

ОТЗЫВ

официального оппонента Наимова Алижона Набиджановича на диссертационную работу Беловой Анны Сергеевны «Методы теории возмущений в задачах об устойчивости и параметрическом резонансе для автономных и периодических гамильтоновых систем», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

В диссертационной работе А.С. Беловой исследованы математические задачи, актуальные с точки зрения теории и приложений дифференциальных уравнений. Первая группа задач связана с проблемой анализа устойчивости по Ляпунову нулевого решения возмущенных (малым параметром) автономных и неавтономных периодических гамильтоновых систем в критических случаях. Под критическими понимаются такие случаи, когда устойчивость или неустойчивость нулевого решения возмущенной системы не вытекает из свойств и характеристик невозмущенной системы, необходимо учитывать особенности возмущаемых слагаемых. Вторая группа задач, обобщенно называемая задачей о параметрическом резонансе, связана с анализом устойчивости возмущенных периодических гамильтоновых систем в тех случаях, когда возникают определенные резонансные соотношения между периодом системы и собственными частотами невозмущенной системы. Такие резонансные случаи часто встречаются при рассмотрении математических моделей, описываемых гамильтоновыми системами, и требуют дополнительных исследований. Перечисленные задачи весьма актуальны в теории и приложений гамильтоновых систем.

Исследования проблемы устойчивости в критических случаях и задач о параметрическом резонансе ведутся в различных направлениях, где применяются классические методы теории устойчивости, методы теории возмущений, методы теории бифуркаций. В настоящей диссертации предложен новый подход, основанный на методах теории возмущений и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основная идея состоит в нахождении коэффициентов в формулах первого приближения для возмущений критических собственных значений матрицы. Математически обоснованная реализация данной идеи составляет суть диссертации.

В диссертации основными объектами исследования являются зависящие от малого параметра автономные и периодические линейные и нелинейные гамильтоновы системы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы. В первой главе, применяя методы

теории возмущений, выведены формулы первого приближения для собственных значений матриц, зависящих от малого параметра. С помощью выведенных формул сформулированы и доказаны теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения для автономных и периодических систем в критических случаях. Полученные результаты использованы в последующих главах.

Во второй главе получены асимптотические формулы для возмущений критических собственных значений гамильтоновых матриц и исследована устойчивость нулевого решения линейных и нелинейных автономных гамильтоновых систем. Предложена классификация собственных значений гамильтоновой матрицы на собственные значения дефинитные и индефинитные. На основе предложенной классификации в п. 2.1 доказана теорема 2.1, являющаяся аналогом классической теоремы Крейна-Гельфанда-Лидского в случае линейной автономной гамильтоновой системы; здесь приводится авторский вариант доказательства. В п. 2.1 доказаны новые теоремы 2.3-2.5 об асимптотике возмущений критических собственных значений. На основе этих теорем в виде следствий 2.1-2.3 сформулированы основные результаты об устойчивости и неустойчивости линейных автономных гамильтоновых систем. В конце п. 2.1 приведены два приложения основных результатов.

Далее, сопоставляя результаты предыдущих параграфов с известными результатами о нормальных формах гамильтониана, в п. 2.2 сформулированы новые результаты об устойчивости нулевого решения нелинейных автономных гамильтоновых систем. В п. 2.3 приведено приложение результатов п. 2.2 к уравнению Лурье. Следует отметить, что для нелинейных гамильтоновых систем исследование устойчивости нулевого решения без применения нормальных форм гамильтониана не представляется возможным.

В третьей главе получены формулы первого приближения для возмущений дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейной периодической гамильтоновой системы (п. 3.1) в терминах матриц коэффициентов. Затем исследована устойчивость нулевого решения линейных и нелинейных периодических гамильтоновых систем в критических случаях. В п. 3.2 исследована задача о параметрическом резонансе для линейной периодической гамильтоновой системы в условиях простого и комбинационного резонанса. В п. 3.3 исследована устойчивость нулевого решения нелинейной периодической гамильтоновой системы в критических случаях. В п. 3.4 приведены приложения полученных в п. 3.2

результатов к исследованию уравнения Матье. Исследована устойчивость данного уравнения на плоскости параметров (α, ε) в критических случаях. Доказано, что уравнение Матье

1) неустойчиво (устойчиво) при значениях параметров (α, ε) из малой окрестности точки $(0, 0)$, располагающихся слева (справа) от вертикальной оси ε ;

2) неустойчиво при значениях (α, ε) из малой окрестности точки $(1, 0)$, располагающихся на прямых $\varepsilon = m(\alpha - 1)$, где $m > 2$ или $m < -2$;

3) устойчиво для значений (α, ε) , располагающихся на прямых $\varepsilon = m(\alpha - 1)$, где $-2 < m < 2$.

В п. 3.5 приведены приложения полученных в п. 3.2 результатов к плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел. Предложена новая схема построения границ областей значений параметров (μ, ε) , при которых устойчивы треугольные точки либрации.

Таким образом, в диссертации получены новые формулы первого приближения, как для возмущений собственных значений гамильтоновых матриц, так и для возмущений дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем. На основе этих формул предложены и обоснованы аналитические и приближенные методы исследования устойчивости нулевого решения автономных и неавтономных периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра. Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что условия устойчивости сформулированы в терминах свойств матриц коэффициентов системы. Эффективность предлагаемых подходов проиллюстрирована на ряде примеров, в том числе при решении задач о построении границ областей устойчивости гамильтоновых систем в пространстве их параметров.

Можно особо выделить результаты, относящиеся к задаче о параметрическом резонансе для неавтономных периодических гамильтоновых систем. Параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса и возникает при выполнении определенных соотношений между значениями периода и собственной частотой возбуждаемой системы. Получены ряд интересных результатов (леммы 3.3 – 3.7), позволяющих провести детальное исследование задачи о параметрическом резонансе.

Полученные в диссертации научные результаты представляют научный интерес. Последовательно и детально изложены теоретические положения, составляющие суть предложенного подхода и приводящие к новым

результатам об устойчивости решений гамильтоновых систем в критических случаях и о параметрическом резонансе для периодических гамильтоновых систем. Основные результаты строго обоснованы подробными доказательствами. Работа демонстрирует высокий уровень математической культуры автора. Результаты работы опубликованы в рецензируемых журналах, а также апробированы на ряде международных и российских конференциях.

По содержанию и оформлению диссертации можно сделать следующие замечания:

1. В пп. 2.2 и 3.3 полученные результаты об устойчивости нулевого решения нелинейных гамильтоновых систем не оформлены как утверждения (теоремы, леммы и т.п.), что может повлиять на восприятие важности этих результатов.

2. В работе не указаны направления дальнейших исследований по теме диссертации. В порядке пожелания можно отметить, что основные результаты диссертации можно обобщить для приводимых и правильных (по Ляпунову) гамильтоновых систем, а также для гамильтоновых систем в бесконечномерных пространствах. Кроме того, можно расширять исследования, используя матрицы коэффициентов при старших степенях малого параметра.

3. Не отмечено, что системы (1.33) и (1.34) преобразованиями Ляпунова можно привести к системам с постоянными матрицами (теорема Флоке). Этот факт важен с точки зрения обобщения результатов диссертации для приводимых и правильных (по Ляпунову) гамильтоновых систем.

4. В главах диссертации явно не указаны, какие результаты являются основными и в каких работах они опубликованы. В связи с этим отмечу, что А.С. Беловой в соавторстве изданы два учебных пособия по теме диссертации, а это немаловажно в освещении результатов диссертации.

5. В диссертации имеются незначительные опечатки: на стр. 8 – п. 1.1, первый абзац, на стр. 26 – в формуле, идущей перед формулой (1.45), на стр. 43 - в доказательстве утверждения U_1 , на стр. 79 – последняя строка.

6. Доказательства леммы 1.1 на стр. 10 и утверждения U_3 на стр. 43 требуют дополнительных пояснений.

7. Список литературы представлен не в алфавитном порядке.

Приведенные замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом. Считаю, что диссертационная работа А.С. Беловой удовлетворяет критериям, указанным в пунктах 9-11, 13, 14 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением № 842

Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013г. Соискатель заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Вологодский государственный университет» Наимов Алижон Набиджанович

Докторская диссертация защищена по специальности 01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Даю согласие на обработку персональных данных.

Адрес основного места работы: 160000 Россия, г. Вологда, ул. С. Орлова, 6, каб. 226, рабочий тел.: +7(8172)76-91-08.

Электронная почта: naimovan@vogu35.ru .

25 января 2024 года.

А. Н. Наимов

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
Ведущий специалист по персоналу
Управления правового и кадрового
обеспечения