, что ряд $G(x,t,\varepsilon)$ может расходиться в окретности точки $x = 0$.

При наличии формальной устойчивости если и существуют траектории, далеко уходящие от невозмущенного движения, то движение по ним происходит крайне медленно, соответствующие оценки получены в работах Зигеля и Мозера (см. [6; 87]). Стоит отметить, что из устойчивости по Ляпунову вытекает формальная устойчивость. Недавно в работах В.В. Козлова (см. [98]) был приведен пример формально устойчивого положения равновесия системы, но не устойчивого по Ляпунову.

Далее будет рассматриваться вопрос об устойчивости $x = 0$ системы (3.52) в основных критических случаях, когда матрица JA_0 имеет чисто мнимые собственные значения $i\omega_1$ и $i\omega_2$ $(\omega_1 \geqslant 0, \omega_2 \geqslant 0)$.

3.3.1 Простые чисто мнимые собственные значения

Пусть матрица JA_0 системы (3.52) имеет два простых собственных значения $i\omega_1$ и $i\omega_2$, где $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$, $\omega_1, \omega_2 \neq \pi k/T$ и $\omega_1 - \omega_2 \neq 2\pi k/T$ при натуральных k.

В этом случае матрица монодромии $V(\varepsilon)$ линейной системы (3.53) при малых значениях $|\varepsilon|$ имеет простые мультипликаторы: $\mu_1(\varepsilon) = e^{\pm i\omega_1(\varepsilon)T}$, и $\mu_2(\varepsilon) = e^{\pm i\omega_2(\varepsilon)T}$. При малых значениях $|\varepsilon|$ имеем: $|\mu_1(\varepsilon)| = |\mu_2(\varepsilon)| = 1$, $\omega_1(\varepsilon) > 0$, $\omega_2(\varepsilon) > 0$, $\omega_1(\varepsilon) \neq \omega_2(\varepsilon)$.

Из теоремы Мозера (см., например, [99]) следует, что если при малых значениях $|\varepsilon|$ числа $\omega_1(\varepsilon)$ и $\omega_2(\varepsilon)$ удовлетворяют условию

U^0 для всех целых k выполнено неравенство

$$m_1\omega_1(\varepsilon) + m_2\omega_2(\varepsilon) \neq \frac{2\pi k}{T}$$

при целых $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \geqslant 0$, $|m_1| + |m_2| > 0$,

то положение равновесия $x = 0$ системы (3.52) формально устойчиво.

3.3.2 Простой резонанс

Пусть одно из простых собственных значений $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ матрицы JA_0 в системе (3.52) удовлетворяет равенству $\omega_1 = \pi k_0/T$ при некотором натуральном k_0. При этом полагается, что число ω_2 аналогичному соотношению не удовлетворяет, а также не выполняется условие комбинационного резонанса: $\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi k}{T}$ при целых k.

Определим ненулевой вектор $e+ig \in \mathbb{C}^4$ (где $e, g \in \mathbb{R}^4$) такой, что $JA_0(e+ig) = i\omega_1(e+ig)$. Определим постоянную матрицу

$$S_0 = \int_0^T A_1(t)dt, \tag{3.54}$$

где $A_1(t)$ – матрица, участвующая в системе (3.52). Положим

$$\Delta_1 = a^2 + b_1b_2, \tag{3.55}$$

где

$$a = \int_0^T \{\cos(2\omega_1 t)\,(A_1(t)e, g) - \frac{1}{2}\sin(2\omega_1 t)\,[(A_1(t)g, g) - (A_1(t)e, e)]\}dt, \tag{3.56}$$

$$b_1 = \int_0^T [\cos^2(\omega_1 t)\,(A_1(t)g, g) + \sin^2(\omega_1 t)\,(A_1(t)e, e) + \sin(2\omega_1 t)\,(A_1(t)e, g)]dt, \tag{3.57}$$

$$b_2 = b_1 - [(S_0e, e) + (S_0g, g)]. \tag{3.58}$$

Обозначим через $V(\varepsilon)$ матрицу монодромии системы (3.53), соответственно, $V_0 = e^{JA_0T}$ – матрица монодромии системы (3.53) при $\varepsilon = 0$. В рассматриваемом случае матрица V_0 имеет полупростое индефинитное собственное значение μ_0 кратности 2, где $\mu_0 = 1$ (если k_0 четно) или $\mu_0 = -1$ (если k_0 нечетно).

Ранее в п. 3.2.3 было показано, что при малых $|\varepsilon|$ матрица $V(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\mu^{(1)}(0) = \mu^{(2)}(0) = \mu_0$. Более того, функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ гладкие и представимы в виде:

$$\mu^{(1)}(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(1)}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2}), \qquad \mu^{(2)}(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(2)}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2}). \tag{3.59}$$

Здесь коэффициенты $\mu_1^{(1)}$и $\mu_1^{(2)}$ – это числа определенные формулами (3.48):

$$\mu_1^{(1)} = \nu\mu_0\sqrt{\Delta_1}, \qquad \mu_1^{(2)} = -\mu_1^{(1)};$$

число Δ_1 определено согласно (3.55), число $\nu = 1/(e, Jg)$ (согласно лемме 2.5 имеет место соотношение $(e, Jg) \neq 0$).

Пусть $\Delta_1 > 0$. В этом случае мультипликаторы $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ системы (3.53) сходят с единичной окружности. Следовательно, при малых ненулевых $|\varepsilon|$ положение равновесия системы (3.52) неустойчиво.

Пусть $\Delta_1 < 0$. В этом случае матрица монодромии $V(\varepsilon)$ линейной системы (3.53) при малых ненулевых значениях $|\varepsilon|$ имеет простые мультипликаторы $\mu^{(1)}(\varepsilon) = e^{\pm i\omega_1(\varepsilon)T}$, и $\mu^{(2)}(\varepsilon) = e^{\pm i\omega_2(\varepsilon)T}$. При малых ненулевых значениях $|\varepsilon|$ имеем: $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| = |\mu^{(2)}(\varepsilon)| = 1$, $\omega_1(\varepsilon) > 0$, $\omega_2(\varepsilon) > 0$, $\omega_1(\varepsilon) \neq \omega_2(\varepsilon)$. Из теоремы Мозера (см., например, [99]) следует, что если при малых ненулевых значениях $|\varepsilon|$ числа $\omega_1(\varepsilon)$ и $\omega_2(\varepsilon)$ удовлетворяют условию U^0, то положение равновесия $x = 0$ системы (3.52) формально устойчиво.

3.3.3 Комбинационный резонанс

Пусть матрица JA_0 системы (3.52) имеет два простых собственных значения $i\omega_1$ и $i\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 \geqslant 0$, при этом выполняется условие комбинационного резонанса $\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi k_0}{T}$ при некотором целом k_0. Этот случай разбивается на подслучаи, когда $k_0 \neq 0$ или $k_0 = 0$.

3.3.3.1 Подслучай $k_0 \neq 0$

Определим пару линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^4$ таких, что выполняются равенства:

$$JA_0 e = i\omega_1 e, \qquad JA_0 g = i\omega_2 g. \tag{3.60}$$

Обозначим через $V(\varepsilon)$ матрицу монодромии системы (3.53). Тогда $V_0 = e^{JA_0T}$ – матрица монодромии системы (3.53) при $\varepsilon = 0$ имеет полупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_1 T} = e^{i\omega_2 T}$ кратности 2. Векторы e, g, определенные равенствами (3.60), являются собственными для матрицы V_0, а именно, $V_0 e = \mu_0 e$, $V_0 g = \mu_0 g$.

Согласно Биркгофу (см. [8]) система (3.52) можно быть приведена к виду, в котором квадратичная форма $H_2(x, t, 0) = H_{20}(x)$ будет представлена в нормальной форме:

$$H_{20}(x) = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 - x_3^2) + \sigma\frac{\omega_2}{2}(x_2^2 - x_4^2), \quad \text{где} \quad \sigma = 1 \quad \text{или} \quad \sigma = -1.$$

Пусть μ_0 – дефинитный мультипликатор (полупростой, кратности 2), тогда $\sigma = 1$. Тогда рассматриваемый гамильтониан $H_{20}(x)$ есть знакоопределенная функция. Тогда, согласно теореме Ляпунова (см. [62; 85]) нулевое положение равновесия системы (3.52) является устойчивым при всех малых $|\varepsilon|$.

Пусть μ_0 – индефинитный мультипликатор (полупростой, кратности 2). Согласно лемме 3.1 векторы e, g, определенные согласно (3.60), можно считать нормированными в соответствии с равенствами (3.8). Далее положим:

$$a = (S_0 e, e), \qquad b = (S_0 g, g), \qquad c = \int_0^T e^{-2\pi i k_0 t/T}(A_1(t)g, e)dt; \tag{3.61}$$

здесь S_0 – матрица (3.54). Отметим, что числа a и b являются вещественными, а число c, вообще говоря, комплексное. Положим

$$\Delta_2 = (a+b)^2 - 4c\bar{c}. \tag{3.62}$$

В рассматриваемом случае матрица монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$ системы (3.53) при $\varepsilon = 0$ имеет полупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_1 T} = e^{i\omega_2 T}$ кратности 2.

Согласно лемме 3.1 следует: если μ_0 является индефинитным мультипликатором системы (3.53), то векторы e, g можно нормировать равенствами (3.8).

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ системы (3.53) при малых $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются гладкими и представимыми в виде (3.59):

$$\mu^{(1)}(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(1)}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2}), \qquad \mu^{(2)}(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1^{(2)}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2}).$$

Здесь коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ – это числа определенные формулами (3.48):

$$\mu_1^{(1)} = \nu\mu_0\sqrt{\Delta_2}, \qquad \mu_1^{(2)} = -\mu_1^{(1)}; \tag{3.63}$$

число Δ_2 определено согласно (3.62), число $\nu = 1/(e, Jg)$ (согласно лемме 2.5 имеет место соотношение $(e, Jg) \neq 0$).

Пусть $\Delta_2 > 0.$ В этом случае мультипликаторы $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ системы (3.53) сходят с единичной окружности. Следовательно, при малых ненулевых $|\varepsilon|$ положение равновесия системы (3.52) неустойчиво.

Пусть $\Delta_2 < 0.$ В этом случае матрица монодромии $V(\varepsilon)$ линейной системы (3.53) при малых ненулевых значениях $|\varepsilon|$ имеет простые мультипликаторы $\mu^{(1)}(\varepsilon) = e^{\pm i\omega_1(\varepsilon)T}$, и $\mu^{(2)}(\varepsilon) = e^{\pm i\omega_2(\varepsilon)T}$. При малых ненулевых значениях $|\varepsilon|$ имеем: $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| = |\mu^{(2)}(\varepsilon)| = 1$, $\omega_1(\varepsilon) > 0$, $\omega_2(\varepsilon) > 0$, $\omega_1(\varepsilon) \neq \omega_2(\varepsilon)$. Из теоремы Мозера (см., например, [99]) следует, что если при малых ненулевых значениях $|\varepsilon|$ числа $\omega_1(\varepsilon)$ и $\omega_2(\varepsilon)$ удовлетворяют условию U^0, то положение равновесия $x = 0$ системы (3.52) формально устойчиво.

3.3.3.2 Подслучай $k_0 = 0$

В рассматриваемой ситуации матрица JA_0 имеет кратное собственное значение $i\omega_0 = i\omega_1 = i\omega_2$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k.

Если $i\omega_0$ является полупростым собственным значением, то исследование можно проводить по той же схеме, что была приведена для подслучая $k_0 \neq 0$.

Пусть теперь собственное значение $i\omega_0$ неполупростое. В этом подслучае найдется пара линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^4$ таких, что выполняются равенства (3.38):

$$JA_0 e = i\omega_0 e, \qquad JA_0 g = i\omega_0 g + e.$$

В рассматриваемом случае матрица монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$ системы (3.53) при $\varepsilon = 0$ имеет неполупростое собственное значение $\mu_0 = e^{i\omega_0 T}$ кратности 2. Имеет место лемма 2.5 в силу которой определено число $\nu = \dfrac{1}{(e, Jg)}$. Согласно лемме 3.5 матрица монодромии $V(\varepsilon)$ системы (3.53) при малых $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$ являются гладкими и представимыми в виде

$$\mu^{(1,2)}(\varepsilon) = \mu_0 \pm \mu_0\sqrt{-T\varepsilon\nu(S_0 e, e)} + O(|\varepsilon|). \tag{3.64}$$

Отметим, что подкоренное выражение $\nu(S_0e, e)$ в формуле (3.64) является вещественным.

Пусть $\varepsilon\nu(S_0e, e) < 0$. Тогда для данного возмущения $JA_1(t)$ системы (3.27) при соответствующих малых $|\varepsilon|$ мультипликаторы $|\mu^{(1,2)}(\varepsilon)| \neq 1$. Следовательно, при малых ненулевых $|\varepsilon|$ положение равновесия системы (3.52) неустойчиво.

Пусть $\varepsilon\nu(S_0e, e) > 0$. В этом случае для данного возмущения $JA_1(t)$ при соответствующих малых ненулевых $|\varepsilon|$ матрица монодромии $V(\varepsilon)$ линейной системы (3.53) имеет простые мультипликаторы $\mu^{(1)}(\varepsilon) = e^{\pm i\omega_1(\varepsilon)T}$, и $\mu^{(2)}(\varepsilon) = e^{\pm i\omega_2(\varepsilon)T}$. При малых ненулевых значениях $|\varepsilon|$ имеем: $|\mu^{(1)}(\varepsilon)| = |\mu^{(2)}(\varepsilon)| = 1$, $\omega_1(\varepsilon) > 0$, $\omega_2(\varepsilon) > 0$, $\omega_1(\varepsilon) \neq \omega_2(\varepsilon)$. Из теоремы Мозера (см., например, [99]) следует, что если при малых ненулевых значениях $|\varepsilon|$ числа $\omega_1(\varepsilon)$ и $\omega_2(\varepsilon)$ удовлетворяют условию U^0, то положение равновесия $x = 0$ системы (3.52) формально устойчиво.

3.4 Приложение: уравнение Матье

В качестве первого приложения полученных в п. 3.2 результатов рассмотрим *уравнение Матье* (см., например, [62; 85])

$$u'' + (\alpha + \varepsilon\cos 2t)u = 0, \tag{3.65}$$

где α и ε – вещественные параметры. Одной из основных является задача исследования устойчивости уравнения Матье и, в частности, задача построения областей устойчивости в плоскости параметров (α, ε). Исследованию этой задачи посвящено значительное количество работ (см., например, [19; 62; 100; 101]).

На Рис. 3.4.1 изображены полученные в ряде работ (см., например, [85]) области устойчивости и неустойчивости уравнения Матье (3.65) в плоскости параметров (α,ε) (области устойчивости заштрихованы).

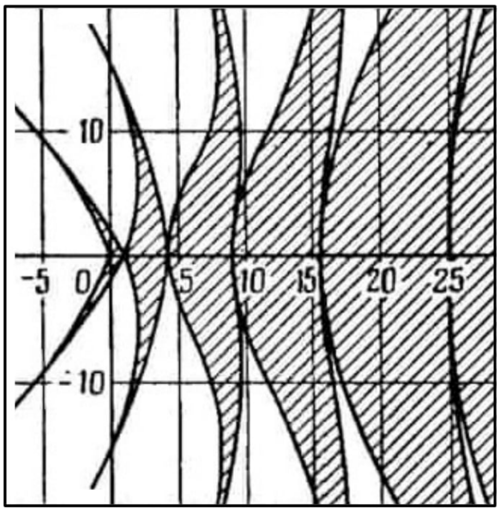

Рис. 3.4.1 Области устойчивости и неустойчивости уравнения Матье.

Проведем исследование устойчивости уравнения Матье в плоскости параметров (α,ε) на основе вышеизложенных методов в п. 3.2.

3.4.1 Вспомогательные построения

Уравнение (3.65) с помощью стандартной замены переменных $x_1 = u$, $x_2 = u'$ может быть приведено к линейной π-периодической гамильтоновой системе (3.27):

$$\frac{dx}{dt} = J[A_0(\alpha) + A_1(t,\varepsilon)]x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.66}$$

в которой

$$A_0(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_1(t,\varepsilon) = \varepsilon \cos 2t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим сначала невозмущенную задачу, т.е. систему (3.66) при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = JA_0(\alpha)x, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{3.67}$$

Матрица JA_0 имеет собственные значения: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}$; соответственно, матрица монодромии $V(\alpha) = e^{\pi J A_0(\alpha)}$ системы (3.67) имеет собственные значения $\mu_{1,2}(\alpha) = e^{\pm\pi\sqrt{-\alpha}}$.

Рассмотрим последовательно ситуации, когда $\alpha < 0$ и $\alpha \geqslant 0$.

Случай $\alpha < 0$. В этом случае мультипликаторы $\mu_1(\alpha)$ и $\mu_2(\alpha)$ системы (3.67) являются вещественными, при этом $|\mu_1(\alpha)| > 1$ и $|\mu_2(\alpha)| < 1$. Это соответствует рассмотренному в п. 3.1.1 на стр. 70 некритическому случаю. Поэтому в рассматриваемом случае при всех малых $|\varepsilon|$ система (3.66) является неустойчивой.

Случай $\alpha \geqslant 0$. В этом случае мультипликаторы $\mu_1(\alpha)$ и $\mu_2(\alpha)$ системы (3.67) являются комплексными вида: $\mu_1(\alpha) = e^{\pi i\sqrt{\alpha}}$, $\mu_2(\alpha) = e^{-\pi i\sqrt{\alpha}}$.

Из проведенного в п. 3.1.3 анализа (см. стр. 72) вытекает, что следует различать две различные ситуации:

1^0. $\mu_1(\alpha) = \mu_2(\alpha) = 1$ или $\mu_1(\alpha) = \mu_2(\alpha) = -1$;

2^0. $\mu_{1,2}(\alpha) \neq \pm 1$.

Решающую роль в изучении вопроса о том, при каких значениях α имеет место случай 1^0, а при каких – случай 2^0, играют числа:

$$0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, n^2, \ldots \tag{3.68}$$

Замечание. Случай 1^0 имеет место, если и только если α совпадает с одним из чисел (3.68). При этом если α совпадает с одним из чисел

$$0^2, 2^2, 4^2, \ldots, (2k)^2, \ldots,$$

то $\mu_1(\alpha) = \mu_2(\alpha) = 1$; если же α совпадает с одним из чисел

$$1^2, 3^2, 5^2, \ldots, (2k+1)^2, \ldots,$$

то $\mu_1(\alpha) = \mu_2(\alpha) = -1$.

Ситуация 2^0 имеет место, если и только если α не совпадает ни с одним из чисел (3.68). Отметим, что ситуация 2^0 не является критической. Действительно, в этом случаи мультипликаторы $\mu_1(\alpha)$ и $\mu_2(\alpha)$ являются простыми, они располагаются на единичной окружности и не равны 1 или -1. Поэтому в ситуации 2^0 при всех малых $|\varepsilon|$ система (3.66) является устойчивой.

Остается рассмотреть случай 1^0, т.е. случай, когда α совпадает с одним из чисел (3.68). Ограничимся рассмотрением случаев, когда $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

3.4.2 Случай $\alpha = 0$

Изучим вопрос об устойчивости уравнения Матье (3.66) для значений (α, ε) располагающихся на некоторой прямой, проходящей через точку $(0, 0)$. Указанную прямую зададим в виде уравнения $\varepsilon = m\alpha$, где m – угловой коэффициент этой прямой (см. Рис. 3.4.2).

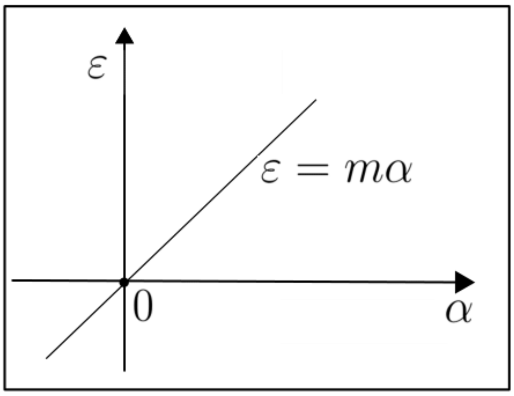

Рис. 3.4.2 Исследование случая $\alpha = 0$.

Замечание. Конечно, уравнение $\varepsilon = m\alpha$, задает не любую прямую, проходящую через точку (0,0). А именно, "выпадает" вертикальная прямая, задаваемая уравнением $\alpha = 0$. Для изучения вопроса об устойчивости уравнения Матье (3.65) на этой прямой можно положить $\alpha = 0$ в системе (3.66) и провести такой же анализ, как и проводимый ниже для прямой $\varepsilon = m\alpha$.

Подставляя $\varepsilon = m\alpha$ в (3.66) получим гамильтонову систему

$$\frac{dx}{dt} = J[A_0 + \alpha A_1(m,t)]x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.69}$$

в которой m – фиксировано, а α играет роль малого параметра;

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1(m,t) = (1 + m\cos 2t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $JA_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ имеет неполупростое нулевое собственное значение кратности 2. Следовательно, для уравнения (3.69) имеет место случай 2^0, (см. п. 3.2.2 на стр. 82).

Таким образом, для изучения нашей задачи могут быть применены результаты леммы 3.5 и ее следствия 3.4. Для применения этой леммы согласно формулам (3.39) требуется вычислить число $L_1 = -\pi\nu\int_0^{\pi}(A_1(m,t)e,e)dt$. Для этого построим собственный и присоединенный векторы e и g матрицы JA_0, отвечающие неполупростому нулевому собственному значению: $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Согласно лемме 3.2 определено число $\nu = \frac{1}{(e,Jg)} = 1$. Отсюда после несложных вычислений получим: $L_1 = -\pi$.

Тогда из следствия 3.4 следует, что при $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$) система (3.69) неустойчива (устойчива). По построению система (3.69) определяет свойства устойчивости уравнения Матье при малых значениях параметров α и ε, располагающихся на прямой $\varepsilon = m\alpha$. Поэтому полученный здесь результат означает, что уравнение Матье (3.66) при значениях (α, ε) из малой окрестности точки $(0, 0)$, располагающихся слева (справа) от вертикальной оси ε неустойчиво (устойчиво).

3.4.3 Случай $\alpha = 1$

В рассматриваемом случае фактически следует изучить вопрос об устойчивости уравнения Матье (3.66) при близких к 1 значениях параметра α и малых значениях ε. Другими словами, этот вопрос следует изучить для значений (α, ε) из малой окрестности точки $(1, 0)$. Изучим указанный вопрос для значений (α, ε), располагающихся на некоторой прямой, проходящей через точку $(1, 0)$. Указанную прямую зададим в виде уравнения: $\varepsilon = m(\alpha - 1)$, где m – угловой коэффициент этой прямой.

Положим $\delta = \alpha - 1$. Тогда прямая $\varepsilon = m(\alpha - 1)$ может быть представлена в равносильном виде $\varepsilon = m\delta$. Подставляя в (3.66), получим гамильтонову систему вида (3.27):

$$\frac{dx}{dt} = J[B_0 + \delta B_1(m, t)]x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.70}$$

в которой m – фиксировано, а δ играет роль малого параметра;

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_1(m, t) = (1 + m\cos 2t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $JB_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm i$. Наконец, так как $T = \pi$, то для уравнения (3.70) имеет место случай 3^0 (см. стр. 83).

Таким образом, для изучения нашей задачи могут быть применены результаты леммы 3.7 и ее следствия 3.5. Для применения этой леммы требуется построить число (3.49). С этой целью найдем векторы e и g, отвечающие собственному значению i матрицы JB_0, т.е. удовлетворяющие равенству $JB_0(e + ig) = i(e + ig)$: $e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Тогда число (3.49): $\Delta = \dfrac{\pi^2}{4}\left(4 - m^2\right)$.

Из следствия 3.5 следует, что при $m^2 > 4$ ($m^2 < 4$) система (3.70) неустойчива (устойчива). По построению система (3.70) определяет свойства устойчивости уравнения Матье (3.66) при малых $|\alpha - 1|$ и $|\varepsilon|$, располагающихся на прямой $\varepsilon = m(\alpha - 1)$. Поэтому верно следующее заключение.

V_0. Уравнение Матье (3.66) при значениях (α, ε) из малой окрестности точки $(1, 0)$, располагающихся на прямых $\varepsilon = m(\alpha - 1)$, где $m > 2$ или $m < -2$, неустойчиво (см. Рис. 3.4.3). Для значений (α, ε), располагающихся на прямых $\varepsilon = m(\alpha - 1)$, где $-2 < m < 2$, уравнение Матье (3.66) устойчиво (см. Рис. 3.4.3).

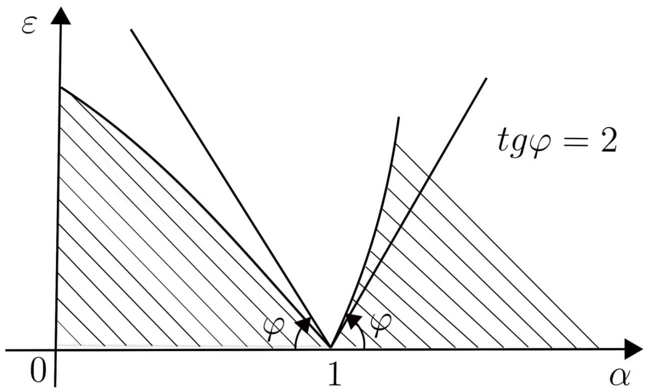

Рис. 3.4.3 Области устойчивости уравнения Матье в окрестности точки $(1, 0)$.

3.5 Приложение: плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел

Рассмотрим в качестве второго приложения задачу трех тел, которая состоит в изучении движения системы, состоящей из трех материальных точек M_0, M_1 и M_2. Важным частным случаем задачи трех тел является *плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел* (ПОКЗТТ), когда:

– масса тела M_0 пренебрежимо мала по сравнению с массами тел M_1 и M_2 (*ограниченная задача*);

– тела M_1 и M_2 движутся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра масс (*эллиптическая задача*);

– тело M_0 во все время движения находится в плоскости движения тел M_1 и M_2 (*плоская задача*).

Движение третьего тела M_0 в плоской ограниченной эллиптической задаче описывается гамильтоновой системой с 2π-периодической правой частью вида:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = -x_1 + x_4, \\ x_3' = -x_1 + x_4 + \rho \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \\ x_4' = -x_2 - x_3 + \rho \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_2}; \end{cases} \tag{3.71}$$

здесь $\Omega(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \dfrac{1-\mu}{\sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}} + \dfrac{\mu}{\sqrt{(x_1+\mu-1)^2 + x_2^2}}$,

$\rho = \dfrac{1}{1+\varepsilon \cos t}$, ε – эксцентриситет кеплеровской орбиты ($0 \leqslant \varepsilon < 1$), t – истинная аномалия, $\mu = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}$ – параметр масс ($0 < \mu < 1$), m_1 и m_2 – массы активно гравитирующих тел.

Система (3.71) является гамильтоновой, ее порождающая функция Гамильтона $H(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{2} + x_2 x_3 - x_1 x_4 - \rho\Omega(x_1, x_2)$.

Дифференциальные уравнения этой задачи зависят от различных параметров, что может приводить к смене устойчивости точек равновесия системы (см., например, [8; 87; 102; 103]). В этом параграфе будем рассматривать вопрос об устойчивости положений равновесия системы (3.71), учитывая гамильтоновость исследуемой системы.

3.5.1 Точки либрации

Приравнивая правую часть этой системы (3.71) к нулю, можно показать, что она имеет 5 постоянных решений (точек равновесия). Эти постоянные решения называют *точками либрации* системы (3.71). Они подразделяются на прямолинейные (эйлеровы) L_1, L_2 и L_3 и треугольные (лагранжевы) L_4 и L_5 точки либрации.

Известно (см., например, [104]), что первые три точки (L_1, L_2 и L_3) лежат на оси Ox_1, проходящей через M_0 и M_1, и определяются уравнениями:

$$L_1 : \; x_1 < 0, x_1^5 - (\mu+2)x_1^4 + (2\mu+1)x_1^3 - (\mu-1)x_1^2 + 2(\mu-1)x_1 - \mu + 1 = 0;$$

$$L_2 : \; 0 < x_1 < 1, \; x_1^5 - (\mu+2)x_1^4 + (2\mu+1)x_1^3 + (\mu-1)x_1^2 - 2(\mu-1)x_1 + \mu - 1 = 0;$$

$$L_3 : \; x_1 > 1, \; x_1^5 - (\mu+2)x_1^4 + (2\mu+1)x_1^3 - (\mu+1)x_1^2 - 2(\mu-1)x_1 + \mu - 1 = 0.$$

Вычислить зависимость x_1 от μ удается лишь приближенно. В частности, в случае L_2 :

$$x_1(\mu) = 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{27}\mu - \frac{58}{81}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{4}{3}} + o(\mu^{\frac{4}{3}}).$$

Точки либрации L_4 и L_5 образуют с телами M_0 и M_1 равносторонние треугольники, данные точки имеют координаты:

$$L_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad L_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Несложно показать (см., например, [8; 102]), что при любых малых μ и ε прямолинейные точки либрации L_1, L_2, L_3 являются неустойчивыми. Таким образом, основной задачей является исследование вопроса об устойчивости положения равновесия системы (3.71) в окрестностях треугольных точек L_4 и L_5. Для определенности будем рассматривать точку L_4; все приведенные ниже выводы верны и для L_5 с соответствующими модификациями.

Заметим, что при условии $0 \leqslant \varepsilon < 1$ верно $\rho = 1/(1+\varepsilon\cos t) = 1-\varepsilon\cos t + \varepsilon^2\cos^2 t - \varepsilon^3\cos^3 t + \ldots$. Перенесем начало координат системы (3.71) в точку L_4 и выпишем полученную систему:

$$h' = J\left[A_0(\mu) + (\varepsilon\cos t - \varepsilon^2\cos^2 t)A_1(\mu) + A_3(\varepsilon,\mu,t)\right]h + a(\varepsilon,\mu,t,h), \quad h \in \mathbb{R}^4. \tag{3.72}$$

Здесь

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3\sqrt{3}}{4}(2\mu+1) & 0 & -1 \\ \frac{-3\sqrt{3}}{4} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\mu\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\mu\sqrt{3}}{2} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

элементы матрицы $A_3(\varepsilon,\mu,t)$ являются C^3-гладкими функциями, причем $\|A_3(\varepsilon,\mu,t)\| = O(|\varepsilon|^3)$ при $\varepsilon \to 0$. В рассматриваемом уравнении нелинейность $a(\varepsilon,\mu,t,h) = O(\|h\|^2)$, при $\|h\| \to 0$ равномерно по ε,μ,t.

Наравне с уравнением (3.72) будем рассматривать ее линеаризованную систему

$$h' = J\left[A_0(\mu) + (\varepsilon\cos t - \varepsilon^2\cos^2 t)A_1(\mu) + A_3(\varepsilon,\mu,t)\right]h, \quad h \in \mathbb{R}^4. \tag{3.73}$$

Рассмотрим при каких значениях параметров μ и ε нулевое положение равновесия системы (3.72) будет устойчиво, т.е. перейдем к построению границ области устойчивости треугольных точек либрации.

3.5.2 Границы области устойчивости треугольных точек либрации

Задача построения границ областей устойчивости треугольных точек либрации системы (3.73) представляет особую сложность с вычислительной точки зрения, поскольку она требует объемные расчеты, вызванные неавтономностью основных уравнений системы. Известные алгоритмы основаны на сложных конструкциях и соответствующих компьютерных вычислениях (см., например, [8; 102; 105—107]). Далее предлагается иная схема определения границ областей устойчивости системы (3.73), основанная на методах теории возмущений применимо к гамильтоновым системам.

Построим плоскость параметров μ, ε системы (3.73) и определим прямоугольник

$$\Pi = \{(\mu, \varepsilon) : 0 < \mu < 1, 0 < \varepsilon < 1\}.$$

Пусть

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.0285\ldots, \qquad \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \approx 0.0385\ldots. \tag{3.74}$$

При $\varepsilon = 0$ система (3.73) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = JA_0(\mu)x, \qquad x \in \mathbb{R}^4. \tag{3.75}$$

Анализ характеристического уравнения матрицы $JA_0(\mu)$ показывает, что верны следующие основные результаты относительно исследования устойчивости системы (3.73):

- Пусть $\mu \in (\mu^*, 1-\mu^*)$. Тогда все собственные значения матрицы $JA_0(\mu)$ будут комплексными числами с ненулевыми вещественными частями. В этом случае найдется малое $\delta > 0$ такое, что при всех $0 \leqslant \varepsilon < \delta$ система (3.73) неустойчива.
- Пусть $\mu \in (0, \mu^*)\bigcup(1-\mu^*, 1)$. Тогда матрица JA_0 имеет чисто мнимые собственные значения вида $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1(\mu)$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2(\mu)$, здесь $\omega_{1,2}(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}$. Отсюда имеем: для любого $\mu \in (0, \mu^*) \cup (1-\mu^*, 1) : \mu \neq \mu_0$, $\mu \neq 1 - \mu_0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $0 \leqslant \varepsilon < \delta$ система (3.73) устойчива.

Далее следует различать следующие критические случаи:

1^o Пусть $\mu = \mu_0$; матрица $JA_0(\mu_0)$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений вида $\pm i\omega_1$, где $\omega_1 = 1/2$. При этом два других ее собственных значения – это числа $\pm i\omega_2$, где $\omega_2 = \sqrt{3}/2$. В свою очередь система (3.75) имеет индефинитный полупростой (кратности два) мультипликатор $\eta_0 = e^{i\omega_1 2\pi} = -1$. Таким образом, при $\mu = \mu_0$ выполняются условия простого резонанса.

2^o Пусть $\mu = \mu^*$ или $\mu = 1 - \mu^*$. Тогда матрица $JA_0(\mu^*)$ имеет пару неполупростых (кратности два) чисто мнимых собственных значений вида $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{2}$. В свою очередь система (3.75) имеет индефинитный неполупростой (кратности два) мультипликатор $\eta_0 = e^{i\pi\sqrt{2}}$. Таким образом, при $\mu = \mu^*$ выполняются условия комбинационного резонанса.

Таким образом, задача исследования устойчивости системы (3.73) при $\mu = \mu_0$ и при $\mu = \mu^*$ и малых значениях ε является задачей о параметрическом резонансе.

Укажем основной результат полученный ранее в работах А.П. Маркеева (см., например, [8; 73]) относительно исследования областей устойчивости системы (3.73).

Теорема 3.5. *Для любого значения параметра μ из интервала $(0, \mu^*)$ и малых ε граница области устойчивости системы (3.73) состоит в точности из трех гладких кривых Γ_1, Γ_2 и Γ_3, первые две из которых выходят на ось μ в плоскости параметров (μ, ε) в точке $\mu = \mu_0$, а третья-в точке $\mu = \mu^*$.*

Первые кривые Γ_1 и Γ_2 могут быть представимы в виде монотонных функций

$$f_1(\delta) = -\frac{\sqrt{3456}}{11}\delta + \frac{36}{121}\sqrt{33}\left(67\sqrt{33} - 643\right)\delta^2 + \varphi_1(\delta) \tag{3.76}$$

и

$$f_2(\delta) = \frac{\sqrt{3456}}{11}\delta + \frac{36}{121}\sqrt{33}\left(67\sqrt{33} + 643\right)\delta^2 + \varphi_2(\delta), \tag{3.77}$$

определенных и монотонных на промежутках $(-\mu_0, 0]$ и $[0, \mu_3 - \mu_0)$ соответственно. Здесь $\delta = \mu - \mu_0$, нелинейные функции $\varphi_j(\delta)$ удовлетворяют соотношениям: $\varphi_j(\delta) = O(|\delta|^3)$ при $\delta \to 0,\ j = 1, 2$.

Третья кривая Γ_3 может быть представима в виде монотонной на промежутке $[0, \mu_3 - \mu_0)$, функции

$$f_3(\varsigma) = \sqrt[4]{\frac{691}{4}}\sqrt{\varsigma} + \varphi_3(\varsigma), \tag{3.78}$$

где $\varsigma = \mu - \mu^*$, *нелинейность* $\varphi_3(\varsigma)$ *удовлетворяет соотношению:* $\varphi_3(\varsigma) = O(|\varsigma|)$ *при* $\varsigma \to 0$.

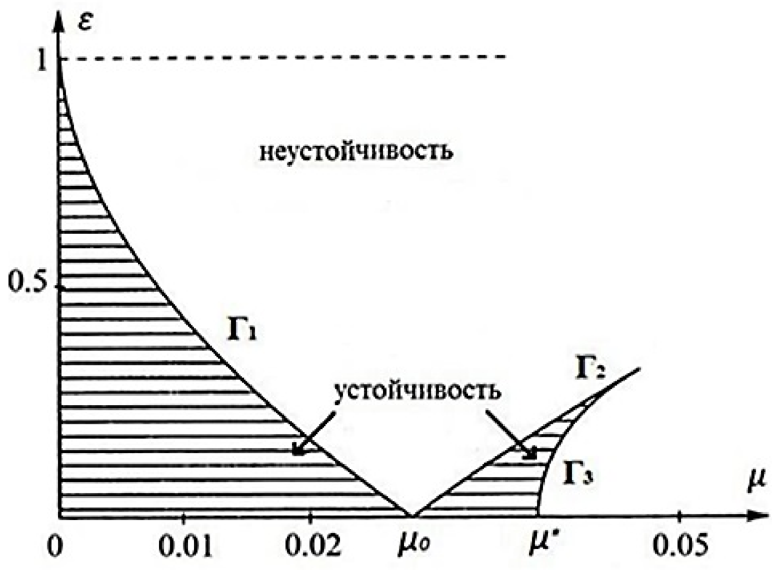

Рис. 3.5.1 Область устойчивости треугольных точек либрации.

На Рис. 3.5.1 изображены области устойчивости и неустойчивости системы (3.73) для малых значений μ. Заштрихованная часть — есть область устойчивости треугольных точек либрации, граница области образована тремя непрерывными кривыми Γ_1, Γ_2, Γ_3. Точки μ_0 и μ^* — точки пересечения кривых Γ_1, Γ_2, Γ_3 с осью $O\mu$.

Покажем, что формулы вида (3.76) – (3.78) могут быть получены и на на основе изложенных в п. 3.2 результатов.

3.5.2.1 Исследование устойчивости в окрестности значения μ_0

Сначала рассмотрим задачу исследования устойчивости системы (3.73) при близких к μ_0 значениях μ и малых значениях ε. А именно, эту задачу будем изучать для значений (μ, ε), лежащих на прямой

$$\mu = \mu_0 + m\varepsilon, \tag{3.79}$$

где m – некоторый фиксированный коэффициент.

Подставляя (3.79) в (3.73), и проведя соответствующие преобразования, получим систему

$$\frac{dx}{dt} = J[A_0 + \varepsilon S_1(t) + S_2(t, \varepsilon)]x, \qquad x \in \mathbb{R}^4, \tag{3.80}$$

$$\text{где}\quad JA_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad JS_1(t) = -mA_1 - \cos tA_2,$$

$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{2} & \dfrac{9}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица $S_2(t,\varepsilon)$ является симметрической, непрерывной и 2π-периодической по t, гладкой по ε и удовлетворяет соотношению: $\|S_2(t,\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по t.

Для исследования устойчивости системы (3.80) воспользуемся леммой 3.7. Для этого следует определить число (3.49). В свою очередь, это требует построения собственного вектора $e + ig$, отвечающего собственному значению $i/2$ матрицы JA_0. В качестве e и g можно взять, например, векторы

$$e = \begin{bmatrix} 8 \\ -2\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6}/2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, фигурирующие в формулах (3.45) числа T, ω_1, μ_0 (которое здесь переобозначено через η_0) и ν равны:

$$T = 2\pi, \qquad \omega_1 = \frac{1}{2}, \qquad \eta_0 = -1, \qquad \nu = -1/7.$$

После вычислений получим:

$$\Delta = 49\pi^2\left(33/16 - 648m^2\right).$$

Отсюда и из леммы 3.7 получим, что кратный мультипликатор $\eta_0 = -1$ системы (3.75) при $\mu = \mu_0$ при переходе к системе (3.80) расщепляется в соответствии с формулами (3.59), которые в нашем случае принимают вид:

$$\eta_1(\varepsilon) = -1 + \frac{1}{7}\sqrt{\Delta}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2}), \qquad \eta_2(\varepsilon) = -1 - \frac{1}{7}\sqrt{\Delta}\varepsilon + O(|\varepsilon|^{3/2});$$

здесь

$$\eta_1^{(1)} = \frac{1}{7}\sqrt{\Delta}, \qquad \eta_1^{(2)} = -\eta_1^{(1)}.$$

Таким образом, изменение характера устойчивости системы (3.80) происходит при $\Delta = 0$, т.е. при значениях m, определенных равенствами: $m = \pm k_0$, где $k_0 = \sqrt{\frac{11}{3456}}$. При этом система (3.80) неустойчива, если $-k_0 < m < k_0$; система (3.80) устойчива, если $m < -k_0$ или $m > k_0$. Отсюда следует, что прямые

$$\mu = \mu_0 + k_0\varepsilon, \qquad \mu = \mu_0 - k_0\varepsilon$$

являются искомыми касательными к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке $(\mu_0, 0)$.

3.5.2.2 Исследование устойчивости в окрестности значения μ^*

Рассмотрим задачу исследования устойчивости системы (3.73) при близких к μ^* значениях μ и малых значениях ε. А именно, эту задачу будем изучать для значений (μ, ε), лежащих на прямой

$$\mu = \mu^* + m\varepsilon, \tag{3.81}$$

где m – некоторый фиксированный коэффициент.

Подставляя (3.81) в (3.73) и проведя соответствующие преобразования, получим систему вида (3.80), в которой:

$$JA_0 = JA(\mu^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{23}}{4} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad JS_1(t) = -mA_1 - \cos tA_2,$$

$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{23}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для исследования устойчивости полученной системы воспользуемся леммой 3.5 и следствием 3.4. Для этого следует определить пару линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2N}$ таких, что выполняются равенства (3.38) при $\omega_0 = 1/\sqrt{2}$. Эти векторы также будут удовлетворять равенствам:

$$V_0 e = e^{i\sqrt{2}\pi} e, \qquad V_0 g = e^{i\sqrt{2}\pi}(g + Te).$$

В качестве e и g можно взять, например, векторы

$$e = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} - 2i\sqrt{23} \\ 10i \\ \sqrt{46} - 2i \\ 3\sqrt{2} - 2i\sqrt{23} \end{bmatrix}, \qquad g = \frac{1}{3\sqrt{2} - 2i\sqrt{23}} \begin{bmatrix} -4\left(9\sqrt{23} + 16i\sqrt{2}\right) \\ 68 - 16i\sqrt{46} \\ -\left(48 + 24i\sqrt{46}\right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, фигурирующие в формулах (3.64) числа T, ω_0, μ_0 (которое здесь переобозначено через η_0) и ν равны:

$$T = 2\pi, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_0 = e^{i\pi\sqrt{2}}, \qquad \nu = \frac{1}{160}.$$

Отсюда получим, что кратный мультипликатор $\eta_0 = e^{i\pi\sqrt{2}}$ системы (3.75) при близках к μ^* значениях μ при переходе к системе (3.80) расщепляется в соответствии с формулами (3.64), которые в нашем случае принимают вид:

$$\eta_1(\varepsilon) = \eta_0 + \eta_1^{(1)}\varepsilon^{1/2} + O(|\varepsilon|), \qquad \eta_2(\varepsilon) = \eta_0 + \eta_1^{(2)}\varepsilon^{1/2} + O(|\varepsilon|);$$

здесь

$$\eta_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi\sqrt{2}} \sqrt[4]{621}\sqrt{m\pi}, \qquad \eta_2^{(1)} = -\eta_1^{(1)}.$$

Тогда получим, что изменение характера устойчивости положения равновесия системы (3.80) происходит при $m = 0$. При этом точка равновесия $x = 0$ системы (3.80) неустойчиво (устойчива) если $m > 0$ ($m < 0$). Отсюда следует, что вертикальная прямая $\mu = \mu^*$ является искомой касательной к кривой Γ_3 в точке $(\mu^*, 0)$.

Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию задач об устойчивости гамильтоновых систем в критических случаях. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработаны новые формулы первого приближения для возмущений собственных значений гамильтоновых матриц, зависящих от малого параметра. На основе разработанных формул получены новые признаки устойчивости решений автономных гамильтоновых систем в критических случаях.
2. Разработаны новые формулы первого приближения в задаче о возмущении мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра. На основе разработанных формул получены новые признаки устойчивости решений периодических гамильтоновых систем в критических случаях.
3. Разработаны новые подходы исследования задачи о параметрическом резонансе для линейных и нелинейных периодических гамильтоновых систем. Изучен ряд приложений в задачах теории управления и механики.

Список литературы

1. *Гельфанд, И. М.* О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский // УМН. — 1955. — Т. 10, № 1. — С. 3—40.
2. *Биркгоф, Д.* Динамические системы / Д. Биркгоф. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941. — С. 320.
3. *Брюно, А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты / А. Д. Брюно. — М.: Наука, 1990. — С. 296.
4. *Колмогоров, А. Н.* О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона / А. Н. Колмогоров // ДАН СССР. — 1954. — Т. 98, № 4. — С. 527—530.
5. *Ляпунов, А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — С. 472.
6. *Мозер, Ю.* Лекции о гамильтоновых системах / Ю. Мозер. — М.: Мир, 1973. — С. 167.
7. *Krasnosel'skij, A. M.* The Hamiltonian nature of Lur'e systems / A. M. Krasnosel'skij, D. I. Rachinskij // Autom. Remote Control. — 2000. — Vol. 61, no. 8. — P. 1259—1262.
8. *Маркеев, А. П.* Точки либраций в небесной механике и космодинамике / А. П. Маркеев. — М.: Наука, 1978. — С. 312.
9. *Журавлев, В. Ф.* Избранные задачи гамильтоновой механики / В. Ф. Журавлев, Ф. Г. Петров, М. М. Шундерюк. — М.: ЛЕНАНД, 2020. — С. 304.
10. *Kozlov, V. V.* Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics / V. V. Kozlov // Russian Mathematical Surveys. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 1—76.
11. *Малкин, И. Г.* Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — С. 432.

12. *Крейн, М. Г.* Об аналитических свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа / М. Г. Крейн, Г. Я. Любарский // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1962. — Т. 26, № 4. — С. 549—572.

13. *Малкин, И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — С. 248.

14. *Трещев, Д. В.* Потеря устойчивости в гамильтоновых системах, зависящих от параметров / Д. В. Трещев // ПММ. — 1992. — Т. 56, № 4. — С. 587—596.

15. *Campbell, J. A.* Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit / J. A. Campbell, W. H. Jefferis // Celest. Mech. — 1970. — Vol. 2, no. 4. — P. 467—473.

16. *Henrard, J.* Periodic orbits emanating from a resonant equilibrium / J. Henrard // Celest. Mech. — 1970. — Vol. 1, no. 3. — P. 437—466.

17. *Joyeux, M.* Classical dynamics of the 1:1, 1:2 and 1:3 resonance Hamiltonians / M. Joyeux // Chem. Phis. — 1996. — No. 3. — P. 281—307.

18. *Lanchares, V.* On the stability of Hamiltonian dynamical systems / V. Lanchares. — Zaragoza: Prensas de la Universidad de Zaragoza, 2014. — P. 155—166.

19. *Якубович, В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. — М.: Наука, 1972. — С. 720.

20. *Мухин, Р. Р.* Хаос и неинтегрируемость в гамильтоновых системах / Р. Р. Мухин // Известия вузов. ПНД. — 2006. — Т. 14, № 1. — С. 3—24.

21. *Delaunay, C.* Théorie du mouvement de la lune. T. 2 / C. Delaunay. — Mallet-Bachelier, 1860.

22. *Newcomb, S.* Tables of the four inner planets / S. Newcomb // Astron. Papers. — 1898. — No. 1—4. — P. 1895—1898.

23. *Hori, G. I.* Theory of general perturbation with unspecified canonical variables / G. I. Hori // J. Japan Astron. Soc. — 1966. — No. 4. — P. 287—296.

24. *Deprit, A.* Canonical transformations depending on a small parameter / A. Deprit // Celest. Mech. — 1969. — Vol. 1, no. 1. — P. 12—30.

25. *Маркеев, А. П.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем / А. П. Маркеев, А. Г. Сокольский // Препр. ИПМ АН СССР. — 1976. — Т. 31. — С. 61.

26. *Маркеев, А. П.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 / А. П. Маркеев // ПММ. — 2011. — Т. 63, № 5. — С. 757—769.

27. *Сокольский, А. Г.* Вычислительный алгоритм нормализации двумерных канонических систем / А. Г. Сокольский, С. А. Хованский // М.: МАИ, деп. ВИНИТИ, 1981. — 1981. — С. 1—40.

28. *Брюно, А. Д.* О типах устойчивости в системах Гамильтона / А. Д. Брюно // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — Москва, 2020. — № 21. — С. 1—24.

29. *Брюно, А. Д.* Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением / А. Д. Брюно // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — Москва, 2019. — № 57. — С. 1—27.

30. *Батхин, А. Б.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем / А. Б. Батхин, А. Д. Брюно, В. П. Варин // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — Москва, 2011. — № 42. — С. 1—32.

31. *Брюно, А. Д.* Об устойчивости в системе Гамильтона / А. Д. Брюно // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 3. — С. 726—730.

32. *Мозер, Ю.* КАМ-теория и проблемы устойчивости / Ю. Мозер. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — С. 448.

33. *Арнольд, В. И.* Математические аспекты классической и небесной механики / В. И. Арнольд, А. И. Козлов В. В.and Нейштадт. — М.: Эдиториал УРСС, 2002. — С. 414.

34. *Mersman, W. A.* A new algorithm for the Lie transformation / W. A. Mersman // Celest. Mech. — 1970. — Vol. 3, no. 1. — P. 81—89.

35. *Meyer, K. R.* Normal forms for Hamiltonian systems in some nilpotent cases / K. R. Meyer, D. S. Schmidt // Regular and Chaotic Dynamics. — 2022. — Сент. — Т. 27, № 5. — С. 538—560.

36. *Иванов, А. П.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа / А. П. Иванов, А. Г. Сокольский // ПММ. — 1980. — Т. 44, № 6. — С. 963—970.

37. *Майлыбаев, А. А.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике / А. А. Майлыбаев, А. П. Сейранян. — М.: Физматлит, 2009. — С. 399.

38. *Maddocks, J. H.* Stability theory for dissipatively perturbed Hamiltonian systems / J. H. Maddocks, M. L. Overton // Comm. Pure Appl. Math. — 1995. — Т. 48, № 6. — С. 583—610.

39. *Elipe, A.* On the stability of equilibria in two-degrees-of- freedom Hamiltonian systems under resonances / A. Elipe, V. Lanchares, A. I. Pascual // J. Nonlinear Sci. — 2005. — Vol. 15, no. 5. — P. 305—319.

40. *Майлыбаев, А. А.* Об особенностях границы области устойчивости / А. А. Майлыбаев, А. П. Сейранян // Докл. РАН. — 1998. — Т. 359, № 5. — С. 632—636.

41. *Якубович, В. А.* Параметрический резонанс в линейных системах / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. — М.: Наука, 1987. — С. 328.

42. *Belova, A. S.* Boundaries of the region of stability of autonomous Hamiltonian systems / A. S. Belova, L. S. Ibragimova, I. G. Mustafina // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 5. — P. 1823—1828.

43. *Belova, A. S.* Stability of equilibrium points for a Hamiltonian systems with two degrees of freedom in the problem of parametric resonance / A. S. Belova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 6. — P. 1486—1491.

44. *Yumagulov, M. G.* Investigation of the problem on a parametric resonance in Lurie systems with weakly oscillating coefficients / M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova, A. S. Belova // Autom. Remote Control. — 2022. — Vol. 83, no. 2. — P. 252—263.

45. *Yumagulov, M. G.* Perturbation theory methods in problem of parametric resonance for linear periodic Hamiltonian systems / M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova, A. S. Belova // Ufa Mathematical Journal. — 2021. — Vol. 13, no. 3. — P. 174—190.

46. *Yumagulov, M. G.* Methods for studying the stability of linear periodic systems depending on a small parameter / M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova, A. S. Belova // J. Math. Sci., New York. — 2021. — Vol. 258, no. 1. — P. 115—127.

47. *Yumagulov, M. G.* First approximation formulas in the problem of perturbation of definite and indefinite multipliers of linear Hamiltonian systems / M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova, A. S. Belova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, no. 15. — P. 3773—3783.

48. *Yumagulov, M. G.* Approximate research of problems on perturbation of periodic and autonomous Hamiltonian systems in critical cases / M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova, A. S. Belova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, no. 9. — P. 1924—1931.

49. *Юмагулов, М. Г.* Алгоритмы построения границ областей устойчивости линейных гамильтоновых систем с помощью пакета Matlab / М. Г. Юмагулов, А. С. Белова // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2017. — Т. 13, № 4. — С. 270—275.

50. *Белова, А. С.* Построение границ областей устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы / А. С. Белова, Л. С. Ибрагимова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции (оз. Банное, 13 – 17 марта 2023 г.) – Уфа: ООО "Аэтерна". — 2023. — С. 20.

51. *Белова, А. С.* Устойчивость точек равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в задаче о параметрическом резонансе / А. С. Белова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения : сборник материалов Международной научной конференции, оз. Банное, 14–18 марта 2022 года. – Уфа: ООО "Аэтерна". — 2022. — С. 13—14.

52. *Ибрагимова, Л. С.* О сильной и слабой устойчивости автономных и периодических гамильтоновых систем / Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа : Материалы Международной научной конференции, Уфа, 28 сентября – 01 2022 года. Т. 2. — РИЦ УУНиТ, 2022. — С. 180—181.

53. *Белова, А. С.* Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем / А. С. Белова // Конференция международных математических центров мирового

уровня 13 августа 2021 г. 15:10–15:30, Математическая физика, г. Сочи. — 2021.

54. *Белова, А. С.* Устойчивость системы двух связанных осцилляторов / А. С. Белова // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: спутник Международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа-2021". Тезисы докладов XII Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 100-летию профессора БашГУ Фарзтдинова Миркашира Минигалиевича. Отв. редактор Л.А. Габдрахманова. — 2021. — С. 7.

55. *Белова, А. С.* Исследование задачи о параметрическом резонансе в системах Лурье со слабоосциллирующими коэффициентами / А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа - 2021 : Материалы международной научной конференции, Уфа, 06–09 октября 2021 года. Том 2. – Уфа: ООО "Аэтерна". — 2021. — С. 31—32.

56. *Белова, А. С.* Формулы первого приближения для дефинитных ииндефинитных мультипликаторов гамильтоновых систем и их приложения / А. С. Белова, Л. С. Ибрагимова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения : Сборник тезисов Международной научной конференции, оз. Банное, 15–19 марта 2021 года. – Уфа: ООО "Аэтерна". — 2021. — С. 81—82.

57. *Юмагулов, М. Г.* Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа - 2021 : Материалы международной научной конференции, Уфа, 06–09 октября 2021 года. Т. 1. — Уфа: ООО "Аэтерна", 2021. — С. 236—237.

58. *Белова, А. С.* Признаки локальных бифуркаций в окрестностях точек равновесий гамильтоновых систем / А. С. Белова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения : Сборник тезисов Международной научной конференции, оз. Банное, 10–14 марта 2020 года / Отв. редактор Р.Н. Гарифуллин. – оз. Банное: Башкирский государственный университет, — 2020. — С. 17—18.

59. *Юмагулов, М. Г.* Формулы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для гамильтоновых систем / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа - 2020 : Сборник тезисов международной научной конференции. В 2 ч., Уфа, 11–14 ноября 2020 года. Том 2. – Уфа: Общество с ограниченной ответственностью "Аэтерна. — 2020. — С. 156—158.

60. *Белова, А. С.* О достаточных условиях локальных бифуркаций в гамильтоновых динамических системах / А. С. Белова // Уфимская осенняя математическая школа : Сборник тезисов Международной научной конференции, Уфа, 16–19 октября 2019 года / Ответственный редактор З.Ю. Фазуллин. – Уфа: Башкирский государственный университет. — 2019. — С. 38—39.

61. *Белова, А. С.* О построении границ областей устойчивости в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел / А. С. Белова // Международная математическая конференция по теории функций, посвящённая 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева, Сборник тезисов, Уфа, 24–27 мая 2017 года. — Уфа: Башкирский государственный университет, 2017. — С. 22—23.

62. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — С. 472.

63. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. — Едиториал УРСС, 2004. — С. 896.

64. *Като, Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — С. 740.

65. *Вольперт, А. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики / А. И. Вольперт, С. И. Худяев. — М.: Наука, 1975. — С. 395.

66. *Ibragimova, L. S.* The asymptotic formulae in the problem on constructing hyperbolicity and stability regions of dynamical systems / L. S. Ibragimova, I. Z. Mustafina, M. G. Yumagulov // Ufa Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 8, no. 3. — P. 59—81.

67. *Cenci, S.* Structural stability of nonlinear population dynamics / S. Cenci, S. Saavedra // Physical Review E. — 2018. — T. 97.

68. *Юмагулов, М. Г.* Методы спектральной теории в приложениях к дифференциальным уравнениям / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2020. — С. 120.

69. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1968. — С. 576.

70. *Loccufier, M.* A new trajectory reversing method for estimation stability regions of autonomous nonlinear systems / M. Loccufier, E. Noldus // Nonlinear Dynamics. — 2000. — Vol. 21, no. 3. — P. 265—288.

71. *Chiang, H. D.* Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems / H. D. Chiang, M. W. Hirsch, F. F. Wu. — 1988.

72. *Amaral, F. M.* Stability boundary characterization of nonlinear autonomous dynamical systems in the presence of a saddle-node equilibrium point / F. M. Amaral, L. F. C. Alberto // Tend. Mat. Apl. Comput. — 2012. — Vol. 13, no. 2. — P. 143—154.

73. *Маркеев, А. П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс / А. П. Маркеев. — М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2009. — С. 394.

74. *Kishor, R.* Normalization of Hamiltonian and nonlinear stability of the triangular equilibrium points in non-resonance case with perturbations / R. Kishor, B. S. Kushvah // Astrophysics and Space Science. — 2017. — Авг. — Т. 362, № 9.

75. *Radlička, T.* Normalization of s-dependent Hamiltonian / T. Radlička // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2004. — Февр. — Т. 519, № 1/2. — С. 453—460.

76. *Meyer, K. R.* Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem. Vol. 90 / K. R. Meyer, G. R. Hall, D. Offin. — NY: Springer, 2009.

77. *Huang, J.* Solvability of indefinite stochastic Riccati equations and linear quadratic optimal control problems / J. Huang, Z. Yu // Systems &amp Control Letters. — 2014. — Июнь. — Т. 68. — С. 68—75.

78. *Трещев, Д. В.* Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем / Д. В. Трещев ; под ред. М. Фазис. — 1998.

79. *Cushman, R.* Strongly stable real infinitesimal symplecticmappings / R. Cushman, A. Kelly // J.Diff.Eq. — 1979. — Т. 2, № 31. — С. 200—223.

80. *Ван, Д.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н. Чоу. — М.: МЦНМО, 2005. — С. 416.

81. *Meyer, K. R.* Normal forms for Hamiltonian systems / K. R. Meyer // Celestial Mechanics. — 1974. — Т. 9, № 4. — С. 517—522.

82. *Юмагулов, М. Г.* Линейные гамильтоновы системы: введение в теорию и приложения / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2020. — С. 108.

83. *Журавлёв, В. Ф.* О волчке Лагранжа и маятнике Фуко в наблюдаемых переменных / В. Ф. Журавлёв, А. Г. Петров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 454, № 2. — С. 168—172.

84. *Seyranian, A. P.* Multiparameter stability theory with mechanical applications / A. P. Seyranian, A. A. Mailybaev // World Scientific, New Jersey, 2003. — 2003. — Vol. 13. — P. 403. — (Ser. Stab. Vib. Control Syst., Ser. A).

85. *Чезари, Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. — М.: Мир, 1964. — С. 477.

86. *Арнольд, В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике / В. И. Арнольд // Успехи математических наук. — 1963. — Т. 18, № 6. — С. 91—192.

87. *Зигель, К.* Лекции по небесной механике / К. Зигель, Ю. Мозер. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — С. 384.

88. *Bryntseva, T. A.* Frequency-domain estimates of the sampling interval in multirate nonlinear systems by time-delay approach / T. A. Bryntseva, A. L. Fradkov // International Journal of Control. — 2018. — Янв. — Т. 92, № 9. — С. 1985—1992.

89. *Kamenetskiy, V. A.* Switched systems, Lur'e systems, absolute stability, Aizerman problem / V. A. Kamenetskiy // Autom. Remote Control. — 2019. — Т. 80, № 8. — С. 1375—1389.

90. *Bukov, V.* Вложение и параметризация оптимальных систем / V. Bukov, V. Ryabchenko // Автоматика и телемеханика. — 2003. — Янв.

91. *Лурье, А. И.* Аналитическая механика / А. И. Лурье. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 824.

92. *Леонов, Г. А.* Теория управления / Г. А. Леонов. — СПбГУ, 2006. — С. 236.

93. *Moser, J. K.* Lectures on Hamiltonian systems / J. K. Moser. — Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1968. — P. 60.

94. *Yakubovich, V. A.* Parametric resonance in linear systems / V. A. Yakubovich, V. M. Starzhinskii. — 1987.

95. *Бардин, Б. С.* О конструктивном алгоритме исследования устойчивости положения равновесия периодической гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае резонанса первого порядка / Б. С. Бардин, Е. А. Чекина // Прикладная математика и механика. — 2018. — Т. 82, № 4. — С. 414—426.

96. *Холостова, О. В.* О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы в одном случае кратного параметрического резонанса / О. В. Холостова // Нелинейная динамика. — 2017. — Т. 13, № 4. — С. 477—504.

97. *Маркеев, А. П.* О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона / А. П. Маркеев // Докл. РАН. — 2005. — Т. 402, № 3. — С. 339—343.

98. *Kozlov, V. V.* Formal stability, stability for most initial conditions and diffusion in analytic systems of differential equations / V. V. Kozlov // Regular and Chaotic Dynamics. — 2023. — Т. 28, № 3. — С. 251—264.

99. *Mozer, J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian system / J. Mozer // Comm. Pure Appl. Math. — 1958. — Т. 11, № 1. — С. 81—114.

100. *Березман, А. В.* О вычислениисобственных значений уравнения Матье с комплексным параметром / А. В. Березман, [др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1986. — Т. 26, № 9. — С. 1350—1361.

101. *Болотин, В. В.* Вибрации в технике. Справочник, Т. 1: Колебания линейных систем. / В. В. Болотин. — М.: Машиностроение, 1999. — С. 1999.

102. *Маршал, К.* Задача трех тел / К. Маршал. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — С. 639.

103. *Евтеев, В. П.* Периодические решения в окрестности треугольной точки либрации эллиптической задачи трех тел / В. П. Евтеев, Э. М. Мухамадиев // Прикл. матем. и мех. — 1989. — Т. 53, № 1. — С. 339—341.

104. Orbital stability analysis and photometric characterization of the second Earth Trojan asteroid 2020 XL5 / T. Santana-Ros [и др.] // Nature Communications. — 2022. — Февр. — Т. 13, № 1.

105. *Kovacs, T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies / T. Kovacs // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2013. — Т. 430, № 4. — С. 2755—2760.

106. *Дубошин, Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы / Г. Н. Дубошин. — М.: Наука, 1978.

107. *Zhuravlev, V. F.* Selected problems of Hamiltonian mechanics / V. F. Zhuravlev, A. G. Petrov, M. M. Shunderyuk // Moscow: Lenand. — 2015.