Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный
университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

На правах рукописи

Бжеумихова Оксана Игоревна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор
Кожанов Александр Иванович

Нальчик – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Появление новых объектов и методов исследования, а также практически неисчерпаемые прикладные возможности, способствуют дальнейшему уверенному и динамичному развитию теории дифференциальных уравнений.

В последние годы среди стремительно развивающихся направлений в области дифференциальных уравнений особое внимание привлекают исследования, посвященные разрешимости дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и краевым задачам для них. Данная теория, то есть теория дифференциальных уравнений, связывающих искомую функцию и ее производные при различных значениях аргумента, начала развиваться сравнительно недавно. Так, только в середине прошлого века появились первые фундаментальные работы как отечественных авторов А.Д. Мышкиса [46–48], С.Б. Норкина [50, 51], Н.Н. Красовского [39], Л.Э. Эльсгольца [69], так и зарубежных ученых Р. Беллмана и К. Кука [10], Э. Пинни [53], А. Халаная [96], посвященные классификации обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, постановке краевых задач для них, а также изложению методов, применяемых для доказательства их разрешимости.

В классе уравнений с отклоняющимся аргументом можно выделить дифференциальные уравнения с аргументами специального вида – с инволюцией. Инволютивным отклонением или инволюцией (также карлемановским сдвигом) называется монотонно убывающее отображение совпадающее со своим обратным, то есть отображение вида $f(x) = f^{-1}(x)$, или, что то же самое, $f^2(x) = f(f(x)) = x$ [90, 127].

Простейшими примерами инволюции являются:

1. Инволюция отражения $f(x) = -x$, где $x \in (-\infty, \infty)$.
2. Инволюция инверсии $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$.

3. Дробно-линейная инволюция, задаваемая выражением
$$f(x) = \frac{a(b-x)}{cx+a},$$
где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и выполнено условие $a(cb+a) > 0$; при $c = 0$ данное отображение вырождается в линейную инволюцию.

Иные типы инволютивных отклонений и их свойства подробно рассмотрены в работах [127, 138]. Следует подчеркнуть, что дифференциальные уравнения, в структуре которых присутствует инволютивное преобразование аргумента, по своей классификации относятся к функционально-дифференциальным уравнениям.

Исторически первые результаты в области дифференциальных уравнений с инволюцией были получены Ч. Бэббиджем еще в 1816 году [84]. Значительный вклад в развитие данной тематики внес В. Файт, который в работе 1921 года, применяя метод последовательных приближений, доказал существование решений обыкновенных дифференциальных уравнений с линейной инволюцией и исследовал их свойства [91]. В дальнейшем, в 1940 году, Л. Зильберштейн в работе [128] получил решение дифференциального уравнения с инволюцией вида: $y' = y(\frac{1}{x})$, $0 < x < \infty$. Интерес к дифференциальным уравнениям с инволюциями возобновил в 1969 году И.Я. Винер в работе [18], где были изучены отдельные классы обыкновенных дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента, а также предложен конструктивный подход, позволяющий свести такие уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям более высокого порядка, не содержащим отклонения аргумента.

В последующие десятилетия в указанном направлении были опубликованы серии работ Д. Пшеворской-Ролевич [114–116], И.Я. Винера [125, 139–141], Ч.П. Гупта [93–95], А.Р. Афтабизаде [72], У.Т. Уоткинса [136, 137], Д. Пяо [112] и других. Полученные указанными исследователями результаты внесли существенный вклад в развитие теории дифференциальных уравнений, содержащих инволюцию.

В конце прошлого и начале нынешнего столетия закономерно появляются исследования, посвященные уравнениям в частных производных с инволютивным отклонением аргумента. Весомый вклад в развитие теории в обозначенный период внесли работы И.Я. Винера [17], А.А. Андреева и его учеников [2–7, 45, 52]. Основные сведения о функционально-дифференциальных уравнениях в частных производных и, в частности, о свойствах уравнений с инволюциями, а также приложения этих уравнений были опубликованы в работах А.Л. Скубачевского [129], Дж. Ву [142], В. Колмановского и А. Мышкиса [102].

К настоящему времени в математической литературе имеются многочисленные работы как российских, так и зарубежных авторов, посвященные проблеме разрешимости дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента (см. работы [9,11,12,34,49,65,67,76–79,88,97,122,126] и имеющуюся в них библиографию). В частности, в работах Т.Ш. Кальменова и А.Ш. Шалданбаева [34], А. Кабада и Ф.А.Ф. Тодзё [88], а также в исследованиях А. Ашыралыева с соавторами [78, 79], А.А. Сарсенби и Э. Муссиреповой [122] проведен анализ разрешимости краевых задач и задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих инволюцию. Проблематика разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией, а также анализа свойств их решений, представляет собой одно из актуальных направлений современной теории дифференциальных уравнений, которое подробно освещено в трудах А.П. Хромова [67], М.Ш. Бурлуцкой и С.А. Чередниковой [12], У.А. Искаковой и Б.Т. Торебека [97], А.Ш. Шалданбаева, М.Т. Шоманбаевой и С.Т. Ахметовой [126], Ф.А.Ф. Тодзё и П. Торреса [132], А.Г. Баскакова и Н.Б. Усковой [9], А.А. Сарсенби [57], К.Ж. Назаровой, Б.Х. Турметова и К.И. Усманова [49], Ю. Ярка, С. Федушко и П. Веселый [143], Д.В. Беловой [11], Б.Х. Турметова и В.В. Карачика [65, 66], А. Ашыралыева, С. Ибрагима и Э. Хинкала [77].

Отдельную группу исследований составляют работы, посвященные эллиптическим, параболическим и гиперболическим уравнениям, в которых значения производных искомого решения задаются не только в текущих точках, но и в точках, определяющихся некоторой инволюцией. К таким работам относятся исследования А. Ашыралыева и А.М. Сарсенби [58, 82, 83], А.А. Сарсенби [121], Н. Аль-Салти, М. Кирана, Б.Т. Торебека [75], Д.Н. Алтынбека, М.А. Муратбековой [1], Б.Х. Турметова, А.А. Ахмедова, И. Оразова [135], а также ряд других публикаций [76, 80, 81, 111, 119]. При этом следует отметить, что все рассматриваемые уравнения либо имеют специальный вид, либо же инволюция в них является простейшей, как правило линейной.

Отметим, что в ряде публикаций, а именно в работах М. Кирана и Н. Аль-Салти [99], М.А. Садыбекова, Г. Дилдабека и М.Б. Ивановой [117], Р. Тапдигоглу и Б.Т. Торебека [131], а также в исследованиях [28, 73, 103], были рассмотрены проблемы разрешимости обратных задач для дифференциальных уравнений, содержащих оператор инволюции. Результаты анализа свойств функций Грина краевых задач для дифференциальных уравнений первого и второго порядков, содержащих инволюцию, изложены в работах А. Кабады и Ф.А.Ф. Тодзё [89], А.А. Сарсенби, А.М. Сарсенби и Э. Муссиреповой [57, 118, 122].

Изучению спектральных свойств дифференциальных операторов с инволюцией посвящено достаточно много исследований. Спектральные задачи для дифференциальных операторов с инволюцией впервые были рассмотрены в трудах Т.Ш. Кальменова [32, 33]. Задачи для уравнения первого порядка с инволюцией изучались в работах А.П. Хромова и М.Ш. Бурлуцкой [13–16, 87], А.Г. Баскакова [85, 86], И.А Криштал и Н.Б. Усковой [41], а также других авторов [22, 55]. Спектральным задачам для дифференциальных уравнений второго порядка с инволюцией посвящено значительное число работ Л.В. Крицкова, А.М. Сарсенби, А.А. Сарсенби, М.А. Садыбекова и Б.Х. Турметова [40, 56, 106–110, 120, 123] (см. также имеющуюся в них библиографию). В работах [56, 120, 123] вопросы базисности собственных функций краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка с инволюцией исследовались с использованием функции Грина для изучаемых задач.

В области уравнений в частных производных с операторами дробного порядка приведем лишь некоторые публикации последнего десятилетия, ярко демонстрирующие актуальность данной проблематики. Одно из них затрагивает краевые задачи для дробного уравнения Гельмгольца с оператором Герасимова-Капуто и с инволютивным отклонением аргумента, что отражено в работе М. Кирана, Б.Х. Турметова и Б.Т. Торебека [98]. Анализ обратных задач для параболических уравнений дробного порядка с инволюцией представлен в работах Б.Т. Торебека и Р. Тапдыгоглу [133], а также М. Кирана, М.А. Садыбекова и А.А. Сарсенби [100].

Прямые и обратные начально-краевые задачи для дробного по времени уравнения теплопроводности с инволюцией, сформулированные с использованием как локальных, так и нелокальных граничных условий, изучены в работах Н. Аль-Салти, С. Кербала и М. Кирана [74], а также Б.Ж. Кадиркулова и М.А. Жалилова [31]. В работе Д. Серикбаева [124] исследуется задача Коши для дробного по времени псевдопараболического уравнения с оператором инволюции, а так же изучается обратная задача по восстановлению правой части из переопределенного конечного условия.

Вопросы однозначной разрешимости нелокальной задачи для нелокального аналога смешанного параболо-гиперболического уравнения с обобщенным оператором Римана—Лиувилля и инволюцией по пространственной переменной рассмотрены Б.Ж. Кадиркуловым и Г.А. Каюмовой [30]. Краевые задачи дифференциальных уравнений четвертого порядка с оператором дробного дифференцирования Капуто и инволютивным отклонением аргумента исследованы в работе М. Кирана и А.А. Сарсенби [101]. Следует также отметить работу Л.М. Энеевой [70], в которой исследуется начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с производной дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля, содержащего линейную инволюцию в подчиненном слагаемом.

Исследование дифференциальных уравнений, в которых присутствуют операторы с инволюцией, представляет значительный научный интерес в силу того, что подобные операторы естественным образом возникают при анализе ряда геометрических задачах [10, с. 98], находят применение в теории фильтрации [21, с. 61], используются в задачах прогнозирования и анализа субгармонических колебаний [54, с. 271]. Кроме того, инволюция отражения играет ключевую роль в моделировании обращения времени в рамках классической статистической механики неравновесных процессов [27, с. 20], а также находит применение в суперсимметричной квантовой механике [92, 113].

Таким образом, с каждым днем усиливается потребность в проведении исследований, приближенных к процессам, проходящим на практике, то есть в изучении уравнений с частными производными и с инволюцией. Этот факт в совокупности с обобщениями теоретического характера и формирует представление об актуальности результатов, приведенных в настоящей работе.

Степень разработанности темы исследования. К настоящему времени в научной литературе имеется немало работ, посвященных исследованию разрешимости уравнений с инволютивным отклонением аргумента, а также краевых задач для таких уравнений. Вместе с тем подавляющее большинство существующих исследований сосредоточено на одномерных постановках для уравнений с постоянными коэффициентами и линейной инволюцией. Вследствие этого теория уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента остается недостаточно развитой, а в случае уравнений с общей инволюцией находится лишь на начальной стадии формирования.

Цель и задачи исследования. Основной **целью** диссертационной работы является исследование вопросов разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных, содержащих инволютивное отклонение аргумента.

Для достижения поставленной цели в работе предполагается решение следующих **задач**:

1. Изучить влияние инволютивных слагаемых, входящих в дифференциальные уравнения, на корректность задачи Коши и краевых задач с различными типами условий.
2. Установить условия разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка с инволютивным преобразованием аргумента в младших членах.
3. Исследовать вопросы разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка с инволютивным отклонением аргумента, входящим в старшие производные.

Научная новизна работы состоит в развитии методов исследования краевых задач для уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента.

В работе получены новые результаты о разрешимости краевых задач, включая задачи с интегральными условиями, для уравнений с общей инволюцией в младших членах и старших производных. Показано, что наличие инволютивных слагаемых существенно влияет на корректность задачи Коши и на свойства единственности и неединственности решений различных классов краевых задач.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационное исследование имеет теоретическую направленность и ориентировано на развитие теории дифференциальных уравнений с инволютивным преобразованием аргумента и дополнение существующих исследований в данной области. Полученные в работе результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении уравнений в частных производных с инволюцией, а также при решении прикладных задач, математические модели которых описываются уравнениями рассматриваемого типа.

Методология и методы исследования. При доказательстве разрешимости задач, рассматриваемых в диссертационной работе, применялся комплекс математических методов и подходов. В работе задействованы метод продолжения по параметру и метод регуляризации в сочетании с априорными оценками, спектральная теория, а также методы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и математического анализа, что позволило обеспечить строгость и полноту полученных результатов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Установлено, что наличие слагаемых с инволютивным отклонением аргумента в дифференциальных уравнениях оказывает существенное влияние на корректность задачи Коши и задач с нелокальными условиями, а также на вопросы единственности и неединственности решений краевых задач для уравнений в частных производных.
2. Получены достаточные условия разрешимости нелокальных и классических краевых задач для линейных параболических и эллиптических уравнений второго порядка с общим инволютивным отклонением аргумента в младших членах уравнений.
3. Доказана разрешимость краевых задач в пространствах С.Л. Соболева для эллиптических и параболических уравнений с переменными коэффициентами при наличии общего инволютивного отклонения аргумента в старших производных.
4. Получены достаточные условия разрешимости начально-краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами и инволютивным отклонением аргумента

в старших производных.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается применением строгих и апробированных методов исследования.

Апробация работы. Основные научные результаты диссертационного исследования неоднократно докладывались и обсуждались на международных научных конференциях и специализированных научных семинарах, что обеспечило их всестороннюю научную апробацию.

Результаты работы были представлены на следующих международных научных конференциях:

- IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики» (Нальчик, 2018);
- Международной конференции, посвященной 70-летию А.Х. Журтова «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем» (Нальчик, 2019);
- III Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021)» (Иркутск, 2021);
- VI Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2021);
- Международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2022);
- Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной И.Г. Петровскому (Москва, 2022);
- Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 70-летию А.А. Махнева (Нальчик, 2023);
- X Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти В.В. Филиппова (Якутск, 2023);

- Международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент, 2023);
- Российско-Китайской конференции «Differential and Difference Equations» (Новосибирск, 2023);
- Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2023);
- VI Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2024)» (Иркутск, 2024);
- Международной научной конференции «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа» (Нальчик, 2025);
- Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной И.Г. Петровскому (Москва, 2025);
- Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 90-летию В.А. Белоногова (Нальчик, 2025);
- III Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвященной 80-летию В.Н. Врагова (Улан-Удэ, 2025).

Кроме того, результаты работы докладывались на следующих научных семинарах: межрегиональном научном семинаре КБГУ «Алгебра и динамические системы» им. А.А. Керефова (Нальчик, 2022, 2023, 2025), всероссийском научном семинаре «Неклассические задачи математической физики» (Якутск, 2022), научно-исследовательском семинаре ИПМА КБНЦ РАН по современному анализу, информатике и физике (Нальчик, 2025), а также на научном семинаре «Дифференциальные и разностные уравнения» (Новосибирск, 2025).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования нашли отражение в 19 опубликованных работах [144–162], включая 4 статьи, напечатанные в журналах из списка ВАК и/или индексируемых в международных базах данных Scopus или Web of Science [144–147], а также в 15 тезисах докладов [148–162].

Личный вклад автора. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором диссертации лично. В работах [145–147], выполненных в соавторстве, научному руководителю А.И. Кожанову принадлежат постановки рассматриваемых задач. Кроме того, в работе [145] ему принадлежит общая стратегия доказательства теорем существования и предложены примеры задач. В статье [146] А.И. Кожанову принадлежит идея использования теорем 1-6 для исследования краевых задач для параболических и псевдопараболических уравнений, а также сформулированы заключительные замечания. В работе [147] А.И. Кожанову принадлежит общая схема метода доказательства разрешимости, а также им были уточнены и скорректированы отдельные этапы проводимых рассуждений. Автором лично проведено подробное доказательство всех сформулированных теорем, получены необходимые априорные оценки и обоснована разрешимость краевых задач.

Благодарности. Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Александру Ивановичу Кожанову – за научное руководство, постоянное внимание и всестороннюю поддержку на всех этапах работы над диссертацией. Отдельная признательность выражается за помощь в постановке и уточнении исследовательских задач, а также за глубокие и содержательные обсуждения полученных результатов, существенно повлиявшие на формирование итоговых выводов диссертации.

Особую благодарность автор выражает кандидату физико-математических наук, доценту Вадиму Николаевичу Лесеву за ценные рекомендации, профессиональные советы и поддержку, оказавшие значимую роль в подготовке и завершении диссертационной работы.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 111 страницах и включает введение, три главы, объединяющие восемь разделов, заключение, а также список использованных источников, содержащий 162 наименования.

Основное содержание работы

Во **введении** диссертационного исследования последовательно раскрыта актуальность выбранной темы и обоснована ее научная и практическая значимость. Представлен аналитический обзор ключевых отечественных и зарубежных работ, отражающих современное состояние изучаемой проблематики, что позволяет уточнить место проведенного исследования в системе существующих подходов. Дано целостное описание логики и содержания работы, раскрывающее структуру исследования и взаимосвязь его разделов. Сформулированы основные результаты и положения, выносимые на защиту, в которых зафиксирован научный вклад автора и обобщены полученные выводы.

В **первой главе** показано, что наличие слагаемых с инволютивным отклонением аргумента в обыкновенных дифференциальных уравнениях оказывает существенное влияние на корректность задачи Коши и задач с нелокальными условиями, а также на вопросы единственности и неединственности решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

В частности, **раздел 1.1** посвящен анализу влияния слагаемых с инволютивным отклонением аргумента в дифференциальных уравнениях на корректность задачи Коши.

Пусть $t \in (0, T)$, где $0 < T < +\infty$, а λ, $\mu \in \mathbb{R}$ – фиксированные числа.

Задача 0.1. *Найти функцию $y(t)$, являющуюся на интервале $(0, T)$ решением уравнения*

$$y'(t) + \lambda y(t) + \mu y(T - t) = 0, \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$y(0) = 0.$$

Для исследуемой задачи 0.1 сформулированы условия на параметры λ и μ, гарантирующие существование либо ненулевых решений, либо исключительно тождественно нулевого решения.

В **разделе 1.2** показано влияние слагаемого с инволюцией в уравнении (1) на наличие и отсутствие собственных значений и собственных функций следующих нелокальных краевых задач:

Задача 0.2. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$y(0) = y(T).$$

Задача 0.3. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$y(0) = -y(T).$$

Пусть функция $N(t)$ задана и определена на отрезке $[0, T]$.

Задача 0.4. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$\int_0^T N(t) y(t)\, dt = 0.$$

В **разделе 1.3**, опираясь на результаты, полученные в разделах 1.1 и 1.2, представлены сведения о разрешимости спектральных задач для параболических и псевдопараболических уравнений, содержащих операторы с инволюцией.

Завершающий раздел главы, **1.4**, посвящен исследованию влияния слагаемого с инволюцией на свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения, в частности на вопросы их единственности и возможной неединственности, что имеет важное значение для теории дифференциальных уравнений с инволюцией.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей Γ. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, рассмотрим следующее уравнение с линейной инволюцией:

$$u_{tt}(x,t) + \Delta u(x,t) + \lambda u(x,t) + \mu u(x, T-t) = 0, \tag{2}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Задача 0.5. *Найти решение $u(x,t)$ уравнения* (2) *в области Q, удовлетворяющее условиям:*

$$u(x,t)\,|_S = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

где $S = \Gamma \times (0,T)$.

Основной результат данного раздела сформулирован в виде двух теорем, при выполнении условий которых на числа μ и λ, задача 0.5 имеет бесконечно много ненулевых решений или только тождественно нулевые решения.

Во **второй главе** диссертации исследуется широкий круг краевых задач для линейных уравнений в частных производных, рассматриваемых в цилиндрической области. Устанавливаются условия существования и единственности решений как для классических, так и для нелокальных постановок, включая задачи с интегральными условиями, для линейных параболических и эллиптических уравнений, содержащих общую инволюцию в младших членах.

В частности, **раздел 2.1** посвящён исследованию нелокальных задач, в том числе с интегральными условиями, для линейных параболических уравнений с общей инволюцией в младших членах.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой, для простоты бесконечно дифференцируемой, границей Γ. Обозначим через $Q = \Omega \times (0, T)$ цилиндр конечной высоты T, а через $S = \Gamma \times (0, T)$ – его боковую поверхность. Далее, пусть Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $N(t)$ и $f(x,t)$ считаются заданными и определёнными для всех $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$. Кроме того, пусть $\varphi(t)$ – инволюция, определенная на отрезке $[0, T]$, а γ –фиксированное вещественное число.

В цилиндрической области Q проводится исследование разрешимости следующих краевых задач:

Задача 0.6. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t) \tag{3}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)\,|_S = 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \gamma u(x,T), \quad x \in \Omega.$$

Задача 0.7. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (3) *и такую, что для нее выполняются условие* (4)*, а также условие*

$$\int_0^T N(t)u(x,t)\,dt = 0, \quad x \in \Omega.$$

Разрешимость задач 0.6 и 0.7 установлена с использованием метода продолжения по параметру. Полученные в работе результаты представлены в форме теорем, в которых сформулированы достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность регулярного решения, обладающего всеми обобщёнными по С.Л. Соболеву производными, входящими в исследуемое дифференциальное уравнение.

В разделе 2.2 в цилиндрической области Q рассмотрено уравнение

$$u_{tt}(x,t) + \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t), \tag{5}$$

где Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, функции $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $\varphi(t)$ – инволюция, определенная на отрезке $[0,T]$.

Для уравнения (5), рассматриваемого в области Q, был проведен анализ следующих задач:

Задача 0.8. *Найти решение $u(x,t)$ уравнения* (5) *в области Q, удовлетворяющее условиям:*

$$u(x,t)\,|_S = 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Задача 0.9. *Найти решение $u(x,t)$ уравнения* (5) *в области Q, удовлетворяющее (6), а также условиям:*

$$u_t(x,0) = 0, \qquad u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Задача 0.10. *Найти решение $u(x,t)$ уравнения (5) в области Q, удовлетворяющее (6), а также условиям:*

$$u(x,0) = \alpha u(x,T), \qquad u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

где α – действительное число.

Для рассматриваемых задач в пространствах С.Л. Соболева с применением метода продолжения по параметру, метода регуляризации и техники априорных оценок получены теоремы, устанавливающие существование и единственность регулярных решений.

В **третьей главе** диссертационной работы проводится исследование разрешимости краевых задач в пространствах С.Л. Соболева для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, в которых инволютивное отклонение аргумента присутствует в старших производных. Полученные результаты охватывают как невырожденные, так и вырожденные случаи.

В **разделе 3.1** изучаются краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений с инволюцией в старших производных; получены результаты об их разрешимости в невырожденном и вырожденном случаях.

Пусть Ω – интервал $(0,1)$ оси Ox, $Q = \Omega \times (0,T)$ – прямоугольник конечной высоты T. Далее, пусть $\varphi(x)$ – определенная на отрезке $[0,1]$ инволюция, $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные, определенные на множестве $\overline{Q}$ функции.

Задача 0.11. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - a(x,t)u_{xx}(\varphi(x),t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{7}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{8}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{9}$$

Задача 0.12. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) + a(x,t)u_{xx}(\varphi(x),t) - c(x,t)u(x,t) = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (8) и (9), а также условие

$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Разрешимость краевых задач 0.11 и 0.12 в невырожденном случае устанавливается на основе метода продолжения по параметру [64, гл. III, §14], в вырожденном случае методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Раздел 3.2 посвящен исследованию разрешимости естественных начально-краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка при наличии инволютивного отклонения аргумента в старших членах.

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, $Q = \Omega \times (0,T)$ — прямоугольник конечной высоты T, и пусть функции $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ определены на множестве $\overline{Q}$.

Задача 0.13. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - a(x,t)u_{xx}(1-x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T). \tag{11}$$

Предположим, что $a(x,t) \equiv a(t)$, а α является фиксированным вещественным числом.

Задача 0.14. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) - a(t)u_{tt}(1-x,t) - [1-a^2(t)]u_{xx}(x,t) +$$

$$+\alpha u_t(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (10) и (11).

Для исследуемых задач с применением методов регуляризации, продолжения по параметру и априорных оценок установлены достаточные условия существования и единственности регулярных решений, обладающих всеми обобщенными производными в смысле С.Л. Соболева, присутствующими в уравнениях.

В **заключение** обобщены основные результаты диссертационной работы и сформулированы выводы, отражающие научный вклад автора.

1. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

1.1. Собственные значения и собственные функции задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией

Пусть $t \in (0, T)$, где $0 < T < +\infty$, а λ, $\mu \in \mathbb{R}$ – фиксированные числа.

Задача 1.1. *Найти функцию $y(t)$, являющуюся на интервале $(0, T)$ решением уравнения*

$$y'(t) + \lambda y(t) + \mu y(T - t) = 0, \tag{1.1}$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$y(0) = 0. \tag{1.2}$$

При отсутствии в уравнении слагаемого с инволюцией, то есть при $\mu = 0$, задача 1.1 допускает исключительно тривиальное решение, а именно $y(t) \equiv 0$. Принципиально иная ситуация возникает в случае, когда в уравнении (1.1) параметр μ отличен от нуля.

Вначале исследуем случай, когда $\lambda > 0$.

Пусть $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность всех положительных чисел z, для которых выполняется равенство

$$z + \lambda \operatorname{tg}(Tz) = 0.$$

Обозначим через μ_m следующие числа:

$$\mu_m = \sqrt{z_m^2 + \lambda^2}.$$

Теорема 1.1. *Пусть λ – фиксированное положительное число. Тогда:*

(1) при $|\mu| \leq \lambda$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет только тождественно нулевое решение;

(2) если $\mu = \mu_m$ и $m = 2l$, либо $\mu = -\mu_m$ и $m = 2l-1$, где $l \in \mathbb{N}$, то задача Коши (1.1), (1.2) имеет бесконечно много ненулевых решений;

(3) при $\mu > \lambda$, $\mu \neq \mu_m$ для всех $m = 2l$, а также при $\mu < -\lambda$, $\mu \neq -\mu_m$ для всех $m = 2l-1$, $l \in \mathbb{N}$, задача Коши (1.1), (1.2) имеет только тождественно нулевое решение.

Доказательство. Положим $|\mu| < \lambda$. Интегрируя уравнение (1.1), предварительно умноженное на $y(t)$, по промежутку $[0, T]$, получаем неравенство:

$$y^2(T) + (\lambda - |\mu|) \int_0^T y^2(t)\, dt \leq 0. \tag{1.3}$$

Так как левая часть неравенства неотрицательна, оно возможно лишь при $y(t) \equiv 0$ на $[0, T]$.

В случае, когда $\mu = \lambda$, из (1.3) получаем условие $y(T) = 0$. Далее, рассматривая уравнение (1.1), можно записать соотношение

$$y'(t) - y'(T-t) = 0,$$

которое, в сочетании с начальным условием (1.2) и уже установленным равенством $y(T) = 0$ приводит к следующему соотношению:

$$y(t) + y(T-t) = 0.$$

Используя это соотношение совместно с уравнением (1.1), получаем, что $y'(t) \equiv 0$, что означает $y(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$.

Аналогичные рассуждения для случая $\mu = -\lambda$ также приводят к выводу, что $y(t) \equiv 0$ для $t \in [0, T]$.

Перейдем к рассмотрению второго случая. Прежде всего отметим, что все значения $\mu_m \in (\lambda, +\infty)$. Предположим, что $\mu = \mu_m$ при $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. В рассматриваемой ситуации выполняются следующие тождества:

$$z_m \cos(z_m T) + \lambda \sin(z_m T) = 0, \qquad \lambda^2 = \mu_m^2 - z_m^2.$$

Используя эти тождества, после соответствующих преобразований приходим к равенству

$$z_m^2 - \mu_m^2 \sin^2(z_m T) = [z_m - \mu_m \sin(z_m T)]\,[z_m + \mu_m \sin(z_m T)] = 0, \tag{1.4}$$

в котором допустимые значения z_m лежат в интервалах, указанных ниже

$$\frac{(2m-1)\pi}{2T} < z_m < \frac{(2m+1)\pi}{2T}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = z + \lambda \operatorname{tg}(zT).$$

Функция $g(z)$ является монотонно возрастающей в пределах каждого промежутка $\left(\frac{(2m-1)\pi}{2T}, \frac{(2m+1)\pi}{2T}\right)$, $m \in \mathbb{N}$ от $-\infty$ до $+\infty$. Более того, $g\left(\frac{\pi m}{T}\right) > 0$, вследствие чего $z_m \in \left(\frac{(2m-1)\pi}{2T}, \frac{m\pi}{T}\right)$. В частности, при $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, отсюда следует неравенство

$$\sin(z_m T) < 0.$$

Совместный анализ последнего неравенства и соотношения (1.4) показывает, что для $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, имеет место равенство

$$z_m + \mu_m \sin(z_m T) = 0. \tag{1.5}$$

Применяя соотношение (1.5), несложно установить, что при $\mu = \mu_m$, где $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ ненулевыми решениями задачи (1.1), (1.2) будут функции $y(t) = C \sin(z_m t)$, где $C = const$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu = -\mu_m$ для нечетного номера $m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$. Аналогично предыдущему случаю, для значений z_m выполняется неравенство

$$\sin(z_m T) > 0.$$

С учетом равенства (1.4) это приводит к соотношению

$$z_m - \mu_m \sin(z_m T) = 0. \tag{1.6}$$

Соотношение (1.6) позволяет заключить, что при $\mu = -\mu_m$, где $m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$, ненулевыми решениями задачи (1.1), (1.2) являются функции вида $C \sin(z_m t)$, $C = const$.

Далее будем считать, что $\mu \neq \mu_m$ при четных m ($m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$) и $\mu \neq -\mu_m$ при нечетных m ($m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$). Дифференцируя уравнение (1.1) по переменной t, получаем следующее выражение:

$$y''(t) + \lambda y'(t) - \mu y'(T - t) = 0.$$

Далее, с учетом соотношения

$$y'(T - t) + \lambda y(T - t) + \mu y(t) = 0,$$

для функции $y(t)$ на интервале $(0, T)$ выводится следующее дифференциальное уравнение:

$$y''(t) + \left(\mu^2 - \lambda^2\right) y(t) = 0. \tag{1.7}$$

Дополнительно, для функции $y(t)$ из уравнения (1.1), получим

$$y'(T) + \lambda y(T) = 0. \tag{1.8}$$

Полученная таким образом краевая задача (1.7), (1.2), (1.8) допускает нетривиальные решения только в том случае, если величина $\mu^2 - \lambda^2$ совпадает с одним из значений z_m^2. Поскольку, согласно условию теоремы, такое совпадения невозможно, заключаем, что функция $y(t)$ обращается в ноль на интервале $(0, T)$, то есть $y(t) \equiv 0$. Следовательно, утверждение 3) теоремы выполняется. $\square$

Перейдем теперь к анализу ситуации, когда $\lambda \leq 0$. Предварительно сформулируем и докажем дополнительное утверждение.

Определим функцию $h(z)$ следующим образом:

$$h(z) = z + \frac{\lambda\left(1 - e^{-2zT}\right)}{1 + e^{-2zT}}.$$

Утверждение 1.1. *Пусть λ – фиксированное отрицательное число такое, что $|\lambda|\, T > 1$. Тогда уравнение $h(z) = 0$ имеет на промежутке $(0, +\infty)$ ровно одно решение z^*.*

Доказательство. Рассмотрим производные функции $h(z)$. Справедливы следующие выражения:

$$h'(z) = 1 + \frac{4\lambda T}{\left(e^{zT} + e^{-zT}\right)^2}, \quad h''(z) = -\frac{8\lambda T^2\left(e^{zT} - e^{-zT}\right)}{\left(e^{zT} + e^{-zT}\right)^3}.$$

Учитывая, что $h'(0) < 0$ и $h'(z) \to 1$ при $z \to +\infty$, можно утверждать, что существует такая точка z_0, в которой выполняется условие $h'(z_0) = 0$. Заметим, что функция $h'(z)$ имеет не более одного нуля на интервале $(0, +\infty)$. Если бы существовал еще один нуль, скажем, z_1, то это привело бы к тому, что $h''(z)$ также должен был бы обращаться в ноль на этом интервале, что невозможно.

Исходя из вышеизложенного, функция $h(z)$ монотонно убывает на интервале $(0, z_0)$ и монотонно возрастает на интервале $(z_0, +\infty)$, причем $h(z_0) < 0$. Следовательно, на интервале $(z_0, +\infty)$ существует ровно одна точка z^*, удовлетворяющая равенству $h(z^*) = 0$. $\square$

Определим величину μ^* следующим образом:

$$\mu^* = \frac{2\lambda}{e^{z^*T} + e^{-z^*T}}.$$

Далее исследуем уравнение

$$z + \lambda \operatorname{tg}(Tz) = 0,$$

для $\lambda < 0$. Пусть $\overline{z}_m$ – положительные корни этого трансцендентного уравнения, расположенные в порядке возрастания, образующие последовательность $\{\overline{z}_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Введем обозначение:

$$\overline{\mu}_m = \sqrt{\overline{z}_m^2 + \lambda^2}.$$

Теорема 1.2. *Пусть* λ *– фиксированное число из промежутка* $(-\infty, 0]$. *Тогда при выполнении одного из следующих условий:*

(1) $|\lambda|\,T > 1$, $\mu = \mu^*$;

(2) $\lambda = -\frac{1}{T}$, $\mu = -\frac{1}{T}$;

(3) $\lambda < 0$, $\mu = \overline{\mu}_m$ *для* $m = 2l$, $\mu = -\overline{\mu}_m$ *для* $m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$;

(4) $\lambda = 0$, $\mu = \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$

задача Коши (1.1), (1.2) имеет бесконечно много ненулевых решений.

Доказательство. В рамках случая 1) определим функцию

$$v(t) = e^{z^* t} - e^{-z^* t},$$

Для ранее зафиксированного значения μ^* и функции $v(t)$ справедливо равенство:

$$v'(t) + \lambda v(t) + \mu^* v(T - t) = 0,$$

что подтверждает наличие бесконечного множества решений задачи (1.1), (1.2).

Теперь перейдем ко второму случаю. В данном случае нетривиальными решениями задачи (1.1), (1.2) являются линейные функции вида Ct, где $C = const$.

Рассмотрим случай 3), указанного в формулировке теоремы. Пусть $\overline{z}_m > 0$ – решение уравнения

$$z + \lambda \operatorname{tg}(Tz) = 0$$

при отрицательных значениях λ. Для таких решений имеют место следующие неравенства:

$$\sin(\overline{z}_m T) < 0 \quad \text{для } m = 2l-1,$$

$$\sin(\overline{z}_m T) > 0 \quad \text{для } m = 2l,\ l \in \mathbb{N}.$$

Указанные свойства приводят к справедливым соотношениям:

$$\overline{z}_m + \overline{\mu}_m \sin(\overline{z}_m T) = 0, \text{ для } m = 2l-1,\ l \in \mathbb{N},$$

$$\overline{z}_m - \overline{\mu}_m \sin(\overline{z}_m T) = 0, \text{ для } m = 2l,\ l \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем для каждого m введем функцию

$$v_m(t) = \sin(\overline{z}_m t).$$

При $m = 2l-1$, $l \in \mathbb{N}$, для функций $v_m(t)$ выполняется равенство

$$v_m'(t) + \lambda v_m(t) + \overline{\mu}_m v_m(T-t) = 0,$$

а при $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$:

$$v_m'(t) + \lambda v_m(t) - \overline{\mu}_m v_m(T-t) = 0.$$

Из этих равенств следует, что функции вида $Cv_m(t)$ являются решениями задачи Коши (1.1), (1.2) для числа λ и соответствующих чисел $\overline{\mu}_m$ или $-\overline{\mu}_m$.

При $\lambda = 0$ и $\mu = \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, ...$ прямой подстановкой нетрудно убедиться, что функции $y(t) = C\sin(\mu t)$, где C – произвольная постоянная, являются ненулевыми решениями задачи Коши (1.1), (1.2). □

Теорема 1.3. *Пусть* λ *– фиксированное число из промежутка* $(-\infty, 0]$. *Тогда при выполнении одного из следующих условий:*

(1) $\lambda < 0$, $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| \neq \overline{\mu}_m$;

(2) $\lambda < 0$, $\mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \neq \frac{1}{2T} \ln \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2-\mu^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2-\mu^2}}$;

(3) $\lambda = -\frac{1}{T}$, $\mu = \frac{1}{T}$;

(4) $\lambda = 0$, $\mu \neq \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$,

задача Коши (1.1), (1.2) имеет только тождественно нулевое решение.

Доказательство. Пусть функция $y(t)$ есть решение задачи Коши (1.1), (1.2). Тогда указанная функция одновременно представляет собой решение следующей краевой задачи:

$$y'' + (\mu^2 - \lambda^2)y(t) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(T) + \lambda y(T) = 0. \tag{1.9}$$

В случае, когда величина $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $y(t)$ представляет собой нетривиальное решение указанной краевой задачи, то должно выполняться соотношение

$$\mu^2 - \lambda^2 = \overline{z}_m^2.$$

Однако, в соответствии с условием $|\mu| \neq \overline{\mu}_m$, такая ситуация невозможна в случае 1).

В случае 2) решение $y(t)$ данной краевой задачи (1.9) может быть не тождественно нулевым, лишь при выполнении условий:

$$\mu^2 - \lambda^2 < 0, \qquad \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\right) e^{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}T} = \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\right) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}T}.$$

В силу того, что не выполняется второе из рассматриваемых условий, функция $y(t)$, являющаяся решением краевой задачи (1.9), определяется как $y(t) \equiv 0$. Следовательно, и решение задачи Коши (1.1), (1.2) – только тождественно нулевое.

В случае 3) имеем $\mu^2 - \lambda^2 = 0$. При выборе $\mu = -\frac{1}{T}$ решение $y(t)$ оказывается ненулевым, тогда как для $\mu = \frac{1}{T}$ функция $y(t)$ вновь обращается в ноль на всем интервале.

В заключение, в случае 4) непосредственная проверка показывает, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) является лишь тривиальным, то есть $y(t) \equiv 0$. $\square$

1.2. Собственные значения и собственные функции нелокальных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией

В данном разделе изучается зависимость существования собственных значений и собственных функций от параметров λ и μ уравнения (1.1) в рамках разных постановок нелокальных задач, включая задачи с интегральными условиями.

Задача 1.2. *Найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию*

$$y(0) = y(T). \tag{1.10}$$

Задача 1.3. *Найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию*

$$y(0) = -y(T). \tag{1.11}$$

Задачи 1.2 и 1.3 сформулированные для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с инволютивным преобразованием аргумента, интерпретируются как задачи поиска периодических и антипериодических решений соответственно.

Введем обозначение:

$$\mu_{m,1} = \left[\lambda^2 + \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \text{ где } m \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.4. *Пусть λ – фиксированное число. Тогда нелокальная задача 1.2 имеет бесконечно много ненулевых решений, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| = \mu_{m,1}$, $m \in \mathbb{N}$*;*

(2) $\mu = -\lambda$.

Для всех остальных чисел μ нелокальная задача 1.2 имеет только тождественно нулевое решение.

Доказательство. Пусть $y(t)$ – решение задачи 1.2. Для функции $y(t)$ справедливы следующие соотношения

$$y'' + \left(\mu^2 - \lambda^2\right) y = 0, \tag{1.12}$$

$$y'(0) = y'(T). \tag{1.13}$$

Предположим, что для чисел λ и μ выполняется условие $\mu^2 - \lambda^2 > 0$. Решение уравнения (1.12) с учетом условий (1.10) и (1.13) допускает тригонометрическое представление

$$y(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t), \qquad \gamma = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2},$$

где постоянные A и B удовлетворяют указанным ниже равенствам:

$$A(1 - \cos(\gamma T)) - B\sin(\gamma T) = 0, \tag{1.14}$$

$$A\sin(\gamma T) + B(1 - \cos(\gamma T)) = 0. \tag{1.15}$$

При условии $|\mu| = \mu_{m,1}$, указанные соотношения (1.14) и (1.15) выполняются при произвольных значениях A и B. Зафиксируем такие A и B, для которых справедливо равенство

$$A\gamma = B(\lambda - \mu). \tag{1.16}$$

При этом из соотношения (1.16) несложно получить

$$A(\lambda + \mu) + B\gamma = 0. \tag{1.17}$$

Совместное использование равенств (1.16) и (1.17) позволяет заключить, что при определенных выше значениях λ и μ нетривиальное решение задачи 1.2 представимо в виде

$$y(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t).$$

Далее, рассмотрим случай при $\mu^2 - \lambda^2 > 0$ и $|\mu| \neq \mu_{m,1}$. В этих условиях система линейных уравнений (1.14), (1.15) имеет единственное тривиальное решение $A = B = 0$. Это, в свою очередь, означает, что задача 1.2 имеет лишь тривиальное решение.

Допустим теперь $\mu^2 - \lambda^2 < 0$ и $\lambda > 0$. В этом случае, умножив исходное уравнение (1.1) на $y(t)$ и проинтегрировав по промежутку $[0, T]$, будем иметь

$$(\lambda - |\mu|) \int\limits_0^T y^2(t)\, dt \le 0.$$

На основании данного неравенства можно заключить, что при таких значениях параметров λ и μ решение задачи 1.2 представляет собой тождественно нулевую функцию, то есть $y(t) \equiv 0$.

Рассмотрим случай, когда $\mu^2 - \lambda^2 < 0$ и $\lambda < 0$. При данных предположениях решение $y(t)$ задачи 1.2 допускает представление

$$y(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}, \text{ где } \gamma = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Система, следующая из (1.10) и (1.13), является однородной и имеет определитель, отличный от нуля. Это означает, что она допускает только нулевое решение $A = 0$ и $B = 0$, что вновь дает $y(t) \equiv 0$.

Пусть теперь $\mu = \lambda$. Нетрудно проверить подстановкой, что при совпадении параметров λ и μ решение нелокальной задачи 1.2 также тождественно обращается в нуль при всех t. В то же время в случае $\mu = -\lambda$ соответствующее решение является постоянной функцией $y(t) \equiv const$. □

Введем обозначение

$$\mu_{m,2} = \left[\lambda^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{T} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.5. *Пусть λ – фиксированное число. Тогда если $\mu^2 - \lambda^2 > 0$ и $|\mu| = \mu_{m,2}$, $m \in \mathbb{N}$, то нелокальная задача 1.3 имеет бесконечно много ненулевых решений. Для всех остальных чисел μ нелокальная задача 1.3 имеет только тождественно нулевое решение.*

Теорема 1.5 доказывается аналогично теореме 1.4, с сохранением общей схемы и ключевых моментов рассуждения.

Задача 1.2, сформулированная выше, представляет собой задачу с интегральным условием. Её суть состоит в отыскании решения уравнения (1.1), удовлетворяющее заданному интегральному условию

$$\int_0^T y(t)\,dt = 0.$$

Подобная постановка допускает естественное обобщение, связанное с заменой указанного интегрального условия более общим.

Рассмотрим функцию $N(t)$, заданную и определенную на промежутке $[0, T]$.

Задача 1.4. *Найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию*

$$\int_0^T N(t)y(t)\,dt = 0. \tag{1.18}$$

В дальнейшем будет установлено, что при определенных условиях существует бесконечное множество значений параметра μ, при которых имеют место нетривиальные решения задачи 1.4.

Теорема 1.6. *Пусть λ — фиксированное число и выполнено одно из следующих условий:*

(1) $N(t)$ – чётная, не тождественно нулевая периодическая функция, определённая при $t \in (-\infty, \infty)$ и имеющая период $\dfrac{T}{2}$;

(2) $N(t)$ – нечётная, не тождественно нулевая периодическая функция, определённая при $t \in (-\infty, \infty)$ и имеющая период $\dfrac{T}{2}$.

Тогда существует бесконечно много чисел μ таких, что для каждого из них задача 1.4 имеет ненулевые решения.

Доказательство. Предположим, что справедливо условие 1) теоремы. Функция $y(t)$, являющаяся решением задачи 1.4, также будет решением соответствующего дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' + \left(\mu^2 - \lambda^2\right) y = 0.$$

Поскольку функция $N(t)$ является четной и периодической, справедливо соотношение $N(t) = N(T - t)$. В результате, наряду с интегральным условием (1.18) решение $y(t)$ удовлетворяет также равенству

$$\int\limits_0^T N(t) y'(t)\, dt = 0. \tag{1.19}$$

Предположим, что выполняется условие $\mu^2 - \lambda^2 > 0$. В этом случае решение $y(t)$ может быть представлено в форме

$$y(t) = A \cos{(\gamma t)} + B \sin{(\gamma t)}, \;\text{ где }\; \gamma = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}.$$

Соотношения (1.18) и (1.19) приводят к системе линейных уравнений для A и B:

$$A \int\limits_0^T N(t) \cos{(\gamma t)}\, dt + B \int\limits_0^T N(t) \sin{(\gamma t)}\, dt = 0,$$

$$-A \int\limits_0^T N(t) \sin{(\gamma t)}\, dt + B \int\limits_0^T N(t) \cos{(\gamma t)}\, dt = 0.$$

Данная система допускает ненулевые решения только в том случае, если справедливы равенства:

$$\int\limits_0^T N(t) \cos{(\gamma t)}\, dt = 0, \qquad \int\limits_0^T N(t) \sin{(\gamma t)}\, dt = 0. \tag{1.20}$$

Пусть параметр γ выбран таким образом, что выполняется соотношение $\gamma T = 2\pi m$, где $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим второй интеграл из (1.20). Выполнив замену переменной $t = T - \tau$, после несложных преобразований получаем

$$\int\limits_0^T N(t) \sin{(\gamma t)}\, dt = \int\limits_0^T N(T - \tau) \sin{[\gamma (T - \tau)]}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T N(T-\tau)\left[\sin(\gamma T)\cos(\gamma\tau) - \cos(\gamma T)\sin(\gamma\tau)\right]\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_0^T N(T-\tau)\sin(\gamma\tau)\,d\tau = -\int\limits_0^T N(\tau)\sin(\gamma\tau)\,d\tau.$$

Тем самым значение рассматриваемого интеграла равно нулю, что обеспечивает выполнение второго условия (1.20).

Рассмотрим теперь первый интеграл из (1.20), имеем:

$$\int\limits_0^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt = \int\limits_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt + \int\limits_{T/2}^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt + \int\limits_0^{T/2} N\left(\tau + \frac{T}{2}\right)\cos\left[\gamma\left(\tau + \frac{T}{2}\right)\right]d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt + \int\limits_0^{T/2} N(\tau)\left[\cos(\gamma\tau)\cos\left(\frac{\gamma T}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \sin(\gamma\tau)\sin\left(\frac{\gamma T}{2}\right)\right]\,d\tau = \int\limits_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt - \int\limits_0^{T/2} N(\tau)\cos(\gamma\tau)\,d\tau = 0.$$

Таким образом, при $\gamma T = 2\pi m$ $(m = 1, 2, ...)$ интегральные условия (1.20) выполняются.

Пусть $\mu = \left(\lambda^2 + \gamma^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Выполнение равенств (1.20) позволяет выбрать такие числа A и B, которые удовлетворяют равенству (1.17). Тогда при таких значениях λ и μ функции $y(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)$ образуют ненулевые решения задачи 1.4.

В случае справедливости условия 2) теоремы, функция $N(t)$ удовлетворяет соотношению $N(t) = -N(T-t)$. Тогда в совокупности с условием периодичности это свойство обеспечивает выполнение интегральных равенств (1.20) для выбранных ранее значений γ, что, в свою очередь, вновь приводит к существованию нетривиальных решений задачи 1.4. $\square$

Замечание 1.1. *Фактически условием существования ненулевых решений нелокальной задачи 1.4 является условие (1.20); теорема 1.6, в свою очередь, приводит примеры функций $N(t)$, для которых это условие выполняется.*

1.3. Собственные значения и собственные функции для параболических и псевдопараболических уравнений с инволюцией

Полученные в разделах 1.1 и 1.2 утверждения о разрешимости задачи Коши расширяют возможности исследования спектральных задач для параболических и псевдопараболических уравнений, содержащих инволюцию в младших членах.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей Γ (для простоты — бесконечно дифференцируемой). Обозначим через $Q = \Omega \times (0, T)$ цилиндр с боковой поверхностью $S = \Gamma \times (0, T)$, где $0 < T < +\infty$.

Задача 1.5. *Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + \lambda u(x, t) + \mu u(x, T - t) = 0,$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{1.21}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial^2 / \partial x_i^2$, а числа λ, $\mu \in \mathbb{R}$ считаются заданными.

Искомое решение рассматриваемой задачи представим в форме

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) w_k(x).$$

Здесь $w_k(x)$ есть собственные функции однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа соответствующие собственным значениям β_k, а функции

$v_k(t)$ являются решениями следующей начальной задачи:

$$v_k'(t) + (\lambda - \beta_k)\, v_k(t) + \mu v_k(T - t) = 0, \qquad v_k(0) = 0.$$

Опираясь на доказанные в предыдущем разделе теоремы 1.1-1.3, можно непосредственно установить существование как нулевых, так и ненулевых решений задачи 1.5.

При замене в исходной задаче 1.5 начального условия (1.21) на одно из условий

$$u(x,0) = u(x,T), \quad u(x,0) = -u(x,T),$$

или на интегральное условие

$$\int\limits_0^T N(t) u(x,t)\, dt = 0,$$

применение теорем 1.4–1.6 позволяет для соответствующих нелокальных задач установить существование ненулевых решений.

Предложенный подход может быть распространён на исследование единственности и неединственности решений псевдопараболических уравнений вида

$$u_t(x,t) - \alpha \Delta u(x,t) - \beta \Delta u_t(x,t) + \lambda u(x,t) + \mu u(x, T - t) = 0, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

используемых при моделировании процессов фильтрации и влагопереноса в трещиноватых средах (см. [8, 19, 25, 68]).

1.4. Собственные значения и собственные функции для эллиптического уравнения с инволюцией

Результаты, полученные в настоящем разделе, показывают, что присутствие в уравнении слагаемого с инволютивным отклонением аргумента может кардинально изменить характер разрешимости первой краевой задачи, в частности условия единственности ее решений.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей Γ. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, рассмотрим следующее уравнение с линейной инволюцией:

$$u_{tt}(x, t) + \Delta u(x, t) + \lambda u(x, t) + \mu u(x, T - t) = 0, \tag{1.22}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$, а числа λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

Задача 1.6. *Найти решение $u(x, t)$ уравнения (1.22) в области Q, удовлетворяющее условиям:*

$$u(x, t)\,|_S = 0, \tag{1.23}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.24}$$

где $S = \Gamma \times (0, T)$.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа соответствующая собственным значениям $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$. Предполагается, что данная система ортонормирована в пространстве $L_2(\Omega)$. Хорошо известно, что указанные собственные функции и собственные значения существуют, причем все числа γ_k являются отрицательными [134].

Положим

$$\mu_{k,m} = -\lambda - \gamma_k + \frac{m^2\pi^2}{T^2}, \qquad k, m \in \mathbb{N}.$$

Прежде всего рассмотрим случай, когда $\lambda \in (-\infty, -\gamma_1)$.

Теорема 1.7. *Пусть λ – фиксированное число из промежутка $(-\infty, -\gamma_1)$. Тогда:*

(1) если $|\mu| < -\lambda - \gamma_1$, то задача 1.6 имеет только тождественно нулевое решение;

(2) если $\mu \geq -\lambda - \gamma_1$ и $\mu = \mu_{k,m}$ для $m = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, то задача 1.6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же $\mu \neq \mu_{k,m}$, то задача 1.6 имеет только тождественно нулевое решение;

(3) если $\mu \le \lambda + \gamma_1$ и $\mu = -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$, $l, k \in \mathbb{N}$, то задача 1.6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же $\mu \ne -\mu_{k,m}$, то задача 1.6 имеет только тождественно нулевое решение.

Доказательство. Предположим, что для параметра μ выполнено условие $|\mu| < -\lambda - \gamma_1$. Решение уравнения (1.22), удовлетворяющее условиям (1.23), (1.24), представим в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) w_k(x),$$

в котором соответственно функции $u_k(t)$ определяются из краевой задачи:

$$u_k''(t) + (\gamma_k + \lambda) u_k(t) + \mu u_k(T - t) = 0, \qquad t \in [0, T], \tag{1.25}$$

$$u_k(0) = u_k(T) = 0. \tag{1.26}$$

Умножив уравнение (1.25) на функцию $-u_k(t)$ и проинтегрировав на отрезке $[0, T]$, после несложных преобразований получим неравенство

$$\int_0^T u_k'^2(t)\,dt - (\lambda + \gamma_k + |\mu|) \int_0^T u_k^2(t)\,dt \le 0. \tag{1.27}$$

Тогда из неравенства (1.27) имеем, что при $|\mu| < -\lambda - \gamma_1$ функция $u_k(t) \equiv 0$ на отрезке $[0, T]$. Откуда следует, что в этом случае задача 1.6 имеет только тривиальное решение.

Пусть теперь $\mu \ge -\lambda - \gamma_1$ и $\mu = \mu_{k,m}$ при $m = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$. Дважды дифференцируя уравнение (1.25) и принимая во внимание соотношения

$$u_k''(T - t) = -(\gamma_k + \lambda) u_k(T - t) - \mu u_k(t),$$

$$u_k(T - t) = -\frac{1}{\mu}\left[u_k''(t) + (\gamma_k + \lambda) u_k\right], \tag{1.28}$$

приходим к дифференциальному уравнению более высокого порядка, не содержащему инволюции:

$$u_k^{IV}(t) + 2(\gamma_k + \lambda) u_k''(t) + \left[(\gamma_k + \lambda)^2 - \mu^2\right] u_k(t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{1.29}$$

Соответствующие условия следуют из (1.25) и (1.26):

$$u_k''(0) = u_k''(T) = 0. \tag{1.30}$$

При указанных выше значениях параметров μ и λ однородная краевая задача (1.29), (1.26), (1.30) допускает существование ненулевых решений, имеющих вид

$$u_{k,m}(t) = A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T} t\right),$$

где $A_k = const$.

Подстановка этого выражения в равенство (1.28) приводит к соотношению

$$u_{k,m}(T-t) = A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T} t\right).$$

В то же время прямое преобразование аргумента дает

$$u_{k,m}(T-t) = A_k \sin\left[\frac{\pi m}{T}(T-t)\right] = (-1)^{m+1} A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T} t\right).$$

Сравнение двух последних выражений приводит к условию $(-1)^{m+1} = 1$, которое выполняется тогда и только тогда, когда $m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$.

Исходя из вышеизложенного, можно заключить, что при $\mu = \mu_{k,m}$ для $m = 2l - 1$, $k, l \in \mathbb{N}$, функции

$$u_{m,k}(x,t) = A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T} t\right) w_k(x) \tag{1.31}$$

являются ненулевыми решениями исследуемой задачи 1.6.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu \geq -\lambda - \gamma_1$ и $\mu \neq \mu_{k,m}$. В рассматриваемых условиях существование ненулевых решений краевой задачи 1.6 тогда и только тогда, когда детерминант системы, получаемой из условий (1.26), (1.30), равен нулю, то есть при $\mu = \mu_{k,m}$. Так как по условию $\mu \neq \mu_{k,m}$, то $u_k(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,T]$, откуда $u(x,t) \equiv 0$.

Аналогичным образом можно установить, что функция, определяемая формулой (1.31), вновь является ненулевым решением краевой задачи 1.6, если $\mu \leq \lambda + \gamma_1$ и $\mu = -\mu_{k,m}$, где $m = 2l$, $k, l \in \mathbb{N}$. Если же $\mu \neq -\mu_{k,m}$, то однородная краевая задача 1.6 допускает исключительно тривиальное решение. $\square$

Перейдем к исследованию случая, когда $\lambda \in [-\gamma_1, \infty)$.

Теорема 1.8. *Пусть* λ *– фиксированное число из промежутка* $[-\gamma_1, \infty)$*. Тогда:*

(1) если $\mu > \lambda + \gamma_1$ *и* $\mu = \mu_{k,m}$ *для* $m = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, *то задача 1.6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же* $\mu \neq \mu_{k,m}$ *для* $m = 2l - 1$, *то задача 1.6 имеет только тождественно нулевое решение;*

(2) если $\mu < -\lambda - \gamma_1$ *и* $\mu = -\mu_{k,m}$ *для* $m = 2l$, $l, k \in \mathbb{N}$, *то задача 1.6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же* $\mu \neq -\mu_{k,m}$ *для* $m = 2l$, *то задача 1.6 имеет только тождественно нулевое решение;*

(3) если $|\mu| < \lambda + \gamma_1$ *и* $\mu = \mu_{k,m}$ *для* $m = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, *либо* $\mu = -\mu_{k,m}$ *для* $m = 2l$, $l, k \in \mathbb{N}$, *то однородная задача 1.6 имеет бесконечно много ненулевых решений; если же* $\mu \neq \mu_{k,m}$ *для* $m = 2l - 1$ *и* $\mu \neq -\mu_{k,m}$ *для* $m = 2l$, *то задача 1.6 имеет только тождественно нулевое решение;*

(4) если $\lambda = -\gamma_k + \frac{\pi^2 m^2}{2T^2}$ *и* $\mu = \frac{\pi^2 m^2}{2T^2}$ *для* $m = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, *либо* $\mu = -\frac{\pi^2 m^2}{2T^2}$ *для* $m = 2l$, $l, k \in \mathbb{N}$, *то задача 1.6 имеет бесконечно много ненулевых решений;*

(5) если $\lambda = -\gamma_k$ *и* $\mu = 0$, $k \in \mathbb{N}$, *то задача 1.6 только тождественно нулевое решение.*

Доказательство. Аналогично предыдущему случаю, при значениях параметра λ, принадлежащих промежутку $[-\gamma_1, \infty)$, решение задачи 1.6 будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) w_k(x).$$

При таком представлении для функций $u_k(t)$ и параметров λ и μ предполагается выполнение условий (1.29), (1.26), (1.30) и равенства (1.28).

Пусть $\mu > \lambda + \gamma_1$. Тогда для любого $\lambda \in [-\gamma_1, \infty)$ решение $u_k(t)$ уравнения (1.29) имеет следующий вид:

$$u_k(t) = A_k e^{\sqrt{y_k}t} + B_k e^{-\sqrt{y_k}t} + C_k \cos(\sqrt{z_k}t) + D_k \sin(\sqrt{z_k}t),$$

где $y_k = \mu - \lambda - \gamma_k$ и $z_k = \mu + \lambda + \gamma_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Используя условия (1.26) и (1.30), нетрудно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&A_k + B_k + C_k = 0,\\
&A_k e^{\sqrt{y_k}T} + B_k e^{-\sqrt{y_k}T} + C_k \cos(\sqrt{z_k}T) + D_k \sin(\sqrt{z_k}T) = 0,\\
&y_k A_k + y_k B_k - z_k C_k = 0,\\
&y_k A_k e^{\sqrt{y_k}T} + y_k B_k e^{-\sqrt{y_k}T} - z_k C_k \cos(\sqrt{z_k}T) - z_k D_k \sin(\sqrt{z_k}T) = 0.
\end{aligned}$$

Детерминант рассматриваемой системы $\Delta_k = -8\mu^2 \sinh\left(\sqrt{y_k}T\right)\sin\left(\sqrt{z_k}T\right)$ обращается в нуль при всех значениях $\mu = \mu_{k,m}$. Отсюда следует, что функции $u_k(t)$ будут отличны от нуля. При этом, указанные функции удовлетворяют условиям (1.28) при выполнении равенства $\mu = \mu_{k,m}$, где $m = 2l - 1$, $k, l \in \mathbb{N}$. Таким образом, искомые ненулевые решения исходной краевой задачи (1.22), (1.23), (1.24) при таких значениях параметров μ и λ представляются функциями вида:

$$u_{m,k}(x,t) = D_k \sin\left(\frac{m\pi}{T}t\right) w_k(x), \text{ где } m = 2l-1,\ k, l \in \mathbb{N}.$$

Несложно убедиться, что в случае, когда $\mu \neq \mu_{k,m}$ при всех $m = 2l-1$, детерминант системы Δ_k не равен нулю ($\Delta_k \neq 0$). В таком случае рассматриваемая система имеет единственное решение, являющееся тождественно нулевым, что означает $u_k(t) \equiv 0$. Следовательно, функция $u(x,t) \equiv 0$.

Рассмотрим случай $\mu < -\lambda - \gamma_1$, $\lambda \in [-\gamma_1, \infty)$. Тогда общее решение $u_k(t)$ записывается в виде

$$u_k(t) = A_k \cos\left(\sqrt{-y_k}t\right) + B_k \sin\left(\sqrt{-y_k}t\right) + C_k e^{\sqrt{-z_k}t} + D_k e^{-\sqrt{-z_k}t}.$$

Подстановка в условия (1.26) и (1.30) приводит к однородной алгебраической системе, детерминант которой обращается в нуль при выполнении условия $\mu = -\mu_{k,m}$. В этом случае система допускает ненулевые решения, и соответствующие функции имеют вид $u_{k,m}(t) = B_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}t\right)$. Для таких функций справедливо равенство

$$u_{k,m}(T-t) = (-1)^{m+1} B_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}t\right), \tag{1.32}$$

которое следует из явного преобразования аргумента. В то же время из условия (1.28) непосредственно вытекает соотношение

$$u_{k,m}(T-t) = -B_k \sin\left(\frac{\pi m}{T}t\right). \tag{1.33}$$

Сопоставление правых частей равенств (1.32) и (1.33) показывает, что их согласование возможно лишь при выполнении условия $(-1)^{m+1} = -1$, то есть при $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Следовательно, при $\mu = -\mu_{k,m}$ для $m = 2l$, $k, l \in \mathbb{N}$, задача 1.6 имеет ненулевые решения, а при остальных значениях параметров – лишь тривиальное.

При выполнении неравенства $|\mu| < \lambda + \gamma_1$ функции $u_k(t)$ представляются в виде

$$u_k(t) = A_k \cos\left(\sqrt{-y_k}t\right) + B_k \sin\left(\sqrt{-y_k}t\right) + C_k \cos\left(\sqrt{z_k}t\right) + D_k \sin\left(\sqrt{z_k}t\right).$$

Аналогично предыдущему случаю, применение условий (1.26) и (1.30) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений, детерминант которой обращается в нуль при $\mu = \pm\mu_{k,m}$. При этом выполнение условия (1.28) возможно лишь в следующих случаях:

$$\mu = \mu_{k,m} \text{ при } m = 2l-1, \quad \mu = -\mu_{k,m} \text{ при } m = 2l, \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, задача 1.6 допускает существование ненулевых решений только при указанных значениях параметра μ. Во всех остальных случаях, то есть при $\mu \neq \mu_{k,m}$, $m = 2l-1$ и $\mu \neq -\mu_{k,m}$, $m = 2l$, соответствующая однородная система имеет лишь тривиальное решение. Вследствие этого коэффициенты A_k, B_k, C_k и D_k одновременно обращаются в нуль, что влечёт тождественное равенство $u_k(t) \equiv 0$ для любого $t \in [0, T]$, $k \in \mathbb{N}$ и, как следствие, $u(x,t) \equiv 0$.

В рамках случая 4) непосредственной подстановкой можно установить, что задача 1.6 обладает бесконечным числом ненулевых решений

$$u_{k,m}(t) = A_k \sin\left(\frac{\pi m}{T} t\right)$$

при значениях параметров $\lambda = -\gamma_k + \frac{\pi^2 m^2}{2T^2}$ и $\mu = \frac{\pi^2 m^2}{2T^2}$ для нечётных номеров $m = 2l - 1$, $l, k \in \mathbb{N}$, а также при тех же значениях параметра λ и при $\mu = -\frac{\pi^2 m^2}{2T^2}$ для чётных значений $m = 2l$, $l, k \in \mathbb{N}$.

В случае 5), при значениях $\lambda = -\gamma_k$, $\mu = 0$, $k \in \mathbb{N}$, подстановка в уравнение (1.25) с учетом условия (1.26) приводит к тождеству $u_k(t) \equiv 0$, что означает отсутствие нетривиальных решений краевой задачи 1.6. $\square$

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

В данной главе исследуются краевые задачи для линейных уравнений в частных производных второго порядка с инволютивным отклонением аргумента в младших членах. В основу исследования положен единый методологический подход, базирующийся на получении априорных оценок и применении метода продолжения по параметру, подробно изложенный автором в работе [144]. В разделе 2.1 рассматриваются особенности применения данного метода для исследования разрешимости краевых задач для параболических уравнений, а в разделе 2.2 – для эллиптического случая.

2.1. Краевые задачи для параболических уравнений с инволютивным отклонением аргумента

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой, для простоты бесконечно дифференцируемой, границей Γ. Обозначим через $Q = \Omega \times (0, T)$ цилиндр конечной высоты T, а через $S = \Gamma \times (0, T)$ – его боковую поверхность. Далее, пусть Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $N(t)$ и $f(x,t)$ считаются заданными и определёнными для всех $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$. Кроме того, пусть $\varphi(t)$ – инволюция, определенная на отрезке $[0, T]$, а γ –фиксированное вещественное число.

Задача 2.1. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t) \tag{2.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)\,|_S = 0, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = \gamma u(x,T), \quad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Задача 2.2. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (2.1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2.2), *а также условие*

$$\int_0^T N(t)u(x,t)\,dt = 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Следует отметить, что при отсутствии слагаемого с инволюцией, то есть в случае $b(x,t) \equiv 0$, нелокальная задача 2.1 достаточно подробно исследована (см., например, работы [35, 37, 44]). Существенно иная ситуация возникает при $b(x,t) \neq 0$. В этом случае, особенно при переменных коэффициентах, даже в простейшей ситуации $\gamma = 0$, вопрос существования и единственности решений соответствующей краевой задачи до настоящего времени оставался открытым.

Аналогично, для уравнений параболического типа без инволюции с интегральными условиями по временной переменной вопросы разрешимости изучались в ряде научных трудов (см. работы [38,62,63]). Вместе с тем, при $b(x,t) \neq 0$ задачи с интегральным условием (2.4) ранее не исследовались, что подчеркивает новизну рассматриваемой постановки.

Доказательство разрешимости задач 2.1 и 2.2 будет основано на методе продолжения по параметру [64, гл. III, §14]. В рамках данного метода существование решения линейной задачи, принадлежащей непрерывному по параметру семейству однотипных задач, обеспечивается выполнением следующих условий: разрешимость одной задачи из этого семейства и наличие априорной оценки решений, равномерной по параметру, для всех задач данного однопараметрического семейства.

Пусть $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда существует константа $d_0 > 0$, зависящая только от области Ω, такая, что

$$\int\limits_{\Omega} \eta^2(x)\,dx \leq d_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \eta_{x_i}^2\,dx \tag{2.5}$$

(см. [42, 61]).

Теорема 2.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$a(x,t) \in C(\overline{Q}), \qquad b(x,t) \in C(\overline{Q}), \qquad \varphi(t) \in C^1\left([0,T]\right), \tag{2.6}$$

$$a(x,t) \geqslant 0 \text{ при } (x,t) \in \overline{Q}, \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(t) \leq -\varphi_0 < 0 \text{ при } t \in [0,T], \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{d_0} + \min_{\overline{Q}} a(x,t) - \sqrt{\varphi_1} \max_{\overline{Q}} |b(x,t)| > 0, \tag{2.8}$$

$$|\gamma| < 1. \tag{2.9}$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ нелокальная задача 2.1 имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство. Будем использовать метод продолжения по параметру, рассмотренный выше. Для этого введём вещественный параметр $\rho \in [0,1]$ и исследуем соответствующее однопараметрическое семейство краевых задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + \rho b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t) \tag{2.10}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.2), (2.3).

В случае, когда параметр ρ принимает нулевое значение, рассматриваемая краевая задача (2.10), (2.2), (2.3) разрешима в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$, при соблюдении условий (2.6), (2.9), а также неравенства $\dfrac{1}{d_0} + a(x,t) \geq 0$, которое, в свою очередь, обеспечивается условием (2.8) (см. [35, 37, 44]).

Ниже будет установлено, что для всех возможных решений краевой задачи (2.10), (2.2), (2.3) при всяком $\rho \in [0,1]$ справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K_0 \|u\|_{L_2(Q)}, \tag{2.11}$$

где K_0 – некоторая постоянная, определяющаяся лишь функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, областью Ω, а также числами T и γ.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_Q \left[u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + \rho b(x,t)u(x,\varphi(t))\right] u(x,t)\,dxdt =$$

$$= \int\limits_Q f(x,t)u(x,t)\,dxdt.$$

Интегрируя по частям, а также используя неравенства Юнга и Гельдера и неравенство (2.5), несложно от данного равенства перейти к следующему неравенству

$$\frac{1-\gamma^2}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \int\limits_Q \left(a(x,t) + \frac{1}{d_0}\right) u^2(x,t)\,dxdt \le$$

$$\le \frac{\delta^2}{2}\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt +$$

$$+ \max_{\overline{Q}} |b(x,t)| \left(\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q u^2(x,\varphi(t))\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.12)$$

Преобразуя последний интеграл в правой части с помощью подстановки $\tau = \varphi(t)$ и используя условие (2.7), из неравенства (2.12) получаем

$$\frac{1-\gamma^2}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \left[\frac{1}{d_0} + \min_{\overline{Q}} a(x,t) - \sqrt{\varphi_1}\max_{\overline{Q}}|b(x,t)|\right]\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt \le$$

$$\le \frac{\delta^2}{2}\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt. \qquad (2.13)$$

Совместное использование условий (2.8) и (2.9), а также тот факт, что параметр δ может быть выбран сколь угодно малым, позволяет заключить, что из неравенства (2.13) следует следующая оценка:

$$\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \int\limits_Q u^2(x,t)dxdt \le K_1 \int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt \qquad (2.14)$$

с постоянной K_1, определяющейся функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, областью Ω, числами γ и T.

Оценка (2.14) и известные оценки решений краевых задач для параболических уравнений [42] и дают необходимую оценку (2.11).

Как было установлено выше, тот факт, что краевая задача (2.10), (2.2), (2.3) при $\rho = 0$ разрешима в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$, вместе с выполнением априорной оценки (2.11) позволяет установить разрешимость нелокальной задачи 2.1 в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$.

Единственность решений очевидна. $\square$

Далее перейдем к анализу вопроса разрешимости нелокальной задачи 2.2.

Выполним вначале некоторые действия, сводящие нелокальную задачу 2.2 к задаче с условием $u(x,0) = Bu$, с некоторым линейным оператором B.

Умножим уравнение (2.1) на функцию $N(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Применив метод интегрирования по частям, а также выполнив подстановку $\tau = \varphi(t)$ в слагаемом с инволюцией, приходим к следующему равенству:

$$N(0)u(x,0) - N(T)u(x,T) + \int_0^T [N'(t) - a(x,t)N(t) -$$

$$- N(\varphi(t))b(x,\varphi(t))\varphi'(t)]\, u(x,t)\, dt = -\int_0^T N(t)f(x,t)\, dt.$$

Пусть выполняется условие

$$N(0) \neq 0. \tag{2.15}$$

Введем обозначения:

$$\gamma = \frac{N(T)}{N(0)},$$

$$N_1(x,t) = \frac{1}{N(0)}\left[a(x,t)N(t) + b(x,\varphi(t))N(\varphi(t))\varphi'(t) - N'(t)\right],$$

$$u_0(x) = -\frac{1}{N(0)} \int\limits_0^T N(t) f(x,t)\, dt.$$

Исходя из введенных обозначений, нелокальная задача 2.2 сводится к следующей формулировке:

Задача 2.3. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (2.1) и такую, что для нее выполняются условие (2.2), а также условие*

$$u(x,0) = \gamma u(x,T) + \int\limits_0^T N_1(x,t) u(x,t)\, dt + u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.16}$$

Положим

$$\overline{N}_1 = \max_{\overline{\Omega}} \left(\int\limits_0^T N_1^2(x,t)\, dt \right).$$

Теорема 2.2. *Пусть для функций $a(x,t)$, $b(x,t)$, $\varphi(t)$ и $N(t)$ выполнены условия (2.7) и (2.15), а также условия:*

$$a(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b(x,t) \in C\left(\overline{Q}\right), \quad N(t) \in C^1([0,T]), \quad \varphi(t) \in C^1\left([0,T]\right), \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{d_0} + \min_{\overline{Q}} a(x,t) - \overline{N}_1 - \sqrt{\varphi_1} \max_{\overline{Q}} |b(x,t)| > 0, \tag{2.18}$$

$$\sqrt{2}\,|N(T)| < |N(0)|. \tag{2.19}$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ нелокальная краевая задача 2.2 имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.1 исследуем краевую задачу (2.10), (2.2), (2.16) при $\rho \in [0,1]$. В случае $\rho = 0$ при выполнении условий (2.7), (2.17) и (2.18) для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$, данная задача будет разрешима в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ (см. [35, 37, 44]). Далее, для решений $u(x,t)$ краевой задачи (2.10), (2.2), (2.16) при всех ρ

и при условиях теоремы имеет место оценка (2.14), в которой K_1 – некоторая постоянная, определяющаяся заданными функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$, $\varphi(t)$ и $N(t)$, а также областью Ω и числом T. В силу теоремы о методе продолжения по параметру выполнение оценки (2.14) в совокупности с известными оценками решений краевых задач для параболических уравнений (см., например, [42]) гарантирует разрешимость задачи (2.1), (2.2), (2.16) в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$. Очевидно, что для этого решения будет выполняться интегральное условие (2.4). Другими словами, решение краевой задачи (2.1), (2.2), (2.16) и будет искомым решением нелокальной задачи 2.2.

Единственность решений очевидна. $\square$

2.2. Краевые задачи для эллиптических уравнений с инволютивным отклонением аргумента

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой, для простоты бесконечно дифференцируемой, границей Γ. Обозначим через $Q = \Omega \times (0,T)$ цилиндр конечной высоты T, а через $S = \Gamma \times (0,T)$ – его боковую поверхность.

В цилиндре Q рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t) + \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t), \tag{2.20}$$

где Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, функции $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $\varphi(t)$ – инволюция, определенная на отрезке $[0,T]$.

Задача 2.4. *Найти решение* $u(x,t)$ *уравнения* (2.20) *в области* Q, *удовлетворяющее условиям:*

$$u(x,t)\,|_S = 0, \tag{2.21}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.22}$$

Задача 2.5. *Найти решение* $u(x,t)$ *уравнения* (2.20) *в области* Q, *удовлетворяющее (2.21), а также условиям:*

$$u_t(x,0) = 0, \qquad u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.23}$$

Задача 2.6. *Найти решение* $u(x,t)$ *уравнения (2.20) в области* Q, *удовлетворяющее (2.21), а также условиям:*

$$u(x,0) = \alpha u(x,T), \qquad u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.24}$$

где α *– действительное число.*

Обратим внимание, что при $\alpha = 1$ условие (2.24) представляется как нелокальное условие Ионкина [29].

При условии $b(x,t) = 0$ краевые задачи 2.4 и 2.5 были подробно исследованы и к настоящему времени хорошо описаны в литературе (см., в частности, [43]). Однако переход к случаю $b(x,t) \neq 0$, особенно при наличии переменных коэффициентов, принципиально усложняет ситуацию. Для таких постановок вопросы существования и единственности решений рассматриваемых задач до настоящего времени оставались открытыми.

Аналогичная ситуация наблюдается и в теории нелокальных краевых задач. В случае эллиптических уравнений без инволютивных преобразований соответствующие задачи исследовались, в частности, в работах А.Л. Скубачевского [59, 60] и А.К. Гущина, В.П. Михайлова [23]. Вопросы разрешимости родственных нелокальных задач, близких по структуре к задаче 2.6, исследовались в работах [36,105]. Вместе с тем вопросы, касающиеся существования решений нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений, содержащих произвольную инволюцию, до настоящего времени оставались нерассмотренными в литературе.

Ниже формулируется и доказывается следующая теорема для задачи 2.4.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$a(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \varphi(t) \in C^1([0,T]), \tag{2.25}$$

$$a(x,t) < 0 \text{ при } (x,t) \in \overline{Q}, \quad -\varphi_1 \le \varphi'(t) \le -\varphi_0 < 0 \text{ при } t \in [0,T], \tag{2.26}$$

$$\frac{1}{d_0} + \frac{2}{T^2} - \min_{\overline{Q}} a(x,t) - \sqrt{\varphi_1}\max_{\overline{Q}} |b(x,t)| > 0. \tag{2.27}$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ задача 2.4 имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу с параметром $\rho \in [0,1]$: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в области Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) + \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + \rho b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t), \tag{2.28}$$

и удовлетворяющую условиям (2.21), (2.22).

Применение теоремы о продолжении по параметру позволяет утверждать, что задача (2.28), (2.21), (2.22) разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ при всех $\rho \in [0,1]$, если выполнены следующие предположения: 1) при $\rho = 0$ соответствующая краевая задача разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$; 2) для всех решений $u(x,t)$ задачи (2.28), (2.21), (2.22) справедлива априорная оценка

$$||u||_{W_2^2(Q)} \le M_0||f||_{L_2(Q)}, \tag{2.29}$$

равномерная по параметру ρ, где положительная постоянная M_0 определяется коэффициентами $a(x,t)$, $b(x,t)$, инволюцией $\varphi(t)$, а также областью Ω и числом T.

Разрешимость задачи (2.28), (2.21), (2.22) при $\rho = 0$ в пространстве $W_2^2(Q)$ обеспечивается выполнением условий (2.25) и неравенства $\dfrac{1}{d_0} + \dfrac{2}{T^2} - a(x,t) > 0$, которое является следствием условия (2.27) [43].

Далее покажем, что любое решение $u(x,t)$ краевой задачи (2.28), (2.21), (2.22) удовлетворяет априорной оценке вида (2.29), равномерной по параметру ρ. Для этого умножим уравнение (2.28) на функцию $-u(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Q. В результате имеем

$$-\int\limits_Q \left[u_{tt}(x,t)+\Delta u(x,t)+a(x,t)u(x,t)+\rho b(x,t)u(x,\varphi(t))\right]u(x,t)dxdt=$$

$$=-\int\limits_Q f(x,t)u(x,t)dxdt.$$

Переходя к интегрированию по частям и принимая во внимание условия (2.21), (2.22), приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q u_{x_i}^2(x,t)\,dxdt+\int\limits_Q u_t^2(x,t)\,dxdt-\int\limits_Q a(x,t)u^2(x,t)\,dxdt-$$

$$-\rho\int\limits_Q b(x,t)u(x,\varphi(t))u(x,t)\,dxdt=-\int\limits_Q f(x,t)u(x,t)\,dxdt.$$

Используя (2.5) и неравенство

$$\int\limits_Q u_t^2(x,t)dxdt\geq\frac{2}{T^2}\int\limits_Q u^2(x,t)dxdt,$$

а также неравенства Гельдера и Юнга, получаем

$$\left[\frac{1}{d_0}+\frac{2}{T^2}-\min_{\overline{Q}}a(x,t)\right]\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt\leq$$

$$\leq\frac{\delta^2}{2}\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt+$$

$$+\max_{\overline{Q}}|b(x,t)|\left(\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q u^2(x,\varphi(t))\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.30)$$

В последнем интеграле, содержащем инволюцию, выполним замену $z=\varphi(t)$ и с учетом условия (2.26) из соотношения (2.30) получим следующее неравенство:

$$\left[\frac{1}{d_0}+\frac{2}{T^2}-\min_{\overline{Q}}a(x,t)-\sqrt{\varphi_1}\max_{\overline{Q}}|b(x,t)|\right]\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt\leq$$

$$\leq \frac{\delta^2}{2}\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt.$$

Принимая во внимание условие (2.27) и выбирая параметр δ достаточно малым, из полученного неравенства следует оценка

$$\int\limits_Q u^2(x,t)\,dxdt \leq M_1 \int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt, \tag{2.31}$$

где положительная постоянная M_1 определяется коэффициентами $a(x,t)$ и $b(x,t)$, инволюцией $\varphi(t)$, а также областью Ω и числом T.

Таким образом, для всех решений $u(x,t)$ задачи (2.28), (2.21), (2.22) установлена равномерная по ρ априорная оценка (2.29). Это, в свою очередь, обеспечивает разрешимость краевой задачи (2.28), (2.21), (2.22) в пространстве $W_2^2(Q)$ при всех $\rho \in [0,1]$, в том числе при $\rho = 1$. Тем самым установлено существование решения краевой задачи 2.4 в пространстве $W_2^2(Q)$. Единственность решения очевидна. □

Далее формулируется теорема разрешимости задачи 2.5.

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условия (2.25), (2.26), а также условие*

$$\frac{1}{d_0} - \min_{\overline{Q}} a(x,t) - \sqrt{\varphi_1}\max_{\overline{Q}}|b(x,t)| > 0. \tag{2.32}$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ задача 2.5 имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Для всех значений параметра ρ из отрезка $[0,1]$ вновь обратимся к рассмотрению краевой задачи (2.28), (2.21), (2.23). В случае $\rho = 0$, при соблюдении условий (2.25) и (2.26), задача (2.28), (2.21), (2.23) является разрешимой в пространстве $W_2^2(Q)$ для произвольной функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ (см. [43]).

Для всех решений $u(x,t)$ задачи (2.28), (2.21), (2.23) при $\rho \neq 0$ и при выполнении условий теоремы (2.25), (2.26), (2.32), справедлива оценка

$$\int\limits_Q u_t^2(x,t)dxdt + \int\limits_Q u^2(x,t)dxdt \leq M_2 \int\limits_Q f^2(x,t)dxdt, \tag{2.33}$$

где постоянная M_2 определяется областью Ω и функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$, $\varphi(t)$.

Поскольку задача (2.28), (2.21), (2.23) при $\rho = 0$ разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$, с учётом оценки (2.33) и применением теоремы о продолжении по параметру [64, с. 146] получаем, что задача 2.5 также разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$. Единственность решения при этом очевидна. $\square$

Теперь обратимся к анализу разрешимости нелокальной задачи 2.6.

Пусть α_1 и α_2 – фиксированные параметры, связанные соотношениями:

$$1-\alpha^2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_1 = \max(1-\alpha^2, 0), \quad \alpha_2 = \alpha_1 - (1-\alpha^2).$$

Теорема 2.5. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$a(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad a(x,y) \le -a_0 < 0 \ \textit{при} \ (x,t) \in \overline{Q}, \tag{2.34}$$

$$b(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad \sqrt{t}|b(x,t)| \le b_0\sqrt{\varphi(t)}, \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}, \tag{2.35}$$

$$\varphi(t) \in C^1([0,T]), \qquad -\varphi_1 \le \varphi'(t) \le -\varphi_0 < 0 \ \textit{при}\ t \in [0,T], \tag{2.36}$$

$$\frac{\alpha_2^2}{2T} + \frac{2\alpha_2}{T} + 2Tb_0\sqrt{\varphi_1} < 2Ta_0 + \frac{T}{d_0}, \tag{2.37}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$ задача 2.6 имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Опираясь на подход, предложенный в работе [36], обратимся к следующей нелокальной краевой задаче: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) + \Delta u(x,t) - \varepsilon \Delta u_{tt}(x,t) +$$

$$+ a(x,t)u(x,t) + b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t), \tag{2.38}$$

($\varepsilon > 0$), удовлетворяющую условиям (2.21) и (2.24).

Докажем, что существует такое число ε_0, при котором для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и при $f(x,t) \in L_2(Q)$ задача (2.38), (2.21), (2.24) имеет решение $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, причем $\Delta u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$. Доказательство будет проводится с использованием априорных оценок.

Умножим уравнение (2.38) на функцию $-tu(x,t)$ и выполним интегрирование по области Q для вывода первой априорной оценки. В результате ряда преобразований, не представляющих значительной сложности, получим

$$\int\limits_Q \left[tu_t^2(x,t) + \sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2(x,t) + a_0 tu^2(x,t) + \varepsilon \sum_{i=1}^n tu_{x_i t}^2(x,t) \right] dxdt +$$

$$+\frac{\alpha_1}{2} \int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \frac{\varepsilon\alpha_1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T)\,dx \le$$

$$\le \frac{\alpha_2}{2} \int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \frac{\varepsilon\alpha_2}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T)\,dx +$$

$$+ \left| \int\limits_Q tb(x,t)u(x,t)u(x,\varphi(t))\,dxdt \right| + \left| \int\limits_Q tu(x,t)f(x,t)\,dxdt \right|. \qquad (2.39)$$

Для оценки третьего интегрального слагаемого, входящего в правую часть (2.39), воспользуемся неравенством Гельдера. Далее, производя замену переменной $z = \varphi(t)$, получим

$$\left| \int\limits_Q tb(x,t)u(x,t)u(x,\varphi(t))\,dxdt \right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_Q tb^2(x,t)u^2(x,\varphi(t))\,dxdt \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt \right)^{1/2} \le$$

$$\le b_0\sqrt{\varphi_1} \left(\int\limits_Q \varphi(t)u^2(x,\varphi(t))\,dxdt \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt \right)^{1/2} =$$

$$= b_0\sqrt{\varphi_1}\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt. \qquad (2.40)$$

В частном случае $\alpha_2 = 0$ искомая первая априорная оценка устанавливается из неравенств (2.39) и (2.40). В связи с этим в рамках дальнейшего исследования будем полагать параметр $\alpha_2 > 0$.

Для произвольной функции $v(x,t)$ справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega v^2(x,T)\,dx \le \frac{\delta_0^2}{T}\int\limits_Q tv_t^2(x,t)\,dxdt + \left(\frac{2}{T^2}+\frac{1}{\delta_0^2 T}\right)\int\limits_Q tv^2(x,t)\,dxdt, \quad (2.41)$$

где $\delta_0 > 0$ – произвольная константа. Для доказательства данного неравенства достаточно воспользоваться равенством

$$\int\limits_\Omega v^2(x,T)\,dx = \frac{2}{T^2}\int\limits_Q tv^2(x,t)\,dxdt + \frac{2}{T^2}\int\limits_Q t^2 v(x,t)v_t(x,t)\,dxdt$$

и применить к последнему слагаемому справа неравенство Юнга.

Применяя неравенство (2.41) к функции $u(x,T)$ и ее производным $u_{x_i}(x,T)$, $i=\overline{1,n}$, а также используя неравенство Юнга с учетом (2.5) и (2.40), несложно преобразовать (2.39) к следующему виду:

$$\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \left[1-\frac{\delta_0^2\alpha_2}{2T}\right]\int\limits_Q tu_t^2(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_Q\sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2(x,t)\,dxdt +$$

$$+\left[a_0 - \frac{\alpha_2}{2}\left(\frac{2}{T^2}+\frac{1}{\delta_0^2 T}\right) - b_0\sqrt{\varphi_1} + \frac{1}{2d_0}\right]\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt +$$

$$+\varepsilon\left[1-\frac{\delta_0^2\alpha_2}{2T}\right]\int\limits_Q\sum_{i=1}^n tu_{x_it}^2(x,t)\,dxdt + \frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T)\,dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon\alpha_2}{2}\left(\frac{2}{T^2}+\frac{1}{\delta_0^2 T}\right)\int\limits_Q\sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2(x,t)\,dxdt +$$

$$+\frac{\delta^2 T}{2}\int\limits_Q tu^2(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt. \qquad (2.42)$$

Принимая во внимание условие (2.37) и произвольность выбора малого параметра δ, получаем, что при $\varepsilon_0 \in \left(0; \frac{2T^2}{\alpha_2^2+4\alpha_2}\right)$ для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ из неравенства (2.42) следует априорная оценка

$$\int\limits_Q \left[tu_t^2(x,t) + tu^2(x,t) + \sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2(x,t) + \varepsilon \sum_{i=1}^n tu_{x_i t}^2(x,t) \right] dxdt+$$

$$+\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx + \varepsilon \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,T)\,dx \leq M_3 \int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt, \tag{2.43}$$

где постоянная M_3 определяется функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, областью Ω, а также числами α и T.

Далее рассмотрим произведение уравнения (2.38) и функции $t\Delta u(x,t)$ с последующим интегрированием по области Q. В результате получим

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n tu_{x_i t}^2(x,t) + t(\Delta u(x,t))^2 + a_0 \sum_{i=1}^n tu_{x_i}^2 + \varepsilon t \left(\Delta u_t(x,t)\right)^2 \right] dxdt+$$

$$+\frac{\alpha_1}{2} \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)\,dx + \frac{\varepsilon\alpha_1}{2} \int\limits_\Omega \left(\Delta u(x,T)\right)^2\,dx+$$

$$+\int\limits_Q tb(x,t)\Delta u(x,t)u(x,\varphi(t))\,dxdt \leq \frac{\alpha_2}{2} \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)\,dx+$$

$$+\frac{\varepsilon\alpha_2}{2} \int\limits_\Omega \left(\Delta u(x,T)\right)^2\,dx + \int\limits_Q t\Delta u(x,t) f(x,t)\,dxdt. \tag{2.44}$$

Повторяя рассуждения, приведшие к оценке (2.43), и используя неравенство Юнга совместно с уже полученной оценкой (2.43), из (2.44) выводится следующая априорная оценка:

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n tu_{x_i t}^2(x,t) + t(\Delta u(x,t))^2 + \varepsilon t \left(\Delta u_t(x,t)\right)^2 \right] dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)\,dx + \varepsilon \int\limits_\Omega \left(\Delta u(x,T)\right)^2\,dx \leq M_4 \int\limits_Q f^2(x,t)\,dxdt, \tag{2.45}$$

где постоянная M_4 определяется функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, областью Ω и числами α и T.

Для получения следующей априорной оценки произведем умножение уравнения (2.38) на функцию $-t\Delta u_{tt}(x,t)$ с последующим интегрированием по области Q, в результате чего имеем

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n tu^2_{x_itt}(x,t) + t(\Delta u_t(x,t))^2 + a_0\sum_{i=1}^n tu^2_{x_it}(x,t) + \varepsilon t\left(\Delta u_{tt}(x,t)\right)^2\right] dxdt+$$

$$+\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_\Omega \left[(\Delta u(x,T))^2 + a_0\sum_{i=1}^n u^2_{x_i}(x,T)\right]\, dx \le$$

$$\le \frac{\alpha_2}{2}\int\limits_\Omega \left[(\Delta u(x,T))^2 + a_0\sum_{i=1}^n u^2_{x_i}(x,T)\right]\, dx+$$

$$+\int\limits_Q tb(x,t)\Delta u_{tt}(x,t)u(x,\varphi(t))\, dxdt + \int\limits_Q (tf(x,t))'_t\Delta u_t\, dxdt.$$

Применение оценок (2.43) и (2.45), в сочетании с неравенством Юнга позволяет, по аналогии с предыдущими рассуждениями, вывести следующую априорную оценку:

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n tu^2_{x_itt}(x,t) + t(\Delta u_t(x,t))^2 + \varepsilon t\left(\Delta u_{tt}(x,t)\right)^2\right] dxdt+$$

$$+\int\limits_\Omega (\Delta u(x,T))^2\, dx \le M_5\int\limits_Q \left[f^2(x,t) + f_t^2(x,t)\right]\, dxdt, \qquad (2.46)$$

где M_5 – константа определяемая функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $\varphi(t)$, а также областью Ω и числами α и T.

Из оценки (2.46) непосредственно следуют равномерные по ε оценки

$$\int\limits_Q \left[u^2_{tt}(x,t) + \sum_{i=1}^n u^2_{x_it}(x,t) + \varepsilon^2\left(\Delta u_{tt}(x,t)\right)^2\right] dxdt \le$$

$$\le M_6\int\limits_Q \left[f^2(x,t) + f_t^2(x,t)\right]\, dxdt,$$

$$\int\limits_Q (\Delta u(x,t))^2 \, dxdt \leq M_7 \int\limits_Q \left[f^2(x,t) + f_t^2(x,t) \right] \, dxdt,$$

где M_6 и M_7 – константы определяющиеся функциями $a(x,t)$, $b(x,t)$, инволюцией $\varphi(t)$, областью Ω, а также числами α и T.

Указанные оценки выводятся аналогично соответствующим оценкам из работы [36].

Совокупность найденных априорных оценок дает возможность выполнить предельный переход. С этой целью рассмотрим последовательность чисел $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ из промежутка $(0, \varepsilon_0)$, такую, что $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Пусть $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ семейство решений краевых задач (2.38), (2.21), (2.24), соответствующее значениями $\varepsilon = \varepsilon_m$. В силу ограниченности указанного семейства в пространстве $W_2^2(Q)$ и рефлексивности гильбертова пространства, существует подпоследовательность $\{u_{m_k}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, для которой при $k \to \infty$ выполняются следующие сходимости:

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в } W_2^2(Q),$$

$$\varepsilon_{m_k} \Delta u_{m_k tt}(x,t) \to 0 \text{ слабо в } L_2(Q),$$

$$u_{m_k}(x,0) \to u(x,0) \text{ слабо в } W_2^2(\Omega),$$

$$u_{m_k}(x,T) \to u(x,T) \text{ слабо в } W_2^2(\Omega).$$

Следовательно, при выполнении условий (2.34)-(2.37) предельная функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи 2.6.

Доказательство единственности решения в пространстве $W_2^2(Q)$ опирается на априорную оценку (2.43), имеющей место при выполнении условия (2.37) теоремы. Действительно, при $f(x,t) \equiv 0$ из (2.43) вытекает равенство $u(x,0) = 0$, вследствие чего $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ является решением однородной эллиптической краевой задачи. Отсюда непосредственно вытекает единственность решения нелокальной краевой задачи 2.6. $\square$

3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ В СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

3.1. Эллиптические и параболические уравнения с инволюцией и вырождением в старших производных

Пусть Ω – интервал $(0,1)$ оси Ox, $Q = \Omega \times (0,T)$ — прямоугольник конечной высоты T. Далее, пусть $\varphi(x)$ – определенная на отрезке $[0,1]$ инволюция, $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные, определенные на множестве $\overline{Q}$ функции.

Задача 3.1. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - a(x,t)u_{xx}(\varphi(x),t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{3.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{3.3}$$

Задача 3.2. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) + a(x,t)u_{xx}(\varphi(x),t) - c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{3.4}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.2) и (3.3), а также условие

$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{3.5}$$

В частном случае, при $a(x,t) \equiv 0$ представленные задачи 3.1 и 3.2 сводятся к известным краевым задачам для параболических и, соответственно, эллиптических дифференциальных уравнений, не содержащих инволюцию, теория которых подробно разработана. В то же время при $a(x,t) \neq 0$ указанные задачи ранее рассматривались исключительно в ограниченной постановке, а именно при $a(x,t) \equiv const$, $\varphi(x) = 1 - x$.

Положим

$$a_1(x,t) = 1 - a(x,t)a(\varphi(x),t),$$

$$c_1(x,t) = a(x,t)c(\varphi(x),t),$$

$$f_1(x,t) = f(x,t) - a(x,t)f(\varphi(x),t).$$

Пусть выполняется условие

$$a_1(x,t) \geq \overline{a}_1 > 0 \text{ при } (x,t) \in \overline{Q}. \tag{3.6}$$

Заменим в уравнении (3.1) x на $\varphi(x)$. Получим равенство

$$u_t(\varphi(x),t) - u_{xx}(\varphi(x),t) - a(\varphi(x),t)u_{xx}(x,t)+$$

$$+c(\varphi(x),t)u(\varphi(x),t) = f(\varphi(x),t) \tag{3.7}$$

Равенства (3.1) и (3.7) представляют собой линейную систему относительно функций $u_{xx}(x,t)$ и $u_{xx}(\varphi(x),t)$. Вследствие условия (3.6) эта система имеет единственное решение. Найдя это решение, получим равенство:

$$u_t(x,t) - a(x,t)u_t(\varphi(x),t) - a_1(x,t)u_{xx}(x,t)+$$

$$+c(x,t)u(x,t) - c_1(x,t)u(\varphi(x),t) = f_1(x,t). \tag{3.8}$$

Заменим теперь в уравнении (3.4) x на $\varphi(x)$. Получим равенство, которое вместе с (3.4) вновь даст линейную систему относительно функций $u_{xx}(x,t)$ и $u_{xx}(\varphi(x),t)$. Вновь вследствие условия (3.6) построенная система будет иметь единственное решение, и это решение даст равенство

$$u_{tt}(x,t) - a(x,t)u_{tt}(\varphi(x),t) + a_1(x,t)u_{xx}(x,t)-$$

$$-c(x,t)u(x,t) + c_1(x,t)u(\varphi(x),t) = f_1(x,t). \tag{3.9}$$

Равенства (3.8) и (3.9) позволяют от краевых задач 3.1 и 3.2 перейти к двум новым задачам.

Задача 3.3. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (3.8) и такую, что для нее выполняются условия (3.2) и (3.3).*

Задача 3.4. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (3.9) и такую, что для нее выполняются условия (3.2), (3.3) и (3.5).*

В случае справедливости условия (3.6) задачи 3.1 и 3.3, а также 3.2 и 3.4 эквивалентны. При нарушении данного условия каждая из указанных задач образует самостоятельную краевую задачу для параболических и эллиптических уравнений с инволюцией.

Заметим, что при выполнении условия (3.6) уравнения (3.8) и (3.9) будут уравнениями без вырождения; если же условие (3.6) заменить условием

$$a_1(x,t) \geq 0 \text{ при } (x,t) \in \overline{Q}, \tag{3.6$'$}$$

то уравнения (3.8) и (3.9) будут вырождающимися, соответственно, параболическим и эллиптическим уравнениями с инволюцией.

Именно условия (3.6) и (3.6$'$) и определяют, являются ли краевые задачи 3.1 и 3.2 задачами без вырождения или же задачами с вырождением.

Заметим также следующее. Определим операторы A и C:

$$(Av)(x,t) = v(x,t) - a(x,t)v(\varphi(x),t),$$

$$(Cv)(x,t) = c(x,t)v(x,t) - c_1(x,t)v(\varphi(x),t).$$

Уравнения (3.8) и (3.9) с помощью этих операторов можно представить как уравнения, не разрешенные относительно производной [24, 130] – именно, в виде

$$Au_t - a_1 u_{xx} + Cu = f_1(x,t),$$

$$Au_{tt} - a_1 u_{xx} - Cu = f_1(x,t),$$

причем оператор A здесь как оператор из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$ может быть как обратимым, так и необратимым.

3.1.1. Разрешимость краевых задач 3.1 и 3.2 в невырожденном случае

Изучение разрешимости краевых задач 3.1 и 3.2 в случае, когда они являются невырожденными, будет осуществлено с использованием метода продолжения по параметру [64, гл. III, §14] и соответствующих априорных оценок.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$a(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C(\overline{Q}), \tag{3.10}$$

$$\varphi(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad -\varphi_1 \le \varphi'(x) \le -\varphi_0 < 0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \tag{3.11}$$

$$\sqrt{\varphi_1} \max_{\overline{Q}} |a(x,t)| < 1, \tag{3.12}$$

а также условие (3.6). Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ краевая задача 3.1 имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую краевую задачу с параметром $\lambda \in [0,1]$: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_t(x,t) - a_1(x,t)u_{xx}(x,t) + c(x,t)u(x,t) -$$

$$-\lambda \left[a(x,t)u_t(\varphi(x),t) + c_1(x,t)u(\varphi(x),t)\right] = f_1(x,t) \tag{3.13}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.2) и (3.3).

Исходя из положений теоремы о методе продолжения по параметру, существование решений краевой задачи (3.13), (3.2), (3.3) в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ обеспечивается выполнением следующих условий: 1) функция $f_1(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$; 2) краевая задача (3.13), (3.2), (3.3) при $\lambda = 0$, $f_1(x,t) \in L_2(Q)$ разрешима в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$; 3) для

любого решения $u(x,t)$ задачи (3.13), (3.2), (3.3) справедлива априорная оценка
$$||u||_{W_2^{2,1}(Q)} \leq R_0||f_1||_{L_2(Q)} \qquad (3.14)$$
где постоянная R_0 определяется только функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $\varphi(x)$, а также числом T.

Принадлежность функции $f_1(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ очевидна. В случае, когда $\lambda = 0$, при соблюдении условий (3.6) и (3.10) известно, что краевая задача (3.13), (3.2), (3.3) разрешима в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ – см. [42]. Покажем, что для всех возможных решений $u(x,t)$ указанной краевой задачи (3.13), (3.2), (3.3) существует равномерная по λ оценка (3.14).

Представив уравнение (3.13) в переменных (x,τ) и выполнив умножение на функцию $u_\tau(x,\tau)$, после чего проинтегрировав по прямоугольнику $\Omega \times (0,t)$, получим
$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega a_1(x,t)u_x^2(x,t)\,dx =$$
$$= \lambda \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a(x,\tau)u_\tau(\varphi(x),\tau)u_\tau(x,\tau)\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_{1\tau}(x,\tau)u_x^2(x,\tau)\,dxd\tau -$$
$$-\int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_{1x}(x,\tau)u_x(x,\tau)u_\tau(x,\tau)\,dxd\tau - \int\limits_0^t \int\limits_\Omega c(x,\tau)u(x,\tau)u_\tau(x,\tau)\,dxd\tau +$$
$$+\lambda \int\limits_0^t \int\limits_\Omega c_1(x,\tau)u(\varphi(x),\tau)u_\tau(x,\tau)\,dxd\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f_1(x,\tau)u_\tau(x,\tau)\,dxd\tau, \quad (3.15)$$
Оценим первое слагаемое правой части (3.15):
$$\left|\lambda \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a(x,\tau)u_\tau(\varphi(x),\tau)u_\tau(x,\tau)\,dxd\tau\right| \leq$$
$$\leq \max_{\overline{Q}}|a(x,\tau)| \left(\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_\tau^2(\varphi(x),\tau)\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \max_{\overline{Q}} |a(x,\tau)| \left(\int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_\Omega |\varphi'(x)| u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\varphi_1} \max_{\overline{Q}} |a(x,\tau)| \int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Используя полученное выше неравенство совместно с условиями (3.11) и (3.12), производя замену переменной $y = \varphi(x)$ в предпоследнем интеграле правой части равенства (3.15) и применяя неравенство Юнга, а также неравенство

$$\int_\Omega u^2(x,t)\,dx \leq T \int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau,$$

и лемму Гронуолла, получаем, что решения $u(x,t)$ краевой задачи (3.13), (3.2), (3.3) удовлетворяет следующей априорной оценке

$$\int_0^t \int_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau + \int_\Omega u_x^2(x,t)\,dx \leq R_1 ||f_1||^2_{L_2(Q)}, \tag{3.16}$$

где R_1 – постоянная, определяющаяся функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $\varphi(x)$, а также числом T.

Далее, переходя к следующему шагу, рассмотрим уравнение (3.13), умноженное на $u_{xx}(x,t)$, и выполним интегрирование по области Q. Используя условие (3.6) совместно с неравенством (3.16), получаем вторую априорную оценку для решений задачи (3.13), (3.2), (3.3):

$$\int_Q u_{xx}^2(x,t)\,dxdt \leq R_2 ||f_1||^2_{L_2(Q)}, \tag{3.17}$$

где постоянная R_2 определяется функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $\varphi(x)$, а также числом T.

Из оценок (3.16) и (3.17) и вытекает требуемая оценка (3.14).

Проведенные выше рассуждения означают, что для всех чисел $\lambda \in [0,1]$ краевая задача (3.13), (3.2), (3.3) является разрешимой в пространстве

$W_2^{2,1}(Q)$. Следовательно, краевая задача 3.1 также разрешима в $W_2^{2,1}(Q)$. Единственность решений краевой задачи 3.1 в этом пространстве очевидна.

$\square$

Доказательство разрешимости краевой задачи 3.2 в невырожденном случае будет отличаться от доказательства теоремы 3.1 исключительно тем, что для эллиптических уравнений невозможно использование леммы Гронуолла.

Теорема 3.2. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$a(x,t) \in C(\overline{Q}), \qquad c(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \tag{3.10'}$$

$$\varphi(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(x) \leq -\varphi_0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \tag{3.11'}$$

$$c(x,t) \geq 0, \qquad c_{xx}(x,t) \leq 0 \text{ при } (x,t) \in \overline{Q}, \tag{3.18}$$

а также условия (3.6) и (3.12). Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ краевая задача 3.2 имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим теперь следующую краевую задачу с параметром $\lambda \in [0,1]$: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) + \lambda a(x,t)u_{xx}(\varphi(x),t) - c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{3.19}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.2), (3.3) и (3.5).

Хорошо известна разрешимость исследуемой краевой задачи задачи в пространстве $W_2^2(Q)$ при $\lambda = 0$ (см., например, [43]). Разрешимость же этой задачи при всех значениях параметра λ будет следовать из априорной оценки

$$||u||_{W_2^2(Q)} \leq R_0'||f||_{L_2(Q)} \tag{3.20}$$

справедливой для всех возможных решений $u(x,t)$ краевой задачи (3.19), (3.2), (3.3), (3.5).

Покажем, что искомая оценка действительно имеет место.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_Q \left[u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) + \lambda a(x,t)u_{xx}(\varphi(x),t) - c(x,t)u(x,t)\right] u_{xx}(x,t)\, dxdt =$$

$$= \int\limits_Q f(x,t)u_{xx}(x,t)\, dxdt.$$

Интегрируя по частям и оценивая интеграл от слагаемого с инволюцией с помощью неравенства Гельдера, замены $y = \varphi(x)$ и условий $(3.11')$ и (3.12), используя также условие (3.18), получим первую априорную оценку

$$\int\limits_Q \left(u_{xt}^2 + u_{xx}^2\right)\, dxdt \leq R_1' \int\limits_Q f^2\, dxdt. \tag{3.21}$$

Последующие оценки очевидным образом выводятся из оценки (3.21). Суммируя, получим искомую оценку (3.20).

Таким образом, использование априорной оценки (3.20) совместно с теоремой, лежащей в основе метода продолжения по параметру, позволяет доказать существование решения краевой задачи 3.2 в пространстве $W_2^2(Q)$. Вопрос об единственности решения в указанном пространстве не вызывает затруднений и является тривиальным. □

3.1.2. Разрешимость краевых задач 3.1 и 3.2 в вырожденном случае

Предположим, что в уравнениях (3.1) и (3.4) функция a является функцией только переменной t, а условие (3.6) заменено неравенством

$$|a(t)| \leq 1 \text{ при } t \in [0,T]. \tag{3.22}$$

В этом случае уравнения (3.8) и (3.9) становятся вырождающимися – соответственно параболическим и эллиптическим. При этом даже для простейшей линейной инволюции условия (3.12) и (3.18) оказываются нарушенными. Тем самым возникает необходимость введения дополнительных условий, гарантирующих существование регулярных решений краевых задач 3.1 и 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условие (3.22), а также следующие условия:*

$$a(t) \in C^1([0,T]), \qquad c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \tag{3.23}$$

$$\varphi(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad -\varphi_1 \leq \varphi'(x) \leq -\varphi_0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \tag{3.24}$$

$$\sqrt{\varphi_1}\max_{[0,T]}|a(t)| \leq 1, \qquad \varphi_1 \max_{[0,T]}|a(t)| \leq 1. \tag{3.25}$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2\left(0,T; W_2^2(\Omega)\bigcap \mathring{W}_2^1(\Omega)\right)$ *краевая задача 3.1 имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty\left(0,T; W_2^2(\Omega)\bigcap \mathring{W}_2^1(\Omega)\right)$, $u_t(x,t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Доказательство теоремы будет основано на применении метода регуляризации. Зафиксируем малый положительный параметр $\varepsilon > 0$ и рассмотрим соответствующую регуляризованную краевую задачу следующего вида: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения*

$$u_t(x,t) - (1+\varepsilon)u_{xx}(x,t) - a(t)u_{xx}(\varphi(x),t) +$$

$$+\varepsilon u_{xxxx}(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{3.26}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.2), (3.3), а также условия

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{3.27}$$

Рассматриваемое уравнение (3.26) является невырожденным параболическим уравнением. При фиксированном значении параметра ε и произвольной правой части $f(x,t) \in L_2(Q)$ существование решения краевой задачи (3.26), (3.2), (3.3), (3.27), принадлежащего пространству $W_2^{4,1}(Q)$, доказывается стандартными аналитическими средствами. В частности, используется метод продолжения по параметру в сочетании с априорными оценками, получаемыми по схеме, аналогичной той, которая применялась при доказательстве теоремы 3.1.

В дальнейшем будет установлено, что при выполнении предположений теоремы решения $u(x,t)$ рассматриваемой краевой задачи удовлетворяют априорным оценкам, равномерным по параметру ε. Наличие таких равномерных оценок обеспечивает возможность осуществления предельного перехода.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[u_t(x,\tau) - (1+\varepsilon)u_{xx}(x,\tau) - a(\tau)u_{xx}(\varphi(x),\tau) + \varepsilon u_{xxxx}(x,\tau) + \right.$$

$$\left. + c(x,\tau)u(x,\tau)\right] u_{xx}(x,\tau)\,dxd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f(x,\tau)u_{xx}(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям соответствующие выражения в обеих частях равенства, осуществляя в интеграле с инволюцией замену $y = \varphi(x)$ и принимая во внимание условия (3.23)-(3.25), а также применяя лемму Гронуолла, устанавливаем, что для любого решения $u(x,t)$ задачи (3.26), (3.2), (3.3), (3.27) имеет место оценка вида

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{xxx}^2(x,\tau)\,dxd\tau \le R_3 \int\limits_Q \left(f^2 + f_x^2\right)\,dxdt \tag{3.28}$$

где R_3 – константа определяемая функциями $a(t)$, $c(x,t)$, $\varphi(x)$ и числом T.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[u_t(x,\tau) - (1+\varepsilon)u_{xx}(x,\tau) - a(\tau)u_{xx}(\varphi(x),\tau) + \varepsilon u_{xxxx}(x,\tau) + \right.$$

$$\left. + c(x,\tau)u(x,\tau)\right] u_{xxxx}(x,\tau)\,dxd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f(x,\tau)u_{xxxx}(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Повторяя процедуру интегрирования по частям, выполняя замену переменной $y = \varphi(x)$ в интеграле с инволюцией и учитывая условия (3.23)–(3.25), а также применяя лемму Гронуолла, получаем следующую априорную оценку:

$$\int\limits_{\Omega} u_{xx}^2(x,t)\,dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{xxxx}^2(x,\tau)\,dxd\tau \le R_4\int\limits_Q \left(f^2 + f_x^2 + f_{xx}^2\right)\,dxdt \quad (3.29)$$

с постоянной R_4, определяющейся лишь функциями $a(t)$, $c(x,t)$ и $\varphi(x)$, а также числом T.

Используя установленные выше оценки, приходим к следующей априорной оценке:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,\tau)\,dxd\tau \le R_5\int\limits_Q \left(f^2 + f_x^2 + f_{xx}^2\right)\,dxdt, \quad (3.30)$$

где постоянная R_5 определяется лишь функциями $a(t)$, $c(x,t)$ и $\varphi(x)$, а также числом T.

Наличие априорных оценок (3.28)-(3.30) позволяет осуществить предельный переход. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$, и соответствующую последовательность решений $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ краевых задач (3.26), (3.2), (3.3), (3.27).

Априорные оценки (3.28)-(3.30) и свойство рефлексивности гильбертова пространства гарантируют существование подпоследовательности $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ и функции $u(x,t)$, для которых при $k \to \infty$ имеют место слабые сходимости:

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в пространстве } W_2^{2,1}(Q),$$

$$\varepsilon_{m_k} u_{m_k xxxx}(x,t) \to 0 \text{ слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$u_{m_k xx}(\varphi(x),t) \to u_{xx}(\varphi(x),t) \text{ слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Следовательно, предельная функция $u(x,t)$ представляет собой решение краевой задачи 3.1. □

Аналогично исследованию разрешимости краевой задачи 3.1, проводится исследование разрешимости краевой задачи 3.2, однако ключевое различие состоит в невозможности применения леммы Гронуолла в эллиптическом случае.

Теорема 3.4. *Пусть выполняются условие (3.22), а также следующие условия:*

$$a(t) \in C^2([0,T]), \qquad c(x,t) \in C^2\left(\overline{Q}\right),$$

$$\varphi(x) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right), \quad -\varphi_1 \leq \varphi'(x) \leq -\varphi_0 < 0 \text{ при } x \in \overline{\Omega},$$

$$\sqrt{\varphi_1} \max_{[0,T]} |a(t)| \leq 1, \qquad \varphi_1 \max_{[0,T]} |a(t)| \leq 1,$$

$$c(x,t) \geq 0, \quad c_{xx}(x,t) \leq 0 \text{ при } (x,t) \in \overline{Q}.$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2\left(0,T; W_2^2(\Omega) \bigcap \mathring{W}_2^1(\Omega)\right)$ *краевая задача 3.2 имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty\left(0,T; W_2^2(\Omega) \bigcap \mathring{W}_2^1(\Omega)\right)$, $u_t(x,t) \in L_2\left(0,T; W_2^2(\Omega) \bigcap \mathring{W}_2^1(\Omega)\right)$, $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Используя метод регуляризации, введём малый параметр $\varepsilon > 0$ и рассмотрим соответствующую регуляризованную краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$*, являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) + (1+\varepsilon)u_{xx}(x,t) + a(t)u_{xx}(\varphi(x),t) -$$

$$-\varepsilon u_{xxxx}(x,t) - c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{3.31}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.2), (3.3), (3.5) и (3.27).

Методом продолжения по параметру можно показать, что при фиксированном ε и $f(x,t) \in L_2(Q)$ данная задача обладает решением $u(x,t)$, принадлежащим пространству $W_2^{4,2}(Q)$.

Далее, для решений $u(x,t)$ задачи (3.31), (3.2), (3.3), (3.5), (3.27) справедливы следующие априорные оценки:

$$\int\limits_Q u_{xt}^2\, dxdt + \varepsilon \int\limits_Q u_{xxx}^2\, dxdt \leq R_6 \int\limits_Q \left(f^2 + f_x^2\right) dxdt, \tag{3.32}$$

$$\int\limits_Q u_{xxt}^2\,dxdt + \varepsilon\int\limits_Q u_{xxxx}^2\,dxdt \le R_7\int\limits_Q \left(f^2+f_x^2+f_{xx}^2\right)\,dxdt, \tag{3.33}$$

$$\int\limits_Q u_{tt}^2\,dxdt \le R_8\int\limits_Q \left(f^2+f_x^2+f_{xx}^2\right)\,dxdt, \tag{3.34}$$

постоянные R_6, R_7, R_8, в которых определяются лишь функциями $\varphi(x)$, $a(t)$ и $c(x,t)$. Эти оценки выводятся путем анализа равенств, получаемых после умножения уравнения (3.31) на функции $u_{xx}(x,t)$, $-u_{xxxx}(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$, с последующим интегрированием по прямоугольнику Q. На основе установленных оценок, используя свойство рефлексивности гильбертова пространства, можно выделить подпоследовательность решений $\{u_{m_k}(x,t)\}$ задач (3.31), (3.2), (3.3), (3.5) (с параметром $\varepsilon=\varepsilon_{m_k}$), сходящуюся к решению $u(x,t)$ задачи 3.2. Предельная функция $u(x,t)$, очевидно, принадлежит требуемому классу. $\square$

3.2. Краевые задачи для гиперболических уравнений с инволюцией в старших производных

Пусть Ω – интервал $(0,1)$ оси Ox, $Q=\Omega\times(0,T)$ — прямоугольник конечной высоты T, и пусть функции $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ определены на множестве $\overline{Q}$.

Задача 3.5. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)-a(x,t)u_{xx}(1-x,t)+c(x,t)u(x,t)=f(x,t) \tag{3.35}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0, \qquad x\in\Omega, \tag{3.36}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad t\in(0,T). \tag{3.37}$$

Рассматриваемая задача 3.5 есть стандартная первая начально-краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка в прямоугольной области. В случае, если $a(x,t) \equiv 0$, ее разрешимость в пространствах гладких функций, а также в пространствах Соболева, является хорошо изученной. Однако, для функции $a(x,t) \neq 0$ вопрос о разрешимости этой задачи оставался открытым до настоящего времени.

Пусть в уравнении (3.35) произведена замена $y = 1 - x$. Тогда оно принимает вид

$$u_{tt}(1-y,t) - u_{yy}(1-y,t) - a(1-y,t)u_{yy}(y,t)+$$

$$+c(1-y,t)u(1-y,t) = f(1-y,t). \qquad (3.38)$$

Совместно с уравнением (3.35) равенство (3.38) образуют алгебраическую систему относительно $u_{xx}(x,t)$ и $u_{xx}(1-x,t)$. При условии

$$a_1(x,t) \equiv 1 - a(x,t)a(1-x,t) \neq 0 \quad \text{при } (x,t) \in \overline{Q}, \qquad (3.39)$$

данная система разрешима относительно $u_{xx}(1-x,t)$. После подстановки полученного выражения исходное уравнение приводится к виду

$$u_{tt}(x,t) - a(x,t)u_{tt}(1-x,t) - a_1(x,t)u_{xx}(x,t) + c(x,t)u(x,t)-$$

$$-a(x,t)c(1-x,t)u(1-x,t) = f(x,t) - a(x,t)f(1-x,t). \qquad (3.40)$$

Это позволяет сформулировать следующую задачу:

Задача 3.6. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (3.40) и такую, что для нее выполняются условия (3.36) и (3.37).*

Полученное в задаче 3.6 уравнение (3.40) представляет собой дифференциальное уравнение с инволюцией, присутствующей в старшей производной по временной переменной. Отметим, что краевые задачи для уравнений такого рода до настоящего времени не исследовались. Однако краевые задачи 3.5 и 3.6 являются эквивалентными в классе регулярных решений при соблюдении условия (3.39). В силу этого все последующие утверждения о существовании и единственности решения для одной из указанных задач непосредственно распространяются и на другую.

Следует также подчеркнуть, что уравнение (3.40) вырождается, если $a_1(x,t) = 0$. Анализ вырожденного случая проводится отдельно и требует введения дополнительных условий.

3.2.1. Первая начально-краевая задача для уравнения с инволютивным отклонением аргумента

Доказательство разрешимости краевой задачи 3.5 опирается на метод продолжения по параметру и метод регуляризации, а также на вывод соответствующих априорных оценок.

Теорема 3.5. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$a(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad a_t(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x,t) \in C(\overline{Q});$$

$$|a(x,t)| \leq a_0 < 1, \quad a(x,t) = a(1-x,t) \text{ при } (x,t) \in \overline{Q}.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$ и $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, краевая задача 3.5 имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу с малым положительным параметром ε: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - a(x,t)u_{xx}(1-x,t) -$$

$$-\varepsilon u_{xxt}(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{3.41}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.36) и (3.37).

Сначала установим, что для фиксированного значения параметра ε и при $f(x,t) \in L_2(Q)$ рассматриваемая краевая задача имеет решение $u(x,t)$

такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$. Для доказательства этого утверждения исследуем семейство краевых задач при $\lambda \in [0,1]$:*найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - \lambda a(x,t)u_{xx}(1-x,t) - \varepsilon u_{xxt}(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{3.42}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.36) и (3.37).

В частном случае $\lambda = 0$ справедливость утверждения о существовании решения краевой задачи (3.42), (3.36), (3.37) следует из известных теоретических результатов, согласно которым соответствующее решение $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ и $u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)$ (см., например, [71], [104]).

Для произвольного $\lambda \in [0,1]$ стандартные энергетические оценки решений указанной задачи обеспечивают справедливость неравенства

$$||u||^2_{W_2^2(Q)} + ||u_{xxt}||^2_{L_2(Q)} \leq N_0||f||^2_{L_2(Q)},$$

где постоянная N_0 определяется лишь функциями $a(x,t)$ и $c(x,t)$, а также числами T и ε.

На основании данного неравенства, с привлечением теоремы о методе продолжения по параметру [64, гл. III, §14], получаем, что существует решение $u(x,t)$ задачи (3.41), (3.36), (3.37) принадлежащее искомому классу.

На следующем этапе установим априорные оценки для решений $u(x,t)$ задачи (3.41), (3.36), (3.37), достаточные для проведения предельного перехода. С этой целью рассмотрим равенство

$$-\int_0^t \int_\Omega L_\varepsilon u(x,\tau) u_{xx\tau}(x,\tau)\,dxd\tau = -\int_0^t \int_\Omega f(x,\tau) u_{xx\tau}(x,\tau)\,dxd\tau,$$

где $t \in [0,T]$, а $L_\varepsilon u(x,\tau)$ обозначает левую часть уравнения (3.41).

Далее, применяя интегрирование по частям, нетрудно прийти к следующему соотношению:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_{xt}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_{xx}^2(x,t)\,dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{xx\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau =$$

$$= -\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} a(x,\tau)u_{xx}(1-x,\tau)u_{xx\tau}(x,\tau)\,dxd\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} c_\tau(x,\tau)u(x,\tau)u_{xx}(x,\tau)\,dxd\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} c(x,\tau)u_\tau(x,\tau)u_{xx}(x,\tau)\,dxd\tau + \int\limits_{\Omega} c(x,t)u(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} f_\tau(x,\tau)u_{xx}(x,\tau)\,dxd\tau - \int\limits_{\Omega} f(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx. \qquad (3.43)$$

Имеют место следующие равенства

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} a(x,\tau)u_{xx}(1-x,\tau)u_{xx\tau}(x,\tau)\,dxd\tau =$$

$$= \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} a_\tau(x,\tau)u_{xx}(1-x,\tau)u_{xx}(x,\tau)\,dxd\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} a(x,\tau)u_{xx\tau}(1-x,\tau)u_{xx}(x,\tau)\,dxd\tau - \int\limits_{\Omega} a(x,t)u_{xx}(1-x,t)u_{xx}(x,t)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} a_\tau(x,\tau)u_{xx}(1-x,\tau)u_{xx}(x,\tau)\,dxd\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} a(1-y,\tau)u_{yy\tau}(y,\tau)u_{yy}(1-y,\tau)\,dyd\tau - \int\limits_{\Omega} a(x,t)u_{xx}(1-x,t)u_{xx}(x,t)\,dx.$$

Учитывая далее условие $a(1-y,\tau) = a(y,\tau)$, получим

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} a(x,\tau)u_{xx}(1-x,\tau)u_{xx\tau}(x,\tau)\,dxd\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_\tau(x,\tau)u_{xx}(1-x,\tau)u_{xx}(x,\tau)\,dxd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega a(x,t)u_{xx}(1-x,t)u_{xx}(x,t)\,dx. \tag{3.44}$$

С помощью равенства (3.44) и неравенства Гельдера нетрудно теперь от (3.43) перейти к неравенству

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_{xt}^2(x,t)\,dx + \frac{1-a_0}{2}\int\limits_\Omega u_{xx}^2(x,t)\,dx + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xx\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\max_{\overline{Q}}|a_t(x,t)|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xx}^2(x,\tau)\,dxd\tau +$$

$$+\max_{\overline{Q}}|c_t(x,t)|\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2(x,\tau)\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xx}^2(x,\tau)\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\max_{\overline{Q}}|c(x,t)|\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xx}^2(x,\tau)\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\max_{\overline{Q}}|c(x,t)|\left(\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_\Omega u_{xx}^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xx}^2(x,\tau)\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left(\int\limits_\Omega f^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_\Omega u_{xx}^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.45}$$

Имеют место неравенства

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau \leq \int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau,$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \le T\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u^2_{x\tau}(x,\tau)\,dxd\tau.$$

Используя полученные выше неравенства, а также применяя неравенство Юнга и лемму Гронуолла, из неравенства (3.45) выводим следующую априорную оценку для решений $u(x,t)$ краевой задачи (3.41), (3.36), (3.37):

$$\int\limits_{\Omega} u^2_{xt}(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega} u^2_{xx}(x,t)\,dx +$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u^2_{xx\tau}(x,\tau)\,dxd\tau \le N_1\int\limits_Q (f^2+f_t^2)\,dxdt, \tag{3.46}$$

где N_1 – некоторая постоянная, определяемая функциями $a(x,t)$ и $c(x,t)$, а также числом T.

Далее, непосредственно из уравнения (3.41) совместно с оценкой (3.46) следует справедливость второй априорной оценки решений задачи (3.41), (3.36), (3.37):

$$\int\limits_Q u^2_{tt}(x,t)\,dxdt \le N_2\int\limits_Q (f^2+f_t^2)\,dxdt, \tag{3.47}$$

где постоянная N_2 определяется лишь функциями $a(x,t)$, $c(x,t)$ и числом T.

Для осуществления предельного перехода достаточно полученных априорных оценок (3.46) и (3.47). В самом деле, определим последовательность чисел $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ такую, что $\varepsilon_m > 0$ и $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Далее, при $\varepsilon = \varepsilon_m$ рассмотрим соответствующую последовательность решений $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ краевой задачи (3.41), (3.36), (3.37). Из априорных оценок (3.46) и (3.47) и рефлексивности гильбертова пространства следует существование подпоследовательности $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $u(x,t)$, для которых при $k \to \infty$ выполняются слабые сходимости:

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в } W_2^2(Q),$$

$$\varepsilon_{m_k} u_{m_k xxt}(x,t) \to 0 \text{ слабо в } L_2(Q).$$

Кроме того, при $k \to \infty$ имеет место сходимость

$$\int\limits_Q u_{m_k xx}(1-x,t)a(x,t)\eta(x,t)\,dxdt \to \int\limits_Q u_{xx}(1-x,t)a(x,t)\eta(x,t)\,dxdt,$$

что устанавливается заменой переменной $y = 1 - x$ в интеграле слева.

Совокупность установленных сходимостей позволяет сделать вывод о том, что предельная функция $u(x,t)$ и есть требуемое решение краевой задачи (3.35)-(3.37).

Единственность регулярного решения доказывается стандартным образом. Для этого рассмотрим уравнение (3.40) в случае $f(x,t) \equiv 0$, умножим его на $u_t(x,t)$ и проинтегрирцуем по области $\{(x,t) : x \in \Omega,\ 0 < t < t* \leq T\}$. Используя соотношение, аналогичное (3.44), и лемму Гронуолла, приходи к заключению, что $u(x,t) \equiv 0$ в области Q. Отсюда следует единственность решения в пространстве $W_2^2(Q)$. □

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда уравнение (3.35) является вырождающимся.

Теорема 3.6. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$a(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad a_{xx}(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad |a(x,t)| \leq 1,$$

$$a(1-x,t) = a(x,t) \text{ при } (x,t) \in \overline{Q},$$

$$c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c_{xx}(x,t) \in C(\overline{Q}).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$ и $f(0,t) = f(1,t) = 0$ при $t \in [0,T]$ краевая задача 3.5 имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $u_x(x,t) \in W_2^2(Q)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы снова применяется метод регуляризации. Пологая $\varepsilon > 0$ и перейдем к исследованию модифицированной краевой задачи: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - a(x,t)u_{xx}(1-x,t) +$$

$$+\varepsilon u_{xxxxt}(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{3.48}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.36) и (3.37), а также условие

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T). \tag{3.49}$$

Существование регулярного решения, то есть обладающего всеми обобщенными производными, входящими в уравнение и суммируемыми с квадратом по прямоугольнику Q, устанавливается стандартным образом с использованием метода продолжения по параметру в сочетании с априорными оценками (подробности соответствующих рассуждений приведены, например, в [71, 104]).

Равномерная по ε априорная оценка получается путем интегрирования по частям в соответствующем интегральном тождестве

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega L_\varepsilon u(x,\tau) u_{xxxx\tau}(x,\tau)\, dx d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f(x,\tau) u_{xxxx\tau}(x,\tau)\, dx d\tau$$

где $L_\varepsilon u$ обозначает левую часть уравнения (3.48)), с последующим применением условий теоремы и леммы Гронуолла. Остальные оценки непосредственно следуют из уравнения (3.48) и полученной основной оценки.

Осуществление предельного перехода проводится по схеме, полностью аналогичной той, которая использовалась при доказательстве теоремы 3.5, и потому не требует дополнительных пояснений. $\square$

Дополнительно отметим, что при выполнении ограничения

$$|a(x,t)| \le a_0 < 1 \text{ при } (x,t) \in \overline{Q},$$

обеспечивающего невырожденность, для краевой задачи (3.40), (3.36), (3.37) справедливо утверждение, полностью совпадающее по содержанию с теоремой 3.5.

Иная ситуация возникает при наличии вырождения. В этом случае прямой переход от уравнения (3.35) к уравнению (3.40) оказывается невозможным, а сама задача (3.40), (3.36), (3.37) может оказаться некорректной в целом. Так, при $a(x,t) \equiv 1$, $f(x,t) \equiv c(x,t) \equiv 0$ решением задачи (3.40), (3.36), (3.37) является функция вида

$$u(x,t) = \varphi(t)v(x),$$

где $\varphi(t)$ – произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, а $v(x)$ – произвольная гладкая функция, такая, что $v(0) = v(1) = 0$ и $v(x) = v(1-x)$ при $x \in \overline{\Omega}$.

Аналогично, в случае $a(x,t) \equiv -1$, $f(x,t) \equiv c(x,t) \equiv 0$ решение имеет вид

$$u(x,t) = \varphi(t)w(x),$$

где функция $w(x)$ удовлетворяет условиям $w(0) = w(1) = 0$ и $w(x) = -w(1-x)$ при $x \in \overline{\Omega}$.

Таким образом, при выполнении условия $a(x,t) \equiv \pm 1$ краевая задача (3.40), (3.36), (3.37) допускает существование бесконечного множества линейно независимых решений. Данный факт указывает на некорректность указанной задачи, поскольку нарушается единственность решения.

В заключение подчеркнём, что теоремы 3.5 и 3.6 устанавливают достаточные условия разрешимости первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения (3.35), содержащего инволюцию в старшей производной, в классе регулярных решений. Следует отметить, что теорема 3.5 применима в невырожденном случае, тогда как теорема 3.6 охватывает более общий класс задач, допускающих возможное вырождение.

3.2.2. Первая начально-краевая задача для вырождающегося уравнения с инволюцией и диссипацией

Ранее было установлено, что начально-краевые задачи для вырождающихся уравнений (3.40) в общем случае оказываются некорректными. Однако, согласно результатам, приведенным в [20, 26], наличие диссипативного слагаемого в уравнении способно радикально изменить ситуацию. Продемонстрируем это на элементарном примере.

Предположим, что $a(x,t) \equiv a(t)$, а α является фиксированным вещественным числом.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу.

Задача 3.7. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x,t) - a(t)u_{tt}(1-x,t) - [1-a^2(t)]u_{xx}(x,t)+$$

$$+\alpha u_t(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{3.50}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.36) и (3.37).

Теорема 3.7. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$a(t) \in C^1([0,T]), \quad |a(t)| \le 1,$$

$$2\alpha - 3|a'(t)| \ge \alpha_0 > 0, \quad a(t)a'(t) \ge 0 \text{ при } t \in [0,T],$$

$$c(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad c_t(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad c_{xx}(x,t) \in C(\overline{Q}).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in W_2^1(Q)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(Q)$ и $f(0,t) = f(1,t) = 0$ при $t \in [0,T]$, краевая задача 3.7 имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Снова обратимся к методу регуляризации. Рассмотрим краевую задачу с положительным параметром ε:

$$(1+\varepsilon)u_{tt}(x,t) - a(t)u_{tt}(1-x,t) - [1-a^2(t)]u_{xx}(x,t)+$$

$$+\varepsilon u_{xxxxt}(x,t)+\alpha u_t(x,t)+c(x,t)u(x,t)=f(x,t), \qquad (3.51)$$

дополненное начальными и краевыми условиями (3.36), (3.37) и (3.49).

При фиксированном значении параметра ε и при условии $f(x,t)\in L_2(Q)$ задача (3.51), (3.36), (3.37), (3.49) имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t)\in W_2^2(Q)$, $u_{xxxxt}(x,t)\in L_2(Q)$. Отметим далее, что при условии $f_t(x,t)\in L_2(Q)$ уравнение (3.51) допускает дифференцирование по переменной t. В результате для найденного решения $u(x,t)$ выполняются включения $u_t(x,t)\in W_2^2(Q)$, $u_{xxxxtt}(x,t)\in L_2(Q)$.

Для получения априорных оценок равномерных по ε, достаточно последовательно проанализировать следующие равенства

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega L_\varepsilon u(x,\tau)u_\tau(x,\tau)\,dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f(x,\tau)u_\tau(x,\tau)\,dxd\tau,$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega L_\varepsilon u(x,\tau)u_{xxxx\tau}(x,\tau)\,dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f(x,\tau)u_{xxxx\tau}(x,\tau)\,dxd\tau,$$

где $L_\varepsilon u$ есть левая часть (3.51).

Используя стандартную технику, основанную на интегрировании по частям и применении неравенства Гельдера, а также опираясь на условия теоремы, можно получить следующую априорную оценку для решений $u(x,t)$ краевой задачи (3.51), (3.36), (3.37), (3.49):

$$\varepsilon\int\limits_\Omega u_{xxt}^2(x,t)\,dx+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xxxx\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xx\tau}^2(x,\tau)\,dxd\tau\le N_3\int\limits_Q(f^2+f_{xx}^2)\,dxdt, \qquad (3.52)$$

где постоянная N_3 определяется лишь функцией $c(x,t)$, а также числами α и T.

Для вывода дополнительной априорной оценки рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (L_\varepsilon u(x,\tau))_\tau \, u_{\tau\tau}(x,\tau)\, dx d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f_\tau(x,\tau) u_{\tau\tau}(x,\tau)\, dx d\tau,$$

где $L_\varepsilon u$ – левая часть уравнения (3.51). Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при выводе оценки (3.52) для решений $u(x,t)$ краевой задачи (3.51), (3.36), (3.37), (3.49), получаем следующую оценку:

$$\varepsilon \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{xx\tau\tau}^2(x,\tau)\, dx d\tau \leq N_4 \int\limits_Q (f^2 + f_t^2 + f_{xx}^2)\, dx dt, \quad (3.53)$$

где постоянная N_4 определяется лишь функциями $a(t)$ и $c(x,t)$, а также числами α и T.

Совокупность априорных оценок (3.52) и (3.53) позволяет реализовать предельный переход. В самом деле, выберем последовательность положительных параметров $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Рассматривая соответствующую последовательность решений $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ краевой задачи (3.51), (3.36), (3.37), (3.49), априорные оценки и рефлексивность гильбертова пространства гарантируют существование подпоследовательности $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^\infty$, сходящуюся к решению $u(x,t)$ краевой задачи (3.50), (3.36), (3.37) из требуемого класса. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведено систематическое исследование краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента. Основное внимание уделено анализу влияния инволюции на корректность постановок задач, а также на свойства их решений. Рассмотрены как классические, так и нелокальные постановки, включая задачи с интегральными условиями, что позволило охватить широкий круг математических моделей, выходящих за рамки традиционной теории дифференциальных уравнений.

В первой главе исследованы обыкновенные дифференциальные уравнения с инволютивным отклонением аргумента. Установлено, что наличие инволютивных слагаемых может приводить к нарушению корректности задачи Коши и задач с нелокальными условиями, а также существенно влиять на вопрос единственности решений классических краевых задач. Показано, что инволютивное отклонение аргумента может являться источником неединственности решений, что подчёркивает принципиальные отличия рассматриваемого класса уравнений от классических дифференциальных уравнений без отклонения аргумента.

Во второй главе диссертации проведено исследование разрешимости нелокальных и классических краевых задач для линейных параболических и эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрической области. Особенностью рассматриваемых уравнений является наличие общей инволюции в младших членах. Для всех указанных постановок строго доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений в соответствующих пространствах С.Л. Соболева – то есть решений, обладающих всеми обобщёнными производными, входящими в соответствующее уравнение. При этом продемонстрирована возможность исследования задач в многомерных областях, что существенно расширяет область применимости полученных результатов.

В третьей главе получены достаточные условия разрешимости краевых задач для параболических и эллиптических уравнений, а также начально-краевых задач для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, в которых инволютивное отклонение аргумента входит в старшие производные. Рассмотрены как невырожденные, так и вырожденные случаи. Установленные результаты существенно расширяют класс корректно разрешимых задач и демонстрируют устойчивость применяемых методов исследования при усложнении структуры уравнений и постановок задач.

Полученные в диссертации результаты формируют теоретическую основу для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента и могут быть использованы как при углублённых теоретических исследованиях, так и при моделировании и анализе прикладных задач, сводящихся к уравнениям указанного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алтынбек, Д.Н.* Вопросы разрешимости некоторых краевых задач для уравнения высокого порядка с инволюцией / Д.Н. Алтынбек, М.А. Муратбекова // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» посвященная 30-летию независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова. – Нур-Султан, 2021. – С. 85-88.
2. *Андреев, А.А.* К постановке и обоснованию корректности начальной краевой задачи для одного класса нелокальных вырождающихся уравнений гиперболического типа / А.А. Андреев, Е.Н. Огородников // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2006. – № 43. – С. 44-51. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu452.
3. *Андреев, А.А.* О задаче Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу частного вида с отклоняющимся аргументом / А.А. Андреев, А.Ю. Сеницкий // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1987. – С. 51-53.
4. *Андреев, А.А.* О корректности граничных задач для одного дифференциального уравнения с инволюцией частного вида / А.А. Андреев, И.П. Шиндин // Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Куйбышев: Куйбыш. гос. пед. ин-т, 1988. – С. 51-53.
5. *Андреев, А.А.* О корректности начальных краевых задач для одного гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением / А.А. Андреев, Е.Н. Огородников // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2000. – № 9. – С. 32-36.
6. *Андреев, А.А.* Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся ар-

гументом / А.А. Андреев // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1126–1128.

7. *Андреев, А.А.* Об аналоге задачи Трикоми для одного модельного уравнения с инволютивным отклонением в бесконечной области / А.А. Андреев, И.Н. Саушкин // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2005. – № 34. – С. 10–16.

8. *Баренблатт, Г.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах / Г.Н. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852-864.

9. *Баскаков, А.Г.* Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов / А.Г. Баскаков, Н.Б. Ускова // Уфимский математический журнал. – 2018. – Т. 10, № 3. – С. 11-34.

10. *Беллман, Р.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

11. *Белова, Д.В.* Об одной смешанной задаче с инволюцией / Д.В. Белова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2021. – Т. 194. – С. 46–54. DOI: http://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-46-54.

12. *Бурлуцкая, М.Ш.* Классическое решение смешанной задачи для уравнения с инволюцией и двухточечными краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, С.А. Чередникова //Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2016. – № 3. – С. 71-79.

13. *Бурлуцкая, М.Ш.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 12. – С. 2233-2246.

14. *Бурлуцкая, М.Ш.* О некоторых свойствах дифференциальных уравнений и смешанных задач с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2019. – № 1. – С. 91-100.
15. *Бурлуцкая, М.Ш.* Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, № 5. – С. 3-12. DOI: http://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-4-3-12.
16. *Бурлуцкая, М.Ш.* Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 10-20.
17. *Винер, И.Я.* Дифференциальные уравнения в частных производных с инволюциями / И.Я. Винер // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 7. – С. 1320-1322.
18. *Винер, И.Я.* Дифференциальные уравнения с инволюциями / И.Я. Винер // Дифференц. уравнения. – 1969. Т. 5, № 6. – С. 1131-1137.
19. *Водахова, В.А.* Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса / В.А. Водахова // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 2. – С. 280-285. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de4442.
20. *Врагов, В.Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве / В.Н. Врагов // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 6. – С. 1098-1105. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de3098.
21. *Герсеванов, Н.М.* Итерационное исчисление и его приложения / Н.М. Герсеванов. – М.: Машстройиздат, 1950. – 68 с.
22. *Гранильщикова, Я.А.* Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией / Я.А. Гранильщикова, А.А. Шкаликов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. – 2022. – № 4. – С. 67-71.

23. *Гущин, А.К.* О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения / А.К. Гущин, В.П. Михайлов // Матем. сб. – 1995. – Т. 186, № 2. – С. 37-58.
24. *Демиденко, Г.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.
25. *Дзекцер, Е.С.* Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах / Е.С. Дзекцер // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 220, № 3. – С. 540-543. URL: https://www.mathnet.ru/eng/dan38808.
26. *Егоров, И.Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка / И.Е. Егоров, В.Е. Федоров. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. – 134 с.
27. *Зубарев, Д.Н.* Статистическая механика неравновесных процессов / Д.Н. Зубарев, В.Г. Морозов, Г. Рёпке. – М.: Физико-математическая литература, 2002. – 432 с.
28. *Иманбетова, А.Б.* Обратные задачи для уравнения колебания балки с инволюцией / А.Б. Иманбетова, А.А. Сарсенби, Б.Н. Сейлбеков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2023. – Т. 33, № 3. – С. 452-466. DOI: http://doi.org/10.35634/vm230305.
29. *Ионкин, Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294-304.
30. *Кадиркулов, Б.Ж.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа дробного порядка с инволюцией / Б.Ж. Кадиркулов, Г.А. Каюмова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2022. – Т. 210. – С. 55-65. DOI: http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-210-55-65.

31. *Кадиркулов, Б.Ж.* Об одной обратной задаче для дробного параболического уравнения с инволюцией / Б.Ж. Кадиркулов, М.А. Жалилов // НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ. – 2022. – № 3. – С. 209-213. DOI: http://doi.org/10.56292/SJFSU/vol28_iss3/a40.

32. *Кальменов, Т.Ш.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа / Т.Ш. Кальменов, У.А. Искакова // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 414, № 2. – С. 168-171.

33. *Кальменов, Т.Ш.* О сильной разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа / Т.Ш. Кальменов, У.А. Искакова // Неклассические уравнения математической физики. – 2007. – С. 158-171.

34. *Кальменов, Т.Ш.* Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка / Т.Ш. Кальменов, А.Ш. Шалданбаев // Математические труды. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 128-138.

35. *Керефов, А.А.* Нелокальные граничные задачи для параболических уравнений / А.А. Керефов // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 5, № 1. – С. 74-78.

36. *Кожанов, А.И.* Корректность обобщённой задачи Самарского-Ионкина для эллиптических уравнений в цилиндрической области / А.И. Кожанов, А.В. Дюжева // Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59, № 2. – С. 223-235.

37. *Кожанов, А.И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений / А.И. Кожанов // Сиб. журн. индустр. матем. – 2004. – Т. 7, № 1. – С. 51-60.

38. *Кожанов, А.И.* Разрешимость краевых задач для линейных параболических уравнений в случае задания интегрального по временной переменной условия / А.И. Кожанов // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 4. – С. 20-30.

39. *Красовский, Н.Н.* О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени / Н.Н. Красовский // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 2. – С. 252-255.

40. *Крицков, Л.В.* Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией / Л.В. Крицков, А.М. Сарсенби // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 990-996.

41. *Криштал, И.А.* Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов / И.А. Криштал, Н.Б. Ускова // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1091-1132. DOI: http://doi.org/10.33048/semi.2019.16.076.

42. *Ладыженская, О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

43. *Ладыженская, О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

44. *Либерман, Г.М.* Нелокальные задачи для квазилинейных параболических уравнений / Г.М. Либерман // Нелинейные задачи матем. физ. и смежные вопросы. В честь акад. О.А. Ладыженской - Международная матем. серия. Т. 1. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2002. – С. 233-254.

45. *Линьков, А.В.* Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением / А.В. Линьков// Вестн. Самар. ун-та. – 1999. – Т. 12, № 2. – С. 60-66.

46. *Мышкис, А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

47. *Мышкис, А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис // Успехи математических наук. – 1949. – Т. 4, № 5(33). – С. 99-141.

48. *Мышкис, А.Д.* Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / А.Д. Мышкис // Успехи математических наук. – 1967. – Т. XXII, № 2. – С. 21-67.

49. *Назарова, К.Ж.* О разрешимости некоторых краевых задач с инволюцией / К.Ж. Назарова, Б.Х. Турметов, К.И. Усманов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2020. – Т. 26, № 3. – С. 7-16. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-7-16.

50. *Норкин, С.Б.* Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1965. – 356 с.

51. *Норкин, С.Б.* О решениях линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / С.Б. Норкин // УМН. – 1961. – Т. 16, № 2(98). – С. 143-148.

52. *Огородников, Е.Н.* О корректности задачи Коши и Коши–Гурса для одного вырождающегося гиперболического уравнения с инволютивно отклоняющимися аргументами / Е.Н. Огородников, А.А. Юрьев // Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Матем. моделирование и краев. задачи. – Самара: СамГТУ, 2006. – С. 176-182.

53. *Пинни, Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения / Э. Пинни. – М.: Иностранная лит., 1961. – 248 с.

54. *Плисс, В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний / В.А. Плисс. – М.: Наука, 1964. – 368 с.

55. *Романова, Е.Ю.* Спектральный анализ дифференциального оператора с инволюцией / Е.Ю. Романова // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2014. – Т. 14, № 4. – С. 64-78.

56. *Сарсенби, А.А.* Базисность системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией / А.А. Сарсенби, Б.Х. Турметов // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2019. – Т. 29, № 2. – С. 183-196. DOI: http://doi.org/10.20537/vm190204.
57. *Сарсенби, А.А.* Некорректная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией / А.А. Сарсенби // Журнал Средневолжского математического общества. – 2019. – Т. 21, № 1. – С. 48-59. DOI: http://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.48-59.
58. *Сарсенби, А.М.* Разрешимость смешанной задачи для уравнения теплопроводности с инволютивным возмущением / А.М. Сарсенби // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» посвященная 30-летию независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова. – Нур-Султан, 2021. С. 143-144.
59. *Скубачевский, А.Л.* Неклассические краевые задачи. I / А.Л. Скубачевский // СМФН. – 2007. – Т. 26. – С. 3-132.
60. *Скубачевский, А.Л.* Неклассические краевые задачи. II /А.Л. Скубачевский // СМФН. – 2009. – Т. 33. – С. 3-179.
61. *Соболев, С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
62. *Тихонов, И.В.* О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве / И.В. Тихонов // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 841-843.
63. *Тихонов, И.В.* Теоремы единственности в нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений / И.В. Тихонов // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – Т. 67, № 2. – С. 133-166.

64. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 495 с.

65. *Турметов, Б.Х.* О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией / Б.Х. Турметов, В.В. Карачик// Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2021. – Т. 31, № 4. – С. 651-667. DOI: http://doi.org/10.35634/vm210409.

66. *Турметов, Б.Х.* Об одном обобщении третьей краевой задачи для уравнения Лапласа / Б.Х. Турметов // Челяб. физ.-матем. журн. – 2019. – Т. 4, № 1. – С. 33-41. DOI: http://doi.org/10.24411/2500-0101-2019-14103.

67. *Хромов, А.П.* Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида / А.П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10, № 4. – С. 17-22.

68. *Чудновский, А.Ф.* Теплофизика почвы / А.Ф. Чудновский. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

69. *Эльсгольц, Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1964. – 128 с.

70. *Энеева, Л.М.* Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией / Л.М. Энеева // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2024. – Т. 48, № 3. – С. 43-55.

71. *Якубов, С.Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1985.

72. *Aftabizadeh, A.R.* Bounded solutions for differential equations with reflection of the argument / A.R. Aftabizadeh, Y.K. Huang, J. Wiener // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1988. – Vol. 135, No. 1. – P. 31-37.

73. *Ahmad, B.* An Inverse Problem for Space and Time Fractional Evolution Equations with an Involution Perturbation / B. Ahmad, A. Alsaedi, M. Kirane, R.G. Tapdigoglu // Quaestiones Mathematicae. – 2017. – Vol. 40, No. 2. – P. 151-160. DOI: http://doi.org/10.2989/16073606.2017.1283370.

74. *Al-Salti, N.* Initial-Boundary Value Problems for a Time-Fractional Differential Equation with Involution Perturbation / N. Al-Salti, S. Kerbal, M. Kirane // Math. Model. Nat. Phenom. – 2019. – Vol. 14, No. 3. – P. 1-15. DOI: http://doi.org/10.1051/mmnp/2019014.

75. *Al-Salti, N.* On a Class of Inverse Problems for a Heat Equation with Involution Perturbation / N. Al-Salti, M. Kirane, B.T. Torebek // Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics. – 2019. – Vol. 48, No. 3. – P. 669-681. DOI: http://doi.org/10.15672/HJMS.2017.538.

76. *Ashyralyev, A.* A Note on the Parabolic Identification Problem with Involution and Dirichlet Condition / A. Ashyralyev, A.S. Erdogan, A. Sarsenbi // Bulletin of the Karaganda University.Mathematics series. – 2020. – Vol. 99, No. 3. – P. 130-139. DOI: http://doi.org/10.31489/2020M3/130-139.

77. *Ashyralyev, A.* On Stability of the Third Order Partial Delay Differential Equation with Involution and Dirichlet Condition / A. Ashyralyev, S. Ibrahim, E. Hincal //Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2021. – Vol. 102, No. 2. P. 25-34. DOI: http://doi.org/10.31489/2021M2/25-34.

78. *Ashyralyev, A.* On the Boundedness of Solution of the Second Order Ordinary Differential Equation with Damping Term and Involution / A. Ashyralyev, M. Ashyralyyeva, O. Batyrova // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2021. – No. 2(102). – P. 16-24. DOI: http://doi.org/10.31489/2021M2/16-24.

79. *Ashyralyev, A.* On the Boundedness of Solution of the Second Order Ordinary Differential Equation with Involution / A. Ashyralyev, B. Abdalmohammed //JZS-A. – 2020. – Vol. 22, No. 2. – P. 237-246.

80. *Ashyralyev, A.* On the Hyperbolic Type Differential Equation with Time Involution / A. Ashyralyev, A. Ashyralyyev, B. Abdalmohammed // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2023. – No. 1(109). – P. 38-47. DOI: https://doi.org/10.31489/2023m1/38-47.

81. *Ashyralyev, A.* Parabolic Time Dependent Source Identification Problem with Involution and Neumann Condition / A. Ashyralyev, A.S. Erdogan // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2021. – No. 2(102). – P. 5-15. DOI: https://doi.org/10.31489/2021m2/5-15.

82. *Ashyralyev, A.* Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution / A. Ashyralyev, A. Sarsenbi // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – Vol. 38, No. 10. – P. 1295-1304. DOI: http://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

83. *Ashyralyev, A.* Well-Posedness of an Elliptic Equation with Involution / A. Ashyralyev, A.M. Sarsenbi // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015, No. 284. – P. 1-8.

84. *Babbage, Ch.* An essay towards the calculus of function / Ch. Babbage // Philophical transations of the Royal Society of London. – 1816. — Vol. 11. – P. 179-256.

85. *Baskakov, A.G.* On the Spectral Analysis of a Differential Operator with an Involution and General Boundary Conditions / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova // Eurasian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 11, No. 2. – P. 30-39. URL: https://emj.enu.kz/index.php/main/article/view/176.

86. *Baskakov, A.G.* Spectral Analysis of a Differential Operator with an Involution / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, E.Y. Romanova //

Journal of Evolution Equations. – 2017. – Vol. 17. – P. 669-684. DOI: http://doi.org/10.1007/s00028-016-0332-8.

87. *Burlutskaya, M.Sh.* Mixed Problem for a First-Order Partial Differential Equations with Involution and Periodic Boundary Conditions / M.Sh. Burlutskaya // Comput. Mathematics and Math. Physics. – 2014. — Vol. 54. – P. 1-10. DOI: http://doi.org/10.1134/S0965542514010059.

88. *Cabada, A.* Differential Equations with Involutions / A. Cabada, F.A.F. Tojo. – Amsterdam—Paris—Beijing: Atlantic Press, 2015. – 154 p.

89. *Cabada, A.* Existence Results for a Linear Equation with Reflection, Non-Constant Coefficient and Periodic Boundary Conditions / A. Cabada, F.A.F. Tojo // Journal of Mathematical Analysis and Applcations. – 2014. – Vol. 412, No. 1. – P. 529-546. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.10.067.

90. *Carleman, T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications / T. Carleman // Verhandl. des Internat. Mathem. Kongress. – Zurich, 1932. – P. 138-151.

91. *Fite, W.B.* Properties of the Solutions of Certain Functional Differential Equations / W.B. Fite // Transactions of the American Mathematical Society. – 1921. – Vol. 22, No. 3. – P. 311-319. URL: https://www.jstor.org/stable/1988895.

92. *Gamboa, J.* Three Aspects of Bosonized Supersymmetry and Linear Differential Field Equation with Reflection / J. Gamboa, M. Plyushchay, J. Zanelli // Nuclear Physics B. – 1999. – Vol. 543, No. 1–2. – P. 447-465. DOI: http://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00832-3.

93. *Gupta, C.P.* Boundary value problems for differential equations in Hilbert spaces involving reflection of the argument / C.P. Gupta // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1987. – Vol. 128, No. 2. – P. 375-388.

94. *Gupta, C.P.* Existence and uniqueness theorems for boundary value problems involving reflection of the argument / C.P. Gupta // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1987. – Vol. 11, No. 9. – P. 1075-1083.

95. *Gupta, C.P.* Two-point boundary value problems involving reflection of the argument / C.P. Gupta // Internat. J. Math. & Math. Sci.– 1987. – Vol. 10, No. 2. – P. 361-371. DOI: http://doi.org/10.1155/S0161171287000425.

96. *Halanay, A.* Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lags / A. Halanay. – N.Y.: Academic Press, 1966. – 528 p.

97. *Iskakova, U.A.* Certain Method of Solving Ill-Posed Cauchy-Robin Problem for the Laplace Operator / U.A. Iskakova, B.T. Torebek // Of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-mathematical series. – 2016. – Vol. 6, No. 310. – P. 115-120.

98. *Kirane, M.* A Nonlocal Fractional Helmholtz Equation / M. Kirane, B.Kh. Turmetov, B.T. Torebek // Fractional Differential Calculus. – 2017. – Vol. 7, No. 2. – P. 225-234. DOI: http://doi.org/10.7153/fdc-2017-07-08.

99. *Kirane, M.* Inverse Problems for a Nonlocal Wave Equation with an Involution Perturbation / M. Kirane, N. Al-Salti // J. Nonlinear Sci. Appl. – 2016. – Vol. 9, No. 3. – P. 1243-1251. DOI: http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.03.49.

100. *Kirane, M.* On an Inverse Problem of Reconstructing a Subdiffusion Process from Nonlocal Data / M. Kirane, M.A. Sadybekov, A.A. Sarsenbi // Math. Meth. Appl. Sci. – 2019. – Vol. 42, No. 6. – P. 2043-2052. DOI: http://doi.org/10.1002/mma.5498.

101. *Kirane, M.* Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative / M. Kirane, A.A. Sarsenbi // Fractal Fract. – 2023. – Vol. 7, No. 2:131. – P. 1-12. DOI: http://doi.org/10.3390/fractalfract7020131.

102. *Kolmanovski, V.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations / V. Kolmanovski, A. Myshkis. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Press, 1999. – 648 p.

103. *Koshanova, M* On Solvability of Some Inverse Problems for a Pseudoparabolic Equation with Multiple Involution / M. Koshanova, K. Nazarova, B. Turmetov, K. Usmanov // Mathematics. – 2025. – Vol. 13, No. 16:2587. DOI: https://doi.org/10.3390/math13162587 .

104. *Kozhanov, A.I.* Composite Type Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov. – Utrecht: VSP, 1999. – 171 p.

105. *Kozhanov, A.I.* Nonlocal Problems with Integral Conditions for Elliptic Equations / A.I. Kozhanov // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2018. – Vol. 64, No 5. – P. 741-752. DOI: DOI: https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1501038.

106. *Kritskov, L.V.* Basicity in L_p of Root Functions for Differential Equations with Involution / L.V. Kritskov, A.M. Sarsenbi // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015, No. 278. – P. 1-9.

107. *Kritskov, L.V.* Equiconvergence Property for Spectral Expansions Related to Perturbations of the Operator $-u''(-x)$ with Initial Data / L.V. Kritskov, A.M. Sarsenbi // Filomat. – 2018. – Vol. 32, No. 3. – P. 1069-1078. DOI: http://doi.org/10.2298/FIL1803069K.

108. *Kritskov, L.V.* Nonlocal spectral problem for a second-order differential equation with an involution / L.V. Kritskov, M.A. Sadybekov, A.M. Sarsenbi // Bulletin of the Karaganda University: Mathematics series. Special issue. – 2018. – Vol. 91, No. 3. – P. 53-61.

109. *Kritskov, L.V.* Properties in L_p of Root Functions for a Nonlocal Problem with Involution / L.V. Kritskov, M.A. Sadybekov, A.M. Sarsenbi // Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43, No. 1 – P. 393-401. DOI: http://doi.org/10.3906/mat-1809-12.

110. *Kritskov, L.V.* Riesz basis property of system of root functions of second order differential operator with involution / L.V. Kritskov, A.M. Sarsenbi// Differential Equations. – 2017. – Vol. 53, No. 1. – P. 33-46. DOI: http://doi.org/10.1134/S0012266117010049.

111. *Mussirepova, E.* Solvability of Mixed Problems for the Wave Equation with Reflection of the Argument / E. Mussirepova, A.A. Sarsenbi, A.M. Sarsenbi // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2022. – Vol. 45, No. 17. – P. 11262-11271. DOI: http://dx.doi.org/10.1002/mma.8448.

112. *Piao, D.* Periodic and almost periodic solutions for differential equations with reflection of the argument / D. Piao // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2004. – Vol. 57, No. 4. – P. 633-637.

113. *Post, S.* Supersymmetric Quantum Mechanics with Reflections / S. Post, L. Vinet, A. Zhedanov //J. Phys. A: Math. Theor. – 2011. – Vol. 44, No. 43. DOI: http://doi.org/10.1088/1751-8113/44/43/435301.

114. *Przeworska-Rolewicz, D.* Equations with Transformed Argument: An Algebraic Approach, Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics / D. Przeworska-Rolewicz. – N.Y.: Elsevier Scientific Publishing Company, 1973. – 354 p.

115. *Przeworska-Rolewicz, D.* On linear differential equations with transformed argument solvable by means of right invertible operators / D. Przeworska-Rolewicz // Annales Polinici Mathematici. – 1974. – Vol. 29, No. 2. P. 141-148.

116. *Przeworska-Rolewicz, D.* Right invertible operators and functional-differential equations with involutions / D. Przeworska-Rolewicz // Demonstration Math. – 1973. – Vol. 5, No. 2. – P. 165-177.

117. *Sadybekov, M.A.* On an Inverse Problem of Reconstructing a Heat Conduction Process from Nonlocal Data / M.A. Sadybekov, G. Dildabek,

M.B. Ivanova // Advances in Mathematical Physics. – 2018. – Vol. 2018. – P. 1-8. DOI: http://doi.org/10.1155/2018/8301656.

118. *Sarsenbi, Abdissalam* Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Involution in the Second Derivative and their Solvability/Abdissalam Sarsenbi, Abdizhahan Sarsenbi //AIMS Mathematics. – 2023. – Vol. 8, No. 11. – P. 26275-26289. DOI: http://doi.org/10.3934/math.20231340.
119. *Sarsenbi, A.* Mixed Problem for a Wave Equation with an Involution Perturbation / A. Sarsenbi, M. Utelbaeva // Third International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2019). AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2183, No. 1. – P. 1-3. DOI: http://doi.org/10.1063/1.5136165.
120. *Sarsenbi, Abdissalam* On Eigenfunctions of the Boundary Value Problems for Second Order Differential Equations with Involution / Abdissalam Sarsenbi, Abdizhahan Sarsenbi // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, No. 10: 1972. – P. 1-9. DOI: http://doi.org/10.3390/sym13101972.
121. *Sarsenbi, A.A.* A solvability Conditions of Mixed Problems for Equations of Parabolic Type with Involution / A.A. Sarsenbi // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2018. – Vol. 92, No. 4. – C. 87-93. DOI: http://doi.org/10.31489/2018m4/87-93.
122. *Sarsenbi, A.A.* Green's Function of a Boundary Value Problem for a Second-Order Differential Equation with Involution / A.A. Sarsenbi, E. Mussirepova // Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан. – 2022. – № 4(86). – С. 195-202. DOI: http://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.209.
123. *Sarsenbi, A.A.* Unconditional Basicity of Eigenfunctions System of Sturm-Liouville Operator with an Involutional Perturbation / A.A. Sarsenbi // Bulletin of the Karaganda University: Mathematics series. Special issue. – 2018. – Vol. 91, No. 3. – P. 117-127.

124. *Serikbaev, D.* Inverse Problem for Fractional Order Pseudo-Parabolic Equation with Involution / D. Serikbaev // Уфимск. матем. журн. – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 122-138.

125. *Shah, S.* Reducible functional differential equations / S. Shah, J. Wiener // Internat. J. Math. & Math. Sci. – 1985. – Vol. 8, No. 1. – P. 1-27.

126. *Shaldanbayev, A.Sh.* About Cantor of the Range of the Operator of the Periodic Regional Task for the Heat Conductivity Equation with the Deviating Argument / A.Sh. Shaldanbayev, M.T. Shomanbayeva, S.T. Achmetova // News of the National academy of sciences of the republic of Kazakhstan. Physicomathematical series. – 2016. – Vol. 3, No. 307. – P. 148-157.

127. *Shisha, O.* On Involutions / O. Shisha, C.B. Mehr // Journal of Research of the Notional Bureau of Standards - B. Mathematics and Mathematical Physics. – 1967. – Vol. 71B, No. 1. – P. 19-20.

128. *Silberstein, L.* Solution of the equation $f'(x) = f(1/x)$ / L. Silberstein // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1940. – Vol. 30, No. 200. – P. 185-186.

129. *Skubachevskii, A.L.* Elliptic functional differential equations and applications / A.L. Skubachevskii. – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser, 1997.

130. *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht-Boston: VSP, 2003. – 216 p.

131. *Tapdigoglu, R.* Inverse Source Problems for a Wave Equation with Involution / R. Tapdigoglu, B.T. Torebek // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». – 2018. – № 3(91). – С. 75-82.

132. *Tojo, F.A.F.* Green's functions of partial differential equations with involutions / F.A.F. Tojo, P. Torres // Journal of Applied Analysis

& Computation. – 2017. – Vol. 7, No. 3. – P. 1127-1138. DOI: http://doi.org/10.11948/2017070.

133. *Torebek, B.T.* Some Inverse Problems for the Nonlocal Heat Equation with Caputo Fractional Derivative / B.T. Torebek, R. Tapdigoglu // Math. Meth. Appl. Sci. – 2017. – Vol. 40, No. 18. – P. 6468-6479. DOI: http://doi.org/10.1002/mma.4468.
134. *Triebel, H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators / H. Triebel. – Heidelberg: Barth, 1995.
135. *Turmetov, B.H.* On the Solvability of a Mixed Problem for Partial Equations of Parabolic Type with Involution / B.H. Turmetov, A.A. Ahmedov, I. Orazov // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1988. – P. 1-8. DOI: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1988/1/012084.
136. *Watkins, W.* Modified Wiener equations / W. Watkins // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2001. – Vol. 27, No. 6. – P. 347-356.
137. *Watkins, W.T.* Asymptotic properties of differential equations with involutions / W. Watkins // Int. J. Math. Math. Sci. – 2008. – Vol. 44, No. 4. P. 485.
138. *Wiener, J.* A Classroom Approach to Involution / J. Wiener, W. Watkins // The College Mathematics Journal. – 1988. – Vol. 19, No. 3. – P. 247-250.
139. *Wiener, J.* A glimpse into the wonderland of involutions / J. Wiener, W. Watkins // Missouri J. Math. Sci. – 2002. – Vol. 14, No. 3. – P. 175-185.
140. *Wiener, J.* Boundary value problems for differential equations with reflection of the argument / J. Wiener, A. Aftabizadeh // Internat. J. Math. & Math. Sci. – 1985. – Vol. 8, No. 1. – P. 151-163.
141. *Wiener, J.* Generalized solutions of functional differential equations / J. Wiener. – Singapore: World Scientific, 1993. – 410 p.

142. *Wu, J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / J. Wu. – N.Y.: Springer-Verlag, 1996. – 432 p.

143. *Yarka, U.* The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation / U. Yarka, S. Fedushko, P. Veselý // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, No. 12:2108. – P. 1-13. DOI: http://doi.org/10.3390/math8122108.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

144. *Бжеумихова, О.И.* Эллиптические уравнения с инволютивным отклонением аргумента / О.И. Бжеумихова // Владикавказский математический журнал. – 2025. – Т. 27, № 3. – С. 5-20. DOI: https://doi.org/10.46698/i3311-3054-4734-g.

145. *Кожанов, А.И.* Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений второго порядка с инволюцией в старших членах / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // Математические заметки СВФУ. – 2025. – Т. 32, № 2. – С. 10-23. DOI: https://doi.org/10.25587/2411-9326-2025-2-10-23.

146. *Кожанов, А.И.* Собственные функции и собственные числа дифференциальных уравнений с инволюцией / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // Сибирский математический журнал. – 2024. – Т. 65, № 5(387). – С. 953-964. DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2024.65.513.

147. *Kozhanov, A.I.* Elliptic and Parabolic Equations with Involution and Degeneration at Higher Derivatives / A.I. Kozhanov, O.I. Bzheumikhova // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 18:3325. – P. 1-10. DOI: https://doi.org/10.3390/math10183325.

Список публикаций по теме диссертации в других научных изданиях

148. *Бжеумихова, О.И.* Классические краевые задачи для одного эллиптического уравнения с инволютивным отклонением аргумента /

О.И. Бжеумихова // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2024): материалы 6-й Международной конференции. – Иркутск: Издательство ИГУ, 2024. – С. 11-12.

149. *Бжеумихова, О.И.* Краевая задача для вырождающегося гиперболического уравнения с инволютивным отклонением аргумента / О.И. Бжеумихова // Неклассические уравнения математической физики и их приложения: Тезисы докладов международной научной конференции. – Ташкент: «Университет», 2022. – С. 83-84.

150. *Бжеумихова, О.И.* Краевые задачи для гиперболических уравнений с инволютивным отклонением аргумента / О.И. Бжеумихова // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы VII Международной научной конференции. – Нальчик: Принт-центр, 2023. – С. 66.

151. *Бжеумихова, О.И.* Краевые задачи для гиперболических уравнений с инволюцией и вырождением / О.И. Бжеумихова // Международная конференция, посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (24-е совместное заседание ММО и Семинара имени И.Г. Петровского, 26–30 декабря 2021, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2022. – С. 164-165.

152. *Бжеумихова, О.И.* Краевые задачи для уравнения в частных производных с инволюцией / О.И. Бжеумихова // Алгебра и динамические системы: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию А.А. Махнева. – Нальчик: Принт-центр, 2023. – С. 27-28.

153. *Бжеумихова, О.И.* О влиянии параметров на корректность краевой задачи для эллиптического уравнения с инволюцией / О.И. Бжеумихова, А.И. Кожанов // Актуальные проблемы прикладной математики: Материалы IV Международной научной конференции. – Нальчик-Эльбрус: Институт прикладной математики и автоматизации – фи-

лиал ФГБНУ Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», 2018. – С. 60.

154. *Бжеумихова, О.И.* О разрешимости классической краевой задачи для параболического уравнения в частных производных с инволютивным отклонением аргумента / О.И. Бжеумихова, А.И. Кожанов, В.Н. Лесев // Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем: Тезисы Международной конференции, посвященной 70-летию А.Х. Журтова. – Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 2019. – С. 25.

155. *Бжеумихова, О.И.* О разрешимости краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с инволютивным отклонением в цилиндрической области / О.И. Бжеумихова // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы VI Международной научной конференции. – Нальчик: Принт Центр, 2021. – С. 46.

156. *Бжеумихова, О.И.* О разрешимости некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией / О.И. Бжеумихова // Международная конференция, посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (25-е совместное заседание ММО и Семинара имени И.Г. Петровского): Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2025. – С. 104-105.

157. *Бжеумихова, О.И.* О разрешимости нелокальных краевых задач для параболических уравнений с инволюцией / О.И. Бжеумихова // Алгебра и динамические системы: Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения В.А. Белоногова. – Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 2025. – С. 12-13.

158. *Кожанов, А.И.* Краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с инволюцией / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова //

Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021): Материалы 3-й Международной конференции. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2021. – С. 40-42.

159. *Кожанов, А.И.* О разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией и вырождением в старших производных / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов III Международной научной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова. – Улан-Удэ: Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, 2025. – С. 60-61.

160. *Кожанов, А.И.* Собственные числа и собственные функции дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: Тезисы докладов международной научной конференции. Часть I. – Фергана, 2023. – С. 86-87.

161. *Кожанов, А.И.* Собственные числа и собственные функции линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией / А.И. Кожанов, О.И. Бжеумихова // X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию академии наук Республики Саха (Якутия) и памяти первого президента академии наук РС(Я), член-корреспондента РАН Филиппова Василия Васильевича. – Якутск: Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, 2023. – С. 47.

162. *Kozhanov, A.I.* Eigenvalues and Eigenfunctions of Differential Equations with Involution / A.I. Kozhanov, O.I. Bzheumikhova // Differential and Difference Equations. Russian-Chinese Conference. – Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2023. – С. 77.