

На правах рукописи



Бжеумихова Оксана Игоревна

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ С ИНВОЛЮТИВНЫМ
ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре алгебры и дифференциальных уравнений Института математики и естественных наук Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова».

Научный руководитель: **Кожанов Александр Иванович,**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Кожевникова Лариса Михайловна,**
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник сектора проведения фундаментальных научных исследований Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»

Ломов Игорь Сергеевич,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет», г. Иркутск.

Защита состоится 28 сентября 2026 г. в 13⁰⁰ часов на заседании объединённого диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте <https://uust.ru>.

Автореферат разослан «_____» _____ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук



Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Появление новых объектов и методов исследования, а также практически неисчерпаемые прикладные возможности, способствуют дальнейшему уверенному и динамичному развитию теории дифференциальных уравнений.

В последние годы среди стремительно развивающихся направлений в области дифференциальных уравнений особое внимание привлекают исследования, посвященные разрешимости дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и краевым задачам для них. Данная теория, то есть теория дифференциальных уравнений, связывающих искомую функцию и ее производные при различных значениях аргумента, начала развиваться сравнительно недавно. Так, только в середине прошлого века появились первые фундаментальные работы как отечественных авторов А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, Н.Н. Красовского, Л.Э. Эльсгольца, так и зарубежных ученых Р. Беллмана и К. Кука, Э. Пинни, А. Халана, посвященные классификации обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, постановке краевых задач для них, а также изложению методов, применяемых для доказательства их разрешимости.

В классе уравнений с отклоняющимся аргументом можно выделить дифференциальные уравнения с аргументами специального вида – с инволюцией. Инволютивным отклонением или инволюцией (также карлемановским сдвигом) называется монотонно убывающее отображение совпадающее со своим обратным, то есть отображение вида $f(x) = f^{-1}(x)$, или, что то же самое, $f^2(x) = f(f(x)) = x$.

Простейшими примерами инволюции являются:

1. Инволюция отражения $f(x) = -x$, где $x \in (-\infty, \infty)$.
2. Инволюция инверсии $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
3. Дробно-линейная инволюция, задаваемая выражением

$$f(x) = \frac{a(b-x)}{cx+a},$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и выполнено условие $a(cb+a) > 0$; при $c = 0$ данное отображение вырождается в линейную инволюцию.

Иные типы инволютивных отклонений и их свойства подробно рассмотрены в работах ^{1, 2}. Следует подчеркнуть, что дифференциальные уравнения, в структуре которых присутствует инволютивное преобразование аргумента, по своей классификации относятся к функционально-дифференциальным уравнениям.

Исторически первые результаты в области дифференциальных уравнений с инволюцией были получены Ч. Бэббиджем еще в 1816 году ³. Значительный вклад в развитие данной тематики внес В. Файт, который в работе 1921 года,

¹ Shisha, O. On Involutions / O. Shisha, C.B. Mehr // Journal of Research of the National Bureau of Standards - B. Mathematics and Mathematical Physics. – 1967. – Vol. 71B, No. 1. – P. 19–20.

² Wiener, J. A Classroom Approach to Involution / J. Wiener, W. Watkins // The College Mathematics Journal. – 1988. – Vol. 19, No. 3. – P. 247–250.

³ Babbage, Ch. An essay towards the calculus of function / Ch. Babbage // Philosophical transactions of the Royal Society of London. – 1816. – Vol. 11. – P. 179–256.

применяя метод последовательных приближений, доказал существование решений обыкновенных дифференциальных уравнений с линейной инволюцией и исследовал их свойства. В дальнейшем, в 1940 году, Л. Зильберштейн получил решение дифференциального уравнения с инволюцией вида: $y' = y(\frac{1}{x})$, $0 < x < \infty$. Интерес к дифференциальным уравнениям с инволюциями возобновил в 1969 году И.Я. Винер в работе ⁴, где были изучены отдельные классы обыкновенных дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента, а также предложен конструктивный подход, позволяющий свести такие уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям более высокого порядка, не содержащим отклонения аргумента.

В последующие десятилетия в указанном направлении были опубликованы серии работ Д. Пшеворской-Ролевич, И.Я. Винера, Ч.П. Гупта, А.Р. Афтабизаде, У.Т. Уоткинса, Д. Пяо и других. Полученные указанными исследователями результаты внесли существенный вклад в развитие теории дифференциальных уравнений, содержащих инволюцию.

В конце прошлого и начале нынешнего столетия закономерно появляются исследования, посвященные уравнениям в частных производных с инволютивным отклонением аргумента. Весомый вклад в развитие теории в обозначенный период внесли работы И.Я. Винера, А.А. Андреева и их учеников. Основные сведения о функционально-дифференциальных уравнениях в частных производных и, в частности, о свойствах уравнений с инволюциями, а также приложения этих уравнений были опубликованы в работах А.Л. Скубачевского ⁵, Дж. Ву ⁶, В. Колмановского и А. Мышкиса ⁷.

К настоящему времени в математической литературе имеются многочисленные работы как российских, так и зарубежных авторов, посвященные проблеме разрешимости дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента. В частности, в работах Т.Ш. Кальменова и А.Ш. Шалданбаева (2010), А. Кабада и Ф.А.Ф. Тодзё (2015), а также в исследованиях А. Ашыралыева с соавторами (2020, 2021), А.А. Сарсенби и Э. Муссиреповой (2022) проведен анализ разрешимости краевых задач и задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих инволюцию. Проблематика разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией, а также анализа свойств их решений, представляет собой одно из актуальных направлений современной теории дифференциальных уравнений, которое подробно освещено в трудах А.П. Хромова (2010), М.Ш. Бурлуцкой и С.А. Чередниковой (2016), У.А. Искаковой и Б.Т. Торбека (2016), А.Ш. Шалданбаева, М.Т. Шоманбаевой и С.Т. Ахметовой (2016), Ф.А.Ф. Тодзё и П. Торреса (2017), А.Г. Баскакова и Н.Б. Усковой (2018), А.А. Сарсенби (2019), К.Ж. Назаровой, Б.Х. Турметова и К.И. Усманова (2020), Ю. Ярка, С. Федущко и П. Веселый (2020), Д.В. Беловой (2021), Б.Х. Турметова и В.В. Карачика (2019, 2021), А. Ашыралыева, С. Ибрагима и Э. Хинкала (2021).

Отдельную группу исследований составляют работы, посвященные эллиптическим, параболическим и гиперболическим уравнениям, в которых значения

⁴ Винер, И.Я. Дифференциальные уравнения с инволюциями / И.Я. Винер // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 6. – С. 1131-1137.

⁵ Skubachevskii, A.L. Elliptic functional differential equations and applications / A.L. Skubachevskii. – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser, 1997.

⁶ Wu, J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / J. Wu. – N.Y.: Springer-Verlag, 1996. – 432 p.

⁷ Kolmanovskii, V. Introduction to the theory and applications of functional differential equations / V. Kolmanovskii, A. Myshkis. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Press, 1999. – 648 p.

производных искомого решения задаются не только в текущих точках, но и в точках, определяющихся некоторой инволюцией. К таким работам относятся исследования А. Ашыралыева и А.М. Сарсенби (2015, 2017, 2021), А.А. Сарсенби (2018), Н. Аль-Салти, М. Кирана, Б.Т. Торебека (2019), Д.Н. Алтынбека, М.А. Муратбековой (2021), Б.Х. Турметова, А.А. Ахмедова, И. Оразова (2021), а также ряд других публикаций. При этом следует отметить, что все рассматриваемые уравнения либо имеют специальный вид, либо же инволюция в них является простейшей, как правило линейной.

Отметим, что в ряде публикаций, а именно в работах М. Кирана и Н. Аль-Салти (2016), М.А. Садыбекова, Г. Дилдабека и М.Б. Ивановой (2018), Р. Тапдигоглу и Б.Т. Торебека (2018), а также в исследованиях ^{8,9,10}, были рассмотрены проблемы разрешимости обратных задач для дифференциальных уравнений, содержащих оператор инволюции. Результаты анализа свойств функций Грина краевых задач для дифференциальных уравнений первого и второго порядков, содержащих инволюцию, изложены в работах А. Кабады и Ф.А.Ф. Тодзё (2014), А.А. Сарсенби, А.М. Сарсенби и Э. Муссиреповой (2019, 2022, 2023).

Изучению спектральных свойств дифференциальных операторов с инволюцией посвящено достаточно много исследований. Спектральные задачи для дифференциальных операторов с инволюцией впервые были рассмотрены в трудах Т.Ш. Кальменова ^{11,12}. Задачи для уравнения первого порядка с инволюцией изучались в работах А.П. Хромова и М.Ш. Бурлуцкой (2011, 2014, 2019), А.Г. Баскакова (2017, 2020), И.А. Криштал и Н.Б. Усковой (2019), а также других авторов. Спектральным задачам для дифференциальных уравнений второго порядка с инволюцией посвящено значительное число работ Л.В. Крицкова, А.М. Сарсенби, А.А. Сарсенби, М.А. Садыбекова и Б.Х. Турметова (2015, 2017-2019, 2021). В работах ^{13, 14, 15} вопросы базисности собственных функций краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка с инволюцией исследовались с использованием функции Грина для изучаемых задач.

В области уравнений в частных производных с операторами дробного порядка приведем лишь некоторые публикации последнего десятилетия, ярко демонстрирующие актуальность данной проблематики. Одно из них затрагивает

⁸Иманбетова, А.Б. Обратные задачи для уравнения колебания балки с инволюцией / А.Б. Иманбетова, А.А. Сарсенби, Б.Н. Сейлбеков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Компьютерные науки. – 2023. – Т. 33, № 3. – С. 452–466. DOI: <http://doi.org/10.35634/vm230305>

⁹Ahmad, B. An Inverse Problem for Space and Time Fractional Evolution Equations with an Involution Perturbation / B. Ahmad, A. Alsaedi, M. Kirane, R.G. Tapdigoglu // Quaestiones Mathematicae. – 2017. – Vol. 40, No. 2. – P. 151-160. DOI: <http://doi.org/10.2989/16073606.2017.1283370>

¹⁰Koshanova, M. On Solvability of Some Inverse Problems for a Pseudoparabolic Equation with Multiple Involution / M. Koshanova, K. Nazarova, B. Turmetov, K. Usmanov // Mathematics. – 2025. – Vol. 13, No. 16:2587. DOI: <https://doi.org/10.3390/math13162587>

¹¹Кальменов, Т.Ш. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа / Т.Ш. Кальменов, У.А. Исакова // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 414, № 2. – С. 168-171.

¹²Кальменов, Т.Ш. О сильной разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа / Т.Ш. Кальменов, У.А. Исакова // Неклассические уравнения математической физики. – 2007. – С. 158–171.

¹³Сарсенби, А.А. Базисность системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией / А.А. Сарсенби, Б.Х. Турметов // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2019. – Т. 29, № 2. – С. 183–196. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190204>

¹⁴Sarsenbi, A.A. Unconditional Basicity of Eigenfunctions System of Sturm-Liouville Operator with an Involutional Perturbation / A.A. Sarsenbi // Bulletin of the Karaganda University: Mathematics series. Special issue. – 2018. – Vol. 91, No. 3. – P. 117-127.

¹⁵Sarsenbi, Abdissalam On Eigenfunctions of the Boundary Value Problems for Second Order Differential Equations with Involution / Abdissalam Sarsenbi, Abdizhahan Sarsenbi // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, No. 10: 1972. – P. 1-9. DOI: <http://doi.org/10.3390/sym13101972>

краевые задачи для дробного уравнения Гельмгольца с оператором Герасимова-Капуто и с инволютивным отклонением аргумента, что отражено в работе М. Кирана, Б.Х. Турметова и Б.Т. Торебека ¹⁶. Анализ обратных задач для параболических уравнений дробного порядка с инволюцией представлен в работах Б.Т. Торебека и Р. Тапдыгоглу (2017), а также М. Кирана, М.А. Садыбекова и А.А. Сарсенби (2019).

Прямые и обратные начально-краевые задачи для дробного по времени уравнения теплопроводности с инволюцией, сформулированные с использованием как локальных, так и нелокальных граничных условий, изучены в работах Н. Аль-Салти, С. Кербала и М. Кирана (2019), а также Б.Ж. Кадиркулова и М.А. Жалилова (2022). В работе Д. Серикбаева ¹⁷ исследуется задача Коши для дробного по времени псевдопараболического уравнения с оператором инволюции, а так же изучается обратная задача по восстановлению правой части из переопределенного конечного условия.

Вопросы однозначной разрешимости нелокальной задачи для нелокального аналога смешанного парабола-гиперболического уравнения с обобщенным оператором Римана—Лиувилля и инволюцией по пространственной переменной рассмотрены Б.Ж. Кадиркуловым и Г.А. Каюмовой (2022). Краевые задачи дифференциальных уравнений четвертого порядка с оператором дробного дифференцирования Капуто и инволютивным отклонением аргумента исследованы в работе М. Кирана и А.А. Сарсенби ¹⁸. Следует также отметить работу Л.М. Энеевой ¹⁹, в которой исследуется начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с производной дробного порядка в смысле Римана—Лиувилля, содержащего линейную инволюцию в подчиненном слагаемом.

Исследование дифференциальных уравнений, в которых присутствуют операторы с инволюцией, представляет значительный научный интерес в силу того, что подобные операторы естественным образом возникают при анализе ряда геометрических задачах, находят применение в теории фильтрации, используются в задачах прогнозирования и анализа субгармонических колебаний. Кроме того, инволюция отражения играет ключевую роль в моделировании обращения времени в рамках классической статистической механики неравновесных процессов, а также находит применение в суперсимметричной квантовой механике.

Таким образом, с каждым днем усиливается потребность в проведении исследований, приближенных к процессам, проходящим на практике, то есть в изучении уравнений с частными производными и с инволюцией. Этот факт в совокупности с обобщениями теоретического характера и формирует представление об актуальности результатов, приведенных в настоящей работе.

Степень разработанности темы исследования. К настоящему времени в научной литературе имеется немало работ, посвященных исследованию разрешимости уравнений с инволютивным отклонением аргумента, а также кра-

¹⁶ Kirane, M. A Nonlocal Fractional Helmholtz Equation / M. Kirane, B.Kh. Turmetov, B.T. Torebek // Fractional Differential Calculus. – 2017. – Vol. 7, No. 2. – P. 225–234. DOI: <http://doi.org/10.7153/fdc-2017-07-08>

¹⁷ Serikbaev, D. Inverse Problem for Fractional Order Pseudo-Parabolic Equation with Involution / D. Serikbaev // Уфимск. матем. журн. – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 122–138.

¹⁸ Kirane, M. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative / M. Kirane, A.A. Sarsenbi // Fractal Fract. – 2023. – Vol. 7, No. 2:131. – P. 1–12. DOI: <http://doi.org/10.3390/fractalfract7020131>

¹⁹ Энеева, Л.М. Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией / Л.М. Энеева // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2024. – Т. 48, № 3. – С. 43–55.

евых задач для таких уравнений. Вместе с тем подавляющее большинство существующих исследований сосредоточено на одномерных постановках для уравнений с постоянными коэффициентами и линейной инволюцией. Вследствие этого теория уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента остается недостаточно развитой, а в случае уравнений с общей инволюцией находится лишь на начальной стадии формирования.

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертационной работы является исследование вопросов разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных, содержащих инволютивное отклонение аргумента.

Для достижения поставленной цели в работе предполагается решение следующих задач:

1. Изучить влияние инволютивных слагаемых, входящих в дифференциальные уравнения, на корректность задачи Коши и краевых задач с различными типами условий.
2. Установить условия разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка с инволютивным преобразованием аргумента в младших членах.
3. Исследовать вопросы разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка с инволютивным отклонением аргумента, входящим в старшие производные.

Научная новизна работы состоит в развитии методов исследования краевых задач для уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента.

В работе получены новые результаты о разрешимости краевых задач, включая задачи с интегральными условиями, для уравнений с общей инволюцией в младших членах и старших производных. Показано, что наличие инволютивных слагаемых существенно влияет на корректность задачи Коши и на свойства единственности и неединственности решений различных классов краевых задач.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационное исследование имеет теоретическую направленность и ориентировано на развитие теории дифференциальных уравнений с инволютивным преобразованием аргумента и дополнение существующих исследований в данной области. Полученные в работе результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении уравнений в частных производных с инволюцией, а также при решении прикладных задач, математические модели которых описываются уравнениями рассматриваемого типа.

Методология и методы исследования. При доказательстве разрешимости задач, рассматриваемых в диссертационной работе, применялся комплекс математических методов и подходов. В работе задействованы метод продолжения по параметру и метод регуляризации в сочетании с априорными оценками, спектральная теория, а также методы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и математического анализа, что позволило обеспечить строгость и полноту полученных результатов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Установлено, что наличие слагаемых с инволютивным отклонением аргумента в дифференциальных уравнениях оказывает существенное влияние

на корректность задачи Коши и задач с нелокальными условиями, а также на вопросы единственности и неединственности решений краевых задач для уравнений в частных производных.

2. Получены достаточные условия разрешимости нелокальных и классических краевых задач для линейных параболических и эллиптических уравнений второго порядка с общим инволютивным отклонением аргумента в младших членах уравнений.
3. Доказана разрешимость краевых задач в пространствах С.Л. Соболева для эллиптических и параболических уравнений с переменными коэффициентами при наличии общего инволютивного отклонения аргумента в старших производных.
4. Получены достаточные условия разрешимости начально-краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами и инволютивным отклонением аргумента в старших производных.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается применением строгих и апробированных методов исследования.

Апробация работы. Основные научные результаты диссертационного исследования неоднократно докладывались и обсуждались на международных научных конференциях и специализированных научных семинарах, что обеспечило их всестороннюю научную апробацию.

Результаты работы были представлены на следующих международных научных конференциях: IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики» (Нальчик, 2018); Международной конференции, посвященной 70-летию А.Х. Журтова «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем» (Нальчик, 2019); III Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021)» (Иркутск, 2021); VI Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2021); Международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2022); Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной И.Г. Петровскому (Москва, 2022); Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 70-летию А.А. Махнева (Нальчик, 2023); X Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти В.В. Филиппова (Якутск, 2023); Международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент, 2023); Российско-Китайской конференции «Differential and Difference Equations» (Новосибирск, 2023); Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2023); VI Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2024)» (Иркутск, 2024); Международной научной конференции «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа» (Нальчик, 2025); Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной И.Г. Петровскому (Москва, 2025);

Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 90-летию В.А. Белоногова (Нальчик, 2025); III Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвященной 80-летию В.Н. Врагова (Улан-Удэ, 2025).

Кроме того, результаты работы докладывались на следующих научных семинарах: межрегиональном научном семинаре КБГУ «Алгебра и динамические системы» им. А.А. Керефова (Нальчик, 2022, 2023, 2025), всероссийском научном семинаре «Неклассические задачи математической физики» (Якутск, 2022), научно-исследовательском семинаре ИПМА КБНЦ РАН по современному анализу, информатике и физике (Нальчик, 2025), а также на научном семинаре «Дифференциальные и разностные уравнения» (Новосибирск, 2025).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования нашли отражение в 19 опубликованных работах [1–19], включая 4 статьи, напечатанные в журналах из списка ВАК и/или индексируемых в международных базах данных Scopus или Web of Science [1–4], а также в 15 тезисах докладов [5–19].

Личный вклад автора. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором диссертации лично. В работах [2–4], выполненных в соавторстве, научному руководителю А.И. Кожанову принадлежат постановки рассматриваемых задач. Кроме того, в работе [2] ему принадлежит общая стратегия доказательства теорем существования и предложены примеры задач. В статье [3] А.И. Кожанову принадлежит идея использования теорем 1–6 для исследования краевых задач для параболических и псевдопараболических уравнений, а также сформулированы заключительные замечания. В работе [4] А.И. Кожанову принадлежит общая схема метода доказательства разрешимости, а также им были уточнены и скорректированы отдельные этапы проводимых рассуждений. Автором лично проведено подробное доказательство всех сформулированных теорем, получены необходимые априорные оценки и обоснована разрешимость краевых задач.

Благодарности. Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Александру Ивановичу Кожанову – за научное руководство, постоянное внимание и всестороннюю поддержку на всех этапах работы над диссертацией. Отдельная признательность выражается за помощь в постановке и уточнении исследовательских задач, а также за глубокие и содержательные обсуждения полученных результатов, существенно повлиявшие на формирование итоговых выводов диссертации.

Особую благодарность автор выражает кандидату физико-математических наук, доценту Вадиму Николаевичу Лесеву за ценные рекомендации, профессиональные советы и поддержку, оказавшие значимую роль в подготовке и завершении диссертационной работы.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 111 страницах и включает введение, три главы, объединяющие восемь разделов, заключение, а также список использованных источников, содержащий 162 наименования.

Основное содержание работы

Во **введении** диссертационного исследования последовательно раскрыта актуальность выбранной темы и обоснована ее научная и практическая значи-

мость. Представлен аналитический обзор ключевых отечественных и зарубежных работ, отражающих современное состояние изучаемой проблематики, что позволяет уточнить место проведенного исследования в системе существующих подходов. Дано целостное описание логики и содержания работы, раскрывающее структуру исследования и взаимосвязь его разделов. Сформулированы основные результаты и положения, выносимые на защиту, в которых зафиксирован научный вклад автора и обобщены полученные выводы.

В **первой главе** показано, что наличие слагаемых с инволютивным отклонением аргумента в обыкновенных дифференциальных уравнениях оказывает существенное влияние на корректность задачи Коши и задач с нелокальными условиями, а также на вопросы единственности и неединственности решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

В частности, **раздел 1.1** посвящен анализу влияния слагаемых с инволютивным отклонением аргумента в дифференциальных уравнениях на корректность задачи Коши.

Пусть $t \in (0, T)$, где $0 < T < +\infty$, а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ – фиксированные числа.

Задача 1. Найти функцию $y(t)$, являющуюся на интервале $(0, T)$ решением уравнения

$$y'(t) + \lambda y(t) + \mu y(T - t) = 0, \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$y(0) = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим вначале случай $\lambda > 0$. Пусть $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность всех положительных чисел z , для которых выполняется равенство

$$z + \lambda \operatorname{tg}(Tz) = 0. \quad (3)$$

Положим $\mu_m = \sqrt{z_m^2 + \lambda^2}$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Пусть λ – фиксированное положительное число. Тогда:

- (1) при $|\mu| \leq \lambda$ задача Коши (1), (2) имеет только тождественно нулевое решение;
- (2) если $\mu = \mu_m$ и $m = 2l$, либо $\mu = -\mu_m$ и $m = 2l - 1$, где $l \in \mathbb{N}$, то задача Коши (1), (2) имеет бесконечно много ненулевых решений;
- (3) при $\mu > \lambda$, $\mu \neq \mu_m$ для всех $m = 2l$, а также при $\mu < -\lambda$, $\mu \neq -\mu_m$ для всех $m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$, задача Коши (1), (2) имеет только тождественно нулевое решение.

Рассмотрим теперь случай $\lambda \leq 0$. Приведем вначале одно вспомогательное утверждение.

Определим функцию $h(z)$ следующим образом:

$$h(z) = z + \frac{\lambda(1 - e^{-2zT})}{1 + e^{-2zT}}.$$

Утверждение 1. Пусть λ – фиксированное отрицательное число такое, что $|\lambda|T > 1$. Тогда уравнение $h(z) = 0$ имеет на промежутке $(0, +\infty)$ ровно одно решение z^* .

Обозначим через $\bar{z}_m$ положительные корни уравнения (3) при $\lambda < 0$ и будем считать, что последовательность $\{\bar{z}_m\}_{m=1}^{\infty}$ упорядочена по возрастанию. Положим

$$\mu^* = \frac{2\lambda}{e^{z^*T} + e^{-z^*T}}, \quad \bar{\mu}_m = \sqrt{\bar{z}_m^2 + \lambda^2}, \text{ где } m \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. Пусть λ – фиксированное число из промежутка $(-\infty, 0]$. Тогда при выполнении одного из следующих условий:

- (1) $|\lambda|T > 1$, $\mu = \mu^*$;
- (2) $\lambda = -\frac{1}{T}$, $\mu = -\frac{1}{T}$;
- (3) $\lambda < 0$, $\mu = \bar{\mu}_m$ для $m = 2l$, $\mu = -\bar{\mu}_m$ для $m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$;
- (4) $\lambda = 0$, $\mu = \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, 2, \dots$,

задача Коши (1), (2) имеет бесконечно много ненулевых решений.

Теорема 3. Пусть λ – фиксированное число из промежутка $(-\infty, 0]$. Тогда при выполнении одного из следующих условий:

- (1) $\lambda < 0$, $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| \neq \bar{\mu}_m$;
- (2) $\lambda < 0$, $\mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \neq \frac{1}{2T} \ln \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$;
- (3) $\lambda = -\frac{1}{T}$, $\mu = \frac{1}{T}$;
- (4) $\lambda = 0$, $\mu \neq \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, 2, \dots$,

задача Коши (1), (2) имеет только тождественно нулевое решение.

В разделе 1.2 показано влияние слагаемого с инволюцией в уравнении (1) на наличие и отсутствие собственных значений и собственных функций следующих нелокальных краевых задач:

Задача 2. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(0) = y(T)$.

Задача 3. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(0) = -y(T)$.

Задача 4. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\int_0^T N(t)y(t) dt = 0.$$

Здесь $N(t)$ – заданная функция, определенная на отрезке $[0, T]$. Введем обозначения:

$$\mu_{m,1} = \left[\lambda^2 + \left(\frac{2\pi m}{T} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \mu_{m,2} = \left[\lambda^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{T} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ где } m \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. Пусть λ – фиксированное число. Тогда нелокальная задача 2 имеет бесконечно много ненулевых решений, если выполняется одно из следующих условий:

(1) $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| = \mu_{m,1}$, $m \in \mathbb{N}$;

(2) $\mu = -\lambda$.

Для всех остальных чисел μ нелокальная задача 2 имеет только тождественно нулевое решение.

Теорема 5. Пусть λ – фиксированное число. Тогда если $\mu^2 - \lambda^2 > 0$ и $|\mu| = \mu_{m,2}$, $m \in \mathbb{N}$, то нелокальная задача 3 имеет бесконечно много ненулевых решений. Для всех остальных чисел μ нелокальная задача 3 имеет только тождественно нулевое решение.

Теорема 6. Пусть λ – фиксированное число и выполнено одно из следующих условий:

(1) $N(t)$ – чётная, не тождественно нулевая периодическая функция, определённая при $t \in (-\infty, \infty)$ и имеющая период $\frac{T}{2}$;

(2) $N(t)$ – нечётная, не тождественно нулевая периодическая функция, определённая при $t \in (-\infty, \infty)$ и имеющая период $\frac{T}{2}$.

Тогда существует бесконечно много чисел μ таких, что для каждого из них задача 4 имеет ненулевые решения.

Замечание 1. Фактически условием существования ненулевых решений нелокальной задачи 4 является условие

$$\int_0^T N(t) \cos(\gamma t) dt = 0, \quad \int_0^T N(t) \sin(\gamma t) dt = 0.$$

Теорема 6, в свою очередь, приводит примеры функций $N(t)$, для которых это условие выполняется.

В разделе 1.3, опираясь на результаты, полученные в разделах 1.1 и 1.2, представлены сведения о разрешимости краевых задач для параболических и псевдопараболических уравнений, содержащих операторы с инволюцией.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей Γ (для простоты – бесконечно дифференцируемой). Обозначим через $Q = \Omega \times (0, T)$ цилиндр с боковой поверхностью $S = \Gamma \times (0, T)$, где $0 < T < +\infty$.

Задача 5. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + \lambda u(x, t) + \mu u(x, T - t) = 0,$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} u(x, t)|_S &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$, а числа $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ считаются заданными.

Опираясь на доказанные в предыдущем разделе теоремы 1-3, можно непосредственно установить существование как нулевых, так и ненулевых решений задачи 5.

Если в изучаемой задаче начальное условие $u(x, 0) = 0$ заменить нелокальным условием $u(x, 0) = u(x, T)$, или же условием $u(x, 0) = -u(x, T)$, или же интегральным условием

$$\int_0^T N(t)u(x, t) dt = 0,$$

то с помощью теорем 4-6 нетрудно будет получить результаты о существовании ненулевых решений соответствующих нелокальных задач.

Аналогичным образом можно провести исследование существования только нулевых или же ненулевых решений для псевдопараболических уравнений

$$u_t(x, t) - \alpha \Delta u(x, t) - \beta \Delta u_t(x, t) + \lambda u(x, t) + \mu u(x, T - t) = 0,$$

где α, β – действительные положительные числа.

Завершающий раздел главы, **1.4**, посвящен исследованию влияния слагаемого с инволюцией на свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения, в частности на вопросы их единственности и возможной неединственности, что имеет важное значение для теории дифференциальных уравнений с инволюцией.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей Γ . В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, рассмотрим следующее уравнение с линейной инволюцией:

$$u_{tt}(x, t) + \Delta u(x, t) + \lambda u(x, t) + \mu u(x, T - t) = 0, \quad (5)$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$, а числа $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Задача 6. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (5) в области Q , удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} u(x, t) |_S &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

где $S = \Gamma \times (0, T)$.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$ есть последовательность собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа с упорядоченной по убыванию последовательностью собственных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$, ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$. Далее, обозначим через $\mu_{k,m}$ числа $\mu_{k,m} = -\lambda - \gamma_k + \frac{m^2 \pi^2}{T^2}$, где $k, m \in \mathbb{N}$.

Основной результат данного раздела сформулирован в виде двух теорем, при выполнении условий которых на числа μ и λ , задача 6 имеет бесконечно много ненулевых решений или лишь тождественно нулевые решения.

Теорема 7. Пусть λ – фиксированное число из промежутка $(-\infty, -\gamma_1)$. Тогда:

(1) если $|\mu| < -\lambda - \gamma_1$, то задача 6 имеет только тождественно нулевое решение;

- (2) если $\mu \geq -\lambda - \gamma_1$ и $\mu = \mu_{k,m}$ для $t = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, то задача 6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же $\mu \neq \mu_{k,m}$, то задача 6 имеет только тождественно нулевое решение;
- (3) если $\mu \leq \lambda + \gamma_1$ и $\mu = -\mu_{k,m}$ для $t = 2l$, $l, k \in \mathbb{N}$, то задача 6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же $\mu \neq -\mu_{k,m}$, то задача 6 имеет только тождественно нулевое решение.

Теорема 8. Пусть λ – фиксированное число из промежутка $[-\gamma_1, \infty)$. Тогда:

- (1) если $\mu > \lambda + \gamma_1$ и $\mu = \mu_{k,m}$ для $t = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, то задача 6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же $\mu \neq \mu_{k,m}$ для $t = 2l - 1$, то задача 6 имеет только тождественно нулевое решение;
- (2) если $\mu < -\lambda - \gamma_1$ и $\mu = -\mu_{k,m}$ для $t = 2l$, $l, k \in \mathbb{N}$, то задача 6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же $\mu \neq -\mu_{k,m}$ для $t = 2l$, то задача 6 имеет только тождественно нулевое решение;
- (3) если $|\mu| < \lambda + \gamma_1$ и $\mu = \mu_{k,m}$ для $t = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, либо $\mu = -\mu_{k,m}$ для $t = 2l$, $l, k \in \mathbb{N}$, то однородная задача 6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же $\mu \neq \mu_{k,m}$ для $t = 2l - 1$ и $\mu \neq -\mu_{k,m}$ для $t = 2l$, то задача 6 имеет только тождественно нулевое решение;
- (4) если $\lambda = -\gamma_k + \frac{\pi^2 m^2}{2T^2}$ и $\mu = \frac{\pi^2 m^2}{2T^2}$ для $t = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, либо $\mu = -\frac{\pi^2 m^2}{2T^2}$ для $t = 2l$, $l, k \in \mathbb{N}$, то задача 6 имеет бесконечно много ненулевых решений;
- (5) если $\lambda = -\gamma_k$ и $\mu = 0$, $k \in \mathbb{N}$, то задача 6 только тождественно нулевое решение.

Во **второй главе** диссертации исследуется широкий круг краевых задач для линейных уравнений в частных производных, рассматриваемых в цилиндрической области. Устанавливаются условия существования и единственности решений как для классических, так и для нелокальных постановок, включая задачи с интегральными условиями, для линейных параболических и эллиптических уравнений, содержащих общую инволюцию в младших членах.

В частности, **раздел 2.1** посвящён исследованию нелокальных задач, в том числе с интегральными условиями, для линейных параболических уравнений с общей инволюцией в младших членах.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой, для простоты бесконечно дифференцируемой, границей Γ . Обозначим через $Q = \Omega \times (0, T)$ цилиндр конечной высоты T , а через $S = \Gamma \times (0, T)$ – его боковую поверхность. Далее, пусть Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, $N(t)$ и $f(x, t)$ считаются заданными и определёнными для всех $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$. Кроме того, пусть $\varphi(t)$ – инволюция, определенная на отрезке $[0, T]$, а γ – фиксированное вещественное число.

В области Q были исследованы следующие задачи:

Задача 7. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + a(x, t)u(x, t) + b(x, t)u(x, \varphi(t)) = f(x, t) \quad (6)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \gamma u(x, T), \quad x \in \Omega.$$

Задача 8. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (6) и такую, что для нее выполняются условия (7), а также условие

$$\int_0^T N(t)u(x, t) dt = 0, \quad x \in \Omega.$$

Пусть $\eta(x)$ есть некоторая функция из пространства $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Имеет место следующее неравенство

$$\int_{\Omega} \eta^2(x) dx \leq d_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \eta_{x_i}^2 dx,$$

в котором число d_0 определяется лишь областью Ω (см. ²⁰).

Теорема 9. Пусть выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} a(x, t) &\in C(\overline{Q}), \quad b(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad \varphi(t) \in C^1([0, T]), \\ a(x, t) &\geq 0 \text{ при } (x, t) \in \overline{Q}, \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(t) \leq -\varphi_0 < 0 \text{ при } t \in [0, T], \\ \frac{1}{d_0} + \min_{\overline{Q}} a(x, t) - \sqrt{\varphi_1} \max_{\overline{Q}} |b(x, t)| &> 0, \quad |\gamma| < 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ нелокальная задача 7 имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$.

Положим

$$N_1(x, t) = \frac{1}{N(0)} [a(x, t)N(t) + b(x, \varphi(t))N(\varphi(t))\varphi'(t) - N'(t)],$$

$$\overline{N}_1 = \max_{\overline{\Omega}} \left(\int_0^T N_1^2(x, t) dt \right).$$

Теорема 10. Пусть для функций $a(x, t)$, $b(x, t)$, $\varphi(t)$ и $N(t)$ выполнены условия (8) и $N(0) \neq 0$, а также условия:

$$\begin{aligned} a(x, t) &\in C(\overline{Q}), \quad b(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad N(t) \in C^1([0, T]), \quad \varphi(t) \in C^1([0, T]), \\ \frac{1}{d_0} + \min_{\overline{Q}} a(x, t) - \overline{N}_1 - \sqrt{\varphi_1} \max_{\overline{Q}} |b(x, t)| &> 0, \\ \sqrt{2} |N(T)| &< |N(0)|. \end{aligned}$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ нелокальная краевая задача 8 имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$.

²⁰ Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

В разделе 2.2 в цилиндрической области Q рассмотрено уравнение

$$u_{tt}(x, t) + \Delta u(x, t) + a(x, t)u(x, t) + b(x, t)u(x, \varphi(t)) = f(x, t), \quad (9)$$

где Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, $N(t)$ и $f(x, t)$ – заданные, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $\varphi(t)$ – инволюция, определенная на отрезке $[0, T]$.

Для уравнения (9) в области Q были исследованы следующие задачи:

Задача 9. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (9) в области Q , удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} u(x, t)|_S &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Задача 10. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (9) в области Q , удовлетворяющее (10), а также условиям:

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Задача 11. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (9) в области Q , удовлетворяющее (10), а также условиям:

$$u(x, 0) = \alpha u(x, T), \quad u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

где α – действительное число.

Теорема 11. Пусть выполняются следующие условия:

$$a(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad b(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad \varphi(t) \in C^1([0, T]), \quad (11)$$

$$a(x, t) < 0 \text{ при } (x, t) \in \bar{Q}, \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(t) \leq -\varphi_0 < 0 \text{ при } t \in [0, T], \quad (12)$$

$$\frac{1}{d_0} + \frac{2}{T^2} - \min_{\bar{Q}} a(x, t) - \sqrt{\varphi_1} \max_{\bar{Q}} |b(x, t)| > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ задача 9 имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Теорема 12. Пусть выполняются условия (11), (12), а также условие

$$\frac{1}{d_0} - \min_{\bar{Q}} a(x, t) - \sqrt{\varphi_1} \max_{\bar{Q}} |b(x, t)| > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ задача 10 имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Пусть α_1 и α_2 фиксированные числа такие, что

$$1 - \alpha^2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_1 = \max(1 - \alpha^2, 0), \quad \alpha_2 = \alpha_1 - (1 - \alpha^2).$$

Теорема 13. Пусть выполняются следующие условия:

$$a(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad a(x, y) \leq -a_0 < 0 \text{ при } (x, t) \in \bar{Q},$$

$$\begin{aligned}
b(x, t) &\in C(\overline{Q}), \quad \sqrt{t}|b(x, t)| \leq b_0\sqrt{\varphi(t)}, \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}, \\
\varphi(t) &\in C^1([0, T]), \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(t) \leq -\varphi_0 < 0 \text{ при } t \in [0, T], \\
\frac{\alpha_2^2}{2T} + \frac{2\alpha_2}{T} + 2Tb_0\sqrt{\varphi_1} &< 2Ta_0 + \frac{T}{d_0},
\end{aligned}$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ задача 11 имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

В **третьей главе** диссертационной работы проводится исследование разрешимости краевых задач в пространствах С.Л. Соболева для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, в которых инволютивное отклонение аргумента присутствует в старших производных. Полученные результаты охватывают как невырожденные, так и вырожденные случаи.

В **разделе 3.1** изучаются краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений с общей инволюцией в старших производных; получены результаты об их разрешимости в невырожденном и вырожденном случаях.

Пусть Ω – интервал $(0, 1)$ оси Ox , $Q = \Omega \times (0, T)$ – прямоугольник конечной высоты T . Далее, пусть $\varphi(x)$ – заданная инволюция отрезка $[0, 1]$, а $a(x, t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ – заданные, определенные на множестве $\overline{Q}$ функции.

Задача 12. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) - a(x, t)u_{xx}(\varphi(x), t) + c(x, t)u(x, t) = f(x, t) \quad (13)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (14)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (15)$$

Задача 13. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{tt}(x, t) + u_{xx}(x, t) + a(x, t)u_{xx}(\varphi(x), t) - c(x, t)u(x, t) = f(x, t) \quad (16)$$

и такую, что для нее выполняются условия (14) и (15), а также условие

$$u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Положим

$$a_1(x, t) = 1 - a(x, t)a(\varphi(x), t),$$

и пусть выполняется условие

$$a_1(x, t) \geq \bar{a}_1 > 0 \text{ при } (x, t) \in \overline{Q}. \quad (17)$$

Заметим, что при выполнении условия (17) уравнения (13) и (16) будут уравнениями без вырождения; если же условие (17) нарушается, то уравнения (13) и (16) будут вырождающимися, соответственно, параболическим и эллиптическим уравнениями с инволюцией.

Теорема 14. Пусть выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} a(x, t) &\in C^1(\overline{Q}), \quad c(x, t) \in C(\overline{Q}), \\ \varphi(x) &\in C^1(\overline{\Omega}), \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(x) \leq -\varphi_0 < 0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \\ \sqrt{\varphi_1} \max_{\overline{Q}} |a(x, t)| &< 1, \end{aligned} \quad (18)$$

а также условие (17). Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ краевая задача 12 имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$.

Теорема 15. Пусть выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} a(x, t) &\in C(\overline{Q}), \quad c(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \\ \varphi(x) &\in C^1(\overline{\Omega}), \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(x) \leq -\varphi_0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \\ c(x, t) &\geq 0, \quad c_{xx}(x, t) \leq 0 \text{ при } (x, t) \in \overline{Q}, \end{aligned}$$

а также условия (17) и (18). Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(Q)$ краевая задача 13 имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Предположим, что в уравнениях (13) и (16) функция a является функцией только переменной t , а условие (17) заменено неравенством

$$|a(t)| \leq 1 \text{ при } t \in [0, T]. \quad (19)$$

Теорема 16. Пусть выполняются условие (19), а также следующие условия:

$$\begin{aligned} a(t) &\in C^1([0, T]), \quad c(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \\ \varphi(x) &\in C^1(\overline{\Omega}), \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(x) \leq -\varphi_0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \\ \sqrt{\varphi_1} \max_{[0, T]} |a(t)| &\leq 1, \quad \varphi_1 \max_{[0, T]} |a(t)| \leq 1. \end{aligned}$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$ краевая задача 12 имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$, $u_t(x, t) \in L_2(Q)$.

Теорема 17. Пусть выполняются условие (19), а также следующие условия:

$$\begin{aligned} a(t) &\in C^2([0, T]), \quad c(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \\ \varphi(x) &\in C^1(\overline{\Omega}), \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(x) \leq -\varphi_0 < 0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \\ \sqrt{\varphi_1} \max_{[0, T]} |a(t)| &\leq 1, \quad \varphi_1 \max_{[0, T]} |a(t)| \leq 1, \\ c(x, t) &\geq 0, \quad c_{xx}(x, t) \leq 0 \text{ при } (x, t) \in \overline{Q}. \end{aligned}$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$ краевая задача 13 имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$, $u_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x, t) \in L_2(Q)$.

Раздел 3.2 посвящен исследованию разрешимости начально-краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка с инволюцией в старших производных.

Пусть Ω – интервал $(0, 1)$ оси Ox , $Q = \Omega \times (0, T)$ — прямоугольник конечной высоты T , и пусть функции $a(x, t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ определены на множестве $\overline{Q}$.

Задача 14. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - a(x, t)u_{xx}(1 - x, t) + c(x, t)u(x, t) = f(x, t) \quad (20)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (21)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (22)$$

Сформулируем результат о разрешимости изучаемой задачи в невырожденном случае.

Теорема 18. Пусть выполняются следующие условия:

$$a(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad a_t(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x, t) \in C(\overline{Q});$$

$$|a(x, t)| \leq a_0 < 1, \quad a(x, t) = a(1 - x, t) \text{ при } (x, t) \in \overline{Q}.$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$ и $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, краевая задача 14 имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда уравнение (20) является вырождающимся.

Теорема 19. Пусть выполняются следующие условия:

$$a(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad a_{xx}(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad |a(x, t)| \leq 1,$$

$$a(1 - x, t) = a(x, t) \text{ при } (x, t) \in \overline{Q},$$

$$c(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c_{xx}(x, t) \in C(\overline{Q}).$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f_{xt}(x, t) \in L_2(Q)$ и $f(0, t) = f(1, t) = 0$ при $t \in [0, T]$ краевая задача 14 имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in W_2^2(Q)$, $u_x(x, t) \in W_2^2(Q)$.

Предположим, что $a(x, t) \equiv a(t)$, а α является фиксированным вещественным числом. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу.

Задача 15. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{tt}(x, t) - a(t)u_{tt}(1 - x, t) - [1 - a^2(t)]u_{xx}(x, t) + \\ + \alpha u_t(x, t) + c(x, t)u(x, t) = f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (21) и (22).

Для задачи 15 справедлива следующая теорема.

Теорема 20. Пусть выполняются следующие условия:

$$a(t) \in C^1([0, T]), \quad |a(t)| \leq 1,$$

$$2\alpha - 3|a'(t)| \geq \alpha_0 > 0, \quad a(t)a'(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T],$$

$$c(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad c_{xx}(x, t) \in C(\overline{Q}).$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in W_2^1(Q)$, $f_{xx}(x, t) \in L_2(Q)$ и $f(0, t) = f(1, t) = 0$ при $t \in [0, T]$, краевая задача 15 имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Заключение

В диссертационной работе проведено систематическое исследование краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента. Основное внимание уделено анализу влияния инволюции на корректность постановок задач, а также на свойства их решений. Рассмотрены как классические, так и нелокальные постановки, включая задачи с интегральными условиями, что позволило охватить широкий круг математических моделей, выходящих за рамки традиционной теории дифференциальных уравнений.

В первой главе исследованы обыкновенные дифференциальные уравнения с инволютивным отклонением аргумента. Установлено, что наличие инволютивных слагаемых может приводить к нарушению корректности задачи Коши и задач с нелокальными условиями, а также существенно влиять на вопрос единственности решений классических краевых задач. Показано, что инволютивное отклонение аргумента может являться источником неединственности решений, что подчёркивает принципиальные отличия рассматриваемого класса уравнений от классических дифференциальных уравнений без отклонения аргумента.

Во второй главе диссертации проведено исследование разрешимости нелокальных и классических краевых задач для линейных параболических и эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрической области. Особенностью рассматриваемых уравнений является наличие общей инволюции в младших членах. Для всех указанных постановок строго доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений в соответствующих пространствах С.Л. Соболева – то есть решений, обладающих всеми обобщёнными производными, входящими в соответствующее уравнение. При этом продемонстрирована возможность исследования задач в многомерных областях, что существенно расширяет область применимости полученных результатов.

В третьей главе получены достаточные условия разрешимости краевых задач для параболических и эллиптических уравнений, а также начально-краевых задач для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, в которых инволютивное отклонение аргумента входит в старшие производные. Рассмотрены как невырожденные, так и вырожденные случаи. Установленные результаты существенно расширяют класс корректно разрешимых задач и демонстрируют устойчивость применяемых методов исследования при усложнении структуры уравнений и постановок задач.

Полученные в диссертации результаты формируют теоретическую основу для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента и могут быть использованы как при углублённых теоретических исследованиях, так и при моделировании и анализе прикладных задач, сводящихся к уравнениям указанного типа.

Публикации автора по теме диссертации

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

1. Бжеумихова, О.И. Эллиптические уравнения с инволютивным отклонением аргумента / О.И. Бжеумихова // Владикавказский математический журнал. – 2025. – Т. 27, № 3. – С. 5-20. DOI: <https://doi.org/10.46698/i3311-3054-4734-g>.
2. Кожанов, А.И. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений второго порядка с инволюцией в старших членах / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // Математические заметки СВФУ. – 2025. – Т. 32, № 2. – С. 10-23. DOI: <https://doi.org/10.25587/2411-9326-2025-2-10-23>.
3. Кожанов, А.И. Собственные функции и собственные числа дифференциальных уравнений с инволюцией / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // Сибирский математический журнал. – 2024. – Т. 65, № 5(387). – С. 953-964. DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2024.65.513>.
4. Kozhanov, A.I. Elliptic and Parabolic Equations with Involution and Degeneration at Higher Derivatives / A.I. Kozhanov, O.I. Bzheumikhova // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 18:3325. – P. 1-10. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10183325>.

Список публикаций по теме диссертации в других научных изданиях

5. Бжеумихова, О.И. Классические краевые задачи для одного эллиптического уравнения с инволютивным отклонением аргумента / О.И. Бжеумихова // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2024): материалы 6-й Международной конференции. – Иркутск: Издательство ИГУ, 2024. – С. 11-12.
6. Бжеумихова, О.И. Краевая задача для вырождающегося гиперболического уравнения с инволютивным отклонением аргумента / О.И. Бжеумихова // Неклассические уравнения математической физики и их приложения: Тезисы докладов международной научной конференции. – Ташкент: «Университет», 2022. – С. 83-84.
7. Бжеумихова, О.И. Краевые задачи для гиперболических уравнений с инволютивным отклонением аргумента / О.И. Бжеумихова // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы VII Международной научной конференции. – Нальчик: Принт-центр, 2023. – С. 66.

8. *Бжеумихова, О.И.* Краевые задачи для гиперболических уравнений с инволюцией и вырождением / О.И. Бжеумихова // Международная конференция, посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (24-е совместное заседание ММО и Семинара имени И.Г. Петровского, 26–30 декабря 2021, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2022. — С. 164-165.
9. *Бжеумихова, О.И.* Краевые задачи для уравнения в частных производных с инволюцией / О.И. Бжеумихова // Алгебра и динамические системы: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию А.А. Махнева. — Нальчик: Принт-центр, 2023. — С. 27-28.
10. *Бжеумихова, О.И.* О влиянии параметров на корректность краевой задачи для эллиптического уравнения с инволюцией / О.И. Бжеумихова, А.И. Кожанов // Актуальные проблемы прикладной математики: Материалы IV Международной научной конференции. — Нальчик-Эльбрус: Институт прикладной математики и автоматизации — филиал ФГБНУ Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», 2018. — С. 60.
11. *Бжеумихова, О.И.* О разрешимости классической краевой задачи для параболического уравнения в частных производных с инволютивным отклонением аргумента / О.И. Бжеумихова, А.И. Кожанов, В.Н. Лесев // Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем: Тезисы Международной конференции, посвященной 70-летию А.Х. Журтова. — Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 2019. — С. 25.
12. *Бжеумихова, О.И.* О разрешимости краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с инволютивным отклонением в цилиндрической области / О.И. Бжеумихова // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы VI Международной научной конференции. — Нальчик: Принт Центр, 2021. — С. 46.
13. *Бжеумихова, О.И.* О разрешимости некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией / О.И. Бжеумихова // Международная конференция, посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (25-е совместное заседание ММО и Семинара имени И.Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2025. — С. 104-105.
14. *Бжеумихова, О.И.* О разрешимости нелокальных краевых задач для параболических уравнений с инволюцией / О.И. Бжеумихова // Алгебра и динамические системы: Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения В.А. Белоногова. — Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 2025. — С. 12-13.
15. *Кожанов, А.И.* Краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с инволюцией / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021):

Материалы 3-й Международной конференции. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2021. – С. 40-42.

16. *Кожанов, А.И.* О разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией и вырождением в старших производных / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов III Международной научной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова. – Улан-Удэ: Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, 2025. – С. 60-61.
17. *Кожанов, А.И.* Собственные числа и собственные функции дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: Тезисы докладов международной научной конференции. Часть I. – Фергана, 2023. – С. 86-87.
18. *Кожанов, А.И.* Собственные числа и собственные функции линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // X международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого Президента Академии наук РС(Я), член-корреспондента РАН Филиппова Василия Васильевича: Тезисы докладов. – Якутск: Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, 2023. – С. 47.
19. *Kozhanov, A.I.* Eigenvalues and Eigenfunctions of Differential Equations with Involution / A.I. Kozhanov, O.I. Bzheumikhova // Differential and Difference Equations. Russian-Chinese Conference. – Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2023. – С. 77.