

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертационную работу
Бжеумиховой Оксаны Игоревны
«Краевые задачи для уравнений
в частных производных с инволютивным
отклонением аргумента»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по научной
специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и
математическая физика

Диссертационная работа О. И. Бжеумиховой посвящена исследованию краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента.

Актуальность темы исследования

Дифференциальные уравнения с инволюцией образуют содержательный класс функционально-дифференциальных уравнений: значение искомой функции либо ее производных в текущей точке связывается со значениями в точке, получаемой посредством инволютивного преобразования. Наличие такого члена может существенно изменять условия корректности, структуру энергетических оценок, спектральные свойства и характер единственности решения.

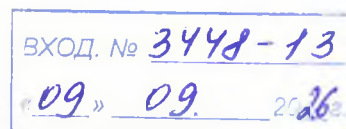
Актуальность выбранной темы определяется, с одной стороны, развитием теории функционально-дифференциальных уравнений, а с другой — недостаточной разработанностью многомерных задач с общей, а не только линейной, инволюцией. Представляет интерес систематическое сопоставление случаев, когда инволютивный член входит в младшие слагаемые уравнения и когда он затрагивает старшие производные, включая возможное вырождение главной части. Поэтому исследуемые в диссертации задачи соответствуют современному направлению теории дифференциальных уравнений и математической физики.

Структура и основное содержание диссертации

Основным объектом исследования являются обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных с линейной и общей инволюциями, а также локальные и нелокальные краевые задачи для них.

Диссертация изложена на 111 страницах и состоит из введения, трех глав, объединяющих восемь разделов, заключения и списка литературы из 162 наименований. Во введении сформулированы цель и задачи исследования, охарактеризованы актуальность, научная новизна, теоретическая и практическая значимость и методы работы, приведены положения, выносимые на защиту, сведения об апробации, публикациях и личном вкладе автора.

Основные результаты диссертации изложены в трех главах.



В первой главе исследуются дифференциальные уравнения с линейной инволюцией $t \mapsto T - t$. В §§ 1.1–1.2 рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, а в §§ 1.3–1.4 — параболические, псевдопараболические и эллиптические уравнения. Изучается влияние инволютивного слагаемого на корректность задачи Коши, спектральные свойства и единственность решений локальных и нелокальных краевых задач.

Во второй главе изучаются параболические и эллиптические уравнения второго порядка с общей инволюцией $\varphi(t)$, входящей в младший член. Для соответствующих локальных и нелокальных задач получены достаточные условия существования и единственности регулярных решений. В качестве основных инструментов используются энергетические оценки, метод продолжения по параметру и регуляризация.

Третья глава посвящена уравнениям с инволюцией в старших производных. В § 3.1 рассматриваются параболические и эллиптические уравнения с общей инволюцией $\varphi(x)$ в невырожденном и вырожденном случаях. В § 3.2 исследуются первые начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с линейной инволюцией $x \mapsto 1 - x$, включая вырождающееся уравнение с диссипацией.

В заключении обобщены основные результаты исследования. Библиография содержит источники, использованные и цитируемые в диссертации.

Научная новизна. Теоретическая и практическая значимость работы

Научная новизна работы связана прежде всего с постановкой и исследованием ряда краевых задач для уравнений с общей инволюцией, а также с распространением анализа на случаи присутствия инволютивного члена в старших производных и возможного вырождения преобразованного уравнения. К результатам, представляющим научный интерес, относятся условия существования и единственности регулярных решений, выявление роли инволюции в нарушении единственности, а также использование регуляризации и априорных оценок в рассматриваемых нелокальных постановках.

Выбранный круг задач, их систематизация и полученные достаточные условия в совокупности имеют теоретическое значение для дальнейшего развития теории уравнений с инволютивным отклонением аргумента. Практическая значимость результатов определяется возможностью их использования при последующем исследовании функционально-дифференциальных уравнений и математических моделей, содержащих отражение, обращение аргумента или иные инволютивные преобразования.

Обоснованность и достоверность результатов. Соответствие паспорту специальности

Для решения поставленных задач автор использует интегральные тождества, неравенства Гёльдера, Юнга и Пуанкаре, лемму Гронуолла, метод продолжения по параметру, регуляризацию, слабую компактность в гильбертовых пространствах и спектральные рассуждения. Выбор методов соответствует аналитической природе исследуемых задач. Обоснованность и достоверность результатов обеспечиваются применением указанных методов, выводом априорных оценок и согласованностью полученных выводов с общей теорией дифференциальных уравнений.

Содержание диссертации соответствует паспорту научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, поскольку работа посвящена вопросам существования, единственности и свойств решений краевых задач для дифференциальных уравнений.

Публикации, апробация и соответствие автореферата содержанию диссертации

По теме диссертации указано 19 публикаций, включая четыре статьи [144–147], опубликованные в рецензируемых научных изданиях и изданиях, индексируемых в международных базах данных, а также 15 тезисов докладов [148–162]. Среди основных публикаций — статьи во «Владикавказском математическом журнале», «Сибирском математическом журнале», журнале *Mathematics* и «Математических заметках СВФУ». Результаты работы докладывались на международных конференциях и научных семинарах в Нальчике, Иркутске, Москве, Ташкенте, Якутске, Новосибирске и Улан-Удэ. В диссертации приведено распределение личного вклада автора в совместных работах [145–147]. Эти сведения свидетельствуют о достаточной апробации результатов диссертации.

Автореферат соответствует содержанию диссертации и отражает ее основные положения и результаты.

Замечания и вопросы по диссертации

При общей положительной оценке диссертационной работы необходимо отметить следующие замечания и вопросы.

- 1) **Отдельные уточнения к первой главе.** В пункте 3 теоремы 1.2 (с. 28) знаки параметра μ следует поменять местами: $\mu = \mu_m$ при $m = 2l - 1$ и $\mu = -\mu_m$ при $m = 2l$. В доказательстве теоремы 1.4 (с. 33) необходимо отдельно оговорить случай $\lambda = \mu = 0$, когда уравнение $y' = 0$ имеет произвольные постоянные решения. Наконец, в доказательстве теоремы 1.6 (с. 36) равенство $\cos(\gamma T/2) = -1$ при $\gamma T = 2\pi m$ справедливо лишь для нечетных m ; поэтому достаточно выбрать последовательность $m = 2k - 1$. Эти уточнения не изменяют содержания соответствующих результатов, но должны быть отражены в их формулировках и доказательствах.
- 2) **Применение метода продолжения по параметру в теоремах 2.3 и 2.4.** В условиях (2.27), (2.30), (2.32) при $a(x, t) < 0$ нижняя коэрцитивная оценка должна выражаться через $-\max_{\overline{Q}} a$ либо $\min_{\overline{Q}} |a|$. В доказательстве теоремы 2.3 вместо необходимой оценки полной нормы (2.29) фактически получена лишь оценка (2.31) нормы решения в $L_2(Q)$. В теореме 2.4 оценка (2.33) контролирует норму решения и его производной по t , но также не обеспечивает оценки полной нормы в $W_2^2(Q)$. Следует указать конкретное неравенство эллиптической теории, которое совместно с оценками (2.31) и (2.33) позволяет получить требуемую оценку в $W_2^2(Q)$, а также привести точную ссылку, обосновывающую разрешимость соответствующей задачи при $\rho = 0$.
- 3) **Некоторые этапы доказательства теоремы 2.5.** При выводе оценки (2.46) используются производные коэффициентов по времени, тогда как в формулировке теоремы предполагается

ется лишь $a, b \in C(\overline{Q})$. Таким образом, условия теоремы не согласованы с проведенным доказательством.

Существование решений регуляризованной задачи (2.38), (2.21), (2.24) в диссертации не доказано. Ссылка на работу [36] не является непосредственным обоснованием, поскольку в ней рассматривается задача без инволютивного члена $b(x, t)u(x, \varphi(t))$. Требуется пояснения, на каком основании метод продолжения по параметру обеспечивает разрешимость полной регуляризованной задачи.

При предельном переходе без достаточного обоснования утверждается слабая сходимость следов $u_{m_k}(\cdot, 0)$ и $u_{m_k}(\cdot, T)$ в $W_2^2(\Omega)$. Такая сходимость непосредственно не следует из слабой сходимости $u_{m_k} \rightharpoonup u$ в $W_2^2(Q)$, поэтому сохранение в пределе нелокального условия $u(x, 0) = \alpha u(x, T)$ остается необоснованным.

- 4) **Отдельные этапы доказательства теоремы 3.4 требуют пояснения.** В доказательстве теоремы 3.4 (с. 74–75) разрешимость регуляризованной задачи при фиксированном ε , вывод оценок (3.32)–(3.34) и предельный переход изложены лишь в общих чертах. В частности, не указаны используемые слабые сходимости и не пояснено сохранение начально-краевых условий при переходе к пределу. Эти этапы доказательства требуют более подробного обоснования.
- 5) **Неполнота условий теоремы 3.5.** В приведенной на с. 82 схеме доказательства единственности уравнение (3.40) умножается на u_t . При последующем интегрировании по частям возникает производная a_{1x} . Поэтому для проведения указанного доказательства необходимо условие $a_x \in C(\overline{Q})$, которое в формулировке теоремы 3.5 отсутствует.
- 6) **Доказательство теоремы 3.6.** В доказательстве теоремы 3.6 основная равномерная по ε оценка и предельный переход приведены лишь по аналогии с невырожденным случаем. Однако из условия $|a(x, t)| \leq 1$ следует лишь неотрицательность возникающей энергетической формы, тогда как ее коэрцитивность при допуске вырождении, например при $a \equiv \pm 1$, может нарушаться. Поэтому приведенная схема оценки не обеспечивает контроля производной u_{xxx} , необходимого для заявленного включения $u_x \in W_2^2(Q)$, и условия либо заключение теоремы 3.6 требуют уточнения. Кроме того, при обработке интеграла, содержащего f и u_{xxxxt} , необходимо отсутствующее в формулировке условие $f_x \in L_2(Q)$.
- 7) **Отдельные этапы доказательства теоремы 3.7.** Разрешимость регуляризованной задачи при фиксированном ε , возможность дифференцирования уравнения (3.51) по t и предельный переход изложены без достаточного обоснования.
В оценке (3.52) постоянная N_3 зависит также от функции $a(t)$ и нижней границы α_0 . Кроме того, приведенное перед (3.53) равенство дает член с множителем ε , тогда как соответствующий интеграл в (3.53) записан без этого множителя. Получение невзвешенной оценки требует дополнительного энергетического тождества и проверки достаточности сформулированных условий на f .

Указанные замечания требуют пояснения соискателя.

Заключение по диссертации

Диссертация О. И. Бжеумиховой представляет собой самостоятельное научно-квалификационное исследование актуального класса красивых задач для дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента. Работа имеет внутреннее тематическое единство, содержит систематизированный анализ задач для уравнений различных типов и результаты, представляющие интерес для теории дифференциальных уравнений и математической физики. Основные положения диссертации опубликованы и прошли достаточную апробацию. Высказанные замечания относятся главным образом к полноте обоснования отдельных этапов доказательств и не меняют общей положительной оценки работы и самостоятельного вклада автора.

Учитывая вышеизложенное, считаю, что диссертационная работа О. И. Бжеумиховой «Красивые задачи для уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента» соответствует критериям, установленным пунктами 9–11, 13 и 14 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор — Бжеумихова Оксана Игоревна — заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник сектора проведения фундаментальных научных исследований
Стерлитамакского филиала федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

Кожевникова Лариса Михайловна

Дата: «8» 09 2026 г.

Даю согласие на обработку персональных данных.

Докторская диссертация защищена по специальности 01.01.02. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Адрес основного места работы: 453103, Республика Башкортостан, г. Стерлитамак, проспект Ленина, 49.

Рабочий тел.: +7 (3473) 33-98-65.

E-mail: kosul@mail.ru.

