Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Ижбердеева Елизавета Монировна

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА — НЕРСЕСЯНА

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент М.В. Плеханова

ЧЕЛЯБИНСК — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

Одной из активно развивающихся областей современной математики является теория дифференциальных уравнений дробного порядка и ее приложения [32, 35, 62, 69, 77, 83]. Развитие дробного исчисления инспирировано как теоретическим интересом к нему, так и его использованием в прикладных исследованиях. Дробные производные повсеместно используются в исследованиях по механике вязкоупругих жидкостей (нефть, полимеры, продукты и др.) [60, 66, 81]; в работах [1, 24, 27, 28, 34, 38, 88] уравнения дробного порядка применяются для описания движения во фрактальных средах (почва, кровеносная система), моделирования турбулентности, колебательных процессов в механических, электрических системах, процессов в математической биологии и др.

Среди многих различных определений дробной производной чаще всего рассматриваются производные Римана — Лиувилля [35, 61] и Герасимова — Капуто [7, 35, 51, 61]. В данной работе рассматриваются уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна [13, 53], частными случаями которой являются производные Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто, а также любые их конечные композиции. Все это свидетельствует об актуальности темы исследования.

Степень разработанности темы исследования

Впервые производная Джрбашяна — Нерсесяна была введена в работе [13] (публикация [53] является ее английским переводом; см. также работу [12]). Пусть $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$, производными Джрбашяна — Нерсесяна называются выражения $D^{\sigma_0} z(t) := D_t^{\alpha_0 - 1} z(t)$,

$$D^{\sigma_k} z(t) := D_t^{\alpha_k - 1} D_t^{\alpha_{k-1}} D_t^{\alpha_{k-2}} \dots D_t^{\alpha_0} z(t), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $D_t^\beta z(t)$ — производная Римана — Лиувилля порядка β при $\beta > 0$ и интеграл Римана — Лиувилля порядка $-\beta$ при $\beta \leq 0$. Здесь же исследована начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения, вообще говоря, с переменными коэффициентами, разрешенного относительно производной Джрбашяна — Нерсесяна. Начальные условия при этом задаются для младших производных Джрбашяна — Нерсесяна D^{σ_k}, $k = 0, 1, \ldots, n$. Несмотря на то, что авторы [13] называют такую начальную задачу задачей Коши, считаем правильным называть ее задачей Джрбашяна — Нерсесяна.

Различные начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений и систем уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна рассматривались в работах А. В. Псху [31,33], М. Г. Мажгиховой [25,26] М. О. Мамчуева [67], Ф. Т. Богатыревой [2,3], A. Ahmad и D. Baleanu [48]. Например, в [31] получено фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения в $\mathbb{R}^n \times (0, T]$ с дробной по времени производной Джрбашяна — Нерсесяна и с начальными условиями Джрбашяна — Нерсесяна $D^{\sigma_k} z(x, 0) = z_k(x)$, $k = 0, \ldots, n-1$, $x \in \mathbb{R}^n$. В [33] аналогичные вопросы исследуются для случая дискретно распределенной производной Джрбашяна — Нерсесяна по времени.

В данной диссертационной работе помимо уравнений, разрешенных относительно дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна, исследуются уравнения, содержащие линейный оператор с нетривиальным ядром при этой производной и поэтому относящиеся к классу так называемых вырожденных эволюционных уравнений. Вырожденные эволюционные уравнения и системы уравнений часто встречаются среди неклассических уравнений математической физики. Различные авторы исследуют начально-краевые задачи для таких уравнений и систем уравнений целого порядка, отметим работы R. E. Showalter [84], Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова [4–6], Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева [37, 39, 40, 85], Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой [10, 11], А. И. Кожанова [20, 21], A. Favini, A. Yagi [54], Г. А. Свиридюка, В. Е. Федорова [87], И. В. Мельниковой, А. И. Филинкова [68], С.Г. Пяткова [80], А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера [22, 36], И. А. Шишмарева, Е. И. Кайкиной, П. И. Наумкина [16, 17]. В работах перечисленных авторов рассматриваются как конкретные уравнения и системы уравнений, обыкновенные и в частных производных, так и абстрактные обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. Уравнения в банаховых пространствах, не разрешимые относительно дробной производной Римана — Лиувилля или Герасимова — Капуто, с приложениями к конкретным начально-краевым задачам исследовались в работах В. Е. Федорова, М. В. Плехановой и их учеников [30, 44, 45, 57, 73–76, 102].

Отметим, что результаты диссертации об аналитических разрешающих семействах операторов, невырожденных и вырожденных, являются обобщением соответствующих результатов теории полугрупп операторов [15, 19, 72], в том числе вырожденных полугрупп операторов [41, 42, 87], на случай уравнений с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна. При этом теорема о возмущениях операторов класса $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}$ является обобщением теоремы Като о возмущениях генератора аналитической в секторе полугруппы [18]. Ранее подобные обобщения для эволюционных интегральных уравнений были получены Я. Прюссом [79], для уравнений с производной Герасимова — Капуто — Э. Г. Бажлековой [50]. Для уравнений с производной Римана — Лиувилля, с распределенными производными Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля аналитические разрешающие семейства операторов исследовались в работах В. Е. Федорова и соавторов [43, 56, 58, 86].

Цели и задачи

Цель диссертационной работы заключается в исследовании вопросов однозначной разрешимости начальных задач для уравнений, разрешенных относительно производной Джрбашяна — Нерсесяна (в квазилинейном случае — относительно старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна), а также вырожденных эволюционных уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна. В первом случае, невырожденном, рассмотрены классы уравнений с ограниченным линейным оператором или с секториальным оператором при искомой функции, при этом рассматривается начальная задача Джрбашяна — Нерсесяна (см. выше). В вырожденном случае предполагается относительная ограниченность либо секториальность пары линейных операторов в уравнении (при старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна и при искомой функции), влекущая существование пар инвариантных подпространств исходных пространств. При этом начальные условия Джрбашяна — Нерсесяна задаются не для всей искомой функции, а только для ее проекции на подпространство без вырождения. Помимо линейных рассматриваются квазилинейные уравнения. Квазилинейные вырожденные эволюционные уравнения рассматриваются при некоторых дополнительных ограничениях на нелинейный оператор: принадлежность его образа подпространству без вырождения или независимость оператора от элементов подпространства без вырождения или подпространства с вырождением.

Задачей работы также является применение полученных абстрактных результатов для исследования начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных с производными Джрбашяна — Нерсесяна по времени. А именно, различные начально-краевые задачи для уравнений или систем уравнений в частных производных за счет выбора конкретных пространств и операторов редуцируются к начальным задачам для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, После этого однозначная разрешимость исходных начально-краевых задач доказывается прямым применением уже полученных результатов для начальных задач для уравнений в банаховых пространствах.

Научная новизна

Новизна представляемой работы заключается в том, что ранее уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна в банаховых пространствах, судя по всему, не рассматривались. И если результаты о разрешимости задачи Джрбашяна — Нерсесяна для невырожденного линейного уравнения с ограниченным оператором в правой части аналогичны результатам классиков [13], то результаты о таких же задачах в случае неограниченного линейного оператора в правой части, а также в вырожденном случае никаких аналогов в математической литературе не имеют.

Кроме того, полученные с применением абстрактных результатов утверждения об однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных в большинстве случаев также являются новыми. В частности это касается широких классов уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального оператора по пространственным переменным, как разрешенных относительно старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна по временно́й переменной, так и вырожденных.

Тем самым, результаты, полученные в данной работе, являются новыми и вносят вклад в теорию дифференциальных уравнений с дробными производными.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационная работа имеет теоретический характер, она посвящена исследованию новых классов задач и поискам методов их исследования. Результаты работы развивают теорию дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, а также обобщают результаты теории полугрупп операторов на случай уравнений с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна, и, тем самым, вносят вклад в соответствующие разделы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений.

Прикладные задачи с уравнениями дробного порядка, которые позволяет исследовать развитая в работе теория, играют значимую роль в механике, физике, биологии и др. областях науки. Полученные результаты позволяют выбирать корректную постановку задач для конкретных уравнений и систем уравнений с дробными производными, помогают определить некоторые свойства соответствующих физических систем, исследовать алгоритмы численного поиска их решений. В частности, имеющиеся результаты об однозначной разрешимости помогают определить, например, выбор вида начальных условий для исследуемой задачи, значений параметров, при которых задача однозначно разрешима. Для линейных задач полученные в работе представления решений дают информацию об их поведении, а для нелинейных — используемый метод сжимающих отображений может быть основой для построения численных приближений решения.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе исследуются начальные задачи для уравнений с дробными производными Джрбашяна — Нерсесяна, линейные и квазилинейные, как разрешенные относительно старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна, так и вырожденные, с необратимым линейным оператором при этой производной.

Линейные уравнения исследуются с помощью теории разрешающих семейств операторов, обобщающей теорию полугрупп операторов на случай уравнений с дробными производными. Для невырожденного неоднородного линейного уравнения единственное решение задачи Джрбашяна — Нерсесяна представлено в терминах разрешающих операторов. Эта формула решения позволяет невырожденное квазилинейное уравнение редуцировать к интегро-дифференциальному уравнению, исследовать которое удается с помощью теоремы Банаха о сжимающем отображении в специально построенных функциональных пространствах.

Уравнение, не разрешимое относительно старшей дробной производной по времени, рассматривается при условии относительной ограниченности или секториальности пары линейных операторов в уравнении. Эти условия на операторы влекут существование пар инвариантных подпространств в исходных пространствах, что позволяет исходную задачу редуцировать к системе двух задач на взаимно дополнительных подпространствах. При этом уравнение на подпространстве без вырождения разрешено относительно старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна и имеет ограниченный или секториальный линейный оператор в правой части, а потому исследовано выше. А уравнение на подпространстве вырождения содержит нильпотентный оператор при старшей производной или вообще является алгебраическим, что существенно облегчает доказательство его однозначной разрешимости.

Вырожденное квазилинейное уравнение рассматривается при дополнительных ограничениях нескольких типов, при которых удается описанную выше схему исследования довести до конца: образ нелинейного оператора лежит в подпространстве без вырождения, либо нелинейный оператор зависит только от элементов подпространства без вырождения, либо только от элементов подпространства вырождения.

Методология исследования рассмотренных в диссертации начально-краевых задач для уравнений или систем систем уравнений в частных производных заключается в их редукции к уже исследованным начальным задачам для уравнений в банаховом пространстве путем выбора подходящих операторов и функциональных пространств. Такой подход позволяет применять один абстрактный результат для целого ряда однотипных, а иногда очень различных начально-краевых задач.

Положения, выносимые на защиту

1. Исследована однозначная разрешимость задачи Джрбашяна — Нерсесяна для линейных неоднородных уравнений, разрешенных относительно дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна, с ограниченным оператором в правой части. Для квазилинейных уравнений соответствующего класса установлено существование единственного локального решения.

2. Получены условия однозначной разрешимости задачи типа Шоуолтера — Сидорова для линейных неоднородных вырожденных эволюционных уравнений с производной Джрбашяна — Нерсесяна и с относительно ограниченной парой операторов. Для квазилинейных уравнений соответствующего класса установлено существование единственного локального решения при различных ограничениях на нелинейный оператор.

3. Найдены условия существования аналитических разрешающих семейств операторов линейных уравнений, разрешенных относительно производной Джрбашяна — Нерсесяна. Исследована однозначная разрешимость задачи Джрбашяна — Нерсесяна для линейных неоднородных уравнений с неограниченным оператором, порождающим аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. Для квазилинейных уравнений соответствующего класса установлено существование единственного локального решения.

4. Найдены условия существования вырожденных аналитических разрешающих семейств операторов линейных уравнений с вырожденным оператором при производной Джрбашяна — Нерсесяна. Исследована однозначная разрешимость задачи типа Шоуолтера — Сидорова для линей-

ных неоднородных уравнений с парой неограниченных операторов, порождающей вырожденное аналитическое разрешающее семейство операторов.

5. Общие результаты использованы для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для встречающихся в приложениях уравнений и систем уравнений в частных производных, разрешимых и не разрешимых относительно старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна по времени.

Диссертационная работа соответствует следующим направлениям, указанным в паспорте научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика:

1. Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

2. Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

3. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.

4. Теория дифференциально-операторных уравнений.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обоснована строгостью применяемых математических методов исследования, корректностью использования математического аппарата.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на Межгородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (руководитель проф. А. И. Кожанов), на конференциях:

Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2021, 2022;

Международная научная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения», Иркутск, 2021, 2022;

Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 2021, 2023;

International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, 2022;

International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, 2022;

O.A. Ladyzhenskaya Centennial Conference on PDE's, St. Petersburg, 2022.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проектов:

по гранту РФФИ и Вьетнамской академии науки и технологий конкурса совместных инициативных российско-вьетнамских научно-исследовательских проектов, код проекта 21-51-54003, тема «Прямые и обратные задачи, задачи оптимального управления для новых классов дробных дифференциальных уравнений» под руководством В. Е. Федорова, 2021–2022 гг;

по гранту фонда перспективных научных исследований ФГБОУ ВО «ЧелГУ», тема «Задачи управления для нелинейных уравнений в частных производных с несколькими дробными производными по времени» под руководством М. В. Плехановой, 2021 г.;

по гранту Президента РФ конкурса государственной поддержки ведущих научных школ, код проекта НШ-2708.2022.1.1, тема «Теория аналитических разрешающих семейств операторов эволюционных уравнений с дробными производными и ее приложения к начально-краевым задачам» под руководством В. Е. Федорова, 2022 г.;

по гранту РНФ и Правительства Челябинской области конкурса «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований малыми отдельными научными группами», код проекта 22-21-20095, тема «Новые задачи теории вырожденных эволюционных систем дробного порядка. Приложения к исследованию динамики вязкоупругих сред» под руководством В. Е. Федорова, 2022–2023 гг.

Основные результаты диссертации опубликованы в 20 работах [90–111], из которых 9 статей [90–97, 102, 106] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus.

В работе [90] Е. М. Ижбердеевой принадлежат результаты первого параграфа, В. Е. Федоровым и А. Р. Волковой написан второй параграф. В статье [92] М. В. Плехановой принадлежит идея доказательства теоремы 2, В. Е. Федоровым введено определение 1 и предложена схема использования теоремы 1 для получения основного результата. В работе [93] М. В. Плехановой предложена идея доказательства леммы 4, В. Е. Федоровым сформулированы основные свойства (L, σ)-ограниченных операторов и предложена схема их использования в §4 статьи. Постановка задачи в [94] и схема доказательства леммы 2 принадлежит научному руководителю М. В. Плехановой, все остальные результаты статьи были получены автором диссертации самостоятельно. В работе [95] Е. М. Ижбердеева провела исследование задач, постановка которых была предложена М. В. Плехановой, последней также были получены оценки на норму нелинейного оператора в доказательстве теоремы 7. В работе [96] научным руководителем была поставлена задача и предложены иллюстрирующие примеры в разделе 6.1, подробное рассмотрение которых было проведено автором диссертации. В работе [97] научным руководителем была предложена схема доказательства теоремы 2, авторство всех доказательств принадлежит Е. М. Ижбердеевой. Таким образом, из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично автору диссертации.

Содержание работы

Диссертационная работа объемом в 133 страницы содержит введение, 3 главы, заключение, список обозначений и соглашений, список литературы, состоящий из 111 источников.

В **первой главе** в §1.1 определены дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна и получена формула преобразования Лапласа для них. Затем в §1.2 доказаны существование и единственность классического решения задачи Джрбашяна — Нерсесяна

$$D^{\sigma_k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{0.0.1}$$

для линейного однородного уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна, а в §1.4 — для соответствующего неоднородного уравнения

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + f(t) \tag{0.0.2}$$

с ограниченным оператором $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ и функцией $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$, где $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. При этом показано, что решение при $t_0 = 0$ имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n} A) z_k + \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) f(s) ds, \tag{0.0.3}$$

где $E_{a,b}(z)$ — функции Миттаг-Леффлера.

В §1.5 показано, что любая композиция двух дробных производных Герасимова — Капуто и/или Римана — Лиувилля представляет собой производную Джрбашяна — Нерсесяна, а в §1.6 аналогичный факт доказан для композиции любого числа производных Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля.

Формула решения (0.0.3) позволила редуцировать задачу (0.0.1) для квазилинейного уравнения с производными Джрбашяна — Нерсесяна

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + B(t, D^{\sigma_0} z(t), D^{\sigma_1} z(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}} z(t)) \tag{0.0.4}$$

с непрерывно дифференцируемым по совокупности переменных отображением B к интегро-дифференциальному уравнению

$$z(t)=\sum_{k=0}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_k}E_{\sigma_n,\sigma_k+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_k+\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}A)B^z(s)ds,$$

где $B^z(s):=B(s,D^{\sigma_0}z(s),D^{\sigma_1}z(s),\ldots,D^{\sigma_{n-1}}z(s))$. В §1.7 доказана однозначная разрешимость такого уравнения в пространстве $C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})$ (при достаточно малом $\tau>0$), свойства которого исследованы в §1.3.

В §1.8 полученные абстрактные результаты о разрешимости линейного и квазилинейного уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна использованы при исследовании начально-краевых задач для уравнений с многочленами от эллиптического оператора высокого порядка, дифференциального по пространственным переменным, и с производными Джрбашяна — Нерсесяна по времени. При этом многочлен при старшей производной не должен обращаться в нуль на спектре эллиптического оператора и должен иметь степень не ниже степени многочлена при искомой функции.

Во **второй главе** рассматривается уравнение с вырожденным оператором при старшей производной Джрбашяна — Нерсесяна при условии относительной ограниченности пары операторов в линейной части уравнения. В §2.1 приведены определение и известные свойства таких пар операторов, в частности существование инвариантных пар подпространств банаховых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, в которых действуют операторы уравнения. В §2.2 получена теорема об однозначной разрешимости задачи Шоуолтера — Сидорова

$$D^{\sigma_k}Pz(t_0)=z_k,\quad k=0,1,\ldots,n-1, \tag{0.0.5}$$

где P — проектор на подпространство без вырождения $\mathcal{X}^1$ вдоль подпространства вырождения $\mathcal{X}^0$, для вырожденного линейного неоднородного уравнения

$$D^{\sigma_n}Lx(t)=Mx(t)+g(t) \tag{0.0.6}$$

с относительно ограниченной парой операторов (L, M), $\ker L \neq \{0\}$. При этом задача редуцируется к системе задачи Джрбашяна — Нерсесяна для уравнения вида (0.0.2) и уравнения с нильпотентным оператором при производной Джрбашяна — Нерсесяна без начальных условий.

В §2.3–2.5 аналогичная схема использована для исследования локальной однозначной разрешимости задачи Шоуолтера — Сидорова (0.0.5) для квазилинейного уравнения

$$D^{\sigma_n} Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\sigma_0}x(t), D^{\sigma_1}x(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}}x(t)). \qquad (0.0.7)$$

В §2.3 для этого использовано условие принадлежности образа нелинейного оператора N подпространству без вырождения, в §2.4 — условие зависимости оператора N только от элементов подпространства вырождения $\mathcal{X}^0$, в §2.5 — условие зависимости нелинейного оператора N только от элементов подпространства без вырождения $\mathcal{X}^1$.

В §2.6 исследуется класс начально-краевых задач, аналогичный классу из §1.8, но при условии обращения в нуль многочлена при старшей производной на спектре эллиптического оператора. В §2.7 приведены примеры вырожденных нелинейных систем уравнений, лежащих в каждом из классов, изученных в §2.3–2.5, в §2.8 доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений Скотт-Блэра с производной Джрбашяна — Нерсесяна по времени.

В §2.9 доказана корректность линейной обратной задачи для уравнения (0.0.2) с ограниченным оператором A, с постоянным неизвестным параметром и условием переопределения, задаваемым интегралом Стилтьеса. В §2.10 этот результат был использован для доказательства корректности аналогичной обратной задачи для уравнения (0.0.6). В §2.11 была рассмотрена обратная задача для системы уравнений Кельвина — Фойгта дробного порядка по времени.

В **третьей главе** исследуется разрешимость начальных задач для уравнений в банаховых пространствах с производной Джрбашяна — Нерсесяна, линейная часть которых порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. В §3.1 вводятся в рассмотрение разрешающие семейства операторов уравнения

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t), \tag{0.0.8}$$

исследованы их свойства, вопросы существования преобразования Лапласа. В §3.2 введен в рассмотрение класс линейных замкнутых операторов $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}$, показана необходимость и достаточность условия принадлежности оператора A этому классу для существования аналитического в секторе разрешающего семейства операторов уравнения (0.0.8). В §3.3 доказана однозначная разрешимость задачи (0.0.1), (0.0.2) при $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}$, $f \in C^\gamma([0,T];\mathcal{Z}) \cup C([0,T];D_A)$, $\gamma \in (0,1]$, где D_A — область определения оператора A, снабженная его нормой графика. В §3.4 получена теорема об аддитивном возмущении класса операторов $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}$. Абстрактные результаты использованы в §3.5 при изучении начально-краевой задачи для системы уравнений Олдройда с производными Джрбашяна — Нерсесяна по времени.

В §3.6 определен класс пар операторов $\mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}$, принадлежность которому пары (L, M) влечет существование пар инвариантных подпространств банаховых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, в которых действуют операторы. Это позволило редуцировать вырожденное уравнение (0.0.6) с парой $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}$ к системе уравнения вида (0.0.2) с оператором $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}$ и алгебраического уравнения на взаимно дополнительных подпространствах, в §3.7 построить вырожденные разрешающие семейства операторов уравнения (0.0.6), а в §3.8 — доказать существование и единственность решения задачи Шоуолтера — Сидорова (0.0.5) для вырожденного линейного уравнения (0.0.6). В §3.9 эти результаты использованы для исследования начально-краевых задач для уравнений с многочленами от эллиптического оператора высокого порядка, дифференциального по пространственным переменным, с производными

Джрбашяна — Нерсесяна по времени. При этом, в отличие от §1.8 и §2.6, многочлен при старшей производной имеет степень ниже степени многочлена при искомой функции.

В заключении говорится о перспективах использования результатов диссертационной работы и развития ее тематики.

Используемые по умолчанию в тексте диссертации обозначения и соглашения перечислены в списке обозначений и соглашений.

Список литературы содержит цитированные в работе источники. В конце списка приведены все публикации автора по теме диссертационной работы.

1. Уравнения с ограниченным оператором

1.1. Дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна

Рассмотрим дробную производную Джрбашяна — Нерсесяна, которая является обобщением двух хорошо известных дробных производных: Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто [13]. Приведем их определения.

Пусть $\alpha > 0$, $z : (0, T] \to \mathcal{Z}$ для некоторого $T > 0$ и банахова пространства $\mathcal{Z}$. Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ функции z имеет вид

$$J_t^\alpha z(t) := \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(s) ds, \quad t > 0.$$

Интеграл здесь и далее понимается в смысле Бохнера. Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ функции z определяется как

$${}^R D_t^\alpha z(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} z(t),$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $D_t^m := \frac{d^m}{dt^m}$ — производная целого порядка. Далее используются обозначения ${}^R D_t^\alpha := D_t^\alpha$, $D_t^{-\alpha} := J_t^\alpha$ для $\alpha > 0$. Дробная производная Герасимова — Капуто порядка $\alpha > 0$ определяется как

$${}^C D_t^\alpha z(t) := {}^R D_t^\alpha \left(z(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k z(0) \frac{t^k}{k!} \right).$$

Пусть $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — множество действительных чисел, удовлетворяющих условию $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\sigma_k := \sum_{j=0}^k \alpha_j - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

следовательно $-1 < \sigma_k \leq k - 1$. Далее везде предполагается выполнение условия $\sigma_n > 0$. Определим следующие дифференциальные операции

$$D^{\sigma_0} z(t) := D_t^{\alpha_0 - 1} z(t), \tag{1.1.1}$$

$$D^{\sigma_k}z(t) := D_t^{\alpha_k-1}D_t^{\alpha_{k-1}}D_t^{\alpha_{k-2}}\dots D_t^{\alpha_0}z(t), \quad k=1,2,\dots,n. \tag{1.1.2}$$

Дробное дифференцирование Джрбашяна — Нерсесяна порядка σ_n, ассоциированное с последовательностью $\{\alpha_k\}_0^n$, определяется соотношениями (1.1.1), (1.1.2).

При $\alpha_0 \in (0,1)$, $\alpha_k = 1$, $k = 1,2,\dots,n$ дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна представляет собой производную Римана — Лиувилля: $D^{\sigma_n}z(t) = D_t^{n-1+\alpha_0}z(t)$; при $\alpha_k = 1$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $\alpha_n \in (0,1)$ получаем дробную производную Герасимова — Капуто: $D^{\sigma_n}z(t) = {}^CD_t^{n-1+\alpha_n}z(t)$.

Пусть $z : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$, $\alpha > 0$, $m = \lceil\alpha\rceil$ и существует преобразование Лапласа функции z, которое мы будем обозначать как $\widehat{z}$, а для слишком больших выражений для z обозначим как $\mathrm{Lap}[z]$. Известно, что для преобразования Лапласа дробной производной Римана — Лиувилля справедлива формула

$$\widehat{D_t^\alpha z}(\lambda) = \lambda^\alpha\widehat{z}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^k D_t^{\alpha-m+k}z(0).$$

Следовательно,

$$\widehat{D^{\sigma_n}z}(\lambda) = \lambda^{\alpha_n-1}\mathrm{Lap}[D_t^{\alpha_{n-1}}D_t^{\alpha_{n-2}}\dots D_t^{\alpha_0}z](\lambda) =$$

$$= \lambda^{\alpha_{n-1}+\alpha_n-1}\mathrm{Lap}[D_t^{\alpha_{n-2}}D_t^{\alpha_{n-3}}\dots D_t^{\alpha_0}z](\lambda) - \lambda^{\alpha_n-1}D^{\sigma_{n-1}}z(0) =$$

$$= \lambda^{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n-1}\mathrm{Lap}[D_t^{\alpha_{n-3}}\dots D_t^{\alpha_0}z](\lambda) - \lambda^{\alpha_n-1}D^{\sigma_{n-1}}z(0) -$$

$$-\lambda^{\alpha_{n-1}+\alpha_n-1}D^{\sigma_{n-2}}z(0) = \dots =$$

$$= \lambda^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n-1}\widehat{D_t^{\alpha_0}z}(\lambda) - \lambda^{\alpha_n-1}D^{\sigma_{n-1}}z(0) - \lambda^{\alpha_{n-1}+\alpha_n-1}D^{\sigma_{n-2}}z(0) -$$

$$- \dots - \lambda^{\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n-1}D^{\sigma_1}z(0) =$$

$$= \lambda^{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_n-1}\widehat{z}(\lambda) - \lambda^{\alpha_n-1}D^{\sigma_{n-1}}z(0) - \lambda^{\alpha_{n-1}+\alpha_n-1}D^{\sigma_{n-2}}z(0) -$$

$$- \dots - \lambda^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n-1}D^{\sigma_0}z(0) =$$

$$= \lambda^{\sigma_n}\widehat{z}(\lambda) - \lambda^{\sigma_n-\sigma_{n-1}-1}D^{\sigma_{n-1}}z(0) - \lambda^{\sigma_n-\sigma_{n-2}-1}D^{\sigma_{n-2}}z(0) - \dots -$$

$$-\lambda^{\sigma_n-\sigma_0-1}D^{\sigma_0}z(0) = \lambda^{\sigma_n}\widehat{z}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{\sigma_n-\sigma_k-1}D^{\sigma_k}z(0). \tag{1.1.3}$$

Функция $f : [a, b] \to \mathcal{Z}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, называется абсолютно непрерывной на $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(a_i, b_i) \subset [a, b],\ i = 1, 2, \dots, p\}$, удовлетворяющего неравенству $\sum\limits_{i=1}^{p}(b_i - a_i) < \delta$, выполняется $\sum\limits_{i=1}^{p} \|f(b_i) - f(a_i)\|_{\mathcal{Z}} < \varepsilon$. Множество всех абсолютно непрерывных функций на $[a, b]$ со значениями в $\mathcal{Z}$ обозначим $AC([a, b]; \mathcal{Z})$.

Функция $f : (a, b) \to \mathcal{Z}$, где $a \geq -\infty$, $b \leq \infty$, называется абсолютно непрерывной на интервале (a, b), если она абсолютно непрерывна на любом отрезке, лежащем в (a, b). Аналогично определяются абсолютно непрерывные функции на полуинтервалах $[a, b)$, $(a, b]$. Соответствующие классы абсолютно непрерывных функций обозначаются как $AC((a, b); \mathcal{Z})$, $AC([a, b); \mathcal{Z})$, $AC((a, b]; \mathcal{Z})$.

Известно, что абсолютно непрерывная скалярная функция ($\mathcal{Z} = \mathbb{C}$) почти всюду дифференцируема. В общем случае это верно только для банаховых пространств $\mathcal{Z}$, обладающих свойством Радона — Никодима, в частности для рефлексивных банаховых пространств [49, следствие 1.2.7]. Но если $f \in AC([a, b]; \mathcal{Z})$ имеет производную почти всюду на $[a, b]$, то (см. [49, предложение 1.2.3]) f интегрируема по Бохнеру и

$$f(t) = f(a) + \int\limits_a^b f'(s)ds.$$

Обратно, если g интегрируема по Бохнеру на $[a, b]$, то (см. [49, предложение 1.2.2])

$$\int\limits_a^t g(s)ds \in AC([a, b]; \mathcal{Z}).$$

1.2. Линейное однородное уравнение

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{Z}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, D^{σ_n} — дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, которая определена набором чисел $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n > 0$. Рассмотрим уравнение

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t), \quad t > 0, \tag{1.2.1}$$

с начальными условиями

$$D^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.2.2}$$

Функция $z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z}) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$ называется решением задачи (1.2.1), (1.2.2), если $D_t^{\sigma_k} z \in AC(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $D_t^{\sigma_n} z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, равенство (1.2.1) выполняется для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и выполнены условия (1.2.2).

Пусть решение задачи (1.2.1), (1.2.2) имеет преобразование Лапласа, тогда в силу уравнения (1.2.1)

$$\lambda^{\sigma_n} \widehat{z}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{\sigma_n - \sigma_k - 1} D^{\sigma_k} z(0) = A\widehat{z}(\lambda). \tag{1.2.3}$$

При фиксированном значении $l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ рассмотрим задачу

$$D^{\sigma_l} z(0) = z_l, \quad D^{\sigma_k} z(0) = 0, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \setminus \{l\}. \tag{1.2.4}$$

для уравнения (1.2.1). Если ее решение имеет преобразование Лапласа, то равенство (1.2.3) для него имеет вид

$$\lambda^{\sigma_n} \widehat{z}(\lambda) - \lambda^{\sigma_n - \sigma_l - 1} z_l = A\widehat{z}(\lambda).$$

Отсюда имеем

$$\widehat{z}(\lambda) = \lambda^{\sigma_n - \sigma_l - 1} (\lambda^{\sigma_n} I - A)^{-1} z_l,$$
$$z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \lambda^{\sigma_n - \sigma_l - 1} (\lambda^{\sigma_n} I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \, z_l,$$

где $\gamma = \{\lambda = re^{-i\pi} \in \mathbb{C} : r \in (\infty, a]\} \cup \{\lambda = ae^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \varphi \in (-\pi, \pi)\} \cup \{\lambda = re^{i\pi} \in \mathbb{C} : r \in [a; \infty)\}$ при $a > \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{1/\sigma_n}$.

Таким образом, определим операторы для $k=0,1,\ldots,n-1$

$$Z_k(t):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\lambda^{\sigma_n-\sigma_k-1}\big(\lambda^{\sigma_n}I-A\big)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda,\quad t>0.$$

Заметим, что в силу ограниченности оператора A

$$Z_k(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\lambda^{-\sigma_k-1-j\sigma_n}e^{\lambda t}d\lambda=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{j\sigma_n+\sigma_k}A^j}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_t}\frac{e^{\nu}d\nu}{\nu^{j\sigma_n+\sigma_k+1}}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{j\sigma_n+\sigma_k}A^j}{\Gamma(j\sigma_n+\sigma_k+1)}=t^{\sigma_k}E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n}A).$$

Здесь использованы контур $\gamma_t:=\{t\mu:\mu\in\gamma\}$ и функция Миттаг — Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}(Z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{Z^j}{\Gamma(\alpha j+\beta)},\quad Z\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}).$$

Замечание 1.2.1. *Заметим, что при* $k=1,2,\ldots,n-1$

$$Z_k(t):=J_t^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}Z_0(t).$$

Лемма 1.2.1. *Пусть* $A\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_l\in\mathcal{Z}$ *для* $l\in\{0,\ldots,n-1\}$, $\alpha_n+\sigma_l>0$. *Тогда функция* $Z_l(t)=t^{\sigma_l}E_{\sigma_n,\sigma_l+1}(t^{\sigma_n}A)$ *является единственным решением задачи* (1.2.1), (1.2.4).

Доказательство. Заметим, что при выполнении условия $\alpha_n+\sigma_l>0$ выполняется также неравенство $\sigma_n>0$. Имеем

$$D^{\sigma_0}t^{\sigma_l}E_{\sigma_n,\sigma_l+1}(t^{\sigma_n}A)=D_t^{\alpha_0-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{j\sigma_n+\sigma_l}A^j}{\Gamma(j\sigma_n+\sigma_l+1)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{j\sigma_n+\sigma_l-\sigma_0}A^j}{\Gamma(j\sigma_n+\sigma_l-\sigma_0+1)},$$

$\sigma_l-\sigma_0>0$ для $l=1,2,\ldots,n-1$, таким образом, $D^{\sigma_0}Z_l(0)=0$, $D^{\sigma_0}Z_0(0)=I$.

Для $k\in\{0,1,\ldots,l\}$

$$D^{\sigma_k}Z_l(t)=D_t^{\alpha_k-1}D_t^{\alpha_{k-1}}D_t^{\alpha_{k-2}}\ldots D_t^{\alpha_0}Z_l(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{j\sigma_n+\sigma_l-\sigma_k}A^j}{\Gamma(j\sigma_n+\sigma_l-\sigma_k+1)},$$

при $k < l$ $\sigma_l - \sigma_k = \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_l > 0$, следовательно, $D^{\sigma_k} Z_l(0) = 0$, $D^{\sigma_l} Z_l(0) = I$.

Далее,

$$D^{\sigma_{l+1}} Z_l(t) = D_t^{\alpha_{l+1}-1} D_t^{\alpha_l} D_t^{\alpha_{l-1}} \dots D_t^{\alpha_0} Z_l(t) = D_t^{\alpha_{l+1}-1} D_t^{\alpha_l} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j\sigma_n + \alpha_l - 1} A^j}{\Gamma(j\sigma_n + \alpha_l)} =$$

$$= D_t^{\alpha_{l+1}-1} D_t^1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j\sigma_n} A^j}{\Gamma(j\sigma_n + \alpha_l)} = D_t^{\alpha_{l+1}-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j\sigma_n - 1} A^j}{\Gamma(j\sigma_n)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j\sigma_n + \sigma_l - \sigma_{l+1}} A^j}{\Gamma(j\sigma_n + \sigma_l - \sigma_{l+1} + 1)},$$

при $k \in \{l+1, l+2, \dots, n-1\}$

$$D^{\sigma_k} Z_l(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j\sigma_n + \sigma_l - \sigma_k} A^j}{\Gamma(j\sigma_n + \sigma_l - \sigma_k + 1)}.$$

Для $l \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, $k \in \{l+1, l+2, \dots, n-1\}$ имеем

$$\sigma_n + \sigma_l - \sigma_k \geq \sigma_n + \sigma_l - \sigma_{n-1} = \alpha_n + \sigma_l > 0,$$

следовательно, $D^{\sigma_k} Z_l(0) = 0$.

Непрерывная дифференцируемость функций $D^{\sigma_k} Z_l$ на $\mathbb{R}_+$ влечет их абсолютную непрерывность.

Наконец,

$$D^{\sigma_n} Z_l(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j\sigma_n + \sigma_l - \sigma_n} A^j}{\Gamma(j\sigma_n + \sigma_l - \sigma_n + 1)} = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j\sigma_n + \sigma_l} A^j}{\Gamma(j\sigma_n + \sigma_l + 1)} = A Z_l(t).$$

Докажем единственность решения. Предположим, что $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — два решения задачи (1.2.1), (1.2.4), тогда $y(t) = z_1(t) - z_2(t)$ является решением задачи $D^{\sigma_k} y(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, для уравнения (1.2.1). Подействуем на обе части уравнения (1.2.1) дробным интегральным оператором $J_t^{\alpha_n}$ и получим $D^{\sigma_{n-1}} y(t) = J_t^{\alpha_n} A y(t) + D^{\sigma_{n-1}} y(0) = J_t^{\alpha_n} A y(t)$ с учетом нулевых начальных условий и абсолютной непрерывности $D^{\sigma_{n-1}} y(t)$. Подействовав интегральным оператором $J_t^{\alpha_{n-1}}$, получим $D^{\sigma_{n-2}} y(t) = J_t^{\alpha_{n-1}+\alpha_n} A y(t) +$

$D^{\sigma_{n-2}}y(0) = J_t^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}Ay(t)$. Продолжая этот процесс, придем к равенству $D^{\sigma_0}y(t) = J_t^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}Ay(t) = J_t^{\sigma_n}AD^{\sigma_0}y(t)$ в силу непрерывности оператора A. Возьмем $x(t) = D^{\sigma_0}y(t)$ и рассмотрим уравнение

$$x(t) = J_t^{\sigma_n}Ax(t). \tag{1.2.5}$$

Имеем

$$\|J_t^{\sigma_n}Ax_1 - J_t^{\sigma_n}Ax_2\|_{C([0,T];\mathcal{Z})} \le \frac{T^{\sigma_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}{\Gamma(\sigma_n+1)}\|x_1-x_2\|_{C([0,T];\mathcal{Z})} = q\|x_1-x_2\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}$$

при $q \in (0,1)$, $T = (\Gamma(\sigma_n+1)q/\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^{1/\sigma_n}$. Поэтому единственным решением уравнения (1.2.5) в пространстве $C([0,T];\mathcal{Z})$ является тождественно нулевая функция x. Но в таком случае

$$\|J_t^{\sigma_n}Ax_1 - J_t^{\sigma_n}Ax_2\|_{C([0,2^{1/\sigma_n}T];\mathcal{Z})} \le \frac{2T^{\sigma_n} - T^{\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n+1)}\|x_1-x_2\|_{C([0,2^{1/\sigma_n}T];\mathcal{Z})} =$$
$$= q\|x_1-x_2\|_{C([0,2^{1/\sigma_n}T];\mathcal{Z})},$$

поэтому уравнение (1.2.5) имеет только нулевое решение в $C([0,2^{1/\sigma_n}T];\mathcal{Z})$. Продолжая эти рассуждения, мы получим единственность нулевого решения на любом отрезке $[0,2^{k/\sigma_n}T]$, $k \in \mathbb{N}$, а так как $2^{1/\sigma_n} > 1$, то и на всей полуоси.

Тогда $0 \equiv J_t^{\alpha_0}x(t) = J_t^1y(t)$, $y(t) = D_t^1 0 \equiv 0$. Таким образом, $z_1(t) = z_2(t)$ для всех $t > 0$. □

Теорема 1.2.1. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $0 < \alpha_k \le 1$, $k = 0, 1 \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$. *Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k}E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n}A)z_k$$

является единственным решением задачи (1.2.1), (1.2.2).

Доказательство. Для любого $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ имеем

$$\sigma_l + \alpha_n \ge \sigma_0 + \alpha_n = \alpha_0 + \alpha_n - 1 > 0,$$

следовательно, лемма 1.2.1 верна для всех l при условии $\alpha_0 + \alpha_n > 1$. Из линейности задачи (1.2.1), (1.2.2) получаем требуемое. □

Замечание 1.2.2. *Для* $\mathcal{Z} = \mathbb{R}$ *этот результат был получен в работе [13].*

1.3. Специальные банаховы пространства

Пространство функций $v \in C((t_0,T];\mathcal{Z})$, таких, что $(t-t_0)^\gamma v(t) \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ обозначим $C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$ и наделим нормой

$$\|v\|_{C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})} := \sup_{t\in[t_0,T]} \|(t-t_0)^\gamma v(t)\|_{\mathcal{Z}}. \tag{1.3.1}$$

На пространстве $C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$ функций $v \in C([t_0,T];\mathcal{Z}) \cap C^1((t_0,T];\mathcal{Z})$, таких, что $(t-t_0)^\gamma v'(t) \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$, определим норму

$$\|v\|_{C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})} := \sup_{t\in[t_0,T]} \|v(t)\|_{\mathcal{Z}} + \sup_{t\in[t_0,T]} \|(t-t_0)^\gamma v'(t)\|_{\mathcal{Z}}. \tag{1.3.2}$$

В этих обозначениях

$$C_0([t_0,T];\mathcal{Z}) = C([t_0,T];\mathcal{Z}), \quad C^1_0([t_0,T];\mathcal{Z}) = C^1([t_0,T];\mathcal{Z}).$$

При $\gamma,\delta \in \mathbb{R}$, $\gamma < \delta$

$$C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z}) \subset C_\delta([t_0,T];\mathcal{Z}), \quad C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z}) \subset C^1_\delta([t_0,T];\mathcal{Z}).$$

Для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ при $v \in C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$

$$\|v(t)\|_{\mathcal{Z}} \le (t-t_0)^{-\gamma} \|v\|_{C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})}, \quad t \in (t_0,T],$$

для $v \in C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$

$$\|v'(t)\|_{\mathcal{Z}} \le (t-t_0)^{-\gamma} \|v\|_{C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})}, \quad t \in (t_0,T].$$

Поэтому при $\gamma < 0$ $v(t_0) = 0$ для $v \in C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$, $v'(t_0) = 0$ для $v \in C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$.

Лемма 1.3.1. *Пусть $\gamma < 1$, тогда пространство $C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$ с нормой (1.3.1) и $C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$ с нормой (1.3.2) являются банаховыми пространствами.*

Доказательство. Возьмем фундаментальную последовательность $\{v_m\}$ в пространстве $C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$, тогда существуют

$$w(t) = \lim_{m\to\infty} (t-t_0)^\gamma v_m(t) \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$$

и

$$v(t) := (t-t_0)^{-\gamma}w(t) = \lim_{m\to\infty} v_m(t) \in C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z}),$$

поскольку $(t-t_0)^\gamma v(t) = w(t)$.

Если $\{v_m\}$ — фундаментальная последовательность в $C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$, то существуют $v(t) = \lim\limits_{m\to\infty} v_m(t)$, $w(t) = \lim\limits_{m\to\infty}(t-t_0)^\gamma v'_m(t)$ в $C([t_0,T];\mathcal{Z})$. Имеем также равенства

$$\lim_{m\to\infty}((t-t_0)v_m(t))' = \lim_{m\to\infty} v_m(t) + (t-t_0)^{1-\gamma}\lim_{m\to\infty}(t-t_0)^\gamma v'_m(t) =$$
$$= v(t) + (t-t_0)^{1-\gamma}w(t)$$

в $C([t_0,T];\mathcal{Z})$ при $\gamma<1$. Следовательно, $\{(t-t_0)v_m\}$ имеет предел в пространстве $C^1([t_0,T];\mathcal{Z})$, откуда следует, что $((t-t_0)v(t))' = v(t) + (t-t_0)^{1-\gamma}w(t)$. Поэтому

$$w(t) = (t-t_0)^{\gamma-1}((t-t_0)v(t))' - (t-t_0)^{\gamma-1}v(t) = (t-t_0)^\gamma v'(t)$$

лежит в $C([t_0,T];\mathcal{Z})$ и $v\in C^1_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$. □

Лемма 1.3.2. *Пусть* $\gamma<1$, $\beta>0$, *тогда*

$$J^\beta_t \in \mathcal{L}(C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z}); C_{\gamma-\beta}([t_0,T];\mathcal{Z})).$$

Доказательство. Имеем для $v\in C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})$

$$\|(t-t_0)^{\gamma-\beta}J^\beta_t v(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|(t-t_0)^{\gamma-\beta}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}v(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le \|v\|_{C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})}\left|(t-t_0)^{\gamma-\beta}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(s-t_0)^{-\gamma}ds\right| =$$

$$= \|v\|_{C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})}\left|(t-t_0)^{\gamma-\beta}\int\limits_{0}^{t-t_0}\frac{s^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(t-t_0-s)^{-\gamma}ds\right| =$$

$$= \|v\|_{C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})}\left|\frac{B(\beta,1-\gamma)}{\Gamma(\beta)}\right| = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)}\|v\|_{C_\gamma([t_0,T];\mathcal{Z})}.$$

□

Пусть $\alpha_k \in (0,1]$, $k=0,1,\ldots,n$. Множество $C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,T];\mathcal{Z})$ функций $v \in L_1(t_0,T;\mathcal{Z})$, таких, что существуют производные

$$D^{\sigma_k}v \in C^1_{1-\alpha_{k+1}}([t_0,T];\mathcal{Z}), \quad k=0,1,\ldots,n-2, \quad D^{\sigma_{n-1}}v \in C^1_{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}([t_0,T];\mathcal{Z}),$$

снабдим нормой

$$\|v\|_{C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,T];\mathcal{Z})} := \sum_{k=0}^{n-2}\|D^{\sigma_k}v\|_{C^1_{1-\alpha_{k+1}}([t_0,T];\mathcal{Z})} + \|D^{\sigma_{n-1}}v\|_{C^1_{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}([t_0,T];\mathcal{Z})}. \quad (1.3.3)$$

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\alpha_k \in (0,1]$, $k=0,1,\ldots,n$, $\alpha_0+\alpha_n>1$. *Тогда* $C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,T];\mathcal{Z})$ *с нормой* (1.3.3) *является банаховым пространством.*

Доказательство. Пусть $v \in L_1(t_0,T;\mathcal{Z})$, $\|v\|_{C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,T];\mathcal{Z})}=0$, тогда $D^{\sigma_0}v := J_t^{1-\alpha_0}v \equiv 0$. Если $\alpha_0=1$, то $v\equiv 0$ и соответствующая аксиома нормы выполнена. Пусть $\alpha_0 \in (0,1)$, тогда $v = D_t^{1-\alpha_0}J_t^{1-\alpha_0}v = D_t^1 J_t^{\alpha_0}0 \equiv 0$. Остальные аксиомы нормы для (1.3.3) легко проверяются.

Пусть $\{v_m\}$ фундаментальная последовательность в $C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,T];\mathcal{Z})$, тогда по лемме 1.3.1 существуют функции $w_k \in C^1_{1-\alpha_{k+1}}([t_0,T];\mathcal{Z})$ при $k=0,1,\ldots,n-2$, такие, что $\lim\limits_{m\to\infty} D^{\sigma_k}v_m = w_k$ в пространстве $C^1_{1-\alpha_{k+1}}([t_0,T];\mathcal{Z})$ при $k=0,1,\ldots,n-2$, и существует $w_{n-1} \in C^1_{2-\alpha_0-\alpha_n}([t_0,T];\mathcal{Z})$, такое, что $\lim\limits_{m\to\infty} D^{\sigma_k}v_m = w_k$ в пространстве $C^1_{2-\alpha_0-\alpha_n}([t_0,T];\mathcal{Z})$, так как $2-\alpha_0-\alpha_n<1$.

Пусть $\alpha_0 \in (0,1)$. Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} J_t^{1-\alpha_0}v_m = w_0$ в $C^1_{1-\alpha_1}([t_0,T];\mathcal{Z})$, то

$$v_0(t) = D_t^1 J_t^{\alpha_0}w_0(t) = \frac{(t-t_0)^{\alpha_0-1}}{\Gamma(\alpha_0)}w_0(t_0) + J_t^{\alpha_0}D_t^1 w_0(t)$$

по лемме 1.3.2 лежит в $C_{1-\alpha_0}([t_0,T];\mathcal{Z})+C_{1-\alpha_0-\alpha_1}([t_0,T];\mathcal{Z}) = C_{1-\alpha_0}([t_0,T];\mathcal{Z})$. При этом $J_t^{1-\alpha_0}v_0(t) = w_0(t_0) + J_t^1 D_t^1 w_0(t) = w_0(t)$. Таким образом, имеем $\lim\limits_{m\to\infty} J_t^{1-\alpha_0}v_m = D^{\sigma_0}v_0$ в $C^1_{1-\alpha_1}([t_0,T];\mathcal{Z})$. При $\alpha_0=1$ получим $w_0 = v_0 = D^{\sigma_0}v_0$.

Пусть $\alpha_1 \in (0,1)$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} J_t^{1-\alpha_1}D_t^{\alpha_0}v_m = w_1 = J_t^{1-\alpha_1}D_t^{\alpha_0}v_0 = D^{\sigma_1}v_0$ в $C^1_{1-\alpha_2}([t_0,T];\mathcal{Z})$, $\lim\limits_{m\to\infty} D_t^1 D^{\sigma_1}v_m = D_t^1 D^{\sigma_1}v_0$ в пространстве $C_{1-\alpha_2}([t_0,T];\mathcal{Z})$.

Далее при $\alpha_2 \in (0,1)$ $\lim\limits_{m\to\infty} J_t^{1-\alpha_2} D_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_0} v_m = w_2 = D^{\sigma_2} v_0$ в пространстве $C^1_{1-\alpha_3}([t_0,T];\mathcal{Z})$, $\lim\limits_{m\to\infty} D_t^1 D^{\sigma_2} v_m = D_t^1 D^{\sigma_2} v_0$ в пространстве $C_{1-\alpha_3}([t_0,T];\mathcal{Z})$.

Продолжая этот процесс, на $(n-2)$-м шаге получим $\lim\limits_{m\to\infty} D^{\sigma_{n-2}} v_m = w_{n-2} = D^{\sigma_{n-2}} v_0$ в $C^1_{1-\alpha_{n-1}}([t_0,T];\mathcal{Z})$, $\lim\limits_{m\to\infty} D_t^1 D^{\sigma_{n-2}} v_m = D_t^1 D^{\sigma_{n-2}} v_0$ в пространстве $C_{1-\alpha_{n-1}}([t_0,T];\mathcal{Z})$. Наконец, $\lim\limits_{m\to\infty} D^{\sigma_{n-1}} v_m = w_{n-1} = D^{\sigma_{n-1}} v_0$ в пространстве $C^1_{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}([t_0,T];\mathcal{Z})$.

Таким образом, существует предел $v \in C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,T];\mathcal{Z})$ последовательности $\{v_m\}$ в $C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,T];\mathcal{Z})$, и пространство $C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,T];\mathcal{Z})$ с нормой (1.3.3) является банаховым. $\square$

1.4. Линейное неоднородное уравнение

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0,T], \tag{1.4.1}$$

для некоторого $f \in C([0,T];\mathcal{Z})$. Функция $z \in C((0,T];\mathcal{Z}) \cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$ называется решением задачи (1.2.2), (1.4.1), если $D^{\sigma_k} z \in AC([0,T];\mathcal{Z})$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $D^{\sigma_n} z \in C((0,T];\mathcal{Z})$, равенство (1.4.1) выполняется для всех $t \in (0,T]$ и выполнены условия (1.2.2).

Обозначим при тех же контурах γ и γ_t, что и в предыдущем параграфе,

$$Z(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (\lambda^{\sigma_n} I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = \sum_{j=0}^\infty \frac{A^j}{2\pi i}\int\limits_\gamma \lambda^{-(j+1)\sigma_n} e^{\lambda t} d\lambda =$$

$$= \sum_{j=0}^\infty \frac{t^{(j+1)\sigma_n - 1} A^j}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} \frac{e^\nu d\nu}{\nu^{(j+1)\sigma_n}} = \sum_{j=0}^\infty \frac{t^{(j+1)\sigma_n - 1} A^j}{\Gamma((j+1)\sigma_n)} = t^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}(t^{\sigma_n} A),$$

для $k = 0,1,\dots,n-1$

$$Y_k(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \lambda^{\sigma_k} (\lambda^{\sigma_n} I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = \sum_{j=0}^\infty \frac{A^j}{2\pi i}\int\limits_\gamma \lambda^{\sigma_k - (j+1)\sigma_n} e^{\lambda t} d\lambda =$$

$$= \sum_{j=0}^\infty \frac{t^{(j+1)\sigma_n - \sigma_k - 1} A^j}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_t} \frac{e^\nu d\nu}{\nu^{(j+1)\sigma_n - \sigma_k}} = \sum_{j=0}^\infty \frac{t^{(j+1)\sigma_n - \sigma_k - 1} A^j}{\Gamma((j+1)\sigma_n - \sigma_k)} =$$

$$= t^{\sigma_n-\sigma_k-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}(t^{\sigma_n}A),$$

$$Y_n(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\lambda^{\sigma_n}(\lambda^{\sigma_n}I-A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\lambda^{-j\sigma_n}e^{\lambda t}d\lambda =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{j\sigma_n-1}A^j}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_t}\frac{e^{\nu}d\nu}{\nu^{j\sigma_n}} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j\sigma_n-1}A^j}{\Gamma(j\sigma_n)} = t^{\sigma_n-1}AE_{\sigma_n,\sigma_n}(t^{\sigma_n}A). \qquad (1.4.2)$$

Заметим, что $\sigma_n-\sigma_k>0$ и по условию $\sigma_n>0$, следовательно, при $t\to 0+$

$$Z(t)\sim\frac{t^{\sigma_n-1}}{\Gamma(\sigma_n)},\quad Y_k(t)\sim\frac{t^{\sigma_n-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_n-\sigma_k)},\ k=0,1,\ldots,n-1. \qquad (1.4.3)$$

Лемма 1.4.1. *Пусть $A\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $0<\alpha_k\le 1$, $k=0,1\ldots,n$, $\alpha_0+\alpha_n>1$, $f\in C([0,T];\mathcal{Z})$ при $\alpha_n=1$ и $f\in C^1_\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ для некоторого $\gamma<1$ при $\alpha_n<1$. Тогда функция*

$$z_f(t)=\int\limits_0^t(t-s)^{\sigma_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds$$

является единственным решением задачи

$$D^{\sigma_k}z(0)=0,\quad k=0,1,\ldots,n-1, \qquad (1.4.4)$$

для уравнения (1.4.1).

Доказательство. Имеем при $\alpha_0\in(0,1)$

$$D^{\sigma_0}z_f(t)=J_t^{1-\alpha_0}z_f(t)=\int\limits_0^t J_t^{1-\alpha_0}(t-s)^{\sigma_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds=$$

$$=\int\limits_0^t(t-s)^{\sigma_n-\sigma_0-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_0}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds. \qquad (1.4.5)$$

Если же $\alpha_0=1$, то $D^{\sigma_0}z_f(t)=z_f(t)$, но так как в этом случае $\sigma_0=\alpha_0-1=0$, то равенство (1.4.5) также справедливо. Далее при условии $\sigma_n-\sigma_0>1$ имеем

$$D^{\sigma_1}z_f(t)=J_t^{1-\alpha_1}D_t^1\int\limits_0^t(t-s)^{\sigma_n-\sigma_0-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_0}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds=$$

$$= \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-\sigma_1-1} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_1}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds.$$

Продолжая аналогичные рассуждения при $\sigma_n - \sigma_k > 1$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, т. е. при $\alpha_{n-1} + \alpha_n > 1$, получим

$$D^{\sigma_{n-1}} z_f(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-\sigma_{n-1}-1} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_{n-1}}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds.$$

Теперь, если $\alpha_n = 1$,

$$D^{\sigma_n} z_f(t) = D_t^1 \int\limits_0^t E_{\sigma_n,1}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds =$$

$$= f(t) + A\int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds = Az_f(t) + f(t).$$

При $\alpha_n < 1$ имеем для $f \in C^1_\beta([0,T];\mathcal{Z})$

$$D^{\sigma_n} z_f(t) = J_t^{1-\alpha_n} D_t^1 \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_n-1} E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds =$$

$$= J_t^{1-\alpha_n} t^{\alpha_n-1} E_{\sigma_n,\alpha_n}(t^{\sigma_n}A)f(0) + J_t^{1-\alpha_n} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_n-1} E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n}A) D_s^1 f(s)ds =$$

$$= E_{\sigma_n,1}(t^{\sigma_n}A)f(0) + \int\limits_0^t E_{\sigma_n,1}((t-s)^{\sigma_n}A) D_s^1 f(s)ds =$$

$$= f(t) + A\int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds = f(t) + Az_f(t).$$

Если же существует $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, при котором $\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \cdots + \alpha_n = \sigma_n - \sigma_k \leq 1$, то $\alpha_n < 1$. Возьмем минимальное из таких k и получим в случае $f \in C^1([0,T];\mathcal{Z})$

$$D^{\sigma_{k+1}} z_f(t) = J_t^{1-\alpha_{k+1}} D_t^1 \int\limits_0^t s^{\sigma_n-\sigma_k-1} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}(s^{\sigma_n}A)f(t-s)ds =$$

$$= J_t^{1-\alpha_{k+1}} t^{\sigma_n-\sigma_k-1} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}(t^{\sigma_n}A)f(0)+$$

$$+J_t^{1-\alpha_{k+1}} \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-\sigma_k-1} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1 f(s)ds =$$

$$= t^{\sigma_n-\sigma_{k+1}} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_{k+1}+1}(t^{\sigma_n}A)f(0)+$$

$$+\int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_{k+1}+1}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1 f(s)ds =$$

$$= \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}-1} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_{k+1}}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds.$$

Здесь использован тот факт, что

$$\left\| \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-\sigma_k-1} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1 f(s)ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le C\int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-\sigma_k-1} s^{-\gamma} ds = Ct^{\sigma_n-\sigma_k+\gamma} B(\sigma_n-\sigma_k, 1-\gamma).$$

Далее на каждом шаге проделываем аналогичные вычисления. На последнем шаге получим

$$D^{\sigma_n} z_f(t) = J_t^{1-\alpha_n} D_t^1 \int\limits_0^t s^{\alpha_n-1} E_{\sigma_n,\alpha_n}(s^{\sigma_n}A)f(t-s)ds =$$

$$= J_t^{1-\alpha_n} t^{\alpha_n-1} E_{\sigma_n,\alpha_n}(t^{\sigma_n}A)f(0) + J_t^{1-\alpha_n} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_n-1} E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1 f(s)ds =$$

$$= E_{\sigma_n,1}(t^{\sigma_n}A)f(0) + \int\limits_0^t E_{\sigma_n,1}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1 f(s)ds =$$

$$= f(t) + A\int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}A)f(s)ds = Az_f(t) + f(t).$$

Имеем

$$\|z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} \le \sup_{s\in[0,T]} \|E_{\sigma_n,\sigma_n}(s^{\sigma_n}A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \sup_{s\in[0,T]} \|f(s)\|_{\mathcal{Z}} \frac{t^{\sigma_n}}{\sigma_n},$$

поэтому $z_f(0) = 0$ в силу неравенства $\sigma_n > 0$.

Преобразование Лапласа при достаточно больших Reμ дает равенство

$$\widehat{Z}(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{\mu^{(j+1)\sigma_n}} = (\mu^{\sigma_n} I - A)^{-1}.$$

Доопределим f нулем вне отрезка $[0,T]$. Имеем $z_f = Z * f$, следовательно,

$$\widehat{z}_f(\mu) = \widehat{Z}(\mu)\widehat{f}(\mu) = (\mu^{\sigma_n} I - A)^{-1}\widehat{f}(\mu),$$

$$\widehat{D^{\sigma_0} z}_f(\mu) = \mu^{\sigma_0}(\mu^{\sigma_n} I - A)^{-1}\widehat{f}(\mu), \quad D^{\sigma_0} z_f(t) = \int_0^t Y_0(t-s) f(s) ds.$$

Для $\alpha_0 = 1$ $D^{\sigma_0} z_f(0) = z_f(0) = 0$, а для $\alpha_0 \in (0,1)$

$$\|D^{\sigma_0} z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha_0} z_f(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le \frac{\sup\limits_{s\in[0,T]} \|z_f(s)\|_{\mathcal{Z}}}{\Gamma(1-\alpha_0)} \frac{t^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0},$$

следовательно, $D^{\sigma_0} z_f(0) = 0$. Поэтому

$$\widehat{D^{\sigma_1} z}_f(\mu) = \mu^{\sigma_1}(\mu^{\sigma_n} I - A)^{-1}\widehat{f}(\mu), \quad D^{\sigma_1} z_f(t) = \int_0^t Y_1(t-s) f(s) ds$$

в силу (1.1.3). Тогда в силу (1.4.3)

$$\|D^{\sigma_1} z_f(t)\| \le C_1 \sup_{s\in[0,T]} \|f(s)\|_{\mathcal{Z}} \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - \sigma_1 - 1} ds = \frac{C_1 t^{\sigma_n - \sigma_1}}{\sigma_n - \sigma_1} \sup_{s\in[0,T]} \|f(s)\|_{\mathcal{Z}},$$

следовательно, $D^{\sigma_1} z_f(0) = 0$,

$$\widehat{D^{\sigma_2} z}_f(\mu) = \mu^{\sigma_2}(\mu^{\sigma_n} I - A)^{-1}\widehat{f}(\mu), \quad D^{\sigma_2} z_f(t) = \int_0^t Y_2(t-s) f(s) ds.$$

Продолжая эти рассуждения, получаем

$$D^{\sigma_k} z_f(t) = \int\limits_0^t Y_k(t-s) f(s) ds, \; k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$D^{\sigma_k} z_f(0) = 0, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Следовательно, условия (1.4.4) выполнены.

Единственность решения доказывается так же, как и для однородного уравнения. □

Из теоремы 1.2.1, леммы 1.4.1 и линейности уравнения сразу получаем следующий результат.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1 \ldots, n-1$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1 \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $f \in C([0,T]; \mathcal{Z})$ *при* $\alpha_n = 1$ *и* $f \in C^1_\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$ *для некоторого* $\gamma < 1$ *при* $\alpha_n < 1$. *Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k + 1}(t^{\sigma_n} A) z_k + \int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) f(s) ds$$

является единственным решением задачи (1.2.2), (1.4.1).

1.5. Начальные задачи для уравнений с композицией двух дробных производных

Рассмотрим дифференциальные операторы Джрбашяна — Нерсесяна

$$D^{\sigma_0} h(t) = D_t^{\alpha_0 - 1} h(t), \; D^{\sigma_k} h(t) = D_t^{\alpha_k - 1} D_t^{\alpha_{k-1}} D_t^{\alpha_{k-2}} \ldots D_t^{\alpha_0} h(t), \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.5.1}$$

где $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Оператор $D_t^{\alpha_k - 1}$ является дробным интегралом Римана — Лиувилля при $\alpha_k \in (0, 1)$ либо тождественным оператором при $\alpha_k = 1$, операторы $D_t^{\alpha_k}$ имеют вид $D_t^1 J_t^{1-\alpha_k}$ при $\alpha_k \in (0, 1)$ либо D_t^1 при $\alpha_k = 1$. Таким образом, в выражениях вида (1.1.1), (1.1.2) могут присутствовать, помимо возможного тождественного оператора слева, только производные первого порядка и дробные интегралы Римана — Лиувилля порядка менее 1, соседствовать с которыми могут только производные первого порядка. Обратное тоже верно: композицию производных целого порядка и дробных интегралов порядка меньше 1, в которой различные дробные интегралы не соседствуют друг с другом, можно представить в виде (1.1.1), (1.1.2), разложив производные целого порядка в композиции производных первого порядка.

Нетрудно убедиться, что дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, является производной Джрбашяна — Нерсесяна, ассоциированной с последовательностью $\alpha_0 = \alpha - m + 1$, $\alpha_1 = 1$, $\dots$, $\alpha_{m-1} = 1$, $\alpha_m = 1$. Действительно, $D^{\sigma_0} = J_t^{m-\alpha}$, $D^{\sigma_k} = D_t^k J_t^{m-\alpha} = D_t^{\alpha-m+k}$, $k = 1, 2, \dots, m$. При этом $\alpha_0 + \alpha_m = \alpha - m + 2 > 1$, $\sigma_0 = \alpha - m$, $\sigma_1 = \alpha - m + 1$, $\dots$, $\sigma_{m-1} = \alpha - 1$, $\sigma_m = \alpha > 0$ и задача (1.2.2) представляет собой задачу типа Коши $D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Производная Герасимова — Капуто ${}^G D_t^\alpha h(t) := J_t^{m-\alpha} D_t^m h(t)$ порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, также является производной Джрбашяна — Нерсесяна, ассоциированной с последовательностью $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\dots$, $\alpha_{m-1} = 1$, $\alpha_m = \alpha - m + 1$. В таком случае $D^{\sigma_k} = D_t^k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $D^{\sigma_m} = J^{m-\alpha} D_t^m$; $\alpha_0 + \alpha_m = \alpha - m + 2 > 1$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\dots$, $\sigma_{m-1} = m - 1$, $\sigma_m = \alpha > 0$ и (1.2.2) являются условиями Коши $D_t^k z(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m$, $r - 1 < \beta \leq r$. Тогда композиции производных Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто $D_t^\alpha D_t^\beta$, ${}^G D_t^\alpha {}^G D_t^\beta$ и ${}^G D_t^\alpha D_t^\beta$ также представляют собой производные Джрбашяна — Нерсесяна при $n = m + r$, $\sigma_{m+r} = \alpha + \beta > 0$ (см. табл.). При этом $\alpha_0 + \alpha_{m+r} = \beta - r + 2 > 1$, $\alpha_0 + \alpha_{m+r} = \alpha - m + 2 > 1$ и $\alpha_0 + \alpha_{m+r} = \alpha + \beta - m - r + 2$ соответственно. В последнем случае условие $\alpha_0 + \alpha_{m+r} > 1$ может не выполняться. Кроме того, понятно, что ${}^G D_t^\alpha D_t^\beta = {}^G D_t^{\alpha+l} D_t^{\beta-l} = {}^G D_t^{\alpha-k} D_t^{\beta+k}$ при $l = 0, 1, \dots, r-1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Рассмотрим композицию $D_t^\alpha {}^G D_t^\beta$ производных Герасимова — Капуто

${}^G D_t^\beta$ и Римана — Лиувилля D_t^α. Заметим, что в силу полугруппового свойства дробного интеграла Римана — Лиувилля $D_t^\alpha {}^G D_t^\beta = D_t^m J_t^{m-\alpha} J_t^{r-\beta} D_t^n = D_t^m J_t^{m+r-\alpha-\beta} D_t^r$. Если $\delta = m + r - \alpha - \beta - 1 \geq 0$, $m > 1$, то $D_t^\alpha {}^G D_t^\beta = D_t^m J_t^{1+\delta} D_t^r = D_t^{m-1} J_t^\delta D_t^r$ и получается дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна с $n = m + r - 1$, $\sigma_{m+r-1} = \alpha + \beta$, $\alpha_0 + \alpha_{m+r-1} = 2 > 1$ при $m > 1$ и $\alpha_0 + \alpha_{m+r-1} = 2 + \alpha + \beta - r > 1$ при $m = 1$ (см. табл.).

Таблица

Последовательности, с которыми ассоциированы композиции производных

$D_t^\alpha D_t^\beta$	α_0	α_1	α_{r-1}	α_r	α_{r+1}	α_{m+r-1}	α_{m+r}
	$\beta - r + 1$	1	1	$\alpha - m + 1$	1	1	1
	σ_0	σ_1	σ_{r-1}	σ_r	σ_{r+1}	σ_{m+r-1}	σ_{m+r}
	$\beta - r$	$\beta - r + 1$	$\beta - 1$	$\alpha + \beta - m$	$\alpha + \beta - m + 1$	$\alpha + \beta - 1$	$\alpha + \beta$
${}^G D_t^\alpha {}^G D_t^\beta$	α_0	α_1	α_{r-1}	α_r	α_{r+1}	α_{m+r-1}	α_{m+r}
	1	1	1	$\beta - r + 1$	1	1	$\alpha - m + 1$
	σ_0	σ_1	σ_{r-1}	σ_r	σ_{r+1}	σ_{m+r-1}	σ_{m+r}
	0	1	$r - 1$	β	$\beta + 1$	$\beta + m - 1$	$\alpha + \beta$
${}^G D_t^\alpha D_t^\beta$	α_0	α_1	α_{r-1}	α_r	α_{r+1}	α_{m+r-1}	α_{m+r}
	$\beta - r + 1$	1	1	1	1	1	$\alpha - m + 1$
	σ_0	σ_1	σ_{r-1}	σ_r	σ_{r+1}	σ_{m+r-1}	σ_{m+r}
	$\beta - r$	$\beta - r + 1$	$\beta - 1$	β	$\beta + 1$	$\beta + m - 1$	$\alpha + \beta$
$D_t^\alpha {}^G D_t^\beta$,	α_0	α_1	α_{r-1}	α_r	α_{r+1}	α_{m+r-1}	
$\delta \geq 0$,	1	1	1	$\alpha + \beta - m - r + 2$	1	1	
	σ_0	σ_1	σ_{r-1}	σ_r	σ_{r+1}	σ_{m+r-1}	
	0	1	$r - 1$	$\alpha + \beta - m + 1$	$\alpha + \beta - m + 2$	$\alpha + \beta$	
$D_t^\alpha {}^G D_t^\beta$,	α_0	α_1	α_{r-1}	α_r	α_{r+1}	α_{m+r-1}	α_{m+r}
$\delta < 0$	1	1	1	$\alpha + \beta - m - r + 1$	1	1	1
	σ_0	σ_1	σ_{r-1}	σ_r	σ_{r+1}	σ_{m+r-1}	σ_{m+r}
	0	1	$r - 1$	$\alpha + \beta - m$	$\alpha + \beta - m + 1$	$\alpha + \beta - 1$	$\alpha + \beta$

Если $\delta < 0$, т.е. $\alpha + \beta - m - r \in (-1, 0]$, композиция $D_t^\alpha {}^G D_t^\beta = D_t^m J_t^{m+r-\alpha-\beta} D_t^r$ является производной Джрбашяна — Нерсесяна при $n = m + r$, $\sigma_{m+r} = \alpha + \beta > 0$ (см. табл.). При этом $\alpha_0 + \alpha_{m+r} = 2 > 1$.

Из теоремы 1.4.1, учитывая значения элементов $\{\sigma_k\}_0^n$, указанные в табл., сразу получим следующие утверждения.

Следствие 1.5.1. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $r - 1 < \beta \leq r \in \mathbb{N}$, $f \in C([0, T]; \mathcal{X})$. *Тогда при любых* $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 0, 1, \ldots, r - 1$, $y_k \in \mathcal{X}$, $k =$

$0, 1, \ldots, m-1$, *существует единственное решение задачи*

$$D_t^{\alpha} D_t^{\beta} x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (0, T), \tag{4}$$

$$D_t^{\beta-r+l} x(0) = x_l, \quad l = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{5}$$

$$D_t^{\alpha-m+k} D_t^{\beta} x(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{6}$$

при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{l=0}^{r-1} t^{\beta-r+l} E_{\alpha+\beta,\beta-r+l+1}(t^{\alpha+\beta} A) x_l +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} t^{\alpha+\beta-m+k} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta-m+k+1}(t^{\alpha+\beta} A) y_k +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}((t-s)^{\alpha+\beta} A) f(s) ds.$$

Следствие 1.5.2. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $r-1 < \beta \leq r \in \mathbb{N}$, $f \in C_{\gamma}^1([0,T]; \mathcal{X})$ *при некотором* $\gamma < 1$. *Тогда при любых* $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 0, 1, \ldots, r-1$, $y_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, *существует единственное решение задачи*

$${}^G D_t^{\alpha} {}^G D_t^{\beta} x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (0, T),$$

$$D_t^l x(0) = x_l, \quad l = 0, 1, \ldots, r-1,$$

$$D_t^{k} {}^G D_t^{\beta} x(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{l=0}^{n-1} t^l E_{\alpha+\beta,l+1}(t^{\alpha+\beta} A) x_l + \sum_{k=0}^{m-1} t^{\beta+k} E_{\alpha+\beta,\beta+k+1}(t^{\alpha+\beta} A) y_k +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}((t-s)^{\alpha+\beta} A) f(s) ds.$$

Следствие 1.5.3. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $r-1 < \beta \leq r \in \mathbb{N}$, $\alpha+\beta-r-m > -1$, $f \in C^1_\gamma([0,T];\mathcal{X})$ *при некотором* $\gamma < 1$. *Тогда при любых* $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 0,1,\ldots,m+r-1$, *существует единственное решение задачи*

$$ {}^G D^\alpha_t D^\beta_t x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (0,T), $$

$$ D^{\beta-r+l}_t x(0) = x_l, \quad l = 0,1,\ldots,m+r-1, $$

при этом оно имеет вид

$$ x(t) = \sum_{l=0}^{m+r-1} t^{\beta-r+l} E_{\alpha+\beta,\beta-r+l+1}(t^{\alpha+\beta}A)x_l + $$

$$ + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}((t-s)^{\alpha+\beta}A)f(s)ds. $$

Следствие 1.5.4. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n-1 < \beta \leq n \in \mathbb{N}$, $\alpha+\beta-n-m > -1$, $f \in C([0,T];\mathcal{X})$. *Тогда при любых* $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 0,1,\ldots,n-1$, $y_k \in \mathcal{X}$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, *существует единственное решение задачи*

$$ D^{\alpha G}_t D^\beta_t x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (0,T), $$

$$ D^l_t x(0) = x_l, \quad l = 0,1,\ldots,n-1, $$

$$ D^{\alpha-m+k G}_t D^\beta_t x(0) = y_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, $$

при этом оно имеет вид

$$ x(t) = \sum_{l=0}^{n-1} t^l E_{\alpha+\beta,l+1}(t^{\alpha+\beta}A)x_l + \sum_{k=0}^{m-1} t^{\alpha+\beta+k-m} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta+k-m+1}(t^{\alpha+\beta}A)y_k + $$

$$ + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}((t-s)^{\alpha+\beta}A)f(s)ds. $$

Следствие 1.5.5. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n-1 < \beta \leq n \in \mathbb{N}$, $\alpha+\beta-n-m \leq -1$, $f \in C([0,T];\mathcal{X})$. *Тогда при любых* $x_l \in \mathcal{X}$,

$l = 0, 1, \dots, n-1$, $y_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, *существует единственное решение задачи*

$$D_t^{\alpha G} D_t^{\beta} x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (0, T),$$

$$D_t^l x(0) = x_l, \quad l = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$D_t^{\alpha - m + 1 + kG} D_t^{\beta} x(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-2,$$

при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{l=0}^{n-1} t^l E_{\alpha+\beta, l+1}(t^{\alpha+\beta} A) x_l + \sum_{k=0}^{m-2} t^{\alpha+\beta+k+1-m} E_{\alpha+\beta, \alpha+\beta+k+2-m}(t^{\alpha+\beta} A) y_k +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta, \alpha+\beta}((t-s)^{\alpha+\beta} A) f(s) ds.$$

1.6. Представление произвольных композиций дробных производных в виде производной Джрбашяна — Нерсесяна

Рассмотрим уравнение в банаховом пространстве

$$\prod_{l=1}^{p} ({}^G D^{\beta_l})^{1-r_l} (D_t^{\gamma_l})^{r_l} z(t) = Az(t) + f(t). \tag{1.6.1}$$

Здесь $m_l - 1 < \beta_l \leq m_l \in \mathbb{N}$, $s_l - 1 < \gamma_l < s_l \in \mathbb{N}$, $r_l \in \{0, 1\}$, $l = 1, 2, \dots, p$, поэтому дифференциальный оператор

$$\prod_{l=1}^{p} ({}^G D^{\beta_l})^{1-r_l} (D_t^{\gamma_l})^{r_l} \tag{1.6.2}$$

представляет собой произвольную композицию $p \in \mathbb{N}$ дифференциальных операторов Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля. Изначально неясен вид начальных условий, подходящих для уравнения (1.6.1). В данном параграфе мы покажем, что любой оператор вида (1.6.2) является дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна, поэтому для уравнения (1.6.1) можно рассматривать задачу с условиями (1.2.2), соответствующими этой дробной производной.

Теорема 1.6.1. *Любой дифференциальный оператор вида* (1.6.2) *является производной Джрбашяна — Нерсесяна.*

Доказательство. Если $p = 1$, то получаем утверждение о том, что производные Герасимова — Капуто и Римана — Лиувилля являются производными Джрбашяна — Нерсесяна. Оно доказано в предыдущем параграфе.

Пусть для $p > 1$ утверждение данной теоремы выполняется, рассмотрим композицию вида (1.6.2) $p+1$ оператора, тогда по предположению

$$({}^G D^{\beta})^{1-r}(D_t^{\gamma})^r \prod_{l=1}^{p}({}^G D^{\beta_l})^{1-r_l}(D_t^{\gamma_l})^{r_l} = ({}^G D^{\beta})^{1-r}(D_t^{\gamma})^r D^{\sigma_n}$$

где $m-1 < \beta \leq m \in \mathbb{N}$, $s-1 < \gamma \leq s \in \mathbb{N}$, $r \in \{0,1\}$, производная Джрбашяна — Нерсесяна D^{σ_n} соответствует некоторой последовательности $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Если $r = 0$, то получаем композицию производных Герасимова — Капуто и Джрбашяна — Нерсесяна, которая представима в виде ${}^G D^{\beta} D^{\sigma_n} = D^{\sigma_{n+m}}$, где $D^{\sigma_{n+m}}$ соответствует последовательности

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} = 1, \ldots, \alpha_{n+m-1} = 1, \alpha_{n+m} = \beta - m + 1\}.$$

Действительно, в таком случае $D^{\sigma_{n+m}} = D^{\beta-m} D_t^1 \ldots D_t^1 D^{\sigma_n} = J^{m-\beta} D_t^m D^{\sigma_n}$.

Пусть теперь $r = 1$, тогда при $s - \gamma - \alpha_n < 0$

$$D_t^{\beta} D^{\sigma_n} = D_t^s J^{s-\gamma+1-\alpha_n} D_t^1 D^{\sigma_{n-1}} = D_t^{s-1} D^{\gamma-s+\alpha_n} D_t^1 D^{\sigma_{n-1}} = D^{\sigma_{n+s}},$$

где производная $D^{\sigma_{n+s}}$ соответствует последовательности

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = \gamma - s + \alpha_n, \alpha_{n+1} = 1, \ldots, \alpha_{n+s} = 1\}$$

при прежних $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Если же $r = 1$, $s - \gamma - \alpha_n \geq 0$, то

$$D_t^{\beta} D^{\sigma_n} = D_t^s J^{s-\gamma+1-\alpha_n} D_t^1 D^{\sigma_{n-1}} = D_t^{s-1} J^{s-\gamma-\alpha_n} D_t^1 D^{\sigma_{n-1}} = D^{\sigma_{n+s-1}}$$

и $D^{\sigma_{n+s-1}}$ соответствует последовательности

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = \gamma - s + \alpha_n + 1, \alpha_{n+1} = 1, \ldots, \alpha_{n+s-1} = 1\}$$

с прежними $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. $\square$

1.7. Квазилинейное уравнение

Обозначим через Z открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, оператор $B : Z \to \mathcal{Z}$ нелинейный, вообще говоря. Рассмотрим начальную задачу для нелинейного уравнения

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + B(t, D^{\sigma_0} z(t), D^{\sigma_1} z(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}} z(t)), \tag{1.7.1}$$

$$D^{\sigma_k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.7.2}$$

Функцию $z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ назовем решением задачи (1.7.1), (1.7.2) на $(t_0, t_1]$, если $D^{\sigma_k} z \in AC([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, при этом $D^{\sigma_n} z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, для всех $t \in [t_0, t_1]$ $(t, D^{\sigma_0} z(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}} z(t)) \in Z$, выполняются равенство (1.7.1) при $t \in (t_0, t_1]$ и условия (1.7.2).

Лемма 1.7.1. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\alpha_n = 1$, $B \in C(Z; \mathcal{Z})$, $(t_0, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in Z$. *Тогда функция* $z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ *является решением задачи* (1.7.1), (1.7.2) *на* $(t_0, t_1]$ *тогда и только тогда, когда* $D^{\sigma_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *и для* $t \in (t_0, t_1]$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (t - t_0)^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k + 1}((t - t_0)^{\sigma_n} A) z_k +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} (t - s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t - s)^{\sigma_n} A) B(s, D^{\sigma_0} z(s), \ldots, D^{\sigma_{n-1}} z(s)) ds. \tag{1.7.3}$$

Доказательство. Если z — решение задачи (1.7.1), (1.7.2), то имеем $D^{\sigma_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и отображение

$$t \to B(t, D^{\sigma_0} z(t), D^{\sigma_1} z(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}} z(t)) \tag{1.7.4}$$

непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{Z}$. Тогда, как было доказано в теореме 1.4.1, равенство (1.7.3) выполняется при $t \in (t_0, t_1]$.

Пусть $z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, такое, что $D^{\sigma_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 0, \ldots, n-1$, и выполняется равенство (1.7.3). Тогда отображение (1.7.4) из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{Z}$ непрерывно и, как и при доказательстве теоремы 1.4.1, можно непосредственно проверить, что z является решением задачи (1.7.1), (1.7.2). $\square$

Лемма 1.7.2. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\alpha_n \in (0, 1]$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $B \in C^1(Z; \mathcal{Z})$, $(t_0, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in Z$. Тогда функция $z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ является решением задачи* (1.7.1), (1.7.2) *на $(t_0, t_1]$, если $D^{\sigma_k} z \in C^1_{1-\alpha_{k+1}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, $D^{\sigma_{n-1}} z \in C^1_\gamma([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ при некотором $\gamma < 1$, и для $t \in (t_0, t_1]$ выполняется* (1.7.3).

Доказательство. Пусть $z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, такое, что $D^{\sigma_k} z \in C^1_{1-\alpha_{k+1}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, $D^{\sigma_{n-1}} z \in C^1_\gamma([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $\gamma < 1$, и выполняется равенство (1.7.3). Тогда отображение (1.7.4) лежит в $C^1_\delta([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ и можно непосредственно проверить, что z является решением задачи (1.7.1), (1.7.2). $\square$

Замечание 1.7.1. Таким образом, по сути лемма 1.7.1 является уточнением более общей леммы 1.7.2 в частном случае $\alpha - n = 1$.

Далее строка над символом будет обозначать набор из n элементов, например, $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Пусть

$$S_\delta(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \mathcal{Z}^n : \|y_k - x_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta, k = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Теорема 1.7.1. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1 \ldots, n-1$, $\alpha_k \in (0, 1)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}$, выполняется включение $(t_0, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in Z$, $B \in C^1(Z; \mathcal{Z})$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ существует единственное решение задачи* (1.7.1), (1.7.2).

Доказательство. Согласно лемме 1.7.2 достаточно доказать, что при некотором $t_1 > t_0$ уравнение (1.7.3) имеет единственное решение в пространстве $C^{\{\alpha_k\}_0^n}((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Обозначим

$$\tilde{z}(t)=\frac{(t-t_0)^{\sigma_0}z_0}{\Gamma(\sigma_0+1)}+\frac{(t-t_0)^{\sigma_1}z_1}{\Gamma(\sigma_1+1)}+\dots+\frac{(t-t_0)^{\sigma_{n-1}}z_{n-1}}{\Gamma(\sigma_{n-1}+1)}.$$

Выберем числа $\tau,\delta>0$, такие, что $V=[t_0,t_0+\tau]\times S_\delta(\overline{z})\subset Z$ и в V выполняется оценка локальной липшицевости с константой Липшица $c>0$. Здесь $\overline{z}=(z_0,z_1,\dots,z_{n-1})$ — вектор исходных данных из (1.7.2). Обозначим через S_τ набор функций $y\in C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})$, таких, что

$$\|D^{\sigma_k}y(t)-z_k\|_{\mathcal{Z}}\le\delta,\quad k=0,1,\dots,n-1,$$

для $t_0\le t\le t_0+\tau$. Определим в S_τ метрику $d(y,v)=\|y-v\|_{C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})}$ и в силу теоремы 1.3.1 получим полное метрическое пространство S_τ.

Обратим внимание, что $D^{\sigma_k}|_{t=t_0}\tilde{z}(t)=z_k$, при $k=0,1,\dots,n-1$, следовательно, $\tilde{z}\in S_\tau$ при достаточно малом $\tau>0$.

Определим отображение

$$G(y)(t)=\sum_{k=0}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_k}E_{\sigma_n,\sigma_k+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_k+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}A)B^y(s)ds,$$

где $B^y(s):=B(s,D^{\sigma_0}y(s),D^{\sigma_1}y(s),\dots,D^{\sigma_{n-1}}y(s))$, и заметим, что уравнение (1.7.3) имеет вид $z(t)=G(z)(t)$. Покажем, что оператор G при достаточно малом $\tau>0$ переводит метрическое пространство S_τ в себя и является сжимающим оператором на S_τ.

Обозначим также

$$B_t^y(s)=\frac{\partial B}{\partial t}(s,D^{\sigma_0}y_0(s),D^{\sigma_1}y_1(s),\dots,D^{\sigma_{n-1}}y(s)),$$

$$B_k^y(s)=\frac{\partial B}{\partial y_k}(s,D^{\sigma_0}y_0(s),D^{\sigma_1}y_1(s),\dots,D^{\sigma_{n-1}}y(s)),\ k=0,1,\dots,n-1.$$

Возьмём $y \in C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$. Тогда, как показано при доказательстве теоремы 1.4.1, $D^{\sigma_k}G(y) \in C([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. При этом

$$D^{\sigma_0}G(y)(t) = J_t^{1-\alpha_0}G(y)(t) = \sum_{l=0}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_0}E_{\sigma_n,\sigma_l-\sigma_0+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_0-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_0}((t-s)^{\sigma_n}A)B^y(s)ds,$$

$$D^{\sigma_1}G(y)(t) = J_t^{1-\alpha_1}D_t^1 D^{\sigma_0}G(y)(t) = (t-t_0)^{\sigma_n-\alpha_1}AE_{\sigma_n,\sigma_n-\alpha_1+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_0+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_1}E_{\sigma_n,\sigma_l-\sigma_1+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+J_t^{1-\alpha_1}(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_0-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_0}((t-t_0)^{\sigma_n}A)B^y(t_0)+$$

$$+J_t^{1-\alpha_1}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_0-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_0}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds=$$

$$=(t-t_0)^{\sigma_n-\alpha_1}AE_{\sigma_n,\sigma_n-\alpha_1+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_0+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_1}E_{\sigma_n,\sigma_l-\sigma_1+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_1+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)B^y(t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_1+1}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds=$$

$$=(t-t_0)^{\sigma_n-\alpha_1}AE_{\sigma_n,\sigma_n-\alpha_1+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_0+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_1}E_{\sigma_n,\sigma_l-\sigma_1+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_1-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_1}((t-s)^{\sigma_n}A)B^y(s)ds,$$

$$D^{\sigma_2}G(y)(t) = J_t^{1-\alpha_2}D_t^1 D^{\sigma_1}G(y)(t) =$$

$$=\sum_{l=0}^{1}(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_2+\sigma_l}AE_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_2+\sigma_l+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+\sum_{l=2}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_2}E_{\sigma_n,\sigma_l-\sigma_2+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+J_t^{1-\alpha_2}(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_1-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)B^y(t_0)+$$

$$+J_t^{1-\alpha_2}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_1-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_1}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds=$$

$$=\sum_{l=0}^{1}(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_2+\sigma_l}AE_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_2+\sigma_l+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+\sum_{l=2}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_2}E_{\sigma_n,\sigma_l-\sigma_2+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_2-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_2}((t-s)^{\sigma_n}A)B^y(s)ds,$$

$$D^{\sigma_k}G(y)(t)=J_t^{1-\alpha_k}D_t^1D^{\sigma_{k-1}}G(y)(t)=$$

$$=\sum_{l=0}^{k-1}(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_k+\sigma_l}AE_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k+\sigma_l+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+\sum_{l=k}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_k}E_{\sigma_n,\sigma_l-\sigma_k+1}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_k-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)B^y(s)ds, \tag{1.7.5}$$

где $\sigma_n-\sigma_k+\sigma_l\geq\sigma_n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_k\geq\alpha_0+\alpha_n-1>0$, $l=0,1,\ldots,k-1$, $k=1,2,\ldots,n-1$. Далее

$$D_t^1D^{\sigma_k}G(y)(t)=\sum_{l=0}^{k}(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_k+\sigma_l-1}AE_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k+\sigma_l}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+\sum_{l=k+1}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_k-1}E_{\sigma_n,\sigma_l-\sigma_k}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$

$$+(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_k-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-t_0)^{\sigma_n}A)B^y(t_0)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_k-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds, \quad k=0,1,\dots,n-1,$$

$$(t-t_0)^{1-\alpha_{k+1}}D_t^1D^{\sigma_k}G(y)(t)=\sum_{l=0}^{k}(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}+\sigma_l}AE_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k+\sigma_l}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$
$$+\sum_{l=k+1}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_{k+1}}E_{\sigma_n,\sigma_l-\sigma_k}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$
$$+(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-t_0)^{\sigma_n}A)B^y(t_0)+$$
$$+(t-t_0)^{1-\alpha_{k+1}}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_k-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds \qquad (1.7.6)$$

при $k=0,1,\dots,n-2$,

$$(t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}D_t^1D^{\sigma_{n-1}}G(y)(t)=\sum_{l=0}^{n-1}(t-t_0)^{\sigma_l-\sigma_0+\frac{\alpha_0+\alpha_n-1}{2}}AE_{\sigma_n,\sigma_l+\alpha_n}((t-t_0)^{\sigma_n}A)z_l+$$
$$+(t-t_0)^{\frac{1-\alpha_0+\alpha_n}{2}}E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-t_0)^{\sigma_n}A)B^y(t_0)+$$
$$+(t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha_n-1}E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds. \qquad (1.7.7)$$

Имеем при $k=0,1,\dots,n-2$

$$\left\|(t-t_0)^{1-\alpha_{k+1}}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_k-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leq$$
$$\leq 2^{-\alpha_{k+1}}\left\|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}+$$
$$+2^{-\alpha_{k+1}}\left\|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-\sigma_k-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)(s-t_0)^{1-\alpha_{k+1}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(B_s^y(s)+\sum_{l=0}^{n-1}B_l^y(s)D_s^1D^{\sigma_l}y(s)\right)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leq$$

$$\leq (t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-t_0)^{\sigma_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})\|B^y(t_0)\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+\left\|\int\limits_{t_0}^{t} D_s^1[(t-s)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)]B^y(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+C(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}+1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-t_0)^{\sigma_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})\sup_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|B_t^y(s)\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+C\sum_{l=0}^{n-2}(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}+\alpha_{l+1}}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-t_0)^{\sigma_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})\times$$

$$\times\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|B_l^y(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}[(t-t_0)^{1-\alpha_{l+1}}\|D_t^1D^{\sigma_l}y(t)\|_{\mathcal{Z}}]+$$

$$+C(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}+\alpha_0+\alpha_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-t_0)^{\sigma_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})\times$$

$$\times\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|B_{n-1}^y(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}[(t-t_0)^{2-\alpha_0-\alpha_n}\|D_t^1D^{\sigma_{n-1}}y(t)\|_{\mathcal{Z}}]\to 0$$

при $t\to t_0+$. Здесь использованы условие $\alpha_0+\alpha_n>1$, неравенство $(t-t_0)^\beta\leq 2^{\beta-1}[(t-s)^\beta+(s-t_0)^\beta]$, справедливое для $s\in[t_0,t]$, и оценка

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t} D_s^1[(t-s)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}}E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n}A)]B^y(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leq$$

$$\leq C\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^y(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}(t-t_0)^{\sigma_n-\sigma_{k+1}}.$$

Следовательно, с учетом соотношений $\sigma_n-\sigma_{k+1}+\sigma_l\geq\sigma_n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k+1}\geq\alpha_0+\alpha_n-1>0$, $l=0,1,\dots,k$, $k=1,2,\dots,n-2$, и в силу (1.7.6) имеем при $k=0,1,\dots,n-2$

$$\lim_{t\to t_0+}(t-t_0)^{1-\alpha_{k+1}}D_t^1D^{\sigma_k}G(y)(t)=\frac{z_{k+1}}{\Gamma(\alpha_{k+1})}.$$

Кроме того,

$$\left\|(t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha_n-1}E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leq$$

$$\leq 2^{\frac{1-\alpha_0-\alpha_n}{2}}\left\|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\frac{1-\alpha_0+\alpha_n}{2}}E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n}A)D_s^1B^y(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+2^{\frac{1-\alpha_0-\alpha_n}{2}}\left\|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha_n-1}E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n}A)(s-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(B^y_s(s)+\sum_{l=0}^{n-1}B^y_l(s)D^1_tD^{\sigma_l}y(s)\right)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leq$$

$$\leq(t-t_0)^{\frac{1-\alpha_0+\alpha_n}{2}}E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-t_0)^{\sigma_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})\|B^y(t_0)\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+\left\|\int\limits_{t_0}^{t}D^1_s[(t-s)^{\frac{1-\alpha_0+\alpha_n}{2}}E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n}A)]B^y(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+C(t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0+\alpha_n}{2}}\sup_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^y_t(s)\|_{\mathcal{Z}}+C(t-t_0)^{\frac{1-\alpha_0+\alpha_n}{2}}\sum_{l=0}^{n-2}(t-t_0)^{\alpha_{l+1}}\times$$

$$\times\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^y_l(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}[(t-t_0)^{1-\alpha_{l+1}}\|D^1_tD^{\sigma_l}y(t)\|_{\mathcal{Z}}]+$$

$$+C(t-t_0)^{\alpha_n}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^y_{n-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}[(t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}\|D^1_tD^{\sigma_{n-1}}y(t)\|_{\mathcal{Z}}]\to 0$$

при $t\to t_0$ с учетом того, что

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t}D^1_s[(t-s)^{\frac{1-\alpha_0+\alpha_n}{2}}E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n}A)]B^y(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leq$$

$$\leq C\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^y(t)\|_{\mathcal{Z}}(t-t_0)^{\frac{1-\alpha_0+\alpha_n}{2}}.$$

Поэтому в силу

$$\lim_{t\to t_0+}(t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}D^1_tD^{\sigma_{n-1}}G(y)(t)=0,$$

$G(y)\in C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})$ и $G(y)\in S_\tau$ для достаточно малого $\tau>0$.

Для каждого $t\in[t_0,t_0+\tau]$, $k=0,1,\dots,n-1$, $y,v\in S_\tau$, имеем с учетом (1.7.5)–(1.7.7)

$$\|G(y)-G(v)\|_{C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})}=$$

$$=\left\|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\sigma_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}A)(B^y(s)-B^v(s))ds\right\|_{C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})}=$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \left\| D^{\sigma_k} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A)(B^y(s) - B^v(s))ds \right\|_{C^1_{1-\alpha_{k+1}}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})} +$$

$$+ \left\| D^{\sigma_{n-1}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A)(B^y(s) - B^v(s))ds \right\|_{C^1_{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| D^{\sigma_k} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A)(B^y(s) - B^v(s))ds \right\|_{C([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \left\| (t-t_0)^{1-\alpha_{k+1}} D^1_t D^{\sigma_k} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) \times \right.$$

$$\left. \times (B^y(s) - B^v(s))ds \right\|_{C([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})} +$$

$$+ \left\| (t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}} D^1_t D^{\sigma_{n-1}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A) \times \right.$$

$$\left. \times (B^y(s) - B^v(s))ds \right\|_{C([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \left\| \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\sigma_n - \sigma_k - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n} A)(B^y(s) - B^v(s))ds \right\|_{\mathcal{Z}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \left\| (t-t_0)^{1-\alpha_{k+1}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\sigma_n - \sigma_k - 1} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-s)^{\sigma_n} A) \times \right.$$

$$\left. \times D^1_s (B^y(s) - B^v(s))ds \right\|_{\mathcal{Z}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \left\| (t-t_0)^{\sigma_n - \sigma_{k+1}} E_{\sigma_n,\sigma_n-\sigma_k}((t-t_0)^{\sigma_n} A)(B^y(t_0) - B^v(t_0)) \right\|_{\mathcal{Z}} +$$

$$+ \sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \left\| (t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha_n - 1} E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-s)^{\sigma_n} A) \times \right.$$

$$\left. \times D^1_s (B^y(s) - B^v(s))ds \right\|_{\mathcal{Z}} +$$

$$+ \sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \left\| (t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}} E_{\sigma_n,\alpha_n}((t-t_0)^{\sigma_n} A)(B^y(t_0) - B^v(t_0)) \right\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\tau^{\sigma_n-\sigma_k}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|D^{\sigma_l}y(t)-D^{\sigma_l}v(t)\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-2}\tau^{\sigma_n-\sigma_{k+1}+\alpha_{l+1}}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|(t-t_0)^{1-\alpha_{l+1}}(D_t^1D^{\sigma_l}y(t)-D_t^1D^{\sigma_l}v(t))\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-2}\tau^{\sigma_n-\sigma_{k+1}+\frac{\alpha_0+\alpha_n-1}{2}}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|(t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}(D_t^1D^{\sigma_l}y(t)-D_t^1D^{\sigma_l}v(t))\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-1}\tau^{\sigma_n-\sigma_{k+1}}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|D^{\sigma_l}y(t)-D^{\sigma_l}v(t)\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+C\sum_{l=0}^{n-2}\tau^{\frac{1-\alpha_0+\alpha_n}{2}+\alpha_{l+1}}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|(t-t_0)^{1-\alpha_{l+1}}D_t^1(D^{\sigma_l}y(t)-D^{\sigma_l}v(t))\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+C\tau^{\alpha_n}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|(t-t_0)^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}D_t^1(D^{\sigma_{n-1}}y(t)-D^{\sigma_{n-1}}v(t))\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+C\sum_{l=0}^{n-1}\tau^{\frac{3-\alpha_0-\alpha_n}{2}}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|D^{\sigma_l}y(t)-D^{\sigma_l}v(t)\|_{\mathcal{Z}}\leq$$

$$\leq C_1\tau^{\min\{\frac{1-\alpha_0+\alpha_n}{2},\alpha_n\}}\|y-v\|_{C^{\{\alpha_k\}_0^n}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})}\leq\frac{d(y,v)}{2}$$

при достаточно малом $\tau>0$, выбор которого не зависит от y и v.

Следовательно, оператор G имеет единственную неподвижную точку y в S_τ, которая и является решением задачи (1.7.1), (1.7.2) на $(t_0,t_0+\tau]$. Единственность решения следует из единственности неподвижной точки G с учетом леммы 1.7.1. $\square$

1.8. Приложение к одному классу начально-краевых задач

1.8.1. Линейное уравнение

Пусть $P_\varrho(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^{\varrho}c_j\lambda^j$, $Q_\varrho(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^{\varrho}d_j\lambda^j$, $c_j,d_j\in\mathbb{C}$, $j=0,1,\ldots,\varrho\in\mathbb{N}_0$, $c_\varrho\neq0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda u)(\xi):=\sum_{|q|\leq 2r}a_q(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\ldots\partial\xi_d^{q_d}},\quad a_q\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(\xi) := \sum_{|q|\le r_l} b_{lq}(\xi) \frac{\partial^{|q|} u(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \dots \partial \xi_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1, 2, \dots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + q_2 + \dots + q_d$, пучок операторов $\Lambda, B_1, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен [89]. Пусть оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{v \in H^{2r}(\Omega) : B_l v(\xi) = 0,\ l = 1, 2, \dots, r,\ \xi \in \partial\Omega\}$ действует как $\Lambda_1 u := \Lambda u$. Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 вещественный, дискретный, с конечной кратностью [89]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ является ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системой собственных функций оператора Λ_1, пронумерованных в порядке невозрастания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратностей.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D^{\sigma_k} u(\xi, 0) = u_k(\xi),\ k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \xi \in \Omega, \tag{1.8.1}$$

$$B_l \Lambda^k u(\xi, t) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho - 1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \tag{1.8.2}$$

$$D^{\sigma_n} P_\varrho(\Lambda) u(\xi, t) = Q_\varrho(\Lambda) u(\xi, t) + h(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{1.8.3}$$

где D^{σ_k} — дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна по переменной t, соответствующие набору $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, функция $h : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ задана.

Возьмем пространства и операторы

$$\mathcal{X} = \{v \in H^{2r\varrho}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(s) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho - 1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Y} = L_2(\Omega), \quad L = P_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = Q_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}).$$

Пусть $P_\varrho(\lambda_k) \ne 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})$ и задача (1.8.1)–(1.8.3) может быть сведена к задаче (1.2.2), (1.4.1), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A = L^{-1}M \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k = u_k(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $f(t) = L^{-1}h(\cdot, t)$. По теореме 1.4.1 при $\alpha_0 + \alpha_n > 1$ существует единственное решение задачи

(1.8.1)–(1.8.3) для любых $u_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, и $h \in C([0,T]; L_2(\Omega))$ при $\alpha_n = 1$, $h \in C^1_\gamma([0,T]; L_2(\Omega))$, $\gamma < 1$, при $\alpha_n < 1$ (в таком случае $L^{-1}h \in C([0,T]; \mathcal{X})$ при $\alpha_n = 1$ и $h \in C^1_\gamma([0,T]; L_2(\Omega))$ при $\alpha_n < 1$ соответственно).

В качестве примера возьмем $\varrho = 2$, $P_2(\lambda) = \lambda^2$, $Q_2(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $r = 1$, $\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$, $B_1 = I$. В таком случае $\lambda_k = -k^2$, $\varphi_k(s) = \sin ks$, $k \in \mathbb{N}$. Задача (1.8.1)–(1.8.3) при этом имеет вид

$$D^{\sigma_n}\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}(\xi, t) = a_0 u(\xi, t) + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi, t) + h(\xi, t), \ \ (\xi, t) \in (0, \pi) \times (0, T],$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\pi, t) = 0, \ \ t \in (0, T],$$

$$D^{\sigma_k}u(\xi, 0) = u_k(\xi), \ k = 0, 1, \dots, n-1, \ \ \xi \in (0, \pi).$$

1.8.2. Нелинейное уравнение

Рассмотрим теперь нелинейную задачу

$$D^{\sigma_k}u(\xi, t_0) = u_k(\xi), \ k = 0, 1, \dots, n-1, \ \xi \in \Omega, \tag{1.8.1}$$

$$B_l\Lambda^k u(\xi, t) = 0, \ k = 0, 1, \dots, \varrho-1, \ l = 1, 2, \dots, r, \ (\xi, t) \in \partial\Omega\times(t_0, t_1], \tag{1.8.2}$$

$$D^{\sigma_n}P_n(\Lambda)u(\xi, t) = Q_n(\Lambda)u(\xi, t) + F(\xi, D^{\sigma_0}u(\xi, t), \dots, D^{\sigma_{n-1}}u(\xi, t)),$$

$$(\xi, t) \in \Omega\times(t_0, t_1], \tag{1.8.3}$$

где D^{σ_k} — дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна по переменной t, $k = 0, 1, \dots, n$.

Возьмем пространства и операторы

$$\mathcal{X} = \{v \in H^{2r\varrho + r_0}(\Omega) : B_l\Lambda^k v(\xi) = 0, \ k = 0, 1, \dots, \varrho - 1, \ l = 1, 2, \dots, r, \ \xi \in \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Y} = H^{r_0}(\Omega), \ \ L = P_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \ \ M = Q_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}).$$

В предположении $P_\varrho(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ задачу (1.8.1)–(1.8.3) представим в виде (1.7.1), (1.7.2), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A = L^{-1}M \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $z_k = u_k(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $B(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = L^{-1}F(\cdot, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.

Сформулируем сначала важную теорему.

Теорема 1.8.1. [47]. *Пусть* Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^d$ *с гладкой границей,* $g \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, $l > d/2$, *отображение* F *действует по правилу* $F(v_1, v_2, \ldots, v_d) = g(\cdot, v_1(\cdot), v_2(\cdot), \ldots, v_d(\cdot))$. *Тогда* $F \in C^\infty((H^l(\Omega))^d; H^l(\Omega))$.

Теорема 1.8.2. *Пусть* $\alpha_k \in (0,1)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *не содержит точки 0 и нулей полинома* $P_\varrho(\lambda)$, $4r\varrho + 2r_0 > d$, $u_k \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1 \ldots, n-1$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (1.8.1)–(1.8.3) *в цилиндре* $\Omega \times [t_0, t_1]$.

Доказательство. В теореме 1.7.1 возьмем $Z = \mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$ и в силу условия $4r\varrho + 2r_0 > d$ по теореме 1.8.1 имеем

$$F(\cdot, x_0(\cdot), x_1(\cdot), \ldots, x_{n-1}(\cdot)) \in C^\infty((H^{2r\varrho + r_0}(\Omega))^n; H^{2r\varrho + r_0}(\Omega)),$$

поэтому оператор $B(x_0(\cdot),\ldots, x_{n-1}(\cdot)) := L^{-1}F(\cdot, x_0(\cdot),\ldots, x_{n-1}(\cdot))$ принадлежит классу $C^\infty((H^{2pr_1 + r_0}(\Omega))^n; H^{2r\varrho + r_0}(\Omega))$. По теореме 1.7.1 получаем требуемое. $\square$

2. Вырожденные эволюционные уравнения с относительно ограниченной парой операторов

2.1. (L,σ)-ограниченные операторы

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_M область определения оператора M, снабженная его нормой графика. Определим L-резольвентное множество $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$ оператора M и его L-спектр $\sigma^L(M) := \mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$, обозначим $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu := L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор M называется (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Лемма 2.1.1. [87]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Тогда операторы*

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \ \ Q := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$$

являются проекторами.

Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \mathrm{im} Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathcal{X}^k$ $(D_{M_k} = D_M \cap \mathcal{X}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 2.1.1. [87]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$.

Обозначим $G := M_0^{-1}L_0$. Для $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен, $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$.

2.2. Линейное вырожденное уравнение

Рассмотрим начальную задачу

$$D^{\sigma_k}x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2.2.1}$$

для линейного неоднородного уравнения дробного порядка

$$D^{\sigma_n}Lx(t) = Mx(t) + g(t), \tag{2.2.2}$$

в которой, как и прежде, D^{σ_k} — дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, заданная набором чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, $g \in C([0, T]; \mathcal{Y})$.

Решением задачи (2.2.1), (2.2.2) называется функция $x : (0, T] \to D_M$, для которой $Mx \in C((0, T]; \mathcal{Y})$, $x \in L_1(0, T; \mathcal{X})$, $D^{\sigma_k}x \in C([0, T]; \mathcal{X})$, $D^{\sigma_k}Px \in AC([0, T]; \mathcal{X})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $D^{\sigma_n}Lx \in C((0, T]; \mathcal{Y})$, равенство (2.2.2) выполняется для всех $t \in (0, T]$ и выполнены условия (2.2.1).

Лемма 2.2.1. *Пусть $H \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ — нильпотентный оператор степени $p \in \mathbb{N}_0$, функция $h : [0, T] \to \mathcal{X}$ такова, что $(D^{\sigma_n}H)^l h \in C((0, T]; \mathcal{X})$ при $l = 0, 1, \dots, p$, $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n}H)^l h \in C([0, T]; \mathcal{X})$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$, $l = 0, 1, \dots, p$. Тогда существует единственное решение уравнения*

$$D^{\sigma_n}Hx(t) = x(t) + h(t), \tag{2.2.3}$$

при этом оно имеет вид

$$x(t) = -\sum_{l=0}^{p} (D^{\sigma_n}H)^l h(t). \tag{2.2.4}$$

Доказательство. Подстановкой проверяется, что 2.2.4 — решение уравнения.

Пусть $z = z(t)$ — решение уравнения (2.2.3). Подействуем оператором H на обе части (2.2.3) и получим равенство

$$HD^{\sigma_n}Hz(t) = Hz(t) + Hh(t).$$

В силу условий теоремы дробная производная D^{σ_n} существует для правой части этого равенства, а значит, существует и для его левой части. Действуя оператором D^{σ_n} на обе части этого равенства, получим

$$(D^{\sigma_n}H)^2 z(t) = D^{\sigma_n}Hz(t) + D_t^{\sigma_n}Hh(t) = z(t) + h(t) + D^{\sigma_n}Hh(t).$$

Последовательно продолжая такие рассуждения, на p-м шаге получаем равенство

$$(D^{\sigma_n}H)^{p+1}z(t) = z(t) + \sum_{l=0}^{p}(D^{\sigma_n}H)^l h(t).$$

В силу непрерывности и нильпотентности оператора H, имеем

$$(D^{\sigma_n}H)^{p+1}z(t) = (D^{\sigma_n})^{p+1}H^{p+1}z(t) \equiv 0.$$

Следовательно, равенство (2.2.4) для функции z выполнено. Отсюда следует единственность решения уравнения (2.2.3). Действительно, разность двух решений соответствует решению уравнения (2.2.3) с функцией $h \equiv 0$. Согласно формуле (2.2.4), ее решение тождественно равно нулю. □

Теорема 2.2.1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1 \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $g \in C([0,T];\mathcal{Y})$ при $\alpha_n = 1$ и $g \in C^1_\gamma([0,T];\mathcal{Y})$ для некоторого $\gamma < 1$ при $\alpha_n < 1$, $(D^{\sigma_n}G)^l M_0^{-1}(I-Q)g \in C((0,T];\mathcal{X})$, $l = 0, 1, \ldots, p$, $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n}G)^l M_0^{-1}(I-Q)g \in C([0,T];\mathcal{X})$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 0, 1, \ldots, p$, $x_k \in \mathcal{X}$ удовлетворяют условиям*

$$(I-P)x_k = -D^{\sigma_k}\sum_{l=0}^{p}(D^{\sigma_n}G)^l M_0^{-1}(I-Q)g(t)|_{t=0}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1. \tag{2.2.5}$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.2.1), (2.2.2) *и оно имеет вид*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k}E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n}L_1^{-1}M)Px_k +$$

$$+\int_0^t (t-s)^{\sigma_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}L_1^{-1}M)L_1^{-1}Qg(s)ds -$$

$$-\sum_{l=0}^{p}(D^{\sigma_n}G)^l M_0^{-1}(I-Q)g(t). \tag{2.2.6}$$

Доказательство. Подействуем на (2.2.2) оператором $L_1^{-1}Q \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ и получим уравнение

$$D^{\sigma_n}v(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}Qg(t), \tag{2.2.7}$$

где $v(t)=Px(t)$. Если таким же образом подействовать на уравнение оператором $M_0^{-1}(I-Q)\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, то получим уравнение

$$D^{\sigma_n}Gw(t)=w(t)+M_0^{-1}(I-Q)g(t), \tag{2.2.8}$$

где $w(t)=(I-P)x(t)$. При этом использованы равенства $L_1^{-1}QL=L_1^{-1}LP=P$, $M_0^{-1}(I-Q)M=M_0^{-1}M(I-P)=I-P$, справедливые в силу теоремы 2.1.1.

Уравнения (2.2.7) и (2.2.8) снабжены начальными условиями

$$D^{\sigma_k}v(0)=Px_k,\ \ k=0,1,\dots,n-1, \tag{2.2.9}$$

$$D^{\sigma_k}w(0)=(I-P)x_k,\ \ k=0,1,\dots,n-1. \tag{2.2.10}$$

По теореме 1.4.1 задача (2.2.7), (2.2.9) имеет единственное решение вида

$$v(t)=\sum_{k=0}^{n-1}t^{\sigma_k}E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n}L_1^{-1}M)Px_k+$$

$$+\int\limits_0^t(t-s)^{\sigma_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}L_1^{-1}M)L_1^{-1}Qg(s)ds.$$

По лемме 2.2.1, если выполнены условия (2.2.5), задача (2.2.8), (2.2.10) имеет единственное решение

$$w(t)=-\sum_{l=0}^{p}(D^{\sigma_n}G)^lM_0^{-1}(I-Q)g(t).$$

В этом случае использованы условия $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n}G)^lM_0^{-1}(I-Q)g\in C([0,T];\mathcal{X})$ для $k=0,\dots,n-1$, $l=0,1,\dots,p$. □

Чтобы избежать необходимости удовлетворять условиям согласования (2.2.5), рассмотрим задачу

$$D^{\sigma_k}Px(0)=x_k,\quad k=0,1,\dots,n-1, \tag{2.2.11}$$

для уравнения (2.2.2). Ее решением называется функция $x:(0,T]\to D_M$, для которой $x\in C((0,T];D_M)$, $x\in L_1(0,T;\mathcal{X})$, $D^{\sigma_k}Px\in AC([0,T];\mathcal{X})$, $k=0,1,\dots,n-1$, $D^{\sigma_n}Lx\in C((0,T];\mathcal{Y})$, равенство (2.2.2) выполняется для всех $t\in(0,T]$ и выполнены условия (2.2.11).

Замечание 2.2.1. Нетрудно убедиться, что при $p = 0$ начальные условия (2.2.11) эквивалентны условиям

$$D^{\sigma_k} Lx(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2.2.12}$$

где $y_k = Lx_k$, или $x_k = L_1^{-1} y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Теорема 2.2.2. *Пусть оператор* M (L, p)*-ограничен,* $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1 \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $g \in C([0, T]; \mathcal{Y})$ *при* $\alpha_n = 1$ *и* $g \in C^1_\gamma([0, T]; \mathcal{Y})$ *для некоторого* $\gamma < 1$ *при* $\alpha_n < 1$, $(D^{\sigma_n} G)^l M_0^{-1}(I - Q) g \in C((0, T]; \mathcal{X})$, $l = 0, 1, \ldots, p$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \ldots n-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.2.2), (2.2.11), *и оно имеет вид* (2.2.6).

Доказательство. Теорема существования и единственности для задачи (2.2.2), (2.2.11) доказывается аналогично с помощью сведения к системе (2.2.7), (2.2.8) с начальными условиями (2.2.9) и без условий (2.2.10). $\square$

2.3. Квазилинейное уравнение с ограничением на образ нелинейного оператора

Пусть D^{σ_n} — дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, ассоциированная с последовательностью $\{\alpha_k\}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (L, σ)-ограничен, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, оператор $N : X \to \mathcal{Y}$ нелинейный.

Рассмотрим начальную задачу

$$D^{\sigma_k} Px(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2.3.1}$$

для нелинейного уравнения

$$D^{\sigma_n} Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\sigma_0} x(t), D^{\sigma_1} x(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}} x(t)) + f(t). \tag{2.3.2}$$

Функция $x : (t_0, t_1] \to D_M$ называется решением задачи (2.3.1), (2.3.2) на $[t_0, t_1]$, если $Mx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, $x \in L_1(0, T; \mathcal{X})$, $D^{\sigma_k} Px \in AC([t_0, t_1]; \mathcal{X})$

при $k=0,1,\ldots,n-1$, $D^{\sigma_n}Lx\in C((t_0,t_1];\mathcal{X})$, при $t\in[t_0,t_1]$ выполняется включение $(t,D^{\sigma_0}x(t),D^{\sigma_1}x(t),\ldots,D^{\sigma_{n-1}}x(t))\in X$, при $t\in(t_0,t_1]$ — равенство (2.3.2), а также выполнены условия (2.3.1).

Предположим, что $\mathrm{im}N\subset\mathcal{Y}^1$. Тогда в уравнении (2.3.2) функция $f:[t_0,T]\to\mathcal{Y}$ не может быть задана как часть оператора N без потери общности.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $0<\alpha_k<1$, $k=0,1,\ldots,n$, $\alpha_0+\alpha_n>1$, *оператор* M (L,p)*-ограничен,* X *— открытое множество в пространстве* $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^n$, $N\in C^1(X;\mathcal{X})$, $\mathrm{im}N\subset\mathcal{Y}^1$, $f\in C((t_0,T];\mathcal{Y})$, $Qf\in C^1([t_0,T];\mathcal{Y})$, $(D^{\sigma_n}G)^lM_0^{-1}(I-Q)f\in C((t_0,T];\mathcal{X})$, $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n}G)^lM_0^{-1}(I-Q)f\in C^1([t_0,T];\mathcal{X})$, $l=0,1,\ldots,p$, $x_k\in\mathcal{X}^1$, $k=0,1,\ldots,n-1$, *при этом* $(t_0,x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})\in X$. *Тогда при некотором* $t_1>t_0$ *существует единственное решение задачи* (2.3.1), (2.3.2) *на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{im}N\subset\mathcal{Y}^1$, то $(I-Q)N\equiv 0$, $QN\equiv N$.

Введем обозначения $v(t):=Px(t)$, $w(t):=(I-P)x(t)$, $S:=L_1^{-1}M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$, $G:=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$. Подействуем на уравнение (2.3.2) оператором $M_0^{-1}(I-Q)$ и с учетом очевидных равенств $LP=QL$, $MPx=QMx$ при любом $x\in D_M$ получим

$$D^{\sigma_n}Gw(t)=w(t)+M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

По лемме 2.2.1 данное уравнение имеет единственное решение, при этом оно имеет вид

$$w(t)=-\sum_{l=0}^{p}(D^{\sigma_n}G)^lM_0^{-1}(I-Q)f(t). \tag{2.3.3}$$

После подстановки найденного решения $w(t)$ в исходное уравнение остается найти $v(t)$. Подействуем оператором $L_1^{-1}Q$ на (2.3.2) и получим уравнение

$$D^{\sigma_n}v(t)=Sv(t)+L_1^{-1}QN(t,D^{\sigma_0}(v(t)+w(t)),\ldots,D^{\sigma_{n-1}}(v(t)+w(t)))+$$
$$+L_1^{-1}Qf(t), \tag{2.3.4}$$

снабженное начальными условиями (2.3.1), которые перепишем в виде

$$D^{\sigma_k} v(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.3.5}$$

Тем самым задача (2.3.1), (2.3.2) редуцирована к задаче (1.7.1), (1.7.2) в пространстве $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^1$ с ограниченным оператором $A = S$ и нелинейным оператором

$$B(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) :=$$

$$L_1^{-1} Q N(t, y_0 + D^{\sigma_0} w(t), y_1 + D^{\sigma_1} w(t), \ldots, y_{n-1} + D^{\sigma_{n-1}} w(t)) + L_1^{-1} Q f(t),$$

где функция w имеет вид (2.3.3). По теореме 1.7.1 получим существование единственного локального решения v задачи (2.3.4), (2.3.5), а значит, и единственного локального решения $x = v + w$ задачи (2.3.1), (2.3.2). $\square$

2.4. Уравнение с нелинейным оператором, зависящим только от элементов $\mathcal{X}^0$

Отказавшись от условия $\mathrm{im} N \subset \mathcal{Y}^1$, перепишем уравнение (2.3.2) без функции f:

$$D^{\sigma_n} L x(t) = M x(t) + N(t, D^{\sigma_0} x(t), D^{\sigma_1} x(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}} x(t)). \tag{2.4.1}$$

Через $[(I-Q)N]'_{x_{n-1}}(t, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ обозначим производную Фреше оператора $(I-Q)N$ по последнему аргументу x_{n-1} в точке $(t, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in X$. Обозначим проектор вдоль $\mathcal{X}^1$ на $\mathcal{X}^0$ как $P_0 := I - P$. Обозначим также $W := X \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^0)^n)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $\alpha_0 = 1$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *оператор* M $(L, 0)$-*ограничен, множество* X *открыто в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$; $N \in C(X; \mathcal{Y})$, *для всех* $(t, z_0, \ldots, z_{n-1}) \in X$ $N(t, z_0, \ldots, z_{n-1}) = N_1(t, P_0 z_0, \ldots, P_0 z_{n-1})$ *для некоторого* $N_1 \in C(W; \mathcal{Y})$, $(I-Q)N_1 \in C^1(W; \mathcal{Y})$; $x_0, x_1 \ldots x_{n-2} \in \mathcal{X}$, $x_{n-1} \in \mathcal{X}^1$, *отображение* $M_0^{-1}[(I-Q)N_1]'_{x_{n-1}}(t, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) : \mathcal{X}^0 \to \mathcal{X}^0$ *является биекцией при всех элементах* $(t, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ *из окрестности точки*

$(t_0, P_0x_0, P_0x_1, \ldots, P_0x_{n-2}, 0) \in W$, *при этом*

$$P_0x_0 + M_0^{-1}(I-Q)N_1(t_0, P_0x_0, P_0x_1, \ldots, P_0x_{n-2}, 0) = 0. \tag{2.4.2}$$

Тогда найдется такое $t_1 > t_0$, *что задача*

$$D^{\sigma_k}x(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2, \quad D^{\sigma_{n-1}}Px(t_0) = x_{n-1} \tag{2.4.3}$$

для уравнения (2.4.1) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Как в предыдущем доказательстве, с помощью оператора $M_0^{-1}(I-Q)$ получим уравнение

$$0 = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)N_1\left(t, D^{\sigma_0}w(t), D^{\sigma_1}w(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}}w(t)\right), \tag{2.4.4}$$

где $w(t) = P_0x(t)$. При этом принята во внимание $(L, 0)$-ограниченность оператора M. По теореме о неявной функции, так как при t, близких к t_0, существует обратный оператор

$$\left(M_0^{-1}[(I-Q)N_1]'_{x_{n-1}}(t, D^{\sigma_0}w(t), D^{\sigma_1}w(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}}w(t))\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$$

и выполняется условие (2.4.2), уравнение (2.4.4) может быть разрешено относительно $D^{\sigma_{n-1}}w(t)$ при t из некоторого интервала $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Получим уравнение

$$D^{\sigma_{n-1}}w(t) = R(t, D^{\sigma_0}w(t), D^{\sigma_1}w(t), \ldots, D^{\sigma_{n-2}}w(t)), \tag{2.4.5}$$

где $D^{\sigma_0}w(t) = w(t)$ в силу равенства $\alpha_0 = 1$, с отображением $R \in C^1(W; \mathcal{Y})$. Из теоремы 1.7.1 следует существование единственного решения задачи

$$D^{\sigma_k}w(t_0) = P_0x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

для уравнения (2.4.5) на некотором отрезке $[t_0, t_1]$.

Рассмотрим задачу

$$D^{\sigma_k}v(t_0) = Px_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

для уравнения

$$D^{\sigma_n}v(t) = Sv(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D^{\sigma_0}w(t), D^{\sigma_1}w(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}}w(t)),$$

полученного после действия оператором $L_1^{-1}Q$ на уравнение (2.4.1), где $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$ в силу теоремы 2.1.1. Это уравнение линейно при известном w. Так как правая часть этого уравнения непрерывна на $[t_0, t_1]$, однозначная разрешимость на $[t_0, t_1]$ этой задачи следует из теоремы 1.4.1. $\square$

2.5. Уравнение с нелинейным оператором, зависящим только от элементов $\mathcal{X}^1$

Пусть X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, оператор $N : X \to \mathcal{Y}$ нелинейный. Рассмотрим начальную задачу типа Шоуолтера — Сидорова для квазилинейного уравнения

$$D^{\sigma_n}Lx(t) = Mx(t) + N(t, D^{\sigma_0}x(t), D^{\sigma_1}x(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}}x(t)), \tag{2.5.1}$$

$$D^{\sigma_k}Px(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{2.5.2}$$

Обозначим $V := X \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n)$. В следующей теореме мы будем использовать предположение, что для всех $(t_0, z_0, \dots, z_{n-1}) \in X$ равенство $N(t_0, z_0, \dots, z_{n-1}) = N_1(t_0, Pz_0, \dots, Pz_{n-1})$ выполнено для некоторого отображения $N_1 : V \to \mathcal{Y}$.

Функция $x : (t_0, t_1] \to D_M$ называется решением задачи (2.5.1), (2.5.2) на отрезке $[t_0, t_1]$, если $Mx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, $x \in L_1(t_0, t_1; \mathcal{X})$, для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$ $D^{\sigma_k}Px \in AC([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, $D^{\sigma_n}Lx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{X})$, при $t \in [t_0, t_1]$ $(t, D^{\sigma_0}Px(t), D^{\sigma_1}Px(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}}Px(t)) \in V$, равенство (2.5.1) выполняется для всех $t \in (t_0, t_1]$ и выполнены условия (2.5.2).

Теорема 2.5.1. *Пусть $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1 \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, оператор M $(L, 0)$-ограничен, X — открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \to \mathcal{Y}$, для всех $(t_0, z_0, \dots, z_{n-1}) \in X$ верно равенство $N(t_0, z_0, \dots, z_{n-1}) =$*

$N_1(t_0, Pz_0, \ldots, Pz_{n-1})$ *при некотором* $N_1 \in C^1(V; \mathcal{Y})$. *Тогда для произвольного* $(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V$ *существует* $t_1 > t_0$, *такое что задача* (2.5.1), (2.5.2) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Введем обозначения $v(t) := Px(t)$, $w(t) := (I - P)x(t)$, $S_1 := L_1^{-1}M_1$. Подействуем на уравнение (2.5.1) оператором $M_0^{-1}(I - Q)$, оператором $L_1^{-1}Q$ и получаем задачу для системы уравнений на взаимно дополняющих друг друга подпространствах $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{X}^0$

$$D^{\sigma_n}v(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D^{\sigma_0}v(t), D^{\sigma_1}v(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}}v(t)), \tag{2.5.3}$$

$$D^{\sigma_k}v(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2.5.4}$$

$$0 = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)N_1(t, D^{\sigma_0}v(t), D^{\sigma_1}v(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}}v(t)).$$

Здесь мы используем равенство $L_0 = 0$, которое справедливо в силу $(L, 0)$-ограниченности оператора M. Поскольку V — открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $L_1^{-1}QN_1 \in C^1(V; \mathcal{X})$, то задача (2.5.3), (2.5.4) имеет единственное решение v на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$ по теореме 1.7.1. Следовательно,

$$w(t) = -M_0^{-1}(I - Q)N_1(t, D^{\sigma_0}v(t), D^{\sigma_1}v(t), \ldots, D^{\sigma_{n-1}}v(t)),$$

где v — решение задачи (2.5.3), (2.5.4). Таким образом, существует единственное решение $x(t) = v(t) + w(t)$ задачи (2.5.1), (2.5.2). $\square$

2.6. Один класс вырожденных начально-краевых задач

Пусть $P_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} c_j\lambda^j$, $Q_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} d_j\lambda^j$, $c_j, d_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, \varrho \in \mathbb{N}_0$, $c_\varrho \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda u)(\xi) := \sum_{|q| \leq 2r} a_q(\xi) \frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\ldots\partial\xi_d^{q_d}}, \quad \xi_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(\xi) := \sum_{|q| \leq r_l} b_{lq}(\xi) \frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\ldots\partial\xi_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1, 2, \ldots, r,$$

$q=(q_1,q_2,\ldots,q_d)\in\mathbb{N}_0^d$, $|q|=q_1+\cdots+q_d$, пучок операторов $\Lambda,B_1,B_2,\ldots,B_r$ регулярно эллиптичен [89]. Пусть оператор $\Lambda_1\in\mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1}=H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega):=\{v\in H^{2r}(\Omega):B_lv(\xi)=0,\ l=1,2,\ldots,r,\ \xi\in\partial\Omega\}$ действует как $\Lambda_1u:=\Lambda u$. Предположим, что Λ_1 самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 вещественный, дискретный, с конечной кратностью [89]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k:k\in\mathbb{N}\}$ является ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системой собственных функций оператора Λ_1, пронумерованных в порядке невозрастания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k:k\in\mathbb{N}\}$ с учетом их кратностей.

Рассмотрим уравнение

$$D^{\sigma_n}P_\varrho(\Lambda)u(\xi,t)=Q_\varrho(\Lambda)u(\xi,t)+h(\xi,t),\ \ (\xi,t)\in\Omega\times(0,T],\qquad(2.6.1)$$

снабженное краевыми условиями

$$B_l\Lambda^ku(\xi,t)=0,\ k=0,1,\ldots,\varrho-1,\ l=1,2,\ldots,r,\ (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T],\ (2.6.2)$$

где D^{σ_k} — дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна по переменной t, соответствующие набору $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$, $\alpha_k\in(0,1]$, $k=0,1,\ldots,n$, функция $h:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$.

Возьмем пространства и операторы

$$\mathcal{X}=\{v\in H^{2r\varrho}(\Omega):B_l\Lambda^kv(\xi)=0,\ k=0,1,\ldots,\varrho-1,\ l=1,2,\ldots,r,\ \xi\in\partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Y}=L_2(\Omega),\quad L=P_\varrho(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}),\quad M=Q_\varrho(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}).$$

В отличие от аналогичной задачи в §1.8, предположим, что $P_\varrho(\lambda_k)=0$ для некоторых $k\in\mathbb{N}$. Если многочлены P_ϱ и Q_ϱ не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_k\}$, оператор M $(L,0)$-ограничен (см. [41]), а проекторы имеют вид

$$P=\sum_{P_\varrho(\lambda_k)\neq0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,\quad Q=\sum_{P_\varrho(\lambda_k)\neq0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

где $\langle \cdot, \varphi_k \rangle$ является скалярным произведением в $L_2(\Omega)$. Начальные условия с учетом замечания 2.2.1, могут быть заданы в виде

$$D^{\sigma_k} P_\varrho(\Lambda) u(\xi, 0) = y_k(\xi), \; k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \xi \in \Omega. \tag{2.6.3}$$

Тогда задача (2.6.1)–(2.6.3) может быть представлена как (2.2.2), (2.2.12) с пространствами $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ и операторами L, M выбранными выше. Из теоремы 2.2.2 следует однозначная разрешимость задачи (2.6.1)–(2.6.3), если $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $h \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ при $\alpha_n = 1$ и $h \in C^1_\gamma([0, T]; L_2(\Omega))$ для некоторого $\gamma < 1$ при $\alpha_n < 1$, и $y_k \in L_2(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, такие, что $\langle y_k, \varphi_l \rangle = 0$ для всех $l \in \mathbb{N}$, для которых $P_\varrho(\lambda_l) = 0$ (т. е. $y_k \in \mathcal{Y}^1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$).

Возьмем $\varrho = 2$, $P_2(\lambda) \equiv \lambda(\lambda + 9)$, $Q_2(\lambda) = 1 + \lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $r = 1$, $\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$, $B_1 = I$. Тогда вырожденная задача (2.6.1)–(2.6.3) имеет вид

$$D^{\sigma_n} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) (\xi, t) = \left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) (\xi, t), \;\; (\xi, t) \in (0, \pi) \times (0, T],$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\pi, t) = 0, \;\; t \in (0, T],$$

$$D^{\sigma_k} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) (\xi, 0) = y_k(\xi), \; k = 0, 1, \dots, n-1, \; \xi \in (0, \pi).$$

Здесь $P_2(0) = P_2(-9) = 0$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1) = \{-k^2 : k \in \mathbb{N}\}$, $-9 = -3^2 \in \sigma(\Lambda_1)$, поэтому, $\mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \operatorname{span}\{\sin 3s\}$, $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{Y}^1$ являются замыканиями $\operatorname{span}\{\sin ks : k \in \mathbb{N} \setminus \{3\}\}$ в $H^4(0, \pi)$ и $L_2(0, \pi)$ соответственно. Условия

$$\langle y_k, \sin 3s \rangle = \int_0^\pi y_k(s) \sin 3s ds = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

должны выполняться для разрешимости этой начально-краевой задачи.

2.7. Модельные примеры вырожденных нелинейных систем уравнений

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D^{\sigma_k} x_1(\xi, t_0) = x_{1k}(\xi), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \xi \in \Omega, \tag{2.7.1}$$

$$x_i(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(t_0,t_1],\quad i=1,2,3,\tag{2.7.2}$$

$$D^{\sigma_n}\Delta x_1(\xi,t)=x_1(\xi,t)+f_1(\xi,t)+$$

$$+h_1(\xi,D^{\sigma_0}x_1,D^{\sigma_0}x_2,D^{\sigma_0}x_3,\dots,D^{\sigma_{n-1}}x_1,D^{\sigma_{n-1}}x_2,D^{\sigma_{n-1}}x_3),\tag{2.7.3}$$

$$D^{\sigma_n}\Delta x_3(\xi,t)=x_2(\xi,t)+f_2(\xi,t),\tag{2.7.4}$$

$$0=\Delta x_3(\xi,t)+f_3(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(t_0,t_1],\tag{2.7.5}$$

где D^{σ_k} — дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна по переменной t, определяемые набором $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$, $\alpha_k\in(0,1]$, $k=0,1,\dots,n$.

Сведем задачу (2.7.1)–(2.7.5) к задаче (2.3.1), (2.3.2), выбрав пространства

$$\mathcal{X}=H_0^{2+2r_0}(\Omega)\times H^{2r_0}(\Omega)\times H_0^{2+2r_0}(\Omega),\quad \mathcal{Y}=(H^{2r_0}(\Omega))^3,\tag{2.7.6}$$

где $r_0\in\mathbb{N}$, $r_0>d/4$, $H_0^{2+2r_0}(\Omega):=\{v\in H^{2+2r_0}(\Omega):v(\xi)=0,\xi\in\partial\Omega\}$, и операторы

$$L=\begin{pmatrix}\Delta&0&0\\0&0&\Delta\\0&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}),\quad M=\begin{pmatrix}I&0&0\\0&I&0\\0&0&\Delta\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}).\tag{2.7.7}$$

Лемма 2.7.1. [74]. *Пусть пространства определены соотношениями* (2.7.6) *и операторы имеют вид* (2.7.7). *Тогда оператор M $(L,1)$-ограничен и проекторы имеют вид*

$$P=\begin{pmatrix}I&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}I&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\mathcal{X}^1=H_0^{2+2r_0}(\Omega)\times\{0\}\times\{0\}$, $\mathcal{X}^0=\{0\}\times H^{2r_0}(\Omega)\times H_0^{2+2r_0}(\Omega)$, $\mathcal{Y}^1=H^{2r_0}(\Omega)\times\{0\}\times\{0\}$, $\mathcal{Y}^0=\{0\}\times H^{2r_0}(\Omega)\times H^{2r_0}(\Omega)$.

Теорема 2.7.1. *Пусть $r_0\in\mathbb{N}$, $r_0>d/4$, $0<\alpha_k\le 1$, $k=0,1,\dots,n$, $\alpha_0+\alpha_n>1$, $h_1\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^{3n};\mathbb{R})$, для некоторого $T>t_0$ $f_1\in C^1([t_0,T];H^{2r_0}(\Omega))$,*

$f_2 \in C((t_0,T];\mathcal{X})$, $f_3 \in C((t_0,T];H^{2r_0}(\Omega))$, $D^{\sigma_n} f_3 \in C((t_0,T];\mathcal{X})$, $D^{\sigma_k} f_2 \in C^1([t_0,T];\mathcal{X})$, $D^{\sigma_k} f_3 \in C^1([t_0,T];H^{2r_0}(\Omega))$, $D^{\sigma_k} D^{\sigma_n} f_3 \in C^1([t_0,T];\mathcal{X})$, $x_{1k} \in H_0^{2+2r_0}(\Omega)$, $k=0,1,\dots,n-1$. *Тогда для некоторого* $t_1 \in (t_0,T]$ *существует единственное решение задачи* (2.7.1)–(2.7.5) *на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Доказательство. По лемме 2.7.1 оператор M $(L,1)$-ограничен. Из вида проектора P следует, что $Px = P(x_1,x_2,x_3) = (x_1,0,0)$, поэтому условия (2.7.1) имеют вид (2.3.1) для системы уравнений (2.7.3)–(2.7.5) с краевыми условиями (2.7.2). Нелинейное отображение

$$N(z_1,z_2,\dots,z_{3n})(\cdot) = h_1(\cdot,z_1(\cdot),z_2(\cdot),\dots,z_{3n}(\cdot))$$

согласно теореме 1.8.1 действует из $X = \mathbb{R}\times\mathcal{X}^{3n} \subset \mathbb{R}\times(H^{2r_0}(\Omega))^{9n}$ в $H^{2r_0}(\Omega)$ и при этом бесконечно дифференцируемо. Из вида проектора Q, кроме того, следует, что $\mathrm{im}N \subset \mathrm{im}Q = \mathcal{Y}^1$. Заметим, что

$$Qf = f_1, \quad M_0^{-1}(I-Q)f = \begin{pmatrix} f_2 \\ \Delta^{-1} f_3 \end{pmatrix}, \quad GM_0^{-1}(I-Q)f = \begin{pmatrix} f_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\Delta^{-1} : H^{2r_0}(\Omega) \to H_0^{2+2r_0}(\Omega)$ — обратный оператор к оператору Лапласа, определенному на $H_0^{2+2r_0}(\Omega)$. Поэтому выполняются условия на функцию f в теореме 2.3.1, в силу которой получим требуемый результат. $\square$

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу

$$D^{\sigma_k} x_i(\xi,t_0) = x_{ik}(\xi),\ k=0,1,\dots,n-2,\ \xi\in\Omega,\ i=1,2,3, \tag{2.7.8}$$

$$D^{\sigma_{n-1}} x_1(\xi,t_0) = x_{1n-1}(\xi),\ \xi\in\Omega, \tag{2.7.9}$$

$$x_i(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(t_0,t_1], \quad i=1,2,3, \tag{2.7.10}$$

$$D^{\sigma_n}\Delta x_1 = x_1 + h_1\left(\xi, D^{\sigma_0}x_2, D^{\sigma_0}x_3,\dots,D^{\sigma_{n-1}}x_2, D^{\sigma_{n-1}}x_3\right), \tag{2.7.11}$$

$$0 = x_2 + h_2\left(\xi, D^{\sigma_0}x_2, D^{\sigma_0}x_3,\dots,D^{\sigma_{n-1}}x_2, D^{\sigma_{n-1}}x_3\right), \tag{2.7.12}$$

$$0 = x_3 + h_3\left(\xi, D^{\sigma_0}x_2, D^{\sigma_0}x_3,\dots,D^{\sigma_{n-1}}x_2, D^{\sigma_{n-1}}x_3\right), \quad (s,t)\in\Omega\times(t_0,t_1]. \tag{2.7.13}$$

Редуцируем задачу (2.7.8)–(2.7.13) к задаче (2.4.1), (2.4.3), выбрав пространства

$$\mathcal{X} = H_0^{2+2r_0}(\Omega) \times (H^{2r_0}(\Omega))^2, \quad \mathcal{Y} = (H^{2r_0}(\Omega))^3, \quad r_0 \in \mathbb{N}, \quad r_0 > d/4, \tag{2.7.14}$$

и операторы

$$L = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}). \tag{2.7.15}$$

Лемма 2.7.2. *Пусть заданы пространства* (2.7.14) *и операторы* (2.7.15). *Тогда оператор* M $(L,0)$*-ограничен и проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть область определения оператора Лапласа $H_0^{2+2r_0}(\Omega) \subset H^{2r_0}(\Omega)$, $\{\varphi_l\}$ — ортонормированная в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ система его собственных функций, соответствующая его собственным значениям $\{\lambda_l\}$, занумерованным в порядке их невозрастания с учетом кратностей. При $|\mu| > 1/|\lambda_1|$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in H_0^{2+2r_0}(\Omega) \times (H^{2r_0}(\Omega))^2$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in (H^{2r_0}(\Omega))^3$

$$(\mu L - M)^{-1} y = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (\mu\lambda_l - 1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle y_1, \varphi_l\rangle\varphi_l \\ \langle y_2, \varphi_l\rangle\varphi_l \\ \langle y_3, \varphi_l\rangle\varphi_l \end{pmatrix},$$

$$\|(\mu L - M)^{-1} y\|_{\mathcal{X}}^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1+\lambda_l^{2+2r_0})|\langle y_1, \varphi_l\rangle|^2}{|\mu\lambda_l - 1|^2} + \sum_{l=1}^{\infty}(1+\lambda_l^2)|\langle y_2, \varphi_l\rangle|^2 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty}(1+\lambda_l^2)|\langle y_3, \varphi_l\rangle|^2 \leq$$

$$\leq C_1\sum_{l=1}^{\infty}(1+\lambda_l^{2r_0})|\langle y_1,\varphi_l\rangle|^2+\sum_{l=1}^{\infty}(1+\lambda_l^{2r_0})|\langle y_2,\varphi_l\rangle|^2+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}(1+\lambda_l^{2r_0})|\langle y_3,\varphi_l\rangle|^2\leq C\|y\|^2_{(H^{2r_0}(\Omega))^3},$$

$$R^L_\mu(M)x=\sum_{l=1}^{\infty}(\mu\lambda_l-1)^{-1}\lambda_l\langle x_1,\varphi_l\rangle\varphi_l=\frac{1}{\mu}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{-j}\lambda_l^{-j}\langle x_1,\varphi_l\rangle\varphi_l.$$

Взяв по определению проектора P интеграл по контуру $\{|\mu|=r>1/|\lambda_1|\}$, по теореме о вычетах получим $Px=\sum\limits_{l=1}^{\infty}\langle x_1,\varphi_l\rangle\varphi_l=x_1$. Аналогичным образом получим, что $Qy=y_1$. $\square$

Из этой леммы следует, что

$$\mathcal{X}^1=H_0^{2+2r_0}(\Omega)\times\{0\}\times\{0\},\quad \mathcal{X}^0=\{0\}\times H^{2r_0}(\Omega)\times H^{2r_0}(\Omega),$$

$$\mathcal{Y}^1=H^{2r_0}(\Omega)\times\{0\}\times\{0\},\quad \mathcal{Y}^0=\{0\}\times H^{2r_0}(\Omega)\times H^{2r_0}(\Omega).$$

Заметим, что функции $h_i=h_i(\xi,z_1,z_2,z_3,\ldots,z_{2n})$, $i=1,2,3$, зависят от $2n$ фазовых переменных $z_1,z_2,\ldots,z_{2n}$. Введем обозначение

$$J(\xi,z_1,z_2,\ldots,z_{2n})=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_2}{\partial z_{2n-1}}(\xi,z_1,z_2,\ldots,z_{2n}) & \frac{\partial h_2}{\partial z_{2n}}(\xi,z_1,z_2,\ldots,z_{2n})\\ \frac{\partial h_3}{\partial z_{2n-1}}(\xi,z_1,z_2,\ldots,z_{2n}) & \frac{\partial h_3}{\partial z_{2n}}(\xi,z_1,z_2,\ldots,z_{2n})\end{pmatrix}.$$

Теорема 2.7.2. *Пусть $r_0\in\mathbb{N}$, $r_0>d/4$, $h_i\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$, $i=1,2,3$, $x_{1k}\in H_0^{2+2r_0}(\Omega)$, $k=0,1,\ldots,n-1$, $x_{2k},x_{3k}\in H^{2r_0}(\Omega)$, $k=0,1,\ldots,n-2$, при некотором $c>0$ для всех $\xi\in\Omega$*

$$|\det J(\xi,x_{20}(\xi),x_{30}(\xi),x_{21}(\xi),x_{31}(\xi),\ldots,x_{2n-2}(\xi),x_{3n-2}(\xi),0,0)|\geq c,\qquad(2.7.16)$$

$$x_{i0}(\xi)+h_i(\xi,x_{20}(\xi),x_{30}(\xi),\ldots,x_{2n-2}(\xi),x_{3n-2}(\xi),0,0)=0,\ \xi\in\Omega,\ i=2,3.\quad(2.7.17)$$

Тогда найдется такое $t_1>t_0$, что задача (2.7.8)–(2.7.13) имеет единственное решение в цилиндре $\Omega\times[t_0,t_1]$.

Доказательство. Из вида проектора P следует, что начальные условия (2.7.8), (2.7.9) могут быть записаны как (2.4.3) для данной системы, рассматриваемой как частный случай уравнения (2.4.1). Для доказательства необходимо проверить условия теоремы 2.4.1.

По лемме 2.7.2 оператор M $(L,0)$-ограничен, а $N = (N_1, N_2, N_3)$, где $N \in C^\infty((H^{2r_0}(\Omega))^{2n}; H^{2r_0}(\Omega))$,

$$N_i(z_1, z_2, \dots, z_{2n})(\cdot) := h_i(\cdot, z_1(\cdot), z_2(\cdot), \dots, z_{2n}(\cdot)), \quad i = 1, 2, 3,$$

в силу теоремы 1.8.1, так как $2r_0 > d/2$. Из вида полученных в лемме 2.7.2 проекторов следует, что нелинейная часть уравнения зависит только от элементов подпространства $\mathcal{X}^0$, $(I - Q)N = (N_2, N_3)$. Условие биективности операторов производной Фреше следует из условия (2.7.16) данной теоремы. Условие (2.4.2) для данной задачи имеет вид (2.7.17). По теореме 2.4.1 получим требуемое. $\square$

2.8. Модификация системы уравнений Скотт-Блэра

Рассмотрим начально-краевую задачу для нагруженной линеаризованной системы уравнений динамики вязкоупругой среды Скотт-Блэра [82]

$$D^{\sigma_k} v(\xi, t_0) = v_{0k}(\xi), \ \ \xi \in \Omega, \ \ k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2.8.1}$$

$$v(\xi, t) = 0, \ \ (\xi, t) \in \partial\Omega \times (t_0, t_1], \tag{2.8.2}$$

$$D^{\sigma_n}(1 - \chi\Delta) v(\xi, t) = -(\tilde{v} \cdot \nabla) v(\xi, t) - (v \cdot \nabla)\tilde{v}(\xi, t) - r(\xi, t) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{n-1} F_l(D^{\sigma_0} v(\xi_0, t), D^{\sigma_1} v(\xi_1, t), \dots, D^{\sigma_{n-1}} v(\xi_{n-1}, t)) D^{\sigma_l} v(\xi, t), \tag{2.8.3}$$

$$\nabla \cdot v(\xi, t) = 0, \ \ (\xi, t) \in \Omega \times (t_0, t_1], \tag{2.8.4}$$

с дробными производными Джрбашяна — Нерсесяна D^{σ_k} по переменной t, определяемыми набором $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi \in \mathbb{R}$, $\tilde{v}$ — заданная вектор-функция, F_l — заданные функции, при $l = 0, 1, \dots, n-1$ $\xi_l \in \Omega$ — заданные точки. Вектор-функции скорости жидкости $v = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ и ее градиента давления $r = (r_1, r_2, \ldots, r_d) = \nabla p$ неизвестны.

Обозначим $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1 := (W_2^1(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^2 := (W_2^2(\Omega))^d$. Замыкание линеала $\mathcal{L} := \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^d : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}^1_\sigma$. Имеет место представление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ соответствующий ортопроектор, $\Sigma = I - \Pi$, $\mathbb{H}^2_\sigma = \mathbb{H}^1_\sigma \cap \mathbb{H}^2$.

Пусть оператор $A := \Sigma\Delta$ имеет область определения $\mathbb{H}^2_\sigma$ в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ (см. [23]). При $\tilde{v} \in \mathbb{H}^1$ формулой $Dw := -(\tilde{v} \cdot \nabla)w - (w \cdot \nabla)\tilde{v}$ зададим оператор $D \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^2_\sigma; \mathbb{L}_2)$. Положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \tag{2.8.5}$$

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma D & \mathbb{O} \\ \Pi D & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}). \tag{2.8.6}$$

При этом учитывается тот факт, что $r(\cdot, t) = \nabla p(\cdot, t) \in \mathbb{H}_\pi = \{\nabla\varphi : \varphi \in W_2^1(\Omega)\}$ при $t > 0$. Принадлежностью $v(\cdot, t)$ подпространству $\mathbb{H}^2_\sigma$ при $t > 0$ учитываются уравнение (2.8.4) и условие (2.8.2).

Лемма 2.8.1. [45]. *Пусть $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ и операторы L и M заданы формулами* (2.8.5) *и* (2.8.6) *соответственно. Тогда оператор M $(L, 0)$-ограничен, проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1}\Sigma D + \Pi D & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.8.1. Из вида проекторов P и Q следует, что

$$\mathcal{X}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi, \ \mathcal{X}^1 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi : w_2 = (\chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1}\Sigma D + \Pi D)w_1\},$$

$$\mathcal{Y}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y}^1 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi : w_2 = -\chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1}w_1\}.$$

Поэтому подпространства $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{Y}^1$ изоморфны $\mathbb{H}^2_\sigma$ и $\mathbb{H}_\sigma$ соответственно.

Теорема 2.8.1. *Пусть* $d \leq 3$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $F_l \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, $v_{0k} \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Тогда для некоторого* $t_1 > t_0$ *существует единственное решение задачи* (2.8.1)–(2.8.4) *в цилиндре* $\Omega \times [t_0, t_1]$.

Доказательство. Из вида проекторов в лемме 2.8.1 следует, что условия (2.8.1) имеют вид (2.3.1). Поскольку $d \leq 3$, то $\mathbb{H}^2 \subset C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$. Следовательно, если $\lim\limits_{r\to\infty} w_k^r = w_k$ в $\mathbb{H}^2_\sigma$, то $\lim\limits_{r\to\infty} w_k^r = w_k$ в $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и поскольку $F_l \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, то оператор

$$B_l(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}) = F_l(w_0(\xi_0), w_1(\xi_1), \ldots, w_{n-1}(\xi_{n-1}))$$

принадлежит классу $C^1(\mathbb{H}^2_\sigma; \mathbb{R})$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, следовательно,

$$N(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}) = \sum_{l=0}^{n-1} F_l(w_0(\xi_0), w_1(\xi_1), \ldots, w_{n-1}(\xi_{n-1}))w_l \in C^1(\mathbb{H}^2_\sigma; \mathbb{H}^2_\sigma).$$

Обозначим проектор $P_1(w, q) := w$ для всех $(w, q) \in \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi = \mathcal{X}$, тогда

$$N(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}) = N(P_1P(w_0, q_0), P_1P(w_1, q_1), \ldots, P_1P(w_{n-1}, q_{n-1})) :=$$

$$:= N_1(P(w_0, q_0), P(w_1, q_1), \ldots, P(w_{n-1}, q_{n-1})).$$

По теореме 2.5.1 получим требуемое. □

2.9. Обратная задача для невырожденного уравнения

Обратные задачи находят свое применение во многих прикладных областях исследования, например, в астрономии, геофизике и др. [78]. Обратные задачи для дробных уравнений в последние годы привлекают интерес исследователей, в основном исследуются уравнения с единичным или обратимым оператором при производной Герасимова — Капуто или Римана — Лиувилля [8, 9, 64, 65, 70, 71].

Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + \varphi(t)u, \quad t \in (0, T], \tag{2.9.1}$$

где $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, D^{σ_n} — дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, определяемая набором $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n}$, $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\dots,n$; $T>0$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Z}$.

Снабдим уравнение (2.9.1) условиями

$$D^{\sigma_k}z(0) = z_k, \quad k = 0,1,\dots,n-1, \tag{2.9.2}$$

$$\int\limits_0^T z(t)d\mu(t) = z_T. \tag{2.9.3}$$

Функция μ имеет ограниченную вариацию на $(0,T]$, под интегралом в условии (2.9.3) понимается векторный интеграл Римана — Стилтьеса, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ известны.

Рассмотрим задачу (2.9.1)–(2.9.3), предполагая, что элемент $u \in \mathcal{Z}$ неизвестен. Решением задачи (2.9.1)–(2.9.3) будем называть пару (z,u), где $z : (0,T] \to \mathcal{Z}$ является решением задачи (2.9.1), (2.9.2) с соответствующим $u \in \mathcal{Z}$ и удовлетворяет условию (2.9.3). Для удобства решением задачи (2.9.1)–(2.9.3) будем называть также соответствующий элемент $u \in \mathcal{Z}$.

Назовем задачу (2.9.1)–(2.9.3) корректной, если для любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0,\dots,n-1$, и $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $u \in \mathcal{Z}$, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \le C\left(\sum_{k=0}^{n-1}\|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}}\right),$$

где $C>0$ не зависит от z_k, $k = 0,\dots,n-1$, и z_T.

Обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A,

$$\psi := z_T - \int\limits_0^T \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n}A)z_k d\mu(t) \in \mathcal{Z}.$$

Характеристической функцией обратной задачи (2.9.1)–(2.9.3) назовем функцию

$$\chi(\lambda) := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}\lambda)\varphi(s)ds, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2.9.1. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$ при $\alpha_n = 1$ и $\varphi \in C^1_\gamma([0,T];\mathbb{R})$ для некоторого $\gamma < 1$ при $\alpha_n < 1$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача* (2.9.1)–(2.9.3) *корректна в том и только в том случае, когда $\chi(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$. Решение задачи* (2.9.1)–(2.9.3) *в случае его существования имеет вид $u = (\chi(A))^{-1}\psi$.*

Доказательство. Рассмотрим задачу (2.9.1), (2.9.2), когда известен элемент $u \in \mathcal{Z}$. По теореме 1.4.1 функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n, \sigma_k + 1}(t^{\sigma_n} A) z_k + \int_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} A)\varphi(s) u ds \quad (2.9.4)$$

является единственным решением задачи (2.9.1), (2.9.2).

Подставив решение прямой задачи (2.9.4) в условие переопределения (2.9.3), получим уравнение $\chi(A)u = \psi$. Оператор $\chi(A)$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $0 \notin \sigma(\chi(A))$. По теореме о спектральном отображении, так как оператор A ограничен, а функция χ аналитична по аргументу λ, то $\sigma(\chi(A)) = \chi(\sigma(A))$ [52]. Таким образом, условие $0 \notin \sigma(\chi(A))$ выполняется в том и только в том случае, когда $\chi(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$. Поэтому $u = (\chi(A))^{-1}\psi$ и с учетом вида вектора ψ

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \leq \|(\chi(A))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|\psi\|_{\mathcal{Z}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_k \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + c_T \|z_T\|_{\mathcal{Z}}.$$

□

2.10. Обратная задача для вырожденного уравнения

Рассмотрим обратную задачу для вырожденного эволюционного уравнения

$$D^{\sigma_n} Lx(t) = Mx(t) + \varphi(t)u, \quad t \in (0,T], \qquad (2.10.1)$$

$$D^{\sigma_k}Px(0)=x_k\in\mathcal{X}^1,\quad k=0,\dots,n-1, \tag{2.10.2}$$

$$\int\limits_0^T x(t)d\mu(t)=x_T\in\mathcal{X}, \tag{2.10.3}$$

в которой, как и прежде, D^{σ_n} — дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, $\varphi\in C([0,T];\mathbb{R})$, элемент $u\in\mathcal{Y}$ неизвестен.

При условии (L,p)-ограниченности оператора M задача (2.10.1)–(2.10.3) эквивалентна системе двух задач на подпространствах $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$:

$$D^{\sigma_n}Gx^0(t)=x^0(t)+\varphi(t)M_0^{-1}u^0, \tag{2.10.4}$$

$$\int\limits_0^T x^0(t)d\mu(t)=x_T^0, \tag{2.10.5}$$

и

$$D^{\sigma_n}x^1(t)=L_1^{-1}M_1x^1(t)+\varphi(t)L_1^{-1}u^1, \tag{2.10.6}$$

$$D^{\sigma_k}x^1(0)=x_k,\quad k=0,\dots,n-1, \tag{2.10.7}$$

$$\int\limits_0^T x^1(t)d\mu(t)=x_T^1, \tag{2.10.8}$$

где $x^0(t)=(I-P)x(t)$, $x^1(t)=Px(t)$, $x_T^0=(I-P)x_T$, $x_T^1=Px_T$, $u^0=(I-Q)u$, $u^1=Qu$.

Задачу (2.10.4), (2.10.5) назовем корректной, если для любого $x_T^0\in\mathcal{X}^0$ существует единственное решение $u^0\in\mathcal{Y}^0$, для которого справедлива оценка

$$\|u^0\|_{\mathcal{Y}^0}\le C\left(\|x_T^0\|_{\mathcal{X}^0}+\|M_0x_T^0\|_{\mathcal{Y}^0}\right),$$

где $C>0$ не зависит от x_T^0.

Обозначим

$$f_l(s):=\int\limits_0^s (D^{\sigma_n})^l\varphi(t)d\mu(t),\quad l=0,1,\dots,p,$$

$$F(s)v:=M_0\sum_{k=0}^p(-1)^{k+1}\left(\sum_{l=1}^p\frac{f_l(s)G^l}{f_0(s)}\right)^k\frac{v}{f_0(s)},\quad s\in(0,T],\quad v\in\mathcal{X}^0.$$

Лемма 2.10.1. *Пусть M (L,p)-ограничен, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $(D^{\sigma_n})^l G^l\varphi \in C((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0))$, $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n})^l G^l\varphi \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0))$ для всех $k=0,1,\dots,n-1$, $l=0,1,\dots,p$, $\mu:(0,T]\to\mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача* (2.10.4), (2.10.5) *корректна в том и только в том случае, когда*

$$\int\limits_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0.$$

Решение задачи (2.10.4), (2.10.5) *в случае его существования имеет вид* $u^0 = F(T)x_T^0$.

Доказательство. По лемме 2.2.1 уравнение (2.10.4) имеет единственное решение вида

$$x^0(t) = -\sum_{l=0}^{p}(D^{\sigma_n}G)^l\varphi(t)M_0^{-1}u^0.$$

Найдем u^0. Если $f_0(T)\neq 0$, подставляя решение в (2.10.5), получим

$$\left(I+\sum_{l=1}^{p}\frac{f_l(T)G^l}{f_0(T)}\right)M_0^{-1}u^0 = -\frac{x_T^0}{f_0(T)}.$$

Из нильпотентности оператора G получим

$$u^0 = M_0\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+1}\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{f_l(T)G^l}{f_0(T)}\right)^k\frac{x_T^0}{f_0(T)} = F(T)x_T^0.$$

Отсюда же следует единственность решения задачи (2.10.4), (2.10.5). Корректность задачи следует из вида решения.

Пусть

$$f_0(T) := \int\limits_0^T \varphi(t)d\mu(t) = 0,$$

тогда

$$\left(\sum_{l=1}^{p}f_l(T)G^{l-1}\right)GM_0^{-1}u^0 = -x_T^0.$$

Поскольку оператор M является (L,p)-ограниченным, то $\ker L \cap \ker M = \{0\}$. Возьмем $v \in M_0[\ker L \setminus \{0\}]$. Тогда

$$\left(\sum_{l=1}^{p} f_l(T)G^{l-1}\right) GM_0^{-1}(u^0+v) = -x_T^0.$$

Следовательно, решение задачи (2.10.4), (2.10.5) не единственно. □

При условии (L,σ)-ограниченности оператора M введем обозначение $S := L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$,

$$\psi := x_T^1 - \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k} E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n}S)x_k d\mu(t) \in \mathcal{X}^1.$$

Теорема 2.10.1. *Пусть* M (L,p)*-ограничен,* $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$ *при* $\alpha_n = 1$ *и* $\varphi \in C_\gamma^1([0,T];\mathbb{R})$ *для некоторого* $\gamma < 1$ *при* $\alpha_n < 1$, $(D^{\sigma_n})^l G^l \varphi \in C((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0))$, $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n})^l G^l \varphi \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}^0))$ *для* $k = 0,1,\ldots,n-1$, $l = 0,1,\ldots,p$, $\mu : (0,T] \to \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации. Тогда задача* (2.10.1)–(2.10.3) *корректна в том и только в том случае, когда* $\chi(\lambda) \neq 0$ *при всех* $\lambda \in \sigma^L(M)$,

$$\int_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0.$$

Решение задачи (2.10.1)–(2.10.3) *в случае его существования имеет вид*

$$u = (\chi(S))^{-1}\psi + F(T)(I-P)x_T.$$

Доказательство. Задача (2.10.1)–(2.10.3), как упоминалось ранее, эквивалентна совокупности задач (2.10.4), (2.10.5) и (2.10.6)–(2.10.8). Условия разрешимости задачи (2.10.4), (2.10.5) сформулированы в лемме 2.10.1, а для разрешимости задачи (2.10.6)–(2.10.8) — в теореме 2.9.1. Необходимо только отметить, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ существует оператор $(\lambda L_0 - M_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ в силу нильпотентности оператора G и равенства

$$(\lambda L_0 - M_0)^{-1} = (\lambda G - I)^{-1}M_0^{-1} = -\sum_{k=0}^{p} \lambda^k G^k M_0^{-1}.$$

Следовательно, $\sigma^{L_0}(M_0) = \emptyset$ и $\sigma^{L}(M) = \sigma^{L_1}(M_1) = \sigma(L_1^{-1}M_1)$. В итоге

$$u = u^0 + u^1 = (\chi(S))^{-1}\psi(S) + F(T)(I-P)x_T.$$

□

2.11. Обратная задача для системы уравнений Кельвина — Фойгта

Рассмотрим обратную задачу для линеаризованной системы уравнений динамики вязкоупругой жидкости Кельвина — Фойгта [29] с производной Джрбашяна — Нерсесяна по времени

$$D^{\sigma_k}v(\xi,0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0,1,\dots,n-1, \tag{2.11.1}$$

$$v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{2.11.2}$$

$$D^{\sigma_n}(1-\beta\Delta)v(\xi,t) = \nu\Delta v(\xi,t) - r(\xi,t) + \varphi(t)u(\xi), \quad (\xi,t) \in \Omega\times(0,T], \tag{2.11.3}$$

$$\nabla\cdot v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{2.11.4}$$

$$\int_0^T v(\xi,t)d\mu(t) = v_T(\xi), \quad \xi \in \Omega. \tag{2.11.5}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\beta,\nu \in \mathbb{R}$, D^{σ_k} — производные Джрбашяна — Нерсесяна по переменной t, $k = 0,1,\dots,n$, вектор-функция $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ — скорость жидкости, $r = (r_1, r_2, \dots, r_d)$ — градиент давления; неизвестные вектор-функции — $v, r, u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$.

Как и прежде, $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^d$, замыкание $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^d : \nabla\cdot v = 0\}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначено через $\mathbb{H}_\sigma$, а его замыкание в норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$; $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$ и $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортогональные проекторы. Оператор $A := \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный отрицательный дискретный конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [23]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора A, занумерованные в порядке невозрастания с учетом их кратностей, и обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную в $\mathbb{H}_\sigma$ систему соответствующих собственных функций, образующую базис в $\mathbb{H}_\sigma$.

Учитывая граничное условие (2.11.2) и уравнение (2.11.4), положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \tag{2.11.6}$$

$$L = \begin{pmatrix} I - \beta A & \mathbb{O} \\ -\beta \Pi \Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \gamma A & \mathbb{O} \\ \gamma \Pi \Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \tag{2.11.7}$$

$\mathcal{X}$ состоит из пар вектор-функций $x = (v, r)$, где $v \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $r \in \mathbb{H}_\pi$.

Лемма 2.11.1. [55]. *Пусть $\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \notin \sigma(A)$, пространства имеют вид* (2.11.6), *а операторы L и M определены формулами* (2.11.7). *Тогда оператор M $(L, 0)$-ограничен. Более того,*

$$\sigma^L(M) = \left\{ \frac{\gamma \lambda_k}{1 - \beta \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \gamma \Pi \Delta (I - \beta A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\beta \Pi \Delta (I - \beta A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная задача (2.11.1)–(2.11.5) имеет вид (2.10.1)–(2.10.3). Принимая во внимание, что $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_{M_1} = \mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P$ изоморфно $\mathbb{H}_\sigma^2$, корректность задачи (2.11.1)–(2.11.5) означает существование решения $u \in \mathbb{L}_2$ для всех $v_k \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $v_T \in \mathbb{H}_\sigma^2$, удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{\mathbb{L}_2} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|v_k\|_{\mathbb{H}^2} + \|v_T\|_{\mathbb{H}^2} \right).$$

Теорема 2.11.1. *Пусть $\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \notin \sigma(A)$, функция $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$ при $\alpha_n = 1$ и $\varphi \in C_\gamma^1([0,T];\mathbb{R})$ для некоторого $\gamma < 1$ при $\alpha_n < 1$, $D^{\sigma_k}\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача* (2.11.1)–(2.11.5) *корректна в том и только в том случае, когда*

$$\int_0^T \varphi(t) d\mu(t) \neq 0$$

и для всех $k \in \mathbb{N}$
$$\chi\left(\frac{\gamma\lambda_k}{1-\beta\lambda_k}\right) \neq 0$$

Доказательство. Из вида проекций P и Q следует, что $\mathcal{X}^0 = \ker P = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$ и $\mathcal{Y}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$. Следовательно, условие (2.11.1) равносильно условию вида (2.10.2). По лемме 2.11.1 оператор M в задаче (2.11.1)–(2.11.5) является $(L, 0)$-ограниченным в условиях данной теоремы, поэтому $G = 0$. Таким образом, утверждение следует из теоремы 2.10.1. □

Теперь пусть $\beta^{-1} \in \sigma(A)$. Обозначим через $\mathbb{M}_0$ множество индексов $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\lambda_k = \beta^{-1}$ и через $\mathbb{M}_1$ — множество $\mathbb{N}\backslash\mathbb{M}_0$.

Лемма 2.11.2. [55]. *Пусть* $\gamma\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \in \sigma(A)$, *пространства имеют вид* (2.11.6), *а операторы* L *и* M *определены формулами* (2.11.7). *Тогда оператор* M $(L, 1)$-*ограничен. Более того,*
$$\sigma^L(M) = \left\{\frac{\gamma\lambda_k}{1-\beta\lambda_k} : k \in \mathbb{M}_1\right\},$$
$$P = \begin{pmatrix} \Sigma_{k\in\mathbb{M}_1}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ \gamma\Pi\Delta\Sigma_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\beta\lambda_k} & \mathbb{O}\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \Sigma_{k\in\mathbb{M}_1}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ -\beta\Pi\Delta\Sigma_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\beta\lambda_k} & \mathbb{O}\end{pmatrix}.$$

Покажем, что в силу найденного вида проектора P начальные условия (2.10.2) эквивалентны условиям
$$D^{\sigma_k}(1-\beta\Delta)v(\xi,0) = y_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.11.8}$$

Имеем
$$D^{\sigma_l}(1-\beta\Delta)v(\cdot,0) = \Sigma_{k\in\mathbb{M}_1}(1-\beta\lambda_k)\langle D^{\sigma_l}v(\cdot,0),\varphi_k\rangle\varphi_k = \Sigma_{k\in\mathbb{M}_1}\langle y_l,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

поэтому
$$\langle D^{\sigma_l}v(\cdot,0),\varphi_k\rangle = \frac{\langle y_l,\varphi_k\rangle}{1-\beta\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{M}_1, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\gamma\Pi\Delta\Sigma_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\langle D_t^{\sigma_l}v(\cdot,0),\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\beta\lambda_k} = \gamma\Pi\Delta\Sigma_{k\in\mathbb{M}_1}\frac{\langle y_l,\varphi_k\rangle}{(1-\beta\lambda_k)^2}, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, с помощью условий (2.11.8) определены значения $D^{\sigma_l}Px(\cdot,0)$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Теорема 2.11.2. *Пусть* $\gamma\beta \neq 0$, $\beta^{-1} \in \sigma(A)$, *функция* $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$ *при* $\alpha_n = 1$ *и* $\varphi \in C^1_\gamma([0,T];\mathbb{R})$ *для некоторого* $\gamma < 1$ *при* $\alpha_n < 1$, $D^{\sigma_k}\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации. Тогда задача* (2.11.2)–(2.11.5), (2.11.8) *корректна в том и только в том случае, когда*

$$\int_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0$$

для всех $k \in \mathbb{M}_1$

$$\chi\left(\frac{\gamma\lambda_k}{1-\beta\lambda_k}\right) \neq 0$$

Доказательство. Из леммы 2.11.2 следует, что оператор M $(L,1)$-ограничен, $\mathcal{X}^0 = \ker P = \mathrm{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{X}^1 = \mathrm{im} P$ изоморфно подпространству $(\mathrm{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_1\} \cap \mathbb{H}^2_\sigma) \times \{0\}$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q = \mathrm{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{Y}^1 = \mathrm{im} Q$ изоморфно подпространству $\mathrm{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}_1\} \times \{0\}$. Утверждение данной теоремы следует из теоремы 2.10.1 и леммы 2.11.2. $\square$

3. Уравнения с неограниченными операторами

3.1. Разрешающие семейства операторов

Рассмотрим начальную задачу

$$D^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.1.1}$$

для уравнения

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t), \quad t > 0, \tag{3.1.2}$$

где $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, D^{σ_n} — дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, которая определяется набором чисел $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n > 0$.

Функция $z \in C(\mathbb{R}_+; D_A) \cap L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; D_A)$ называется решением задачи (3.1.1), (3.1.2), если $D^{\sigma_k} z \in AC(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $D^{\sigma_n} z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, равенство (3.1.2) выполняется для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и выполнены условия (3.1.1).

Определение 3.1.1. Семейство линейных ограниченных операторов $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ называется *k-разрешающим семейством*, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, для уравнения (3.1.2), если выполняются следующие условия:

(i) $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ сильно непрерывно при $t > 0$;

(ii) $S_k(t)[D_A] \subset D_A$, $S_k(t)Ax = AS_k(t)x$ для всех $x \in D_A$, $t > 0$;

(iii) для каждого $z_k \in D_A$ $S_k(t)z_k$ является решением задачи $D^{\sigma_k} z(0) = z_k$, $D^{\sigma_l} z(0) = 0$, $l \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \setminus \{k\}$ для уравнения (3.1.2).

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, обозначим через $\text{Lap}(\mathbb{R}_+; \mathcal{X})$ множество всех отображений из $\mathbb{R}_+$ в $\mathcal{X}$, для которых существует преобразование Лапласа.

Лемма 3.1.1. *Пусть* $\alpha_l \in (0, 1]$, $l = 0, 1, \ldots, n$, $\sigma_n > 0$, *для некоторого* $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ *существует k-разрешающее семейство операторов* $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *для уравнения* (3.1.2), *такое, что для всех* $t > 0$ $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq$

$Ke^{at}t^{-\beta}$ *при некоторых* $K>0$, $a\in\mathbb{R}$, $\beta\in[0,1)$. *Тогда при* $\mathrm{Re}\lambda>a$ *имеем* $\lambda^{\sigma_n}\in\rho(A)$,

$$\widehat{S}_k(\lambda)=\lambda^{\sigma_n-\sigma_k-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) \tag{3.1.3}$$

и k*-разрешающее семейство операторов для уравнения* (3.1.2) *единственно в классе* $\mathrm{Lap}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$.

Доказательство. В силу тождества (1.1.3) и пунктов (ii) и (iii) определения 3.1.1 для $z_k\in D_A$, $\mathrm{Re}\lambda>a$

$$\lambda^{\sigma_n}\widehat{S}_k(\lambda)z_k-\lambda^{\sigma_n-\sigma_k-1}z_k=A\widehat{S}_k(\lambda)z_k=\widehat{S}_k(\lambda)Az_k.$$

Следовательно, оператор $\lambda^{\sigma_n}I-A:D_A\to\mathcal{Z}$ обратим и равенство (3.1.3) выполнено. Поскольку $\widehat{S}_k(\lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ при $\mathrm{Re}\lambda>a$, имеем $\lambda^{\sigma_n}\in\rho(A)$. Равенство (3.1.3) и единственность обратного преобразования Лапласа влекут единственность k-разрешающего семейства операторов для уравнения (3.1.2) в классе $\mathrm{Lap}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. □

Лемма 3.1.2. *Пусть* $\alpha_k\in(0,1]$, $k=0,1,\dots,n$, $\sigma_n>0$, *существует* 0-*разрешающее семейство* $\{S_0(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}):t>0\}$ *для уравнения* (3.1.2), *такое, что для всех* $t>0$ $\|S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le Ke^{at}t^{\sigma_0}$ *при некотором* $K>0$, $a\ge 0$. *Тогда для каждого* $k=0,1,\dots,n-1$ *существует единственное в* $\mathrm{Lap}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ k*-разрешающее семейство* $\{S_k(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}):t>0\}$. *Причем для всех* $t>0$ $S_k(t)\equiv J_t^{\sigma_k-\sigma_0}S_0(t)$ *и* $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le K_1e^{at}t^{\sigma_k}$ *при некотором* $K_1>0$, $k=1,2,\dots,n-1$.

Доказательство. Поскольку для каждого $z_0\in D_A\setminus\{0\}$ $J^{1-\alpha_0}S_0(t)z_0$ имеет ненулевой предел z_0 при $t\to 0+$, в силу [46, Лемма 1]

$$S_0(t)z_0=\frac{t^{\alpha_0-1}z_0}{\Gamma(\alpha_0)}+o(t^{\alpha_0-1})$$

при $t\to 0+$. Следовательно, ограничено множество $\{t^{1-\alpha_0}S_0(t)z_0\}$ при любом $z_0\in D_A$, поэтому по принципу равномерной ограниченности множество

$\{t^{1-\alpha_0}S_0(t)z_0\}$ при любом $z_0 \in \mathcal{Z}$ также ограничено. Поэтому при любом $z_0 \in \mathcal{Z}$, $T > 0$ $S_0(t)z_0 \in L_1(0,T;\mathcal{Z})$ и существуют дробные интегралы Римана — Лиувилля от $S_0(t)z_0$.

Определим для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ семейства $\{S_k(t) := J_t^{\sigma_k-\sigma_0}S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$. По построению они удовлетворяет условию (i) определения 3.1.1. Для $x \in D_A$, $t > 0$

$$J_t^{\sigma_k-\sigma_0}S_0(t)Ax = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\sigma_k-\sigma_0-1}}{\Gamma(\sigma_k-\sigma_0)}S_0(s)Axds = AJ_t^{\sigma_k-\sigma_0}S_0(t)x,$$

так как $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ удовлетворяет условию (ii) из определения 3.1.1 и оператор A замкнут. Итак, условие (ii) выполнено для $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Далее для всех $t > 0$

$$\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq K\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\sigma_k-\sigma_0-1}}{\Gamma(\sigma_k-\sigma_0)}s^{\sigma_0}e^{as}ds \leq \frac{Ke^{at}t^{\sigma_k}\Gamma(\sigma_0+1)}{\Gamma(\sigma_k+1)} = K_1e^{at}t^{\sigma_k}.$$

Для $z_k \in D_A$ имеем равенство $\lambda^{\sigma_n}\widehat{S}_0(\lambda)z_k - \lambda^{\sigma_n-\sigma_0-1}z_k = A\widehat{S}_0(\lambda)z_k$ в силу пункта (iii) определения 0-разрешающего семейства операторов. Умножим обе его части на $\lambda^{\sigma_0-\sigma_k}$ и получим равенство $\lambda^{\sigma_n}\widehat{J_t^{\sigma_k-\sigma_0}S}_0(\lambda)z_k - \lambda^{\sigma_n-\sigma_k-1}z_k = A\widehat{J_t^{\sigma_k-\sigma_0}S}_0(\lambda)z_k$, т. е. $\lambda^{\sigma_n}\widehat{S}_k(\lambda)z_k - \lambda^{\sigma_n-\sigma_k-1}z_k = A\widehat{S}_k(\lambda)z_k$. В силу единственности обратного преобразования Лапласа $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ является k-разрешающим семейством для уравнения (3.1.2). Следовательно, справедливо равенство (3.1.3) и k-разрешающее семейство уравнения (3.1.2) единственно в $\mathrm{Lap}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ в силу леммы 3.1.1. $\square$

Замечание 3.1.1. Параметр σ_0 в формулировке леммы 3.1.2 определяет степенную особенность семейства $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ в нуле. В начале доказательства леммы 3.1.2 было показано, что у нас есть только две возможности: особенность в нуле имеет степень $\sigma_0 := \alpha_0 - 1 < 0$, или особенность отсутствует в случае $\alpha_0 = 1$. В силу леммы 3.1.2 k-разрешающее семейство

$\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ имеет особенность степени $\sigma_k < 0$, либо не имеет ее в нуле, если $\sigma_k \geq 0$.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\alpha_l \in (0,1]$, $l = 0,1,\dots,n$, $\sigma_n > 0$, *для некоторого* $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ *существует* k*-разрешающее семейство операторов* $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *для уравнения* (3.1.2), *такое, что для всех* $t > 0$ $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ke^{at}t^{\sigma_k}$ *при некоторых* $K > 0$, $a \geq 0$. *Тогда существует предел* $\lim\limits_{t\to 0+} D^{\sigma_k}S_k(t) = I$ *по норме* $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ *в том и только в том случае, когда* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Доказательство. Заметим, что в силу равенства (1.1.3), определения 3.1.1 и леммы 3.1.1 $\widehat{D^{\sigma_k}S}_k = \lambda^{\sigma_k}\widehat{S}_k = \lambda^{\sigma_n-1}(\lambda^{\sigma_n}I - A)^{-1}$. Следовательно, для $z_k \in D_A$, $b > a$

$$D^{\sigma_k}S_k(t)z_k = \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \lambda^{\sigma_n-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}z_k d\lambda = z_k + \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}Az_k d\lambda. \tag{3.1.4}$$

Так как $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ke^{at}t^{\sigma_k}$, то $\|\widehat{S}_k(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C|\lambda|^{-\sigma_k-1}$, тогда в силу (3.1.3) для достаточно больших $|\lambda|$

$$\|\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C_1}{|\lambda|^{\sigma_n+1}},$$

следовательно, $\|D^{\sigma_k}S_k(t)z_k\|_{\mathcal{Z}} \leq K_1e^{bt}$ и в силу плотности D_A в $\mathcal{Z}$ имеем неравенства $\|D^{\sigma_k}S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq K_1e^{bt}$, $\|D^{\sigma_k}S_k(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq K_1e^{bt} + 1$. Для $\mathrm{Re}\lambda > b$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(D^{\sigma_k}S_k(t) - I)dt = \lambda^{\sigma_n-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) - \lambda^{-1}I.$$

Пусть функция $\eta(t) := \|D^{\sigma_k}S_k(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и $\eta(0) = 0$. Для $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta > 0$, такое, что $\eta(t) \leq \varepsilon$ для всех $t \in [0,\delta]$, тогда

$$\left\|\lambda^{\sigma_n-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) - \lambda^{-1}I\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \int\limits_0^\delta e^{-t\mathrm{Re}\lambda}\eta(t)dt + \int\limits_\delta^\infty e^{-t\mathrm{Re}\lambda}\eta(t)dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}\lambda}(1-e^{-\delta\mathrm{Re}\lambda})+\int\limits_{\delta}^{\infty}e^{-t\mathrm{Re}\lambda}(K_1e^{bt}+1)dt\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}\lambda}+o\left(\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}\right)$$

при $\mathrm{Re}\lambda\to+\infty$, так как $\eta(t)\leq K_1e^{bt}+1$ при $t\geq 0$. Следовательно, при достаточно больших $\lambda>0$ $\|\lambda^{\sigma_n}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)-I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}<1$, поэтому оператор $R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)$ непрерывно обратим и $A\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Пусть $A\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $R>\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{1/\sigma_n}$, $\Gamma_R:=\Gamma_{1,R}\cup\Gamma_{2,R}\cup\Gamma_{3,R}$, где $\Gamma_{1,R}:=\{Re^{i\varphi}:\varphi\in(-\pi,\pi)\}$, $\Gamma_{2,R}:=\{re^{i\pi}:r\in[R,\infty)\}$, $\Gamma_{3,R}:=\{re^{-i\pi}:r\in[R,\infty)\}$. Для $t>0$ в силу равенства (3.1.4) получим

$$D^{\sigma_k}S_k(t)=I+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)Ae^{\lambda t}d\lambda=I+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{1}{\lambda}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^le^{\lambda t}d\lambda}{\lambda^{l\sigma_n}}.$$

При малых $t>0$ возьмем $R=1/t$ и получим

$$\|D^{\sigma_k}S_k(t)-I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leq C_1\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma_{k,R}}\frac{\|A\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}|d\lambda|}{|\lambda|^{l\sigma_n+1}}\leq\frac{C_2t^{\sigma_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}{1-t^{\sigma_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}\to 0$$

при $t\to 0+$. □

3.2. Аналитические разрешающие семейства операторов

Введем обозначения $S_{\theta,a}:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\arg(\lambda-a)|<\theta,\lambda\neq a\}$ для $\theta\in[\pi/2,\pi]$, $a\in\mathbb{R}$, $\Sigma_\psi:=\{t\in\mathbb{C}:|\arg t|<\psi,\ t\neq 0\}$ для $\psi\in(0,\pi/2]$ и сформулируем важное для дальнейших рассуждений утверждение.

Теорема 3.2.1. [56]. *Пусть $\theta_0\in(\pi/2,\pi]$, $a\in\mathbb{R}$, $\beta\in[0,1)$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $H:(a,\infty)\to\mathcal{X}$ — некоторое отображение. Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Существует аналитическая функция $F:\Sigma_{\theta_0-\pi/2}\to\mathcal{X}$, для каждого $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$ существует такое $C(\theta)>0$, что для всех $t\in\Sigma_{\theta-\pi/2}$ неравенство $\|F(t)\|_{\mathcal{X}}\leq C(\theta)|t|^{-\beta}e^{a\mathrm{Re}\,t}$ выполнено; $\widehat{F}(\lambda)=H(\lambda)$ для $\lambda>a$.*

(ii) *Отображение* H *аналитически продолжимо на* $S_{\theta_0,a}$; *для любого* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ *существует* $K(\theta) > 0$, *такое, что для всех* $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{K(\theta)}{|\lambda - a|^{1-\beta}}.$$

k-Разрешающее семейство операторов, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, называется аналитическим, если оно имеет аналитическое продолжение в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in (0, \pi/2]$. Аналитическое k-разрешающее семейство операторов $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ имеет тип (ψ_0, a_0, β) при некотором $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, если для всех $\psi \in (0, \psi_0)$, $a > a_0$ существует $C(\psi, a)$, такое, что для всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C(\psi, a)e^{a\mathrm{Re}\,t}|t|^{-\beta}$.

Замечание 3.2.1. Из леммы 3.1.2 и замечания 3.1.1 следует, что для k-разрешающего семейства операторов $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ может быть только $\beta = -\sigma_k$ или $\beta = 0$.

Определение 3.2.1. *Оператор* $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ *принадлежит классу* $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ *для некоторого* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\sigma_n > 0$, *если:*

(i) *для всех* $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ *имеем* $\lambda^{\sigma_n} \in \rho(A)$;

(ii) *для любых* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ *существует такое* $K(\theta, a) > 0$, *что для всех* $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a|^{\alpha_0}|\lambda|^{\sigma_n - \sigma_0 - 1}}.$$

Если $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, то определены операторы

$$Z_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \lambda^{\sigma_n - \sigma_k - 1} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{\pm i\theta},\ r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + \delta e^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ для некоторых $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$.

(i) *Если существует аналитическое* 0*-разрешающее семейство операторов типа* $(\theta_0 - \pi/2, a_0, -\sigma_0)$ *для уравнения* (3.1.2)*, то* $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$.

(ii) *Если* $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$*, то для каждого* $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *существуют единственное аналитическое* k*-разрешающее семейство операторов* $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *типа* $(\theta_0 - \pi/2, a_0, \max\{-\sigma_k, 0\})$ *для уравнения* (3.1.2)*. Более того,* $S_k(t) \equiv Z_k(t) \equiv J_t^{\sigma_k - \sigma_0} Z_0(t)$*,* $k = 0, 1, \ldots, n-1$*,* $t > 0$.

Доказательство. Выберем $R > \delta$,

$$\Gamma_R := \bigcup_{k=1}^{4} \Gamma_{k,R}, \quad \Gamma_{1,R} := \Gamma_0,$$

$$\Gamma_{2,R} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + Re^{i\varphi},\, \varphi \in (-\theta, \theta)\},$$

$$\Gamma_{3,R} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{i\theta},\, r \in [\delta, R]\},$$

$$\Gamma_{4,R} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{-i\theta},\, r \in [\delta, R]\},$$

Γ_R — положительно ориентированный замкнутый контур,

$$\Gamma_{5,R} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{i\theta},\, r \in [R, \infty)\},$$

$$\Gamma_{6,R} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{-i\theta},\, r \in [R, \infty)\},$$

тогда $\Gamma = \Gamma_{5,R} \cup \Gamma_{6,R} \cup \Gamma_R \setminus \Gamma_{2,R}$.

Если $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, то по теореме 3.2.1 при $\mathcal{X} = \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ семейство операторов $\{Z_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ аналитично типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0, -\sigma_0)$. При этом очевидно выполняются пункты (i) и (ii) определения 3.1.1.

Для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, существует $K(\theta, a) > 0$, такое, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\left\|\lambda^{\sigma_n - \sigma_k - 1} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C \left\|\lambda^{\sigma_n - \sigma_0 - 1} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{CK(\theta, a)}{|\lambda - a|^{\alpha_0}}. \qquad (3.2.1)$$

Поэтому при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\mathrm{Re}\lambda > a_0$ существуют преобразования Лапласа $\widehat{Z}_k(\lambda) = \lambda^{\sigma_n - \sigma_k - 1} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)$, $\widehat{J_t^{\beta} Z_k}(\lambda) = \lambda^{\sigma_n - \sigma_k - 1 - \beta} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)$, $\beta > 0$, следовательно, $Z_k(t) = J_t^{\sigma_k - \sigma_0} Z_0(t)$.

При $z_0 \in D_A$

$$D_t^{\alpha_0-1}Z_0(t)z_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{\sigma_n-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}z_0d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}z_0d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}Az_0d\lambda=$$

$$=z_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}Az_0d\lambda.$$

При $t\in[0,1]$, $\lambda\in\Gamma\setminus\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|\leq 2a\}$

$$\left\|\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}Az_0\right\|_{\mathcal{Z}}\leq\frac{e^{a+\delta}K(\theta,a)\|Az_0\|_{\mathcal{Z}}}{|\lambda-a|^{\alpha_0}|\lambda|^{\sigma_n-\sigma_0}}\leq\frac{C_1}{|\lambda|^{\sigma_n+1}}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}Az_0d\lambda=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\Gamma_R}-\int\limits_{\Gamma_{2,R}}+\int\limits_{\Gamma_{5,R}}+\int\limits_{\Gamma_{6,R}}\right)\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}Az_0d\lambda=0,$$

так как по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma_R}\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}Az_0d\lambda=0,\quad\Bigg\|\int\limits_{\Gamma_{s,R}}\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}Az_0d\lambda\Bigg\|_{\mathcal{Z}}\leq\frac{C_2}{R^{\sigma_n}}\to 0$$

при $R\to\infty$ для $s=2,5,6$.

При этом в силу равенства (1.1.3)

$$\mathrm{Lap}[D^{\sigma_1}Z_0(\cdot)z_0](\lambda)=\lambda^{\sigma_n-\sigma_0-1+\sigma_1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)z_0-\lambda^{\sigma_1-\sigma_0-1}z_0=\lambda^{\alpha_1-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)Az_0,$$

для $\lambda\in\Gamma\setminus\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|\leq 2a\}$

$$\|\lambda^{\alpha_1-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)Az_0\|_{\mathcal{Z}}\leq\frac{C_3}{|\lambda|^{\sigma_n-\sigma_0+\alpha_0-\alpha_1}}=\frac{C_3}{|\lambda|^{\alpha_0+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n}},$$

$\alpha_0+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n\geq\alpha_0+\alpha_n>1$, следовательно, $D^{\sigma_1}Z_0(0)z_0=0$.

Далее, для каждого $k=2,3,\dots,n-1$

$$\mathrm{Lap}[D^{\sigma_k}Z_0(\cdot)z_0](\lambda)=\lambda^{\sigma_n-\sigma_0-1+\sigma_k}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)z_0-\lambda^{\sigma_k-\sigma_0-1}z_0=\lambda^{\sigma_k-\sigma_0-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)Az_0,$$

для $\lambda \in \Gamma \setminus \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \le 2a\}$

$$\|\lambda^{\sigma_k-\sigma_0-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)Az_0\|_{\mathcal{Z}} \le \frac{C_3}{|\lambda|^{\sigma_n-\sigma_k+\alpha_0}} = \frac{C_3}{|\lambda|^{\alpha_0+\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2}+\dots+\alpha_n}},$$

таким образом, $D^{\sigma_k}Z_0(0)z_0 = 0$.

Отметим также, что для $k = 0, 1, \dots, n-1$, $z_k \in D_A$, $T > 0$ с учетом (3.2.1) получаем существование такого $C > 0$, что при всех $t \in [0, T]$

$$\|AZ_k(t)z_k\|_{\mathcal{Z}} = \|Z_k(t)Az_k\|_{\mathcal{Z}} \le Ct^{\alpha_0-1}\|Az_k\|_{\mathcal{Z}},$$

поэтому $Z_k(\cdot)z_k \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; D_A)$.

Наконец,

$$\mathrm{Lap}[D^{\sigma_n}Z_0(\cdot)z_0](\lambda) = \lambda^{\sigma_n-\sigma_0-1+\sigma_n}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)z_0 - \lambda^{\sigma_n-\sigma_0-1}z_0 = A\lambda^{\sigma_n-\sigma_0-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)z_0.$$

После действия обратным преобразованием Лапласа, получаем равенство $D^{\sigma_n}Z_0(t)z_0 = AZ_0(t)z_0$, значит, $\{Z_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ — 0-разрешающее семейство операторов для уравнения (3.1.2). Тогда по лемме 3.1.2 для любого $k = 1, 2, \dots, n-1$ существует k-разрешающее семейство операторов, которое совпадает с оператором $J_t^{\sigma_k-\sigma_0}Z_0(t) = Z_k(t)$. Каждое такое семейство аналитично типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0, \max\{-\sigma_k, 0\})$, см. доказательство леммы 3.1.2 и замечание 3.2.1.

Если существует 0-разрешающее семейство типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0, -\sigma_0)$, равенство (3.1.3) при $k = 0$ и теорема 3.2.1 с $\mathcal{X} = \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ влекут включение $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. $\square$

Замечание 3.2.2. *Обратим внимание, что если* $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, *то* $\sigma_n = \alpha_0 + \alpha_n - 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} > \alpha_0 + \alpha_n - 1 > 0$.

Следствие 3.2.1. *Пусть* $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \ge 0$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. *Тогда для любых* $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in D_A$ *функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t)z_k$$

является единственным решением задачи (3.1.1), (3.1.2). *При этом решение аналитично в* $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$.

Доказательство. После теоремы 3.2.2 осталось доказать единственность решения. Пусть существует решение y задачи (3.1.1), (3.1.2) с начальными данными $z_0 \in D_A$, $z_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Одним из таких решений является функция $Z_0(t)z_0$. Рассуждая, как при доказательстве леммы 1.2.1, в силу абсолютной непрерывности функций $D^{\sigma_k}y$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, получим цепочку равенств $D^{\sigma_n}y(t) = Ay(t)$, $D^{\sigma_{n-1}}y(t) = J_t^{\alpha_n}Ay(t)$, …, $D^{\sigma_1}y(t) = J_t^{\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n}Ay(t)$,

$$D^{\sigma_0}y(t) = J_t^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}Ay(t)+z_0 = J_t^{\sigma_n}AD^{\sigma_0}y(t)+z_0 = g_{\sigma_n}*AD^{\sigma_0}y+z_0, \quad (3.2.2)$$

где $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$, свертка Лапласа $*$ определяется равенством

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

При этом использован тот факт, что по определению решения выполняется включение $y \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; D_A)$, а значит, $J_t^{\alpha_0-1}Ay(t) = AJ_t^{\alpha_0-1}y(t)$ в силу замкнутости оператора A, т. е. $D^{\sigma_0}y(t) \in D_A$ при $t \geq 0$.

Поскольку равенство (3.2.2) справедливо для любого решения задачи (3.1.1), (3.1.2) с начальными данными $z_0 \in D_A$, $z_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, в частности, для функции $Z_0(t)z_0$, имеем

$$1*D^{\sigma_0}y = (D^{\sigma_0}Z_0 - g_{\sigma_n}*AD^{\sigma_0}Z_0)*D^{\sigma_0}y = D^{\sigma_0}Z_0*D^{\sigma_0}y - D^{\sigma_0}Z_0*g_{\sigma_n}*AD^{\sigma_0}y =$$

$$= D^{\sigma_0}Z_0*(D^{\sigma_0}y - g_{\sigma_n}*AD^{\sigma_0}y) = D^{\sigma_0}Z_0*z_0 = 1*D^{\sigma_0}Z_0z_0.$$

Так как $D^{\sigma_0}y, D^{\sigma_0}Z_0(\cdot)z_0 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z})$, то

$$D^{\sigma_0}y(t) = D_t^1(1*D^{\sigma_0}y)(t) = D_t^1(1*D^{\sigma_0}Z_0z_0)(t) = D^{\sigma_0}Z_0(t)z_0.$$

Подействуем на обе части этого равенства по очереди операторами $J_t^{\alpha_0}$ и D_t^1 и получим $y(t) = Z_0(t)z_0$ при всех $t \geq 0$.

Если y — решение задачи (3.1.1), (3.1.2) с начальными данными $z_k \in D_A$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, то $y(t) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} Z_k(t) z_k$ является решением этой же задачи при $z_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. По доказанному получаем $y(t) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} Z_k(t) z_k = Z_0(t) z_0$. Тем самым единственность решения доказана.

Аналитичность решения следует из свойств операторов $Z_k(t)$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$. $\square$

Теорема 3.2.3. *Пусть* $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\sigma_n \geq 2$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. *Тогда* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Доказательство. Для некоторого $\nu_0 \in \mathbb{C}$, такого что $|\nu_0| \geq R^{\sigma_n}$, возьмем $\lambda_0 = \nu_0^{1/\sigma_n}$, поэтому $|\lambda_0| \geq R$, $\arg \lambda_0 = \arg \nu_0 / \sigma_n \in [-\pi/2, \pi/2]$, так как $\sigma_n \geq 2$. Тогда $\lambda_0 \in S_{\theta_0, a_0}$ при достаточно большом $R > 0$. Следовательно, $\{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \geq R^{\sigma_n}\} \subset [S_{\theta_0, a_0}]^{\sigma_n} \subset \rho(A)$, так как $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$.

Пусть $|\nu| \geq R^{\sigma_n}$, $\nu = \lambda^{\sigma_n}$, тогда

$$\|\nu R_\nu(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)|\lambda|^{\sigma_0 + 1}}{|\lambda - a|^{\alpha_0}} \leq C$$

и по лемме 5.2 [59] оператор A ограничен. $\square$

3.3. Неоднородное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{3.3.1}$$

где $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$. Функция $z \in C((0, T]; D_A) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})$ называется решением задачи (3.1.1), (3.3.1), если $D^{\sigma_k} z \in AC([0, T]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $D^{\sigma_n} z \in C((0, T]; \mathcal{Z})$, равенство (3.3.1) выполняется для всех $t \in (0, T]$ и выполнены условия (3.1.1).

Обозначим

$$Y_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \lambda^\beta R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) e^{\lambda t} d\lambda, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Лемма 3.3.1. *Пусть* $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\dots,n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2,\pi]$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$, $f \in C([0,T];D_A)$ *при* $\alpha_n = 1$, $f \in C([0,T];D_A) \cap C^1_\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ *для некоторого* $\gamma < 1$ *при* $\alpha_n < 1$. *Тогда функция*

$$z_f(t) = \int\limits_0^t Y_0(t-s)f(s)ds \tag{3.3.2}$$

является единственным решением задачи

$$D^{\sigma_k}z(0) = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-1, \tag{3.3.3}$$

для уравнения (3.3.1).

Доказательство. Поскольку $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$, для достаточно больших $|\lambda|$ $\|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C|\lambda|^{-\sigma_n}$, следовательно, для $\beta < \sigma_n$, $\mathrm{Re}\lambda > a_0$ $\widehat{Y_\beta}(\lambda) = \lambda^\beta R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)$, существует $D^{\sigma_0}Y_\beta(t)$ при $t > 0$, $\widehat{D^{\sigma_0}Y_\beta}(\lambda) = \lambda^{\beta+\sigma_0}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)$,

$$\|Y_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\sigma_n-\beta-1}, \quad \|D^{\sigma_0}Y_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\sigma_n-\sigma_0-\beta-1}, \quad t \in (0,T].$$

Поскольку $\|Y_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\sigma_n-1}$, существование производной $D^{\sigma_n}z_f(t)$ при $t > 0$ доказывается так же, как при доказательстве леммы 1.4.1.

Далее,

$$\|D^{\sigma_0}z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|\int\limits_0^t Y_{\sigma_0}(t-s)f(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \leq C\sup_{s\in[0,T]}\|f(s)\|_{\mathcal{Z}}t^{\sigma_n-\sigma_0},$$

следовательно, $D^{\sigma_0}z_f(0) = 0$. Определим f нулем вне отрезка $[0,T]$, тогда $z_f = Y_0 * f$, $\widehat{z}_f(\lambda) = \widehat{Y}_0(\lambda)\widehat{f}(\lambda) = R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\widehat{f}(\lambda)$, $\widehat{D^{\sigma_1}z}_f(\lambda) = \lambda^{\sigma_1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\widehat{f}(\lambda)$,

$$\|D^{\sigma_1}z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} = \left\|\int\limits_0^t Y_{\sigma_1}(t-s)f(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \leq C\sup_{s\in[0,T]}\|f(s)\|_{\mathcal{Z}}t^{\sigma_n-\sigma_1}, \quad t \in (0,T],$$

$D^{\sigma_1}z_f(0) = 0$. Повторяя последовательно аналогичные рассуждения, получаем для всех $k = 2,3,\dots,n-1$ $\widehat{D^{\sigma_k}z}_f(\lambda) = \lambda^{\sigma_k}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\widehat{f}(\lambda)$,

$$\|D^{\sigma_k}z_f(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C\sup_{s\in[0,T]}\|f(s)\|_{\mathcal{Z}}t^{\sigma_n-\sigma_k}$$

для $t \in (0,T]$, $D^{\sigma_k} z_f(0) = 0$, $\widehat{D^{\sigma_n} z_f}(\lambda) = \lambda^{\sigma_n} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) \widehat{f}(\lambda)$.

Поскольку $f \in C([0,T]; D_A)$, то $Az_f(t) = z_{Af}(t)$,

$$\widehat{Az_f}(\lambda) = \widehat{z}_{Af}(\lambda) = AR_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\widehat{f}(\lambda) = \lambda^{\sigma_n} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\widehat{f}(\lambda) - \widehat{f}(\lambda),$$

поэтому $Az_f(t) = D^{\sigma_n} z_f(t) - f(t)$ для всех $t > 0$. Таким образом, для функции z_f выполняется равенство (3.3.1). Единственность решения доказывается так же, как и при доказательстве следствия 3.2.1. $\square$

Обозначим через $C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$ для некоторого $\gamma \in (0,1]$ множество всех функций $f : [0,T] \to \mathcal{Z}$, удовлетворяющее условию Гёльдера:

$$\exists C > 0 \quad \forall s,t \in [0,T] \quad \|f(s) - f(t)\|_{\mathcal{Z}} \le C|s-t|^\gamma.$$

Лемма 3.3.2. *Пусть* $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \ge 0$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, *при* $\alpha_n = 1$ $f \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$, *при* $\alpha_n < 1$ $f \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z}) \cap C^1_\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$ *для некоторого* $\gamma \in (0,1)$. *Тогда функция* (3.3.2) *является единственным решением задачи* (3.3.1), (3.3.3).

Доказательство. Поскольку оператор A замкнут, то при $t > 0$

$$AY_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma AR_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{\sigma_n} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}d\lambda = Y_{\sigma_n}(t),$$

поэтому $\mathrm{im} Y_0(t) \subset D_A$, $\|AY_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = O(t^{-1})$ при $t \to 0+$. Следовательно, для всех $s,t \in (0,T]$ $\|AY_0(t-s)(f(s) - f(t))\|_{\mathcal{Z}} \le C|t-s|^{\gamma-1}$. Тогда

$$\int\limits_0^t AY_0(t-s)f(s)ds = \int\limits_0^t AY_0(t-s)(f(s)-f(t))ds + \int\limits_0^t Y_{\sigma_n}(t-s)f(t)ds,$$

$$\int\limits_0^t Y_{\sigma_n}(t-s)f(t)ds = -\int\limits_0^t D^1_s Y_{\sigma_n - 1}(t-s)f(t)ds = (Y_{\sigma_n-1}(t) - Y_{\sigma_n-1}(0))f(t).$$

Заметим, что для любого $x \in D_A$

$$Y_{\sigma_n-1}(t)x = x + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{-1} R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)e^{\lambda t}Axd\lambda \to x, \quad t \to 0+,$$

так как для достаточно больших $|\lambda|$ $\|\lambda^{-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)Ax\|_{\mathcal{Z}} \le C\|Ax\|_{\mathcal{Z}}|\lambda|^{-\sigma_n-1}$. В то же время при достаточно больших $|\lambda|$ $\|\lambda^{\sigma_n-1}R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C|\lambda|^{-1}$, следовательно, семейство $\{Y_{\sigma_n-1}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ равномерно ограничено. С учетом плотности D_A в $\mathcal{Z}$ получаем, что для каждого $x \in \mathcal{Z}$ $\lim\limits_{t\to 0+} Y_{\sigma_n-1}(t)x = x$.

Таким образом,

$$\left\|\int_0^t AY_0(t-s)f(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \le C_1t^\gamma + \|Y_{\sigma_n-1}(t) - Y_{\sigma_n-1}(0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|f(t) - f(0)\|_{\mathcal{Z}}+$$

$$+\|(Y_{\sigma_n-1}(t) - Y_{\sigma_n-1}(0))f(0)\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le C_1t^\gamma + C_2\|f(t) - f(0)\|_{\mathcal{Z}} + \|(Y_{\sigma_n-1}(t) - Y_{\sigma_n-1}(0))f(0)\|_{\mathcal{Z}} \to 0$$

при $t \to 0+$. Следовательно, $z_f(t) \in D_A$, $z_f \in C([0,T]; D_A)$.

Остальные рассуждения такие же, как и при доказательстве предыдущей леммы. □

Из следствия 3.2.1, леммы 3.3.1 и леммы 3.3.2 вытекает следующий результат.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\dots,n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2,\pi]$, $a_0 \ge 0$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$, функция f удовлетворяет одному из следующих условий:*

(i) $f \in C([0,T]; D_A)$ при $\alpha_n = 1$ и $f \in C([0,T]; D_A) \cap C^1_\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$ для некоторого $\gamma \in (0,1)$ при $\alpha_n < 1$;

(ii) $f \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$ при $\alpha_n = 1$ и $f \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z}) \cap C^1_\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$ для некоторого $\gamma \in (0,1)$ при $\alpha_n < 1$.

Тогда функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Y_0(t-s)f(s)ds$$

является единственным решением задачи (3.1.1), (3.3.1).

3.4. Теорема о возмущении для операторов класса $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$

Теорема 3.4.1. *Пусть* $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, $B \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, *для всех* $x \in D_A \subset D_B$

$$\|Bx\|_{\mathcal{Z}} \leq \beta \|Ax\|_{\mathcal{Z}} + \gamma \|x\|_{\mathcal{Z}}, \tag{3.4.1}$$

где $\beta, \gamma \geq 0$, *существует* $q \in (0,1)$, *такое, что* $\beta(1+K(\theta,a)) < q$ *для любых* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. *Тогда* $A + B \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_1)$ *для достаточно большого* $a_1 > a_0$.

Доказательство. Выберем $l > \sin^{-1}\theta_0$, $\lambda \in S_{\theta,la} \subset S_{\theta,a}$ для некоторого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, тогда из (3.4.1) следует, что

$$\|BR_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \beta \|AR_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \gamma \|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq$$
$$\leq \beta \left(1 + \frac{|\lambda|^{\sigma_0+1} K_A(\theta,a)}{|\lambda - a|^{\alpha_0}}\right) + \frac{\gamma K_A(\theta,a)}{|\lambda - a|^{\alpha_0} |\lambda|^{\sigma_n - \sigma_0 - 1}},$$

где $K_A(\theta, a)$ — константа из определения 3.2.1 для оператора A. Обратим внимание, что значение

$$\frac{|\lambda|^{\alpha_0}}{|\lambda - a|^{\alpha_0}} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{|\lambda|}\right)^{\alpha_0}} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{l \sin\theta_0}\right)^{\alpha_0}}$$

близко к 1 и

$$\frac{|\lambda|^{\alpha_0}}{|\lambda - a|^{\alpha_0} |\lambda|^{\sigma_n}} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{l \sin\theta_0}\right)^{\alpha_0} (la_0 \sin\theta_0)^{\sigma_n}}$$

близко к 0 для достаточно большого числа l. Поэтому для такого l имеем

$$\|BR_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \beta \left(1 + \frac{K_A(\theta,a)}{\left(1 - \frac{1}{l \sin\theta_0}\right)^{\alpha_0}}\right) + \frac{\gamma K_A(\theta,a)}{\left(1 - \frac{1}{l \sin\theta_0}\right)^{\alpha_0} (la_0 \sin\theta_0)^{\sigma_n}} \leq$$
$$\leq \beta(1 + K(\theta,a)) + \varepsilon \leq q < 1.$$

Следовательно,

$$R_{\lambda^{\sigma_n}}(A+B) = R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)(I - BR_{\lambda^{\sigma_n}}(A))^{-1} = R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) \sum_{k=0}^{\infty} [BR_{\lambda^{\sigma_n}}(A)]^k,$$

$$\frac{|\lambda - la|}{|\lambda - a|} = \left|1 - \frac{(l-1)a}{\lambda - a}\right| \leq 1 + \frac{(l-1)a}{|\lambda - a|} < 1 + \frac{1}{\sin\theta_0},$$

$$\|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A+B)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K_A(\theta, a)}{(1-q)|\lambda - a|^{\alpha_0}|\lambda|^{\sigma_n - \sigma_0 - 1}} \leq \frac{K_A(\theta, a)\left(1 + \frac{1}{\sin\theta_0}\right)^{\alpha_0}}{(1-q)|\lambda - la|^{\alpha_0}|\lambda|^{\sigma_n - \sigma_0 - 1}}.$$

Поэтому, $A + B \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_1)$ с константами $a_1 = la_0$,

$$K_{A+B}(\theta, a) = \frac{K_A(\theta, a/l)}{1-q}\left(1 + \frac{1}{\sin\theta_0}\right)^{\alpha_0}$$

для всех $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_1$ □

Замечание 3.4.1. *Каждый оператор* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ *удовлетворяет условию* (3.4.1) *при* $\beta = 0$, $\gamma = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$.

3.5. Начально-краевая задача для дробной модели вязкоупругой жидкости Олдройда

Пусть $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\sigma_n \in (0, 2)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим линеаризованную модель динамики вязкоупругой жидкости Олдройда порядка $N = 1$ [29] с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна по времени

$$D^{\sigma_k}v(x, 0) = v_k(x),\ D^{\sigma_k}w(x, 0) = w_k(x),\ x \in \Omega,\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3.5.1}$$

$$v(x, t) = 0, \quad w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \tag{3.5.2}$$

$$D^{\sigma_n}v = \mu\Delta v + \Delta w - \nabla p + g, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{3.5.3}$$

$$D^{\sigma_n}w = bv + cw + h, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{3.5.4}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \cdot w = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]. \tag{3.5.5}$$

Здесь D^{σ_k}, $k = 0, 1, \ldots, n$, есть производные Джрбашяна — Нерсесяна по переменной t, $T > 0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ — пространственные переменные, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ — вектор скорости жидкости, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_d)$ — функция памяти для скорости, определяемая интегралом Вольтерра по переменной t

для v, $\nabla p = (p_{x_1}, p_{x_2}, \ldots, p_{x_d})$ — градиент давления жидкости, Δ — оператор Лапласа по всем пространственным переменным, $\Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_d)$, $\Delta w = (\Delta w_1, \Delta w_2, \ldots, \Delta w_d)$, $\nabla \cdot v = v_{1x_1} + v_{2x_2} + \cdots + v_{dx_d}$, $\nabla \cdot w = w_{1x_1} + w_{2x_2} + \cdots + w_{dx_d}$. Заданы константы $\mu, b, c \in \mathbb{R}$ и функции $g, h : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$.

Возьмем $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1 := (W_2^1(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^2 := (W_2^2(\Omega))^d$. Замыкание $\mathfrak{L} := \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^d : \nabla \cdot u = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а в норме пространства $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Обозначим также $\mathbb{H}_\sigma^2 := \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение для $\mathbb{H}_\sigma$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi := I - \Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ — соответствующие проекторы.

Оператор $B = \Sigma\Delta$, расширенный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет действительный отрицательный дискретный спектр с собственными значениями конечных кратностей, сгущающимися только на $-\infty$ [23]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора B, пронумерованные по невозрастанию с учетом их кратностей, через $\{\varphi_k\}$ будем обозначать ортонормированную систему соответствующих собственных функций, образующую базис в $\mathbb{H}_\sigma$ [23].

Принимая во внимание уравнения несжимаемости (3.5.5), положим $\mathcal{Z} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\sigma$ и определим в $\mathcal{Z}$ оператор

$$A = \begin{pmatrix} \mu B & B \\ bI & cI \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z}), \quad D_A = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\sigma^2. \tag{3.5.6}$$

Теорема 3.5.1. *Пусть* $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\sigma_n \in [1, 2)$, $\mu > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Z} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\sigma$. *Тогда оператор* A, *определенный в* (3.5.6), *принадлежит классу* $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ *для некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 > 0$.

Доказательство. Для $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a_0 > 0$, $a > a_0$, $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\frac{|\lambda - a|}{|\lambda|} \le 1 + \frac{a}{|\lambda|} \le 1 + \frac{1}{\sin\theta_0},$$

поэтому

$$\frac{1}{|\lambda|^{\sigma_n}} = \frac{|\lambda - a|^{\alpha_0}}{|\lambda|^{\alpha_0}} \frac{1}{|\lambda - a|^{\alpha_0}|\lambda|^{\sigma_n - \alpha_0}} \le \frac{\left(1 + \frac{1}{\sin\theta_0}\right)^{\alpha_0}}{|\lambda - a|^{\alpha_0}|\lambda|^{\sigma_n - \sigma_0 - 1}}.$$

Заметим, что для доказательства включения $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ вместо оценок вида $\|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K}{|\lambda - a|^{\alpha_0}|\lambda|^{\sigma_n - \sigma_0 - 1}}$, достаточно получить неравенства $\|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K}{|\lambda|^{\sigma_n}}$.

Возьмем $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/\sigma_n)$, $a_0 = (l|c|)^{1/\sigma_n}$, где $l > 1$ достаточно велико, тогда для $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$

$$\lambda^{\sigma_n} I - A = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \lambda^{\sigma_n} - \mu\lambda_k & -\lambda_k \\ -b & \lambda^{\sigma_n} - c \end{pmatrix} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$(\lambda^{\sigma_n} I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{\sigma_n} - c}{(\lambda^{\sigma_n} - c)(\lambda^{\sigma_n} - \mu\lambda_k) - b\lambda_k} & \frac{\lambda_k}{(\lambda^{\sigma_n} - c)(\lambda^{\sigma_n} - \mu\lambda_k) - b\lambda_k} \\ \frac{b}{(\lambda^{\sigma_n} - c)(\lambda^{\sigma_n} - \mu\lambda_k) - b\lambda_k} & \frac{\lambda^{\sigma_n} - \mu\lambda_k}{(\lambda^{\sigma_n} - c)(\lambda^{\sigma_n} - \mu\lambda_k) - b\lambda_k} \end{pmatrix} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Поскольку $\lambda^{\sigma_n} \in S_{\theta_0\sigma_n, l|c|}$ для $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$, то $|\lambda^{\sigma_n} - c| \geq (l-1)|c| \sin(\pi - \theta_0\sigma_n)$, при достаточно большом l значение $|b(\lambda^{\sigma_n} - c)^{-1}|$ достаточно мало и

$$\arg\left(\mu + \frac{b}{\lambda^{\sigma_n} - c}\right) < \frac{1}{2}\left(\pi - \theta_0\sigma_n\right).$$

Зафиксируем такие l, $a_0 = (l|c|)^{1/\sigma_n}$, тогда для $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ имеем $\lambda^{\sigma_n} \in S_{\theta_0\sigma_n, l|c|} \subset S_{\theta_0\sigma_n, 0}$ и

$$\left|\frac{\lambda^{\sigma_n} - c}{(\lambda^{\sigma_n} - c)(\lambda^{\sigma_n} - \mu\lambda_k) - b\lambda_k}\right| = \frac{1}{\left|\lambda^{\sigma_n} - \lambda_k\left(\mu + \frac{b}{\lambda^{\sigma_n} - c}\right)\right|} \leq \frac{1}{|\lambda|^{\sigma_n} \sin\frac{\pi - \theta_0\sigma_n}{2}},$$

$$\left|\frac{\lambda_k}{(\lambda^{\sigma_n} - c)(\lambda^{\sigma_n} - \mu\lambda_k) - b\lambda_k}\right| = \frac{1}{\left|(\lambda^{\sigma_n} - c)\left(\frac{\lambda^{\sigma_n}}{\lambda_k} - \mu\right) - b\right|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|^{\sigma_n} \sin(\pi - \theta_0\sigma_n) \inf\limits_{k \in \mathbb{N}, \lambda \in S_{\theta_0, a_0}} \left|\frac{\lambda^{\sigma_n}}{\lambda_k} - \mu\right| - b} \leq$$

$$\leq \frac{2}{|\lambda|^{\sigma_n} \sin(\pi - \theta_0\sigma_n) \inf\limits_{k \in \mathbb{N}, \lambda \in S_{\theta_0, a_0}} \left|\frac{\lambda^{\sigma_n}}{\lambda_k} - \mu\right|},$$

если возьмем l, такое, что

$$|b| < \frac{l|c|}{2} \sin^{\sigma_n}\theta_0 \sin(\pi - \theta_0\sigma_n) \inf_{k \in \mathbb{N}, \lambda \in S_{\theta_0, a_0}} \left|\frac{\lambda^{\sigma_n}}{\lambda_k} - \mu\right| \leq$$

$$\leq \frac{|\lambda|^{\sigma_n}}{2}\sin(\pi-\theta_0\sigma_n)\inf_{k\in\mathbb{N},\lambda\in S_{\theta_0,a_0}}\left|\frac{\lambda^{\sigma_n}}{\lambda_k}-\mu\right|.$$

Далее, для больших $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{b}{(\lambda^{\sigma_n}-c)(\lambda^{\sigma_n}-\mu\lambda_k)-b\lambda_k}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|b|}{\left|\left(\lambda^{\sigma_n}-\frac{c+\mu\lambda_k+\sqrt{\frac{(c-\mu\lambda_k)^2-4b\lambda_k}{2}}}{2}\right)\left(\lambda^{\sigma_n}-\frac{c+\mu\lambda_k-\sqrt{\frac{(c-\mu\lambda_k)^2-4b\lambda_k}{2}}}{2}\right)\right|} \leq$$

$$\leq \frac{|b|}{|\lambda|^{2\sigma_n}\sin^2(\pi-\theta_0\sigma_n)} \leq \frac{|b|(l|c|)^{-1}\sin^{-\sigma_n}\theta_0}{|\lambda|^{\sigma_n}\sin^2(\pi-\theta_0\sigma_n)},$$

$$\left|\frac{\lambda^{\sigma_n}-\mu\lambda_k}{(\lambda^{\sigma_n}-c)(\lambda^{\sigma_n}-\mu\lambda_k)-b\lambda_k}\right| \leq \frac{1}{\left|\lambda^{\sigma_n}-c-\frac{b\lambda_k}{\lambda^{\sigma_n}-\mu\lambda_k}\right|} \leq \frac{2}{|\lambda|^{\sigma_n}}$$

при достаточно большом l, поскольку

$$\sup_{k\in\mathbb{N},\lambda\in S_{a_0,\theta_0}}\left|c+\frac{b\lambda_k}{\lambda^{\sigma_n}-\mu\lambda_k}\right| < \infty.$$

Таким образом, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ с $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/\sigma_n)$, $a_0 = (l|c|)^{1/\sigma_n}$ при выбранном достаточно большом $l > 1$. $\square$

Теорема 3.5.2. *Пусть* $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\ldots,n$, $\alpha_0+\alpha_n > 1$, $\sigma_n \in [1,2)$, $\Sigma g, h \in C([0,T];\mathbb{H}^2_\sigma) \cup C^\gamma([0,T];\mathbb{H}_\sigma)$ *при* $\alpha_n = 1$ *и* $\Sigma g, h \in (C([0,T];\mathbb{H}^2_\sigma) \cap C^1_\gamma([0,T];\mathbb{H}_\sigma)) \cup (C^\gamma([0,T];\mathbb{H}_\sigma) \cap C^1_\gamma([0,T];\mathbb{H}_\sigma))$ *при* $\alpha_n < 1$, $\gamma \in (0,1)$. *Тогда задача* (3.5.1)–(3.5.5) *имеет единственное решение.*

Доказательство. При выбранных выше $\mathcal{Z}$ и A задача (3.5.1)–(3.5.5) сводится к абстрактной задаче (3.1.1), (3.3.1). Поскольку мы находим вектор-функции $v(\cdot,t)$ и $w(\cdot,t)$ со значениями в $\mathbb{H}_\sigma$ для каждого $t \in (0,T]$, вместо уравнения (3.5.3) рассмотрим его проекцию на $\mathbb{H}_\sigma$

$$D^{\sigma_n}v = \mu Bv + Bw + \Sigma g, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T],$$

В этом случае проекция уравнения (3.5.4) на $\mathbb{H}_\sigma$ имеет вид

$$D^{\sigma_n}w = bv + cw + \Sigma h, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T],$$

следовательно, $\Pi h \equiv 0$. По теореме 3.5.1 и теореме 3.3.1 получим требуемое. $\square$

Замечание 3.5.1. Если мы нашли вектор-функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$, то получим градиент давления

$$\nabla p(\cdot,t) = \mu\Pi\Delta v(\cdot,t) + \Pi\Delta w(\cdot,t) + \Pi f(\cdot,t)$$

из проекции уравнения (3.5.3) на подпространство $\mathbb{H}_\pi$.

3.6. Пары инвариантных подпространств

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства. Обозначим через $D_L, D_M \subset \mathcal{X}$ области определения операторов $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ соответственно, $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) := L(\mu L - M)^{-1}$, через $\rho^L(M)$ обозначим множество $\mu \in \mathbb{C}$, такое, что отображение $\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathcal{Y}$ инъективно и $R^L_\mu(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L^L_\mu(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

Лемма 3.6.1. *Пусть $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$. Тогда*

(i) $\mathrm{im} R^L_\lambda(M) = \mathrm{im} R^L_\mu(M)$, $\mathrm{im} L^L_\lambda(M) = \mathrm{im} L^L_\mu(M)$;

(ii) $\ker R^L_\mu(M) = \ker L$, $\ker L^L_\mu(M) = \{M\varphi : \varphi \in D_M \cap \ker L\}$.

Доказательство. (i) Псевдорезольвентное тождество

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda L - M)^{-1} L (\mu L - M)^{-1} \tag{3.6.1}$$

подразумевает, что

$$R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) R^L_\lambda(M) R^L_\mu(M),$$

$$L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M) = (\mu - \lambda) L^L_\lambda(M) L^L_\mu(M).$$

Следовательно, подпространства $\ker R^L_\mu(M) = \ker L$, $\mathrm{im} R^L_\mu(M)$, $\ker L^L_\mu(M)$, $\mathrm{im} L^L_\mu(M)$ не зависят от параметра $\mu \in \rho^L(M)$.

(ii) Первое равенство в утверждении (ii) очевидно. Пусть $L^L_\mu(M) y = 0$ для $\mu \in \rho^L(M)$, тогда $z = (\mu L - M)^{-1} y \in \ker L \cap D_M$, $y = -Mz$. $\square$

Определение 3.6.1. Пусть $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Пара операторов (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\sigma_n > 0$, если

(i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ выполняется включение $\lambda^{\sigma_n} \in \rho^L(M)$;

(ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует $K(\theta, a) > 0$, такое, что для всех $\mu \in S_{\theta,a}$

$$\max\{\|R^L_{\mu^{\sigma_n}}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\mu^{\sigma_n}}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\mu - a|^{\alpha_0}|\mu|^{\sigma_n-\sigma_0-1}}.$$

Замечание 3.6.1. Если существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$, то $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, тогда и только тогда, когда $L^{-1}M \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ и $ML^{-1} \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$.

Введем обозначения $\ker R^L_\mu(M) = \mathcal{X}^0$, $\ker L^L_\mu(M) = \mathcal{Y}^0$. Обозначим через $\mathcal{X}^1$ $(\mathcal{Y}^1)$ замыкание образа $\mathrm{im}R^L_\mu(M)$ $(\mathrm{im}L^L_\mu(M))$ в норме пространства $\mathcal{X}$ $(\mathcal{Y})$. Через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $D_{L_k} := D_L \cap \mathcal{X}^k$ $(D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$.

Лемма 3.6.2. *Пусть* $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. *Тогда*

(i) $\ker R^L_\mu(M) \cap \mathrm{im}R^L_\mu(M) = \{0\}$;

(ii) $\ker L^L_\mu(M) \cap \mathrm{im}L^L_\mu(M) = \{0\}$;

(iii) $L_0, M_0 : \mathcal{X}^0 \to \mathcal{Y}^0$ *и существует обратный оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$;

(iv) *для всех* $x \in \mathcal{X}^1$, $y \in \mathcal{Y}^1$ $\lim\limits_{n\to\infty} nR^L_n(M)x = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} nL^L_n(M)y = y$;

(v) *при условии рефлексивности пространства* $\mathcal{X}$ $(\mathcal{Y})$ *имеет место равенство* $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$ $(\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1)$.

Доказательство. (i) Пусть $Lx = 0$, $x = R^L_\mu(M)u$ для некоторых $u \in \mathcal{X}$, $\mu \in \rho^L(M)$. Следовательно, по лемме 3.6.1 (ii) $Lu = M\varphi$ с некоторым $\varphi \in D_M \cap \ker L$. Тогда для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$

$$R^L_n(M)u = (nL - M)^{-1}M\varphi = nR^L_n(M)\varphi - \varphi = -\varphi \to 0$$

при $n \to \infty$ благодаря условию $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. Таким образом, $\varphi = 0$, $Lu = 0$, $x = 0$.

(ii) Пусть $L^L_\mu(M)y = 0$, $y = L^L_\mu(M)z$ для некоторых $z \in \mathcal{Y}$, $\mu \in \rho^L(M)$. Возьмем $x = (\mu L - M)^{-1}y$, тогда $Lx = 0$, $x = R^L_\mu(M)(\mu L - M)^{-1}z = R^L_\mu(M)u$, где $u = (\mu L - M)^{-1}z$. В силу предыдущего этапа доказательства $x = 0$, следовательно, $y = 0$.

(iii) Для $x \in \mathcal{X}^0$, $\mu \in \rho^L(M)$ имеем $L^L_\mu(M)Lx = LR^L_\mu(M)x = 0$, $L^L_\mu(M)Mx = MR^L_\mu(M)x = 0$, поэтому, $L_0, M_0 : \mathcal{X}^0 \to \mathcal{Y}^0$.

Из равенства (3.6.1) следует, что при $\mu, \beta \in S_{\theta_0, a_0}$

$$(\mu^{\sigma_n}L - M)^{-1} = (\beta^{\sigma_n}L - M)^{-1} + (\beta^{\sigma_n} - \mu^{\sigma_n})R^L_{\mu^{\sigma_n}}(M)(\beta^{\sigma_n}L - M)^{-1}.$$

Тогда из условия $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ получаем, что

$$\exists C > 0 \quad \forall \mu \in S_{\theta_0, a_0} \setminus \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - a_0| \leq 1\} \quad \|(\mu^{\sigma_n}L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} \leq C.$$

Следовательно, при $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ для некоторых $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ имеем

$$N = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (\mu L - M)^{-1}\frac{e^\mu}{\mu}d\mu\Big|_{\mathcal{Y}^0} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0).$$

При этом

$$M_0N = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (\mu L^L_\mu(M) - I)\frac{e^\mu}{\mu}d\mu\Big|_{\mathcal{Y}^0} = I_{\mathcal{Y}^0},$$

$$NM_0x = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (\mu R^L_\mu(M) - I)\frac{e^\mu}{\mu}d\mu x = x$$

для $x \in D_{M_0}$. Таким образом, $N = M_0^{-1}$.

(iv) Пусть $x = R^L_\lambda(M)u$ для некоторого $\lambda \in \rho^L(M)$, $u \in \mathcal{X}$. Тогда по определению 3.6.1

$$nR^L_n(M)x = (I + (nL - M)^{-1}M)x = x + R^L_n(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu =$$

$$= x + R_n^L(M)(\lambda R_\lambda^L(M) - I)u,$$

$$\|R_n^L(M)(\lambda R_\lambda^L(M) - I)u\|_{\mathcal{X}} \le \frac{C\|(\lambda R_\lambda^L(M) - I)u\|_{\mathcal{X}}}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} nR_n^L(M)x = x$ для всех $x \in \mathrm{im} R_\lambda^L(M)$. Это подпространство плотно в $\mathcal{X}^1$, а семейство операторов $\{nR_n^L(M) : n \in \mathbb{N}, n^{1/\sigma_n} > 2(a_0+1)\}$ ограничено в $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ в силу условия $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta, a)$.

Аналогично доказывается второе равенство.

(v) Возьмем вектор $x \in \mathcal{X}$. Из условия $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ следует, что последовательность $\{kR_k^L(M)x : k \in \mathbb{N},\ k > 2^{\sigma_n}(a_0+1)^{\sigma_n}\}$ ограничена в $\mathcal{X}$. Из рефлексивности пространства $\mathcal{X}$ следует, что существует подпоследовательность $\{k_n R_{k_n}^L(M)x\}$, слабо сходящаяся к некоторому $u \in \mathcal{X}$. Из замкнутости линейного подпространства $\mathcal{X}^1$ следует его слабая замкнутость, поэтому $u \in \mathcal{X}^1$.

Пусть $u_n = k_n R_{k_n}^L(M)x - u$, тогда $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} R_\mu^L(M)u_n = \lim_{n\to\infty} k_n R_{k_n}^L(M) R_\mu^L(M)x - R_\mu^L(M)u = R_\mu^L(M)(x-u) \quad (3.6.2)$$

согласно утверждению (iv). Для любого x^* из сопряженного пространства $\mathcal{X}^* = \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathbb{C})$ имеем $x^*(R_\mu^L(M)u_n) \equiv u^*(u_n)$, где $u^* \in \mathcal{X}^*$. Следовательно, в силу (3.6.2) $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} R_\mu^L(M)u_n = 0 = R_\mu^L(M)(x-u)$, поэтому, $x - u \in \mathcal{X}^0$.

Таким образом, для произвольного $x \in \mathcal{X}$ имеем $x = u + v$, где $v = x - u \in \mathcal{X}^0$, $u \in \mathcal{X}^1$.

Для пространства $\mathcal{Y}$, утверждение доказывается аналогично. □

Согласно лемме 3.6.2, оператор $P = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} R_n^L(M)$ $(Q = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} L_n^L(M))$ является проектором вдоль $\mathcal{X}^0$ $(\mathcal{Y}^0)$ на подпространство $\mathcal{X}^1$ $(\mathcal{Y}^1)$.

Следствие 3.6.1. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, при этом $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. Тогда*

(i) $\forall x \in D_L$ $Px \in D_L$, $LPx = QLx$, $L(I-P)x = (I-Q)Lx$;

(ii) $\forall x \in D_M$ $Px \in D_M$, $MPx = QMx$, $M(I-P)x = (I-Q)Mx$.

Доказательство. Для $x \in D_M$ из замкнутости M и существования пределов

$$\lim_{n\to\infty} nR_n^L(M)x = Px, \quad \lim_{n\to\infty} MnR_n^L(M)x = \lim_{n\to\infty} nL_n^L(M)Mx = QMx,$$

следует первое равенство утверждения (ii). Второе равенство следует из первого очевидным образом.

Утверждение (i) доказывается аналогично. $\square$

Следствие 3.6.2. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, при этом $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. Тогда*

(i) $L_1, M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$;

(ii) *существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$.

Доказательство. Вложения $\mathrm{im}L_k \subset \mathcal{Y}^k$, $\mathrm{im}M_k \subset \mathcal{Y}^k$, $k = 0, 1$ следуют из предыдущего следствия. Покажем, что замыкание $\overline{D}_{M_1}$ совпадает с $\mathcal{X}^1$. В силу следствия 3.6.1 (ii) для каждого $x_n \in D_M$ $Px_n \in D_{M_1}$. Поскольку D_M плотно в пространстве $\mathcal{X}$, для любого $x \in \mathcal{X}$, в частности для $x = Px \in \mathcal{X}^1$, существует последовательность $\{x_n\} \subset D_M$, сходящаяся к x. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} Px_n = Px = x$, значит D_{M_1} плотно в $\mathcal{X}^1$.

Плотность множества D_{M_0} в пространстве $\mathcal{X}^0$ и множества D_{L_k} в $\mathcal{X}^k$, $k = 0, 1$, может быть доказано аналогично с помощью проектора $I - P$ в первом случае.

Оператор L_1 инъективен, так как $\ker L = \mathcal{X}^0$. В то же время $L_\mu^L(M) = L_\mu^{L_1}(M_1)Q$. Следовательно, $\mathrm{im}L_\mu^L(M) = \mathrm{im}L_\mu^{L_1}(M_1) \subset \mathrm{im}L_1$ и $\mathcal{Y}^1 \subset \overline{\mathrm{im}L_1}$. Поэтому образ $\mathrm{im}L_1$ плотен в $\mathcal{Y}^1$ и L_1^{-1} плотно определен. Он замкнут как обратный к замкнутому оператору. $\square$

Введем обозначения $S = L_1^{-1}M_1 : D_S \to \mathcal{X}^1$, $D_S = \{x \in D_{M_1} : M_1x \in \mathrm{im}L_1\}$; $V = M_1L_1^{-1} : D_V \to \mathcal{Y}^1$, $D_V = \{y \in \mathrm{im}L_1 : L_1^{-1}y \in D_{M_1}\}$.

Лемма 3.6.3. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, при этом $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. Тогда D_S плотно в $\mathcal{X}$, D_V плотно в $\mathcal{Y}$.*

Доказательство. Подпространство D_{L_1} плотно в $\mathcal{X}^1$. Следовательно, для $x \in \mathcal{X}^1$ существует последовательность $\{x_n\} \subset D_{L_1}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} nR_n^{L_1}(M_1)x_n = \lim\limits_{n\to\infty} nR_n^{L_1}(M_1)(x_n - x) + \lim\limits_{n\to\infty} nR_n^{L_1}(M_1)x = x$, следовательно, $R_\mu^{L_1}(M_1)[D_{L_1}]$ — плотное множество в $\mathcal{X}^1$. Для $x = R_\mu^{L_1}(M_1)u \in R_\mu^{L_1}(M_1)[D_{L_1}]$, имеем $M_1 x = L_1(\mu x - u)$ и $x \in D_{L_1^{-1}M_1}$. Таким образом, D_S плотно в $\mathcal{X}^1$.

Множество $\mathrm{im}L_\mu^L(M) = \mathrm{im}L_\mu^{L_1}(M_1)Q$ плотно в $\mathcal{Y}^1$, поэтому для $y = L_\mu^{L_1}(M_1)z \in L_\mu^{L_1}(M_1)[\mathcal{Y}^1]$ имеем $L_1^{-1}y = (\mu L_1 - M_1)^{-1}z \in D_{M_1}$. Таким образом, $\mathrm{im}L_\mu^{L_1}(M_1)Q \subset D_V$ и D_V плотно в $\mathcal{Y}^1$. $\square$

Лемма 3.6.4. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, при этом $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$.*

(i) *Если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то $S \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$.*

(ii) *Если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, то $V \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1)$.*

Доказательство. (i) Пусть $\{x_n\} \subset D_S$ сходится к $x \in \mathcal{X}^1$ и $\{Sx_n\}$ сходится к $u \in \mathcal{X}^1$. Так как $\{Sx_n\} \subset D_{L_1}$, то $L_1 S x_n = M_1 x_n \to L_1 u$ при $n \to \infty$ в случае непрерывности оператора L_1. Из замкнутости оператора M_1 тогда следует, что $x \in D_{M_1}$, $M_1 x = L_1 u$, $Sx = u$.

Если оператор M_1 непрерывен, то $M_1 x_n \to M_1 x$ при $n \to \infty$, а в силу замкнутости оператора L_1^{-1} получим $M_1 x \in D_{L_1^{-1}}$, $u = L_1^{-1} M_1 x = Sx$.

(ii) Предположим, что $\{y_n\} \subset D_V$ сходится к $y \in \mathcal{Y}^1$ и $\{Vy_n\}$ сходится к $z \in \mathcal{Y}^1$. Возьмем $x_n = L_1^{-1} y_n$, тогда $x_n \to L_1^{-1} y$ при $n \to \infty$, если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$. В силу замкнутости оператора M_1 имеем $L_1^{-1} y \in D_{M_1}$, $M_1 L_1^{-1} y = z$.

Если $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, тогда $L_1^{-1} y_n \to M_1^{-1} z$ при $n \to \infty$, а поскольку оператор M_1 замкнут, получаем $M_1^{-1} z \in D_{M_1}$, $z = M_1 L_1^{-1} y = Vy$. $\square$

В силу леммы 3.6.4 получаем следующие утверждения.

Следствие 3.6.3. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, при этом $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$.*

(i) *Если* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, *то* $S \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$.

(ii) *Если* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, *то* $V \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$.

Доказательство. В силу предыдущих результатов этого раздела и определения 3.6.1 операторы $S \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$, $V \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1)$ удовлетворяют условиям определения 3.2.1. □

Таким образом, получим следующую теорему о парах инвариантных подпространств.

Теорема 3.6.1. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны, при этом* $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. *Тогда*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) *проектор* P (Q) *на подпространство* $\mathcal{X}^1$ $(\mathcal{Y}^1)$ *вдоль подпространства* $\mathcal{X}^0$ $(\mathcal{Y}^0)$ *имеет вид* $P = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nR^L_n(M)$ $(Q = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nL^L_n(M))$;

(iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$;

(iv) *существуют обратные операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *и* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$;

(v) *если* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, *то* $S \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$, *причем,* $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;

(vi) *если* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, *то* $V \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1)$, *причем,* $V \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

3.7. Вырожденные разрешающие семейства операторов

Лемма 3.7.1. *Пусть* $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\Gamma = \partial S_{\theta,a}$ *для некоторого* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. *Тогда семейства*

$$\left\{ X_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{\sigma_n - 1 + \beta} R^L_{\mu^{\sigma_n}}(M) e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : \ t > 0 \right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\left\{Y_\beta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\sigma_n-1+\beta}L^L_{\mu^{\sigma_n}}(M)e^{\mu t}d\mu\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}):\ t>0\right\},\quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

аналитически продолжимы в сектор $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$, *причем,*

$$\max\{\|X_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},\|Y_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\}\le C_\beta(\theta,a)e^{a\mathrm{Re}t}(|t|^{-1}+a)^\beta,\quad \beta\ge 0,$$

$$\max\{\|X_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},\|Y_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\}\le C_\beta(\theta,a)e^{a\mathrm{Re}t}|t|^{-\beta},\quad \beta< 0.$$

Доказательство леммы ничем не отличается от доказательства леммы 2.1 из [43].

Очевидно, что $X_\beta(t)|_{\mathcal{X}^0}=0$, $Y_\beta(t)|_{\mathcal{Y}^0}=0$ для всех $t>0$. Обозначим $X_\beta(t)|_{\mathcal{X}^1}=X^1_\beta(t)$, $Y_\beta(t)|_{\mathcal{Y}^1}=Y^1_\beta(t)$, $t>0$.

Лемма 3.7.2. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны, при этом* $(L,M)\in\mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$. *Тогда для* $\beta\in\mathbb{R}$, $t>0$

$$X_\beta(t)=PX_\beta(t)=X^1_\beta(t)P,\quad \mathcal{X}^0\subset\ker X_\beta(t),\quad \mathrm{im}X_\beta(t)\subset\mathcal{X}^1;$$

$$Y_\beta(t)=QY_\beta(t)=Y^1_\beta(t)Q,\quad \mathcal{Y}^0\subset\ker Y_\beta(t),\quad \mathrm{im}Y_\beta(t)\subset\mathcal{Y}^1;$$

$$LX_\beta(t)x=Y_\beta(t)Lx,\ x\in D_L\quad MX_\beta(t)x=Y_\beta(t)Mx,\ x\in D_M.$$

Доказательство. Действительно, например, для $\beta\in\mathbb{R}$, $t>0$, $y\in\mathcal{Y}$ по теореме 3.6.1 $Y_\beta(t)y=Y_\beta(t)(Qy+(I-Q)y)=Y_\beta(t)Qy=Y^1_\beta(t)Qy=QY_\beta(t)y$. Вложения в утверждении леммы следуют из двух предыдущих равенств.

Из вида $X_\beta(t)$, $Y_\beta(t)$ и замкнутости операторов L, M следуют два последних равенства в утверждении леммы. □

Следствие 3.7.1. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны, при этом* $(L,M)\in\mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$.

(i) *Если* $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, *то* $\{X^1_{\sigma_k}(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1):\ t>0\}$ *— единственное* k*-разрешающее семейство операторов для уравнения* $D^{\sigma_n}x(t)=Sx(t)$.

(ii) *Если* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, *то* $\{Y^1_{\sigma_k}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1) : t > 0\}$ *— единственное* k*-разрешающее семейство операторов для уравнения* $D^{\sigma_n}y(t) = Vy(t)$.

Доказательство. В условиях теоремы операторы S и V замкнуты и плотно определены, $(\mu^\alpha I - S)^{-1} = R^L_{\mu^\alpha}(M)$, $(\mu^\alpha I - V)^{-1} = L^L_{\mu^\alpha}(M)$, $\rho^L(M) = \rho(S) = \rho(V)$. Следовательно, по следствию 3.6.3 и теореме 3.2.2 утверждение верно. □

Замечание 3.7.1. В условиях следствия 3.7.1 из теоремы 3.2.2 следует существование сильных пределов

$$D^{\sigma_k}X^1_{\sigma_k}(0) = s\text{-}\lim_{t\to 0+} D^{\sigma_k}X^1_{\sigma_k}(t) = I_{\mathcal{X}^1}, \quad D^{\sigma_k}Y^1_{\sigma_k}(0) = s\text{-}\lim_{t\to 0+} D^{\sigma_k}Y^1_{\sigma_k}(t) = I_{\mathcal{Y}^1}.$$

3.8. Вырожденное линейное неоднородное уравнение

Рассмотрим начальную задачу

$$D^{\sigma_k}Px(0) = x_k, \quad k = 0,1,\dots,n-1, \tag{3.8.1}$$

для уравнения

$$D^{\sigma_n}Lx(t) = Mx(t) + f(t), \quad t \in (0,T], \tag{3.8.2}$$

где $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, D^{σ_k}, $k = 0,1,\dots,n,$ — дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна, которые определяются набором чисел $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \le 1$, $k = 0,1,\dots,n$, $\sigma_n > 0$, $f \in C([0,T);\mathcal{Y})$.

Функция $x : (0,T) \to D_L \cap D_M$ называется решением задачи (3.8.1), (3.8.2), если $x \in L_1(0,T;\mathcal{X})$, $D^{\sigma_k}Px \in AC([0,T];\mathcal{X})$, $k = 0,1,\dots,n-1$, $D^{\sigma_n}Lx \in C((0,T];\mathcal{Y})$, $Mx \in C((0,T];\mathcal{Y})$, равенство (3.8.2) справедливо для всех $t \in (0,T]$ и выполнены условия (3.8.1).

Теорема 3.8.1. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\dots,n$, $\alpha_0+\alpha_n > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a_0 \ge 0$, $(L,M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$, $f \in C([0,T];\mathcal{Y})$, *при* $\alpha_n = 1$ $L_1^{-1}Qf \in$

$C\big([0,T];D_{L_1^{-1}M_1}\big)\cup C^\gamma([0,T];\mathcal{X}^1\big)$, *при* $\alpha_n<1$ $L_1^{-1}Qf\in(C\big([0,T];D_{L_1^{-1}M_1}\big)\cap C^1_\gamma([0,T];\mathcal{X}^1))\cup(C^\gamma([0,T];\mathcal{X}^1\big)\cap C^1_\gamma([0,T];\mathcal{X}^1))$ *для некоторого* $\gamma\in(0,1)$, $x_k\in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k=0,1,\dots,n-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.8.1), (3.8.2), *при этом оно имеет вид*

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n-1}X^1_{-\sigma_k}(t)x_k+\int\limits_0^t X^1_{1-\sigma_n}(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds-M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Доказательство. Возьмем $x^0(t):=(I-P)x(t)$, $x^1(t):=Px(t)$. В силу теоремы 3.6.1 уравнение (3.8.2) можно свести к системе двух уравнений:

$$x^0(t)=-M_0^{-1}(I-Q)f(t),$$

$$D^{\sigma_n}x^1(t)=Sx^1(t)+L_1^{-1}Qf(t). \tag{3.8.3}$$

Поскольку $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, то по теореме 3.6.1 (v) $S\in\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$, поэтому по следствию 3.7.1 и теореме 3.3.1 существует единственное решение задачи $D^{\sigma_k}x^1(0)=x_k\in D_S$, $k=0,1,\dots,n-1$, для уравнения (3.8.3), и оно имеет вид

$$x^1(t)=\sum_{k=0}^{n-1}X^1_{-\sigma_k}(t)x_k+\int\limits_0^t X^1_{1-\sigma_n}(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds.$$

□

Теорема 3.8.2. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $\alpha_k\in(0,1]$, $k=0,1,\dots,n$, $\alpha_0+\alpha_n>1$, $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$, $a_0\geq0$, $(L,M)\in\mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0,a_0)$, $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, $f\in C((0,T);\mathcal{Y})$, *для некоторого* $\gamma\in(0,1)$ *при* $\alpha_n=1$ $Qf\in C\big([0,T);D_{M_1L_1^{-1}}\big)\cup C^\gamma([0,T);\mathcal{Y}^1\big)$, *при* $\alpha_n<1$ $Qf\in(C\big([0,T);D_{M_1L_1^{-1}}\big)\cap C^1_\gamma([0,T);\mathcal{Y}^1))\cup(C^\gamma([0,T);\mathcal{Y}^1\big)\cap C^1_\gamma([0,T);\mathcal{Y}^1))$, $x_k\in D_L\cap D_M\cap\mathcal{X}^1$, $k=0,1,\dots,n-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.8.1), (3.8.2), *при этом оно имеет вид*

$$x(t)=L_1^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}Y^1_{-\sigma_k}(t)Lx_k+L_1^{-1}\int\limits_0^t Y^1_{1-\sigma_n}(t-s)Qf(s)ds-M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Доказательство. В этом случае вместо уравнения (3.8.3) мы получаем уравнение

$$D^{\sigma_n}y^1(t) = Vy^1(t) + Qf(t),$$

где $y^1(t) := L_1x^1(t)$. По теореме 3.6.1 (vi), если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, то $V \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, поэтому в силу следствия 3.7.1 и по теореме 3.3.1 существует единственное решение задачи $D^{\sigma_k}y^1(0) = Lx_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, для уравнения (3.8.3). Заметим, что $Lx_k \in D_V$, поскольку $L_1^{-1}Lx_k = x_k \in D_{M_1}$, $k = 0, \dots, n-1$. Решение этой задачи имеет вид

$$y^1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Y^1_{-\sigma_k}(t)Lx_k + \int\limits_0^t Y^1_{1-\sigma_n}(t-s)Qf(s)ds.$$

□

Замечание 3.8.1. Если рассмотреть задачу $D^{\sigma_k}x(0) = x_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, для уравнения (3.8.2), то получим аналогичные результаты с дополнительными условиями согласования

$$D^{\sigma_k}M_0^{-1}(I-Q)f(0) = -(I-P)x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Замечание 3.8.2. Можно заметить, что начальные условия (3.8.1) в предположении $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ эквивалентны условиям

$$D^{\sigma_k}Lx(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3.8.4}$$

где $y_k = Lx_k$, или $x_k = L_1^{-1}y_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3.9. Начально-краевая задача для уравнения Дзекцера

Пусть $P_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} c_j\lambda^j$, $Q_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} d_j\lambda^j$, $c_j, d_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, \varrho \in \mathbb{N}$, в отличие от §2.6 потребуем, чтобы было $c_\varrho = 0$, $d_\varrho \neq 0$; как прежде $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda u)(\xi) := \sum_{|q|\le 2r} a_q(\xi)\frac{\partial^{|q|}u(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}}, \;\; \xi_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(\xi) := \sum_{|q|\leq r_l} b_{lq}(\xi) \frac{\partial^{|q|} u(\xi)}{\partial \xi_1^{q_1} \partial \xi_2^{q_2} \dots \partial \xi_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1, 2, \dots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \dots + q_d$, пучок операторов $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен [89]. Пусть оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{v \in H^{2r}(\Omega) : B_l v(\xi) = 0,\ l = 1, 2, \dots, r,\ \xi \in \partial\Omega\}$ действующий как $\Lambda_1 u := \Lambda u$, самосопряжен, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, пронумерованных в порядке невозрастания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратностей.

Рассмотрим уравнение

$$D^{\sigma_n} P_\varrho(\Lambda) u(\xi, t) = Q_\varrho(\Lambda) u(\xi, t) + h(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{3.9.1}$$

с краевыми условиями

$$B_l \Lambda^k u(\xi, t) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho - 1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \tag{3.9.2}$$

где D^{σ_k} — дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна по переменной t, соответствующие набору $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, функция $h : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$.

Возьмем $\varrho_0 := \max\{j \in \{0, 1, \dots, \varrho - 1\} : c_j \neq 0\}$,

$$\mathcal{X} = \{v \in H^{2r\varrho_0}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho_0 - 1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Y} = L_2(\Omega), \quad L = P_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = Q_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y}),$$

$$D_M = \{v \in H^{2r\varrho}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho - 1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

Если $P_\varrho(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то рассмотрим оператор $A = L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$ с областью определения $D_A = D_M$.

Теорема 3.9.1. *Пусть $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\sigma_n \in [1, 2)$, $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $(-1)^{\varrho - \varrho_0} d_\varrho / c_{\varrho_0} < 0$, $P_\varrho(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда оператор $A = L^{-1}M$ с областью определения $D_A = D_M$ принадлежит классу $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 > 0$.*

Доказательство. Возьмем $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/\sigma_n)$, $a_0 > 0$, тогда для $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$

$$(\lambda^{\sigma_n} I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\lambda^{\sigma_n} - \frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_\varrho(\lambda_k)}}, \quad \frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_\varrho(\lambda_k)} \sim (-1)^{\varrho-\varrho_0} \frac{d_\varrho}{c_{\varrho_0}} |\lambda_k|^{\varrho-\varrho_0}, \ k \to \infty.$$

Поэтому $\lambda^{\sigma_n} \in S_{\theta_0\sigma_n,a_0}$ и при достаточно большом $a_0 > 0$ имеем

$$\left| \lambda^{\sigma_n} - \frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_\varrho(\lambda_k)} \right| \geq |\lambda^{\sigma_n} - a_0^{\sigma_n}| \sin(\pi - \theta_0\sigma_n)$$

Таким образом, $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$. □

Теорема 3.9.2. *Пусть* $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\ldots,n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 1$, $\sigma_n \in [1,2)$, $(-1)^{\varrho-\varrho_0} d_\varrho / c_{\varrho_0} < 0$, $P_\varrho(\lambda_k) \neq 0$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, *при* $\alpha_n = 1$ $h \in C([0,T]; D_M) \cup C^\gamma([0,T]; \mathcal{X})$, *при* $\alpha_n < 1$ $h \in (C([0,T]; D_M) \cap C^1_\gamma([0,T]; \mathcal{X})) \cup (C^\gamma([0,T]; \mathcal{X}) \cap C^1_\gamma([0,T]; \mathcal{X}))$, $\gamma \in (0,1)$. *Тогда задача* (3.9.1), (3.9.2) *с начальными условиями*

$$D^{\sigma_k} u(\xi, 0) = u_k(x), \ \ k = 0,1,\ldots,n, \ \xi \in \Omega, \tag{3.9.3}$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Задача (3.9.1)–(3.9.3) редуцирована к абстрактной задаче (3.1.1), (3.3.1). По теореме 3.9.1 и теореме 3.3.1 получим требуемое. □

Пусть теперь, как в §2.6, $P_\varrho(\lambda_k) = 0$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.9.3. *Пусть* $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 0,1,\ldots,n$, $\sigma_n \in [1,2)$, $(-1)^{\varrho-\varrho_0} d_\varrho / c_{\varrho_0} < 0$, $P_\varrho(\lambda_k) = 0$ *для некоторых* $k \in \mathbb{N}$, *многочлены* P_ϱ *и* Q_ϱ *не имеют общих корней на множестве* $\{\lambda_k\}$. *Тогда* $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ *для некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 > 0$.

Доказательство. Имеем

$$(\lambda^{\sigma_n} L - M)^{-1} L = L(\lambda^{\sigma_n} L - M)^{-1} = \sum_{P_\varrho(\lambda_k) \neq 0} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\lambda^{\sigma_n} - \frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_\varrho(\lambda_k)}}.$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.9.1, получим требуемое. □

В условиях теоремы 3.9.3 проекторы имеют вид

$$P=\sum_{P_\varrho(\lambda_k)\neq 0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,\quad Q=\sum_{P_\varrho(\lambda_k)\neq 0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

а начальные условия с учетом замечания 3.8.2 могут быть заданы в виде

$$D^{\sigma_k}P_\varrho(\Lambda)u(\xi,0)=y_k(\xi),\ k=0,1,\dots,n-1,\quad \xi\in\Omega. \tag{3.9.4}$$

Тогда задача (3.9.1), (3.9.2), (3.9.4) может быть представлена как (3.8.2), (3.8.4) с пространствами $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ и операторами L, M, выбранными выше.

Очевидно, что ограничен оператор $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, можно также показать, что $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, поэтому с помощью теоремы 3.8.1 или теоремы 3.8.2 можно доказать однозначную разрешимость задачи (3.9.1), (3.9.2), (3.9.4), если $\alpha_0+\alpha_n>1$, $h\in C^\gamma([0,T];L_2(\Omega))$ и $y_k\in L[D_M]$, $k=0,1,\dots,n-1$, такие, что $\langle y_k,\varphi_l\rangle=0$ для всех $l\in\mathbb{N}$, для которых $P_\varrho(\lambda_l)=0$.

Частным случаем задачи (3.9.1), (3.9.2), (3.9.4) является начально-краевая задача

$$D^{\sigma_n}(\lambda-\Delta)u(\xi,t)=\alpha\Delta u(\xi,t)-\beta\Delta^2u(\xi,t)+h(\xi,t),(\xi,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{3.9.5}$$

$$u(\xi,t)=\Delta u(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{3.9.6}$$

$$D^{\sigma_k}(\lambda-\Delta)u(\xi,0)=u_k(\xi),\quad k=0,1,\dots,n,\quad \xi\in\Omega. \tag{3.9.7}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по всем пространственным переменным, D^{σ_k}, $k=0,1,\dots,n,$ — производные Джрбашяна — Нерсесяна по временной переменной t, $T>0$, $\beta>0$, $\alpha,\lambda\in\mathbb{R}$. Если $n=1$, $\alpha_0=\alpha_1=1$, то уравнение Дзекцера (3.9.5) моделирует некоторые процессы теории фильтрации [14].

Следуя общей схеме рассуждений, выбираем $\mathcal{X}=H_0^2(\Omega)=\{v\in H^2(\Omega):v(\xi)=0,\xi\in\partial\Omega\}$, $\mathcal{Y}=L_2(\Omega)$, операторы $L=\lambda I-\Delta\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M=\alpha\Delta-\beta\Delta^2\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_M=H_0^4(\Omega)=\{v\in H^4(\Omega):v(\xi)=\Delta v(\xi)=0,\xi\in\partial\Omega\}$.

Заключение

Основными результатами диссертационной работы являются теоремы об однозначной разрешимости начальных задач для линейных и квазилинейных уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна, как разрешенных относительно старшей производной, так и содержащих линейный оператор с нетривиальным ядром при этой производной. При этом линейная часть уравнения предполагается порождающей разрешающее семейство операторов, аналитическое в разрезанной комплексной плоскости (случай ограниченного оператора или относительно ограниченной пары операторов) или в секторе. Полученные абстрактные результаты применяются к исследованию начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных.

Дальнейшие перспективы развития тематики данной работы связаны с исследованием локальной и глобальной однозначной разрешимости задач для квазилинейных уравнений с аналитическим в секторе разрешающим семейством операторов, для линейных и квазилинейных уравнений с сильно непрерывным разрешающим семейством. Интерес будет представлять также исследование обратных задач и различных задач управления для уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна.

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, при этом

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+ := \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$; $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{0\} \cup \mathbb{R}_+$;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

2. Для $m \in \mathcal{Z}$, $\alpha \in (m-1, m]$ обозначаем $m := \lceil \alpha \rceil$.

3. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского и греческого алфавитов, операторы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

4. $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$;

$\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных в пространстве $\mathcal{X}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{Y}$;

$\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{C}l(\mathcal{X})$.

5. Область определения оператора A обозначается через D_A, его ядро — через $\ker A$, образ — через imA. Символом $\operatorname{span} \mathcal{B}$ обозначается линейная оболочка множества $\mathcal{B}$.

6. Через $L_q(\Omega; \mathcal{X})$ и $W_q^l(\Omega; \mathcal{X})$ обозначаются пространства Лебега и Соболева соответственно функций $u : \Omega \to \mathcal{X}$, где область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $q \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$, $H^l(\Omega; \mathcal{X}) := W_2^l(\Omega; \mathcal{X})$.

7. Символами I и $\mathbb{O}$ обозначаются соответственно тождественный и нулевой операторы, области определения которых ясны из контекста.

8. Символ $\square$ лежит в конце доказательства.

Список литературы

[1] Березгова, Р. З. Априорная оценка решения нелокальной краевой задачи для уравнения Маккендрика — фон Фёрстера дробного порядка / Р. З. Березгова // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 2020. — Т. 20, № 1. — С. 9–14.

[2] Богатырева, Ф. Т. Краевая задача со смещением для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна — Нерсесяна // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 2. С. 160–166.

[3] Богатырева, Ф. Т. Краевые задачи для уравнения в частных производных первого порядка с операторами Джрбашяна — Нерсесяна / Ф. Т. Богатырева // Челяб. физ.-мат. журн. — 2021. — Т. 6, вып. 4. — С. 403–416.

[4] Бояринцев, Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000. — 223 с.

[5] Бояринцев, Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы: Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.

[6] Булатов, М. В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений / М. В. Булатов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1994. — Т. 34, № 3. — С. 360–372.

[7] Герасимов, А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения / А. Н. Герасимов // Приклад. математика и механика. — 1948. — Т. 12, № 3. — С. 251–260.

[8] Глушак, А. В. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка / А. В. Глушак // Мат. заметки. — 2010. — Т. 87, № 5. — С. 684–693.

[9] Глушак, А. В. Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу / А. В. Глушак // Соврем. математика. Фундамент. направления. — 2006. — Т. 15. — С. 126–141.

[10] Демиденко, Г. В. Краевые задачи в четверти пространства для систем не типа Коши — Ковалевской / Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева // Тр. Ин-та математики СО РАН. — 1994. — Т. 26. — С.42–76.

[11] Демиденко, Г. В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск : Науч. кн., 1998. — 438 с.

[12] Джрбашян, М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. — М. : Наука., 1968. — 672 с.

[13] Джрбашян, М. М. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка / М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян // Изв. Акад. наук Армянской ССР. Математика. — 1968. — Т. 3, № 1. — С. 1–28.

[14] Дзекцер, Е С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е. С. Дзекцер // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 202, № 5. — С. 1031–1033.

[15] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[16] Кайкина, Е. И. Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 61–114.

[17] Кайкина, Е. И. Периодическая задача для нелинейного уравнения Соболева / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв // Функц. анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 3. — С. 14–26.

[18] Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М. : Мир, 1972. — 720 с.

[19] Клемент, Ф. Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. — М.: Мир, 1992. — 352 с.

[20] Кожанов, А. И. Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником / А. И. Кожанов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 1. — С. 70–75.

[21] Кожанов, А. И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. — 1994. — Т. 35, № 2. — С. 359–376.

[22] Корпусов, М. О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010. — 240 с.

[23] Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 204 с.

[24] Лосанова, Ф. М. Нелокальная задача для обобщенного уравнения Маккендрика — фон Фёрстера с оператором Капуто / Ф. М. Лосанова, Р. О. Кенетова // Нелинейный мир. — 2018. — Т. 16, № 1. — С. 49–53.

[25] Мажгихова М. Г. Задача Коши для уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна с запаздывающим аргументом / М. Г. Мажгихова // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2023. — Т. 42, № 1. — С. 98–107.

[26] Мажгихова М. Г. Начальная задача для уравнения с переменными коэффициентами с производной Джрбашяна — Нерсесяна и с переменным запаздыванием / М. Г. Мажгихова // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 11–17.

[27] Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит., 2003. — 272 с.

[28] Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. — М. : Высш. шк., 1995. — 301 с.

[29] Осколков, А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.

[30] Плеханова, М. В. Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / М. В. Плеханова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2017. — Т. 2, № 1. — С. 53–65.

[31] Псху, А. В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования / А. В. Псху // Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 1078–1098.

[32] Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М. : Наука., 2005. — 199 с.

[33] Псху, А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка / А. В. Псху // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 351–392.

[34] Рехвиашвили, С. Ш. Дробный осциллятор с экспоненциально-степенной функцией памяти / С. Ш. Рехвиашвили, А. В. Псху // Письма в ЖТФ. — 2022. — Т. 48, вып. 7. — С. 33–35.

[35] Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.

[36] Свешников, А. Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М. : Физматлит., 2007. — 736 с.

[37] Сидоров, Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н. А. Сидоров // Мат. заметки. — 1984. — Т. 25, № 4. — С. 569–578.

[38] Учайкин, В. В. Дробно-дифференциальная феноменология аномальной диффузии космических лучей / В. В. Учайкин // Успехи физ. наук. — 2013. — Т. 183, № 11. — Р. 1175–1223.

[39] Фалалеев, М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности / М. В. Фалалеев // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 10. — С. 68–75.

[40] Фалалеев, М. В. Фундаментальные оператор-функции интегро-дифференциальных операторов в условиях спектральной или полиномиальной ограниченности / М. В. Фалалеев // Уфимск. мат. журн. — 2020. — Т. 12, № 2. — С. 55–70.

[41] Федоров, В. Е. Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. С. 702–712.

[42] Федоров, В. Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 8. — С. 131–160.

[43] Федоров, В. Е. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае / В. Е. Федоров, А. С. Авилович // Сиб. мат. журн. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 461–477.

[44] Федоров, В. Е. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1367–1375.

[45] Федоров, В. Е. Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова, Р. Р. Нажимов // Сиб. мат. журн. — 2018. — Т. 59, № 1. — С. 136–146.

[46] Федоров, В. Е. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля / В. Е. Федоров, М. М. Туров // Сиб. мат. журн. — 2021. — Т. 62, № 5. — С. 1143–1162.

[47] Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. — М : Мир, 1985. — 280 с.

[48] Ahmad, A. On two backward problems with Dzherbashian — Nersesian operator / A. Ahmad, D. Baleanu // AIMS Mathematics. — 2023. — Vol. 8. — P. 887–904.

[49] Arendt, W. Vector-valued Laplace Transforms and cauchy Problems / W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. — Basel : Springer, 2011. — 539 c.

[50] Bajlekova, E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / E. G. Bajlekova. — PhD thesis. — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. — 107 p.

[51] Caputo, M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequancy independent. II / M. Caputo // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1967. — Vol. 13. — P.529–539.

[52] Dunford, N. Linear Operators. Part I: General Theory / N. Dunford, J. T. Schwartz. — New York : John Wiley and Sons, 1988. — 872 p.

[53] Dzhrbashyan, M. M. Fractional derivatives and Cauchy problem for differential equations of fractional order / M. M. Dzhrbashyan, A. B. Nersesyan // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2020. — Vol. 23. — P. 1810–1836.

[54] Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. — New York, etc.: Marcel Dekker Inc., 1999. — 324 p.

[55] Fedorov, V. E. A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations / V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, M. Kostić // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2021. — Vol. 29, iss. 2. — P.173–184.

[56] Fedorov, V. E. Analytic resolving families for equations with distributed Riemann — Liouville derivatives / V. E. Fedorov, W.-S. Du, M. Kostić, A. A. Abdrakhmanova // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, iss. 5. — P. 681.

[57] Fedorov, V. E. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann — Liouville derivative / V. E. Fedorov, R. R. Nazhimov // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2019. — Vol. 22, iss. 2. — P. 271–286.

[58] Fedorov, V. E. Linear equations with distributed Riemann–Liouville derivatives given by Stieltjes integrals and their analytic resolving families of operators / V. E. Fedorov, A. A. Abdrakhmanova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 8. — P.3277–3291.

[59] Goldstein, J. A. Semigroups and second-order differential equations / J. A. Goldstein // Journal of Functional Analysis. — 1969. — Vol. 4, iss. 1. — P. 50–70.

[60] Jaishankar A., McKinley G.H. Power-law rheology in the bulk and at the interface: quasi-properties and fractional constitutive equations // Proceedings of the Royal Society A. — 2013. — Vol. 469, iss. 2149. http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2012.0284

[61] Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam; Boston; Heidelberg : Elsevier Science Publishing, 2006. — 541 p.

[62] Kiryakova, V. Generalized Fractional Calculus and Applications / V. Kiryakova. — Harlow : Longman Scientific & Technical, 1994. — 388 p.

[63] Kostić, M. Abstract Volterra Integro–Dierential Equations / M. Kostić. — Boca Raton: CRC Press, 2015. — 458 p.

[64] Kostin, A. B. Inverse source problem for the abstract fractional differential equation / A. B. Kostin, S. I. Piskarev // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2021. — Vol. 29. — P. 267–281.

[65] Liu, Y. Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem / Y. Liu, W. Rundell, M. Yamamoto // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2016. — Vol. 19, iss. 4. — P. 888–906.

[66] Mainardi, F. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology / F. Mainardi, G. Spada // The European Physical Journal Special Topics. — 2011. — Vol. 193. — P. 133–160.

[67] Mamchuev, M. O. Boundary value problem for a system of partial differential equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan fractional differentiation

operators / M. O. Mamchuev // Bulletin of Karaganda University. Mathematics Series. — 2022. — No. 2. — P. 143–160.

[68] Melnikova, I. V. Abstract Cauchy Problems: Three Approahes / I. V. Melnikova, A. Filinkov. — Boca Raton; London; New York; Washington: Chapman & Hall / CRC, 2001. — 242 p.

[69] Oldham, K. B. The Fractional Calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. — Boston : Academic Press, 1974. — 234 p.

[70] Orlovsky, D. Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space / D. Orlovsky, S. Piskarev // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2022. — Vol. 30. — P. 221–237.

[71] Orlovsky, D. G. Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann — Liouville fractional derivative in a Hilbert space / D. G. Orlovsky // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2015. — Vol. 8, iss. 1. — P. 55–63.

[72] Pazy, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York, Springer Verlag, 1983. — 282 p.

[73] Plekhanova, M. V. Degenerate distributed control systems with fractional time derivative / M. V. Plekhanova // Ural Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 2, iss. 2. — P. 58–71.

[74] Plekhanova, M. V. Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations / M. V. Plekhanova // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 312. — P. 39–46.

[75] Plekhanova, M. V. Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative / M. V. Plekhanova // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2016. — Vol. 40. — P. 41–44.

[76] Plekhanova, M. V. Sobolev type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions / M. V. Plekhanova // AIP Conference Proceedings. — 2016. — Vol. 1759. — P. 020101-1–020101-4.

[77] Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego; Boston : Academic Press, 1999. — 340 p.

[78] Prilepko, A. I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. — New York, Basel : Marcel Dekker Inc., 2000. — 744 p.

[79] Prüss, J. Evolutionary Integral Equations and Applications / J. Prüss. — Basel: Springer, 1993. — 366 p.

[80] Pyatkov, S. G. Inverse problems for some Sobolev-type mathematical models / S. G. Pyatkov, S. N. Shergin // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2016. — Т. 9, № 2. — С. 75–89.

[81] Rossikhin, Y. A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids / Y. A. Rossikhin // Applied Mechanics Reviews. — 2010. — Vol. 63, iss. 1. — P.1–12.

[82] Scott-Blair, G. M. Survey of General and Applied Rheology / G. M. Scott-Blair — Pitman, London, 1949. — 196 p.

[83] Shishkina, E. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering / E. Shishkina, S. Sitnik. — Elsevier, Academic Press, 2020. — 592 p.

[84] Showalter, R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type / R. E. Showalter // SIAM Journal of Mathematical Analysis. — 1975. — Vol. 6, No. 1. — P. 25–42.

[85] Sidorov, N. Lyapunov — Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 2002. — 568 p.

[86] Sitnik, S. M. On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral / S. M. Sitnik, V. E. Fedorov, N. V. Filin, V. A. Polunin // Mathematics. — 2022. — Vol.10. — P. 2979.

[87] Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht; Boston : VSP. — 216 p.

[88] Tarasov, V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V. E. Tarasov. — New York : Springer, 2011. — 450 p.

[89] Triebel, H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators / H. Triebel. — Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978. — 528 p.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в Перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

[90] Волкова, А. Р. Начальные задачи для уравнений с композицией дробных производных / А. Р. Волкова, Е. М. Ижбердеева, В. Е. Федоров // Челяб. физ.-матем. журн. — 2021. — Т. 6, № 3. — С. 269–277.

[91] Ижбердеева, Е. М. Композиции дробных производных как производная Джрбашяна — Нерсесяна / Е. М. Ижбердеева // Челяб. физ.-матем. журн. — 2024. — Т. 9, № 1. — С. 35–49.

[92] Fedorov, V. E. Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan fractional derivative / V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Fractal and Fractional. — 2022. — Vol. 6, iss. 10. — P. 541.

[93] Fedorov, V. E. Initial value problems of linear equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan derivative in Banach spaces / V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Symmetry. — 2021. — Vol. 13, iss. 6. — P. 1058.

[94] Plekhanova, M. V. Degenerate equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan derivative in the sectorial case / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, No. 2. — P. 634–643.

[95] Plekhanova, M. V. Degenerate quasilinear equations with Dzhrbashyan — Nersesyan derivatives and applications / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2023. — Vol. 423. — P. 115–127.

[96] Plekhanova, M. V. Degenerate quasilinear equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan derivative / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 269, No. 2. — P. 217–228.

[97] Plekhanova, M. V. Local unique solvability of a quasilinear equation with the Dzhrbashyan — Nersesyan derivatives / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, iss. 6. — P. 1141–1150.

Публикации по теме диссертации, примыкающие к основным

[98] Ижбердеева, Е. М. Обратная задача для системы уравнений в частных производных с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна /

Е. М. Ижбердеева, М. В. Плеханова // Вещественный, комплексный и функциональный анализ и связанные темы: тез. докл. Междунар. научн. конф., 21–23 июня 2022, Курск. — Курск : Изд-во КГУ, 2022. — С. 8–9.

[99] Ижбердеева, Е. М. Разрешимость начальной задачи в банаховом пространстве с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна / Е. М. Ижбердеева, М. В. Плеханова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., 15–19 марта 2021, оз. Банное, Башкортостан. — Уфа : Аэтерна, 2021. — С. 38–39.

[100] Ижбердеева, Е. М. Разрешимость начальной задачи для линейного уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна / Е. М. Ижбердеева, М. В. Плеханова // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. Междунар. конф., 14–18 марта 2022, оз. Банное, Башкортостан. — Уфа : Аэтерна, 2022. — С. 37–38.

[101] Ижбердеева, Е. М. Разрешимость нелинейного вырожденного уравнения с условием на образ нелинейного оператора / Е. М. Ижбердеева, М. В. Плеханова, Е. А. Судгаймер // Междунар. конф. по дифференц. уравнениям и динамическим системам: тез. докл. Суздаль, 30 июня — 5 июля, 2022. — Владимир : Аркаим, 2022. — С. 128–129.

[102] Один класс полулинейных уравнений распределённого порядка в банаховых пространствах / В. Е. Федоров, Т. Д. Фуонг, Б. Т. Киен, К. В. Бойко, Е. М. Ижбердеева // Челяб. физ.-матем. журн. — 2020. — Т. 5, № 3. — С. 342–351.

[103] Плеханова, М. В. Вырожденное линейное неоднородное уравнение с производной Джрбашяна — Нерсесяна в секториальном случае / М. В. Плеханова, Е. М. Ижбердеева // Нелокальные краевые задачи и родственные

проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы VII Междунар. науч. конф., 4–8 декабря 2023, Нальчик. — Нальчик : ИПМА КБНЦ РАН, 2023. — С. 227-229.

[104] Плеханова, М. В. Обратная задача для вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка / М. В. Плеханова, Е. М. Ижбердеева // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы VI Междунар. науч. конф., 5–9 декабря 2021, Нальчик. — Нальчик : ИПМА КБНЦ РАН, 2021. — С. 159.

[105] Плеханова, М. В. Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна / М. В. Плеханова, Е. М. Ижбердеева // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021): материалы 3-й Междунар. конф., 13–17 сентября 2021, Иркутск. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 2021. — С. 52–53.

[106] Плеханова, М. В. О корректности обратной задачи для вырожденного эволюционного уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна / М. В. Плеханова, Е. М. Ижбердеева // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее приложения. Темат. обзоры. — 2022. — Т. 213. — С. 80–88.

[107] Плеханова, М. В. О разрешимости одной дробной модели динамики вязкоупругой жидкости с производной Джрбашяна — Нерсесяна / М. В. Плеханова, Е. М. Ижбердеева // Неклассич. уравнения мат. физики и их приложения: тез. докл. Междунар. науч. конф., 6–8 октября 2022, Ташкент, Узбекистан. — Ташкент : Университет, 2022. — С. 161–162.

[108] Плеханова, М. В. Разрешимость нелинейного вырожденного уравнения с производной Джрбашяна — Нерсесяна / М. В. Плеханова, Е. М. Ижбердеева // Уфимская осенняя мат. школа: материалы Междунар. науч.

конф., 28 сентября — 1 октября 2022, Уфа. — Уфа : РИЦ БашГУ, 2022. — С. 228–229.

[109] Плеханова, М. В. k-Разрешающие семейства операторов для уравнений с производной Джрбашяна — Нерсесяна / М. В. Плеханова, Е. М. Ижбердеева // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2022): материалы 4-й Междунар. конф., 19–22 сентября 2022, Иркутск. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 2022. — С. 38–40.

[110] Plekhanova, M. V. Solvability of a linear degenerate equation with the Dzhrbashyan — Nersesyan derivative / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // 9-я междунар. конф. по дифференц. и функционал.-дифференц. уравнениям. Москва, Россия, 28 июня — 5 июля 2022 г. — Москва : РУДН, 2022. — P. 92–93.

[111] Plekhanova, M. V. Solvability of the nonlinear equation with the Dzhrbashyan — Nersesyan fractional derivatives / M. V. Plekhanova, E. M. Izhberdeeva // O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's: Book of abstracts. St. Petersburg, July 16–22, 2022. — St. Petersburg, 2022. — P. 81.