На правах рукописи

Ижбердеева Елизавета Монировна

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА — НЕРСЕСЯНА

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Челябинск — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет» на кафедре математического анализа.

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Плеханова Марина Васильевна**<br>доктор физико-математических наук, доцент |
| **Официальные оппоненты:** | **Кожанов Александр Иванович**<br>доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук |
| | **Псху Арсен Владимирович**<br>доктор физико-математических наук, доцент, директор Института прикладной математики и автоматизации — филиала Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», главный научный сотрудник отдела Дробного исчисления |
| **Ведущая организация:** | Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет», г. Воронеж |

Защита диссертации состоится «20» сентября 2024 года в $15^{00}$ на заседании объединённого диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте http://uust.ru/.

Автореферат разослан «____» ____________________ 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Исаев Константин Петрович

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Одной из активно развивающихся областей современной математики является теория дифференциальных уравнений дробного порядка и ее приложения. Развитие дробного исчисления инспирировано как теоретическим интересом к нему, так и его использованием в прикладных исследованиях. Дробные производные повсеместно используются в исследованиях по механике вязкоупругих жидкостей, при описании движения во фрактальных средах (почва, кровеносная система), моделирования турбулентности, процессов в математической биологии, математической экономике и др.

Среди многих различных конструкций дробной производной чаще всего рассматриваются производные Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто В данной работе рассматриваются уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна,частными случаями которой являются названные дробные производные, а также любые их конечные композиции. Все это свидетельствует об актуальности темы исследования.

**Объект исследования.**

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A : D_A \to \mathcal{Z}$, $D_A \subset \mathcal{Z}$, $Z$ — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, оператор $B : Z \to \mathcal{Z}$ нелинейный, $D^{\sigma_k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, — производные Джрбашяна — Нерсесяна (определение см. ниже). В работе будет рассмотрена начальная задача

$$D^{\sigma_k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{1}$$

для линейных (при $B = f(t)$) и нелинейных уравнений

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + B(t, D^{\sigma_0} z(t), D^{\sigma_1} z(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(t)) \tag{2}$$

при различных условиях на операторы $A, B$.

Помимо уравнений, разрешенных относительно дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна, в диссертационной работе исследуются уравнения, содержащие линейный оператор с нетривиальным ядром при этой производной, уравнения из этого класса будем называть вырожденными эволюционными. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L, M : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, $X$ — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, оператор $N : X \to \mathcal{Y}$ нелинейный. Будет исследована начальная задача типа Шоуолтера — Сидорова

$$D^{\sigma_k} Px(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3}$$

для линейных (при $N = g(t)$) и нелинейных вырожденных эволюционных уравнений

$$D^{\sigma_n} Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\sigma_0} x(t), D^{\sigma_1} x(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}} x(t)) \tag{4}$$

при различных условиях на операторы $L, M, N$. Общие результаты о начальных задачах для эволюционных уравнений в банаховых пространствах будут использованы для изучения начально-краевых задач для уравнений в частных производных.

**Степень разработанности темы исследования.** Производная Джрбашяна — Нерсесяна была введена в рассмотрение в работе [1] (публикация

[1]Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. наук Армянской ССР. Математика. 1968. Т. 3, № 1. С. 1–28.

[2] является ее английским переводом; см. также работу [3]). Пусть $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, производными Джрбашяна — Нерсесяна называются выражения $D^{\sigma_0} z(t) := D_t^{\alpha_0 - 1} z(t)$,

$$D^{\sigma_k} z(t) := D_t^{\alpha_k - 1} D_t^{\alpha_{k-1}} D_t^{\alpha_{k-2}} \ldots D_t^{\alpha_0} z(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $D_t^{\beta} z(t)$ — производная Римана — Лиувилля порядка $\beta$ при $\beta > 0$ и интеграл Римана — Лиувилля порядка $-\beta$ при $\beta \leq 0$. Здесь же исследована начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения, вообще говоря, с переменными коэффициентами, разрешенного относительно производной Джрбашяна — Нерсесяна. Начальные условия при этом задаются для младших производных Джрбашяна — Нерсесяна $D^{\sigma_k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Различные начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений и систем уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна рассматривались в работах А. В. Псху, М. Г. Мажгиховой,М. О. Мамчуева, Ф. Т. Богатыревой,A. Ahmad и D. Baleanu.

Вырожденные эволюционные уравнения и системы уравнений часто встречаются среди неклассических уравнений математической физики. Различные авторы исследуют начально-краевые задачи для таких уравнений и систем уравнений целого порядка, среди работ последних десятилетий отметим работы R. E. Showalter, Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева, Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой, А. И. Кожанова, A. Favini, A. Yagi, Г. А. Свиридюка, В. Е. Федорова, И. В. Мельниковой, А. И. Филинкова, С.Г. Пяткова, А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера, И. А. Шишмарева, Е. И. Кайкиной, П. И. Наумкина. В этих работах рассматриваются как конкретные уравнения и системы уравнений, обыкновенные и в частных производных, так и абстрактные обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. Уравнения в банаховых пространствах, не разрешимые относительно дробной производной Римана — Лиувилля или Герасимова — Капуто, с приложениями к конкретным начально-краевым задачам исследовались в работах В. Е. Федорова, М. В. Плехановой и их учеников.

Отметим, что результаты диссертации об аналитических разрешающих семействах операторов, невырожденных и вырожденных, являются обобщением соответствующих результатов теории полугрупп операторов, в том числе вырожденных полугрупп операторов, на случай уравнений с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна. Ранее подобные обобщения для эволюционных интегральных уравнений были получены Я. Прюссом, для уравнений с производной Герасимова — Капуто — Э. Г. Бажлековой. Для уравнений с производной Римана — Лиувилля, с распределенными производными Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля аналитические разрешающие семейства операторов исследовались в работах В. Е. Федорова и его соавторов.

**Цели и задачи.** Цель диссертационной работы заключается в исследовании вопросов однозначной разрешимости начальных задач для уравнений, разрешенных относительно производной Джрбашяна — Нерсесяна (2) (в квазилинейном случае — относительно старшей производной Джрбашяна —

[2]Dzhrbashyan M. M., Nersesyan A. B. Fractional derivatives and Cauchy problem for differential equations of fractional order // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2020. Vol. 23. P. 1810–1836.

[3]Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. : Наука., 1968. 672 с.

Нерсесяна), а также вырожденных эволюционных уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна. В первом случае, невырожденном, рассмотрены классы уравнений с ограниченным линейным оператором и с секториальным оператором при искомой функции, при этом рассматривается начальная задача Джрбашяна — Нерсесяна (1). В вырожденном случае предполагается относительная ограниченность либо секториальность пары линейных операторов в уравнении (4) (при старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна и при искомой функции), влекущая существование пар инвариантных подпространств исходных пространств. При этом начальные условия Джрбашяна — Нерсесяна задаются не для всей искомой функции, а только для ее проекции на подпространство без вырождения, что и означает задание условий типа Шоуолтера — Сидорова (3).

Задачей работы также является применение полученных абстрактных результатов для исследования начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных с производными Джрбашяна — Нерсесяна по времени.

**Научная новизна.** Новизна представляемой работы заключается в том, что ранее уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна в банаховых пространствах, по-видимому, не рассматривались. И если результаты о разрешимости задачи Джрбашяна — Нерсесяна для невырожденного линейного уравнения с ограниченным оператором в правой части аналогичны результатам классиков[4], то результаты о таких же задачах в случае неограниченного линейного оператора в правой части, а также в вырожденном случае аналогов в математической литературе не имеют.

Кроме того, полученные с применением абстрактных результатов утверждения об однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных в большинстве случаев также являются новыми. В частности это касается широких классов уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального оператора по пространственным переменным, как разрешенных относительно старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна по временно́й переменной, так и вырожденных.

Тем самым, результаты, полученные в данной работе, являются новыми и вносят вклад в теорию дифференциальных уравнений с дробными производными.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Диссертационная работа имеет теоретический характер, она посвящена исследованию новых классов задач и поискам методов их исследования. Результаты работы развивают теорию дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, а также обобщают результаты теории полугрупп операторов на случай уравнений с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна, и, тем самым, вносят вклад в соответствующие разделы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений.

Прикладные задачи с уравнениями дробного порядка, которые позволяет исследовать развитая в работе теория, играют значимую роль в механике, физике, биологии и др. областях науки. Полученные результаты позволяют выбирать корректную постановку задач для конкретных уравнений и систем уравнений с дробными производными, помогают определить некоторые свойства соответствующих физических систем, могут послужить основой для раз-

[4] Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. наук Армянской ССР. Математика. 1968. Т. 3, № 1. С. 1–28.

работки алгоритмов численного поиска их решений.

**Методология и методы исследования.** В диссертационной работе исследуются начальные задачи для уравнений с дробными производными Джрбашяна — Нерсесяна, линейные и квазилинейные, как разрешенные относительно старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна, так и вырожденные, с необратимым линейным оператором при этой производной.

Линейные уравнения исследуются с помощью теории разрешающих семейств операторов, обобщающей теорию полугрупп операторов на случай уравнений с дробными производными. Для невырожденного неоднородного линейного уравнения единственное решение задачи Джрбашяна — Нерсесяна представлено в терминах разрешающих операторов. Эта формула решения позволяет невырожденное квазилинейное уравнение редуцировать к интегро-дифференциальному уравнению, исследовать которое удается с помощью теоремы Банаха о сжимающем отображении в специально построенных функциональных пространствах.

Уравнение, не разрешимое относительно старшей дробной производной по времени, рассматривается при условии спектральной ограниченности или секториальности пары линейных операторов в уравнении. Эти условия на операторы влекут существование пар инвариантных подпространств в исходных пространствах, что позволяет исходную задачу редуцировать к задаче для системы уравнений на взаимно дополнительных подпространствах. При этом уравнение на подпространстве без вырождения разрешено относительно старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна и имеет ограниченный или секториальный линейный оператор в правой части, а потому исследовано выше. А уравнение на подпространстве вырождения содержит нильпотентный оператор при старшей производной, что существенно облегчает доказательство его однозначной разрешимости.

Вырожденное квазилинейное уравнение рассматривается при дополнительных ограничениях нескольких типов, при которых удается описанную выше схему исследования довести до конца: образ нелинейного оператора лежит в подпространстве без вырождения, либо нелинейный оператор зависит только от элементов подпространства без вырождения, либо только от элементов подпространства вырождения.

Методология исследования рассмотренных в диссертации начально-краевых задач для уравнений или систем систем уравнений в частных производных заключается в их редукции к уже исследованным начальным задачам для уравнений в банаховом пространстве путем выбора подходящих операторов и функциональных пространств. Такой подход позволяет применять один абстрактный результат для целого ряда однотипных, но иногда очень различных по форме начально-краевых задач.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Исследована однозначная разрешимость задачи Джрбашяна — Нерсесяна для линейных неоднородных уравнений, разрешенных относительно дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна, с ограниченным оператором в правой части. Для квазилинейных уравнений соответствующего класса установлено существование единственного локального решения.

2. Получены условия однозначной разрешимости задачи типа Шоуолтера — Сидорова для линейных неоднородных вырожденных эволюционных уравнений с производной Джрбашяна — Нерсесяна и со спектрально ограниченной парой операторов. Для квазилинейных уравнений соответствую-

щего класса установлено существование единственного локального решения при различных ограничениях на нелинейный оператор.

3. Найдены условия существования аналитических разрешающих семейств операторов линейных уравнений, разрешенных относительно производной Джрбашяна — Нерсесяна. Исследована однозначная разрешимость задачи Джрбашяна — Нерсесяна для линейных неоднородных уравнений с неограниченным оператором, порождающим аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. Для квазилинейных уравнений соответствующего класса установлено существование единственного локального решения.
4. Найдены условия существования вырожденных аналитических разрешающих семейств операторов линейных уравнений с вырожденным оператором при производной Джрбашяна — Нерсесяна. Исследована однозначная разрешимость задачи типа Шоуолтера — Сидорова для линейных неоднородных уравнений с парой неограниченных операторов, порождающей вырожденное аналитическое разрешающее семейство операторов.
5. Общие результаты использованы для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для встречающихся в приложениях уравнений и систем уравнений в частных производных, разрешимых и не разрешимых относительно старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна по времени.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность полученных результатов обоснована строгостью применяемых математических методов исследования, корректностью использования математического аппарата.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на Межгородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (руководитель проф. А. И. Кожанов), на конференциях: Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2021, 2022; Международная научная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения», Иркутск, 2021, 2022; Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 2021, 2023; International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, 2022; International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, 2022; O.A. Ladyzhenskaya Centennial Conference on PDE's, St. Petersburg, 2022.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 22 работах, из которых 8 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus.

**Личный вклад автора.** Все результаты диссертации получены лично соискателем. В работе [1] М. В. Плехановой предложена идея доказательства леммы 4, В. Е. Федоровым сформулированы основные свойства $(L,\sigma)$-ограниченных операторов и предложена схема их использования в §4 статьи. В работе [2] Е. М. Ижбердеевой принадлежат результаты первого параграфа, В. Е. Федоровым и А. Р. Волковой написан второй параграф. В статье [3] М. В. Плехановой принадлежит идея доказательства теоремы 2, В. Е. Федоровым введено определение 1 и предложена схема использования теоремы 1 для получения основного результата. В работе [4] научным руководителем была предложена схема доказательства теоремы 2, авторство всех доказательств принадлежит Е. М. Ижбердеевой. Постановка задачи в [5] и схема доказательства леммы 2 принадлежит М. В. Плехановой, все остальные результаты статьи были получены автором диссертации самостоятельно. В работе [6] Е. М. Ижбердеева провела исследование задач, постановка которых была предложена М. В. Плехановой, последней также были получены оценки на норму нелинейного оператора в доказательстве теоремы 7. В работе [7] научным руководителем была поставлена задача и предложены иллюстрирующие примеры в разделе 6.1, подробное рассмотрение которых было проведено автором диссертации. Таким образом, в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично автору диссертации.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа объемом в 133 страницы содержит введение, 3 главы, заключение, список обозначений и соглашений, список литературы, состоящий из 111 источников.

## Основное содержание диссертационной работы

Во **введении** описаны актуальность темы исследования, историография вопроса, постановка задачи, новизна полученных результатов, их теоретическая и практическая значимость, методы исследования, выносимые на защиту положения, степень достоверности и апробации, краткое содержание работы.

В **первой главе** в §1.1 определена дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна. Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ функции $z$ имеет вид $J_t^\alpha z(t) := \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(s)ds, \quad t > 0$. Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ функции $z$ определяется как ${}^R D_t^\alpha z(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} z(t)$, где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $D_t^m := \frac{d^m}{dt^m}$ — производная целого порядка. Пусть $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — множество действительных чисел, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\sigma_k := \sum\limits_{j=0}^k \alpha_j - 1, \quad k = 0, 1, \dots, n$, следовательно $-1 < \sigma_k \leq k - 1$. Определим дифференциальные операции

$$D^{\sigma_0} z(t) := D_t^{\alpha_0 - 1} z(t), \tag{5}$$

$$D^{\sigma_k} z(t) := D_t^{\alpha_k - 1} D_t^{\alpha_{k-1}} D_t^{\alpha_{k-2}} \dots D_t^{\alpha_0} z(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

Дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна $D^{\sigma_n}$, ассоциированная с последовательностью $\{\alpha_k\}_0^n$, определяется соотношениями (5), (6).

Затем в §1.2 доказаны существование и единственность классического решения задачи Джрбашяна — Нерсесяна в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$

$$D^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \tag{7}$$

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t), \quad t > 0, \tag{8}$$

Функция $z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z}) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$ называется решением задачи (7), (8), если $D_t^{\sigma_k} z \in AC(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, $D_t^{\sigma_n} z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, равенство (8) выполняется для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и выполнены условия (7). Здесь $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

**Теорема 1.** *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$. *Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k + 1}(t^{\sigma_n} A) z_k$$

*является единственным решением задачи* (7), (8).

Здесь $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, $E_{\alpha,\beta}(Z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{Z^j}{\Gamma(\alpha j+\beta)}$, $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, — функция Миттаг-Леффлера.

В §1.4 аналогичные результаты получены для неоднородного уравнения

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + f(t). \tag{9}$$

**Теорема 2.** *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1 \dots, n-1$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1 \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$ *при* $\alpha_n = 1$ *и* $f \in C^1_\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ *для некоторого* $\gamma < 1$ *при* $\alpha_n < 1$. *Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) z_k + \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) f(s) ds \tag{10}$$

*является единственным решением задачи* (7), (9).

Тот факт, что специальное введенное пространство $C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$ функций $v \in C([t_0,T];\mathcal{Z}) \cap C^1((t_0,T];\mathcal{Z})$, таких, что $(t-t_0)^\gamma v'(t) \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$, с нормой $\|v\|_{C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})} := \sup\limits_{t\in[t_0,T]} \|v(t)\|_{\mathcal{Z}} + \sup\limits_{t\in[t_0,T]} \|(t-t_0)^\gamma v'(t)\|_{\mathcal{Z}}$ является банаховым, доказан в §1.3.

В §1.5 показано, что любая композиция двух дробных производных Герасимова — Капуто и/или Римана — Лиувилля представляет собой производную Джрбашяна — Нерсесяна, а в §1.6 аналогичный факт доказан для композиции любого числа производных Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля. Пусть $m_l - 1 < \beta_l \leq m_l \in \mathbb{N}$, $s_l - 1 < \gamma_l < s_l \in \mathbb{N}$, $r_l \in \{0,1\}$, $l = 1, 2, \dots, p$, тогда дифференциальный оператор

$$\prod_{l=1}^{p} ({}^G D^{\beta_l})^{1-r_l} (D_t^{\gamma_l})^{r_l} \tag{11}$$

представляет собой произвольную композицию $p \in \mathbb{N}$ дифференциальных операторов Герасимова — Капуто ${}^G D^{\beta_l}$ и Римана — Лиувилля $D_t^{\gamma_l}$.

**Теорема 3.** *Любой дифференциальный оператор вида* (11) *является производной Джрбашяна — Нерсесяна.*

Формула решения (10) позволила в §1.7 редуцировать задачу

$$D^{\sigma_k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{12}$$

для квазилинейного уравнения с производными Джрбашяна — Нерсесяна

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + B(t, D^{\sigma_0} z(t), D^{\sigma_1} z(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(t)) \tag{13}$$

к интегро-дифференциальному уравнению

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (t-t_0)^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}((t-t_0)^{\sigma_n} A) z_k + \int\limits_{t_0}^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) B^z(s) ds,$$

где $B^z(s) := B(s, D^{\sigma_0} z(s), D^{\sigma_1} z(s), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(s))$. Доказано утверждение.

**Теорема 4.** *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1 \dots, n-1$, $\alpha_k \in (0,1)$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $Z$ *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}$, *выполняется включение* $(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in Z$, $B \in C^1(Z; \mathcal{Z})$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (12), (13).

В §1.8 полученные абстрактные результаты о разрешимости линейного и квазилинейного уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна использованы при исследовании начально-краевых задач для уравнений с многочленами от эллиптического оператора высокого порядка, дифференциального по пространственным переменным, и с производными Джрбашяна — Нерсесяна по времени. При этом многочлен при старшей производной не должен обращаться в нуль на спектре эллиптического оператора и должен иметь степень не ниже степени многочлена при искомой функции.

Пусть $P_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} c_j\lambda^j$, $Q_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} d_j\lambda^j$, $c_j, d_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, \varrho \in \mathbb{N}_0$, $c_\varrho \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda u)(\xi) := \sum_{|q| \le 2r} a_q(\xi) \frac{\partial^{|q|} u(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \dots \partial \xi_d^{q_d}}, \ \ a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(\xi) := \sum_{|q| \le r_l} b_{lq}(\xi) \frac{\partial^{|q|} u(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \dots \partial \xi_d^{q_d}}, \ \ b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \, l = 1, 2, \dots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + q_2 + \dots + q_d$, пучок операторов $\Lambda, B_1, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен. Пусть оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{v \in H^{2r}(\Omega) : B_l v(\xi) = 0, \, l = 1, 2, \dots, r, \, \xi \in \partial\Omega\}$ действует как $\Lambda_1 u := \Lambda u$. Предположим, что $\Lambda_1$ — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора $\Lambda_1$ вещественный, дискретный, с конечной кратностью. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ является ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системой собственных функций оператора $\Lambda_1$, пронумерованных в порядке невозрастания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратностей.

Рассмотрим задачу

$$D^{\sigma_k} u(\xi, t_0) = u_k(\xi), \ k = 0, 1, \dots, n-1, \ \xi \in \Omega, \tag{14}$$

$$B_l \Lambda^k u(\xi, t) = 0, \ k = 0, 1, \dots, \varrho - 1, \ l = 1, 2, \dots, r, \ (\xi, t) \in \partial\Omega \times (t_0, t_1], \tag{15}$$

$$D^{\sigma_n} P_\varrho(\Lambda) u(\xi, t) = Q_\varrho(\Lambda) u(\xi, t) + F(\xi, D^{\sigma_0} u(\xi, t), \dots, D^{\sigma_{n-1}} u(\xi, t)),$$
$$(\xi, t) \in \Omega \times (t_0, t_1], \tag{16}$$

где $D^{\sigma_k}$ — дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна по переменной $t$, $k = 0, 1, \dots, n$. Возьмем пространства и операторы

$$\mathcal{X} = \{v \in H^{2r\varrho + r_0}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(\xi) = 0, \, k = 0, 1, \dots, \varrho - 1, \, l = 1, 2, \dots, r, \, \xi \in \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Y} = H^{r_0}(\Omega), \ \ L = P_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \ \ M = Q_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}).$$

**Теорема 5.** *Пусть* $\alpha_k \in (0,1)$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *не содержит точки 0 и нулей полинома* $P_\varrho(\lambda)$, $4r\varrho + 2r_0 > d$, $u_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1 \dots, n-1$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (14)–(16) *в цилиндре* $\Omega \times [t_0, t_1]$.

Во **второй главе** рассматривается уравнение с вырожденным оператором при старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна при условии спектральной ограниченности пары операторов в линейной части уравнения. В §2.1 приведены определение и известные свойства таких пар операторов, в частности существование пар инвариантных подпространств банаховых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ для операторов из уравнения.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Определим $L$-резольвентное множество $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$ оператора $M$ и его $L$-спектр $\sigma^L(M) := \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$, обозначим $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu := L(\mu L - M)^{-1}$. Оператор $M$ называется $(L,\sigma)$-ограниченным[5], если существует такое $a > 0$, что для всех $\mu \in \mathbb{C}$, таких, что $|\mu| > a$, выполняется включение $\mu \in \rho^L(M)$. В этом случае пару операторов $(L, M)$ будем называть спектрально ограниченной. При условии $(L,\sigma)$-ограниченности оператора $M$ для $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ следующие операторы являются проекторами:

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)\, d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \ \ Q := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)\, d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}).$$

Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \mathrm{im} Q$. Обозначим через $L_k$ $(M_k)$ сужение оператора $L$ $(M)$ на $\mathcal{X}^k$ $(D_{M_k} = D_M \cap \mathcal{X}^k)$, $k = 0, 1$.

В §2.2 получена теорема об однозначной разрешимости задачи типа Шоуолтера — Сидорова

$$D^{\sigma_k} P z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{17}$$

для вырожденного линейного неоднородного уравнения

$$D^{\sigma_n} L x(t) = M x(t) + g(t) \tag{18}$$

со спектрально ограниченной парой операторов $(L, M)$, $\ker L \neq \{0\}$. При этом задача редуцируется к системе задачи Джрбашяна — Нерсесяна для уравнения вида (9) и уравнения с нильпотентным оператором при производной Джрбашяна — Нерсесяна без начальных условий.

**Теорема 6.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $g \in C([0,T];\mathcal{Y})$ при $\alpha_n = 1$ и $g \in C^1_\gamma([0,T];\mathcal{Y})$ для некоторого $\gamma < 1$ при $\alpha_n < 1$, $(D^{\sigma_n} G)^l M_0^{-1}(I - Q)g \in C((0,T];\mathcal{X})$, $l = 0, 1, \ldots, p$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда существует единственное решение задачи (17), (18), и оно имеет вид*

$$x(t) = -\sum_{l=0}^{p} (D^{\sigma_n} G)^l M_0^{-1}(I - Q)g(t) + \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n} L_1^{-1} M) P x_k +$$

$$+ \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} L_1^{-1} M) L_1^{-1} Q g(s) ds.$$

[5] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston : VSP. 216 p.

В §2.3–2.5 аналогичная схема использована для исследования локальной однозначной разрешимости задачи Шоуолтера — Сидорова (17) для квазилинейного уравнения

$$D^{\sigma_n}Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\sigma_0}x(t), D^{\sigma_1}x(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}}x(t)) + f(t). \tag{19}$$

В §2.3 при этом использовано условие принадлежности образа нелинейного оператора $N$ подпространству $\mathcal{Y}^1$.

**Теорема 7.** *Пусть $0 < \alpha_k < 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, оператор $M$ $(L, p)$-ограничен, $X$ — открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N \in C^1(X; \mathcal{X})$, $\mathrm{im}N \subset \mathcal{Y}^1$, $f \in C((t_0, T]; \mathcal{Y})$, $Qf \in C^1([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $(D^{\sigma_n}G)^l M_0^{-1}(I - Q)f \in C((t_0, T]; \mathcal{X})$, $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n}G)^l M_0^{-1}(I - Q)f \in C^1([t_0, T]; \mathcal{X})$, $l = 0, 1, \dots, p$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, при этом $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in X$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи (17), (19) на отрезке $[t_0, t_1]$.*

В §2.4 применено условие зависимости оператора $N$ только от элементов подпространства вырождения $\mathcal{X}^0$.

**Теорема 8.** *Пусть $\alpha_0 = 1$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, оператор $M$ $(L, 0)$-ограничен, множество $X$ открыто в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$; оператор $N \in C(X; \mathcal{Y})$, для всех $(t, z_0, \dots, z_{n-1}) \in X$ $N(t, z_0, \dots, z_{n-1}) = N_1(t, P_0 z_0, \dots, P_0 z_{n-1})$ для некоторого $N_1 \in C(W; \mathcal{Y})$, $(I - Q)N_1 \in C^1(W; \mathcal{Y})$; $x_0, x_1 \dots x_{n-2} \in \mathcal{X}$, $x_{n-1} \in \mathcal{X}^1$, отображение $M_0^{-1}[(I - Q)N_1]'_{x_{n-1}}(t, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) : \mathcal{X}^0 \to \mathcal{X}^0$ является биекцией при всех элементах $(t, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ из окрестности точки $(t_0, P_0 x_0, P_0 x_1, \dots, P_0 x_{n-2}, 0) \in W$, при этом*

$$P_0 x_0 + M_0^{-1}(I - Q)N_1(t_0, P_0 x_0, P_0 x_1, \dots, P_0 x_{n-2}, 0) = 0.$$

*Тогда найдется такое $t_1 > t_0$, что задача*

$$D^{\sigma_k}x(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad D^{\sigma_{n-1}}Px(t_0) = x_{n-1}$$

$$D^{\sigma_n}Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\sigma_0}x(t), D^{\sigma_1}x(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}}x(t)). \tag{20}$$

*имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.*

В §2.5 использовано условие зависимости нелинейного оператора $N$ только от элементов подпространства без вырождения $\mathcal{X}^1$.

**Теорема 9.** *Пусть $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1 \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, оператор $M$ $(L, 0)$-ограничен, $X$ — открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \to \mathcal{Y}$, для всех $(t_0, z_0, \dots, z_{n-1}) \in X$ верно равенство $N(t_0, z_0, \dots, z_{n-1}) = N_1(t_0, Pz_0, \dots, Pz_{n-1})$ при некотором $N_1 \in C^1(V; \mathcal{Y})$. Тогда для произвольного $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in V$ существует $t_1 > t_0$, такое что задача (17), (20) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.*

В §2.6 исследуется класс начально-краевых задач, аналогичный классу из §1.8, но при условии обращения в нуль многочлена при старшей производной на спектре эллиптического оператора. В отличие от аналогичной задачи в §1.8, предположим, что $P_\varrho(\lambda_k) = 0$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$. Если многочлены $P_\varrho$ и $Q_\varrho$ не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_k\}$, оператор $M$ $(L, 0)$-ограничен, а проекторы имеют вид

$$P = \sum_{P_\varrho(\lambda_k) \neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad Q = \sum_{P_\varrho(\lambda_k) \neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Начальные условия заданы в виде

$$D^{\sigma_k}P_\varrho(\Lambda)u(\xi,0)=y_k(\xi),\ k=0,1,\ldots,n-1,\quad \xi\in\Omega.$$

В §2.7 приведены примеры вырожденных нелинейных систем уравнений, лежащих в каждом из классов, изученных в §2.3–2.5, в §2.8 доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи для нагруженной системы уравнений Скотт-Блэра с производной Джрбашяна — Нерсесяна по времени

$$D^{\sigma_k}v(\xi,t_0)=v_{0k}(\xi),\ \ \xi\in\Omega,\ \ k=0,1,\ldots,n-1,$$

$$v(\xi,t)=0,\ \ (\xi,t)\in\partial\Omega\times(t_0,t_1],$$

$$D^{\sigma_n}(1-\chi\Delta)v(\xi,t)=-(\tilde{v}\cdot\nabla)v(\xi,t)-(v\cdot\nabla)\tilde{v}(\xi,t)-r(\xi,t)+$$

$$+\sum_{l=0}^{n-1}F_l(D^{\sigma_0}v(\xi_0,t),D^{\sigma_1}v(\xi_1,t),\ldots,D^{\sigma_{n-1}}v(\xi_{n-1},t))D^{\sigma_l}v(\xi,t),$$

$$\nabla\cdot v(\xi,t)=0,\ \ (\xi,t)\in\Omega\times(t_0,t_1].$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi\in\mathbb{R}$, $\tilde{v}$ — заданная вектор-функция, $F_l$ — заданные функции, при $l=0,1,\ldots,n-1$, $\xi_l\in\Omega$ — заданные точки. Вектор-функции скорости жидкости $v=(v_1,v_2,\ldots,v_d)$ и ее градиента давления $r=(r_1,r_2,\ldots,r_d)=\nabla p$ неизвестны.

В §2.9 доказана корректность линейной обратной задачи для уравнения (9) с ограниченным оператором $A$, с постоянным неизвестным параметром $u$ и условием переопределения, задаваемым интегралом Стилтьеса. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D^{\sigma_n}z(t)=Az(t)+\varphi(t)u,\quad t\in(0,T],\tag{21}$$

где $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $D^{\sigma_n}$ — дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, определяемая набором $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$, $\alpha_k\in(0,1]$, $k=0,1,\ldots,n$; $T>0$, $\varphi\in C([0,T];\mathbb{R})$, $u\in\mathcal{Z}$. Снабдим уравнение (21) условиями

$$D^{\sigma_k}z(0)=z_k,\quad k=0,1,\ldots,n-1,\tag{22}$$

$$\int\limits_0^T z(t)d\mu(t)=z_T.\tag{23}$$

Функция $\mu$ имеет ограниченную вариацию на $(0,T]$, в условии (23) используется интеграл Римана — Стилтьеса, $z_k\in\mathcal{Z}$, $k=0,1,\ldots,n-1$, $z_T\in\mathcal{Z}$ известны. Обозначим $\psi:=z_T-\int\limits_0^T\sum\limits_{k=0}^{n-1}t^{\sigma_k}E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n}A)z_kd\mu(t)\in\mathcal{Z}$, $\sigma(A)$ — спектр оператора $A$. Характеристической функцией обратной задачи (21)–(23) назовем функцию $\chi(\lambda):=\int\limits_0^T d\mu(t)\int\limits_0^t(t-s)^{\sigma_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}\lambda)\varphi(s)ds$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

**Теорема 10.** *Пусть $A\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\varphi\in C([0,T];\mathbb{R})$ при $\alpha_n=1$ и $\varphi\in C^1_\gamma([0,T];\mathbb{R})$ для некоторого $\gamma<1$ при $\alpha_n<1$, $\mu:(0,T]\to\mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача (21)–(23) корректна в том и только в том случае, когда $\chi(\lambda)\neq0$ для всех $\lambda\in\sigma(A)$. Решение задачи (21)–(23) в случае его существования имеет вид $u=\chi(A)^{-1}\psi$.*

В §2.10 этот результат был использован для доказательства корректности аналогичной обратной задачи для вырожденного уравнения

$$D^{\sigma_n}Lx(t) = Mx(t) + \varphi(t)u, \quad t \in (0,T], \tag{24}$$

$$D^{\sigma_k}Px(0) = x_k \in \mathcal{X}^1, \quad k = 0,\ldots,n-1, \tag{25}$$

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}, \tag{26}$$

в которой, как и прежде, $D^{\sigma_n}$ — дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, элемент $u \in \mathcal{Y}$ неизвестен.

**Теорема 11.** *Пусть $M$ $(L,p)$-ограничен, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$ при $\alpha_n = 1$ и $\varphi \in C^1_\gamma([0,T];\mathbb{R})$ для некоторого $\gamma < 1$ при $\alpha_n < 1$, $(D^{\sigma_n})^l G^l\varphi \in C((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0))$, $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n})^l G^l\varphi \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0))$ для $k = 0,1,\ldots,n-1$, $l = 0,1,\ldots,p$, $\mu : (0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача (24)–(26) корректна в том и только в том случае, когда $\chi(\lambda) \neq 0$ при всех $\lambda \in \sigma^L(M)$, $\int_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0$. Решение задачи (24)–(26) в случае его существования имеет вид $u = \chi(S)^{-1}\psi + F(T)(I-P)x_T$.*

В §2.11 была рассмотрена обратная задача для системы уравнений Кельвина — Фойгта дробного порядка по времени.

В **третьей главе** исследуется разрешимость начальных задач для уравнений в банаховых пространствах с производной Джрбашяна — Нерсесяна, линейная часть которых порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. В §3.1 вводятся в рассмотрение разрешающие семейства операторов для уравнения

$$D^{\sigma_n}z(t) = Az(t), \tag{27}$$

исследованы их свойства, вопросы существования преобразования Лапласа. Здесь $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, т. е. линейный замкнутый оператор с плотной в $\mathcal{Z}$ областью определения $D_A$, действующий в $\mathcal{Z}$.

**Определение 1.** Семейство операторов $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ называется *$k$-разрешающим*, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, для уравнения (27), если выполняются следующие условия:

(i) $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ сильно непрерывно при $t > 0$;

(ii) $S_k(t)[D_A] \subset D_A$, $S_k(t)Ax = AS_k(t)x$ для всех $x \in D_A$, $t > 0$;

(iii) для каждого $z_k \in D_A$ $S_k(t)z_k$ является решением задачи $D^{\sigma_k}z(0) = z_k$, $D^{\sigma_l}z(0) = 0$, $l \in \{0,1,\ldots,n-1\} \setminus \{k\}$ для уравнения (27).

Введем обозначения $S_{\theta,a} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \theta, \lambda \neq a\}$ для $\theta \in [\pi/2,\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi,\ t \neq 0\}$ для $\psi \in (0,\pi/2]$. $k$-Разрешающее семейство операторов, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, называется аналитическим, если оно имеет аналитическое продолжение в сектор $\Sigma_{\psi_0}$ при некотором $\psi_0 \in (0,\pi/2]$. Аналитическое $k$-разрешающее семейство операторов $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ имеет тип $(\psi_0, a_0, \beta)$ при некоторых $\psi_0 \in (0,\pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, если для всех $\psi \in (0,\psi_0)$, $a > a_0$ существует $C(\psi,a)$, такое, что для всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C(\psi,a)e^{a\operatorname{Re}t}|t|^{-\beta}$.

В §3.2 введен в рассмотрение класс линейных замкнутых операторов $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}$.

**Определение 2.** Оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ принадлежит классу $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, если:

(i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ имеем $\lambda^{\sigma_n} \in \rho(A)$;

(ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a|^{\alpha_0}|\lambda|^{\sigma_n - \sigma_0 - 1}}.$$

Здесь $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора $A$, $R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1}$. Показана необходимость и достаточность условия $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$ для существования аналитических в секторе $k$-разрешающих семейств операторов уравнения (27), $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

**Теорема 12.** *Пусть* $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$.

(i) *Если существует аналитическое* 0*-разрешающее семейство операторов типа* $(\theta_0 - \pi/2, a_0, -\sigma_0)$ *для уравнения* (27), *то* $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$.

(ii) *Если* $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, *то для каждого* $k = 0, 1, \dots, n-1$ *существует единственное аналитическое* $k$*-разрешающее семейство операторов* $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *типа* $(\theta_0 - \pi/2, a_0, \max\{-\sigma_k, 0\})$ *для уравнения* (27). *Более того,* $S_k(t) \equiv Z_k(t) \equiv J_t^{\sigma_k - \sigma_0} Z_0(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $t > 0$.

Здесь использованы определенные при $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ операторы

$$Z_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \lambda^{\sigma_n - \sigma_k - 1} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{\pm i\theta},\ r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + \delta e^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ для некоторых $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$.

Введем обозначение

$$Y_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \lambda^\beta R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) e^{\lambda t} d\lambda, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

В §3.3 доказана однозначная разрешимость задачи (7), (27) при $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}$. Пусть где $C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$, — пространство Гельдера, $D_A$ — область определения оператора $A$, снабженная его нормой графика.

**Теорема 13.** *Пусть* $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, $f$ *удовлетворяет одному из следующих условий*:

(i) $f \in C([0, T]; D_A)$ *при* $\alpha_n = 1$ *и* $f \in C([0, T]; D_A) \cap C^1_\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$ *для некоторого* $\gamma \in (0, 1)$ *при* $\alpha_n < 1$;

(ii) $f \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$ *при* $\alpha_n = 1$ *и* $f \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^1_\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$ *для некоторого* $\gamma \in (0, 1)$ *при* $\alpha_n < 1$.

*Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t) z_k + \int\limits_0^t Y_0(t - s) f(s) ds$$

*является единственным решением задачи Джрбашяна — Нерсесяна* (7) *для уравнения* $D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + f(t)$.

В §3.4 получена теорема о возмущении операторов класса $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}$.

**Теорема 14.** *Пусть $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\dots,n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2,\pi]$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$, $B \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для всех $x \in D_A \subset D_B$ выполняется неравенство $\|Bx\|_\mathcal{Z} \leq \beta\|Ax\|_\mathcal{Z} + \gamma\|x\|_\mathcal{Z}$, где $\beta,\gamma \geq 0$, существует $q \in (0,1)$, такое, что $\beta(1+K(\theta,a)) < q$ для любых $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$, $a > a_0$. Тогда $A+B \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_1)$ для достаточно большого $a_1 > a_0$.*

Абстрактные результаты использованы в §3.5 при изучении начально-краевой задачи для системы уравнений Олдройда с производными Джрбашяна — Нерсесяна по времени.

В §3.6 определен класс пар операторов $\mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}$, принадлежность которому пары $(L,M)$ влечет существование пар инвариантных подпространств банаховых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, в которых действуют операторы. Это позволило редуцировать вырожденное уравнение (18) с парой $(L,M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}$ к системе двух уравнений на взаимно дополнительных подпространствах: разрешенного относительно производной уравнения с оператором из $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}$ и алгебраического уравнения.

**Определение 3.** Пусть $L,M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Пара операторов $(L,M)$ принадлежит классу $\mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a_0 \geq 0$, $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\dots,n$, $\sigma_n > 0$, если

(i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ выполняется включение $\lambda^{\sigma_n} \in \rho^L(M)$;

(ii) для любых $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$, $a > a_0$ существует $K(\theta,a) > 0$, такое, что для всех $\mu \in S_{\theta,a}$

$$\max\{\|R^L_{\mu^{\sigma_n}}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\mu^{\sigma_n}}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta,a)}{|\mu-a|^{\alpha_0}|\mu|^{\sigma_n-\sigma_0-1}}.$$

**Теорема 15.** *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, при этом $(L,M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$. Тогда*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) *проектор $P$ $(Q)$ на подпространство $\mathcal{X}^1$ $(\mathcal{Y}^1)$ вдоль подпространства $\mathcal{X}^0$ $(\mathcal{Y}^0)$ имеет вид $P = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nR^L_n(M)$ $(Q = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nL^L_n(M))$;*

(iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$;

(iv) *существуют обратные операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$;*

(v) *если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, то $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$;*

(vi) *если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, то $V \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$.*

В §3.7 построены вырожденные разрешающие семейства операторов уравнения (18),

**Лемма 1.** *Пусть $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\dots,n$, $(L,M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$, $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a_0 \geq 0$, $\Gamma = \partial S_{\theta,a}$ для $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$, $a > a_0$. Тогда семейства*

$$\left\{X_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\sigma_n-1+\beta}R^L_{\mu^{\sigma_n}}(M)e^{\mu t}d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : \, t > 0\right\}$$

*аналитически продолжимы в сектор $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$, причем,*

$$\|X_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq C_\beta(\theta,a)e^{a\mathrm{Re}t}(|t|^{-1}+a)^\beta, \quad \beta \geq 0,$$

$$\|X_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq C_\beta(\theta,a)e^{a\mathrm{Re}t}|t|^{-\beta}, \quad \beta < 0.$$

В §3.8 доказано существование и единственность решения задачи типа Шоуолтера — Сидорова (17) для вырожденного линейного уравнения (18) в случае $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$.

**Теорема 16.** *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, пара операторов $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$ или оператор $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$, $f \in C([0,T]; \mathcal{Y})$, при $\alpha_n = 1$ $L_1^{-1}Qf \in C\big([0,T]; D_{L_1^{-1}M_1}\big) \cup C^\gamma([0,T]; \mathcal{X}^1)$, при $\alpha_n < 1$ $L_1^{-1}Qf \in \big(C\big([0,T]; D_{L_1^{-1}M_1}\big) \cap C^1_\gamma([0,T]; \mathcal{X}^1)\big) \cup \big(C^\gamma([0,T]; \mathcal{X}^1) \cap C^1_\gamma([0,T]; \mathcal{X}^1)\big)$ для некоторого $\gamma \in (0,1)$, $x_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (17), (18), *при этом оно имеет вид*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} X_{-\sigma_k}(t)x_k + \int_0^t X_{1-\sigma_n}(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

В §3.9 эти результаты использованы для исследования начально-краевых задач для уравнений с многочленами от эллиптического оператора высокого порядка, дифференциального по пространственным переменным, с производными Джрбашяна — Нерсесяна по времени. При этом, в отличие от §1.8 и §2.6, многочлен при старшей производной имеет степень ниже степени многочлена при искомой функции. Рассмотрим уравнение

$$D^{\sigma_n} P_\varrho(\Lambda)u(\xi,t) = Q_\varrho(\Lambda)u(\xi,t) + h(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T],$$

Возьмем $\varrho_0 := \max\{j \in \{0, 1, \dots, \varrho - 1\} : c_j \neq 0\}$,

$$\mathcal{X} = \{v \in H^{2r\varrho_0}(\Omega) : B_l\Lambda^k v(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho_0 - 1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Y} = L_2(\Omega), \quad L = P_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = Q_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y}),$$

$$D_M = \{v \in H^{2r\varrho}(\Omega) : B_l\Lambda^k v(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho - 1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

**Теорема 17.** *Пусть $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\sigma_n \in [1,2)$, $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, при $(-1)^{\varrho-\varrho_0} d_\varrho / c_{\varrho_0} < 0$, $P_\varrho(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда оператор $A = L^{-1}M$ с областью определения $D_A = D_M$ принадлежит классу $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 > 0$.*

# Заключение

Основными результатами диссертационной работы являются теоремы об однозначной разрешимости начальных задач для линейных и квазилинейных уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна, как разрешенных относительно старшей производной, так и содержащих линейный оператор с нетривиальным ядром при этой производной. При этом линейная часть уравнения предполагается порождающей разрешающее семейство операторов, аналитическое в разрезанной комплексной плоскости (случай ограниченного оператора или спектрально ограниченной пары операторов) или в секторе. Полученные абстрактные результаты применяются к исследованию начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных.

Дальнейшие перспективы развития тематики данной работы связаны с исследованием локальной и глобальной однозначной разрешимости задач для квазилинейных уравнений с аналитическим в секторе разрешающим семейством операторов, для линейных и квазилинейных уравнений с сильно непрерывным разрешающим семейством. Интерес будет представлять также исследование обратных задач и различных задач управления для уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна.

## Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus


1. Fedorov, V. E. Initial value problems of linear equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan derivative in Banach spaces / V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Symmetry. — 2021. — Vol. 13, iss. 6. — P. 1058.
2. Волкова, А. Р. Начальные задачи для уравнений с композицией дробных производных / А. Р. Волкова, Е. М. Ижбердеева, В. Е. Федоров // Челяб. физ.-матем. журн. — 2021. — Т. 6, № 3. — С. 269–277.
3. Fedorov, V. E. Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan fractional derivative / V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Fractal and Fractional. — 2022. — Vol. 6, iss. 10. — P. 541.
4. Plekhanova, M. V. Local unique solvability of a quasilinear equation with the Dzhrbashyan — Nersesyan derivatives / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, iss. 6. — P. 1141–1150.
5. Plekhanova, M. V. Degenerate equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan derivative in the sectorial case / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, No. 2. — P. 634–643.
6. Plekhanova, M. V. Degenerate quasilinear equations with Dzhrbashyan — Nersesyan derivatives and applications / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2023. — Vol. 423. — P. 115–127.
7. Plekhanova, M. V. Degenerate quasilinear equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan derivative / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 269, No. 2. — P. 217–228.
8. Ижбердеева, Е. М. Композиции дробных производных как производная Джрбашяна — Нерсесяна / Е. М. Ижбердеева // Челяб. физ.-матем. журн. — 2024. — Т. 9, № 1. — С. 35–49.